12j Symbol 과 그 特性

李 相 · 法

The 12*j* Symbol and its Properties

Lee, Sang Bub

Summary

Some mathematical properties of the 12*j* symbol

$$\begin{Bmatrix} j_1 j_2 j_a j_e \\ j_3 j_4 j_b j_f \\ j_c j_d j_s j \end{Bmatrix} = \frac{\langle \{j_s, (j_1 j_2)j_a\} j_e, (j_3 j_4)j_b, jm | \{j_s, (j_1 j_3)j_c\} j_f, (j_2 j_4)j_d, jm\rangle}{[(2j_a+1)(2j_b+1)(2j_c+1)(2j_d+1)(2j_e+1)(2j_f+1)]^{1/2}}$$

are given. It has 16 symmetry relations. It is orthogonal and is transformed to the Wigner 9*j* and 6*j* symbols according to several recursion relations.

In special cases with one argument zero or ½, It is easily reduced to the Wigner 9*j* symbol or 6*j* symbols and we can also obtain its value by substituting the values of the 6*j* symbols which were already formulated for numerical values of *j*s.

Ⅰ. 序　　論

原子 spectrum이나 原子核 構造에 關한 理論에서 中要한 槪念의 하나인 벡터結合에 대한 硏究는 1930年代 이후 Wigner(1951), Racah(1942,1943) 등의 여러 學者들에 의해 이루어져 왔다.

固有벡터가 알려진 두 角運動量 벡터의 結合에서 우리가 알아야 할 것은 結合後의 새로운 狀態의 固有벡터이다. 두 固有벡터가 $|j_1m_1\rangle$과 $|j_2m_2\rangle$로 주어질 때 새로운 固有벡터는 $|j_1j_2jm\rangle$이며 각 固有벡터의 product function인

$$|j_1j_2jm\rangle = \sum_{m1,m2} |j_1m_1j_2m_2\rangle\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\rangle$$

으로 주어진다. 여기서 $\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\rangle$은 벡터 結合係數이며 이는 Wigner 3*j* symbol인

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j1-j2-m3}}{(2j_3+1)^{\frac{1}{2}}}\langle j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm\rangle$$

로 表現된다(Wigner, 1951). 이와 有似한 表現은 Racah (1942) Schwinger (1952)에 의해서도 얻어졌다.

一般的으로 角運動量의 結合은 둘 또는 그 이상의 角運動量으로 이루어지며 벡터 結合係數 또한 Wigner 3*j* symbol 뿐만 아니라 6*j* 9*j* 등의 記号로 表현될 수 있으며 이들의 數學的 特性을 利用하여 그 값을 쉽게 求할 수 있다.

本 論文에서는 相互 混合配列을 갖는 가벼운 原子核에 대한 核構造 計算에 必要한, 다섯개의 角運動量 結合에서 形成되는 벡터 結合係數를 12*j* symbol로 表現하고 이의 몇가지 數學的 特性을 알아보고 이를 Wigner 9*j* 및 6*j*, 3*j* symbol로 變換됨을 보이고자 한다.

다섯개의 角運動量 結合時 最終 固有벡터는 $|\{j_5,(j_1j_2)ja\}je,(j_3j_4)j_b,jm\rangle$ 와 $|\{j_5,(j_1j_3)j_c\}j_f,(j_2j_4)j_d,jm\rangle$ 이고 두 状態에 대한 벡터 結合 係數는 Jahn과 Hope에 의해 $12j$ symbol로 定義되었다 (John and Hope, 1954).

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & ja & je \\ j_3 & j_4 & jb & j_5 \\ jc & jd & j_5 & j \end{Bmatrix} = [ja, jb, jc, jd, je, j_f]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \langle\{j_5,(j_1j_2)ja\}je,(j_3j_4)j_b,j|$$
$$|\{j_5,(j_1j_3)\ jc\}j_f,(j_2j_4)j_d,j\rangle \qquad (\mathrm{I}-1)$$

여기서 $[ja, jb, jc, \cdots\cdots] = (2ja+1)(2jb+1)(2jc+1)\cdots\cdots$ 이다.

II. 12j Symbol의 代稱性

$12j$ symbol을 나타내는 contraction diagram은 Fig.1(i)와 같다. 그림에서 편이상 角運動量 固有値임을 表現하는 기호 j를 省略하므로서 $j_1=1$, $j_2=2$, $ja=a$ 등의 약호를 使用하였고, 이하 이와 동일한 표기를 쓰기로 한다.

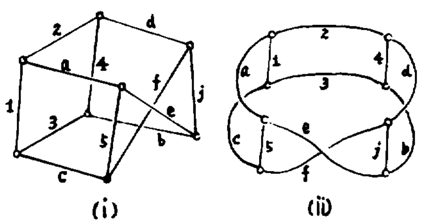

Fig.1. Contraction diagrams for $12j$ symbol

Fig.1(i)를 여덟개의 꼭지점에 대한 三角条件 (12a),(34b),(13c),(24d),(a5e),(c5f),(bej),(dfj)을 滿足하면서 Möbius strip 형으로 変形하면 Fig.1(ii)와 같이 되고 그림의 각 j값을 展開하므로서 12j symbol은 다음으로 代応시킬 수 있다. (Ord-Smith, 1954)

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f \\ c & d & 5 & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} & e & a & 2 & d \\ 5 & 1 & 4 & j & \\ & f & c & 3 & b \end{Bmatrix}$$

Möbius strip의 代称性에 따라 j값의 配列을 바꾸므로서 16-代称関係式을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f \\ c & d & 5 & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & c & f \\ 2 & 4 & d & e \\ a & b & 5 & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & c & 3 & b \\ a & 5 & e & d \\ 2 & f & 4 & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & a & 2 & d \\ c & 5 & f & b \\ 3 & e & 4 & j \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} 4 & 2 & d & f \\ 3 & 1 & c & e \\ b & a & j & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & 3 & b & e \\ 2 & 1 & a & f \\ d & c & j & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & b & 3 & c \\ d & j & f & a \\ 2 & e & 1 & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & d & 2 & a \\ b & j & e & c \\ 3 & f & 1 & 5 \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} 5 & a & e & b \\ c & 1 & 3 & d \\ f & 2 & j & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & c & f & d \\ a & 1 & 2 & b \\ e & 3 & j & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & e & a & 2 \\ f & j & d & 3 \\ c & b & 1 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & f & c & 3 \\ e & j & b & 2 \\ a & d & 1 & 4 \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} j & b & e & a \\ d & 4 & 2 & c \\ f & 3 & 5 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j & d & f & c \\ b & 4 & 3 & a \\ e & 2 & 5 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j & e & b & 3 \\ f & 5 & c & 2 \\ d & a & 4 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j & f & d & 2 \\ e & 5 & a & 3 \\ b & c & 4 & 1 \end{Bmatrix}$$

위식은 벡터 結合係数가 実数라는 事実과

$$|j_1j_2j_3m\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j_3}|j_2j_1j_3m\rangle$$

의 関係를 利用하여 직접 얻어낼 수도 있다.

III. 12j Symbol의 直交性

$12j$ symbol의 直交性은 다음의 関係에 의해 주어진다.

$$\sum_{e,b}[a,b,c,d,e,f]$$
$$\times \begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f \\ c & d & 5 & j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f' \\ c & d' & 5 & j \end{Bmatrix} = \delta_{ff'}\delta_{dd'} \qquad (\mathrm{III}-1)$$

$\delta_{ff'}\delta_{dd'}=1$일때 即 $j_{f'}=j_f, j_d=j_{d'}$이면 式(III-1)은 Clebsch-Gordon Rule $\sum_{e,b}|\langle e,b,j|f,d,j\rangle|^2=1$을 滿足함을 쉽게 알 수 있다. 또한

$$[a,b,c,d,e,f]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f \\ c & d & 5 & j \end{Bmatrix}$$

는 直交行列을 形成한다.

벡터 結合係数의 変換関係式

$$\sum_{f,d}\langle\{5,(12)a\}e,(34)b,j|\{5,(13)c\}f,(24)d,j\rangle$$
$$\times \langle\{5,(13)c\}f,(24)d,j|\{5,(14)x\}t,(23)y,j\rangle$$
$$= \langle\{5,(12)a\}e,(34)b,j|\{5,(14)x\}t,(23)y,j\rangle$$

으로부터 式(III-2)도 얻어진다.

$$\sum_{f,d}(-1)^{2j_2+jy-jb+jd}\times[f,d]$$

$$\times\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\3&4&b&f\\c&d&5&j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&3&c&f\\4&2&d&t\\x&y&5&j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\4&3&b&t\\x&y&5&j\end{Bmatrix}\quad(\text{III}-2)$$

$(j_1j_4)\to jx,(j_2j_3)\to jy,(j_5jx)\to jt$ 의 結合이 包含되었다.

IV. 12j Symbol의 變換

다섯개의 角運動量에 대한 벡터 結合係數는 다음과 같이 變換된다.

$$\langle\{5,(12)a\}e,(34)b,j|\{5,(13)c\}f,(24)d,j\rangle$$
$$=\sum_{\kappa}\langle(12)a,(34)b,\kappa|(13)c,(24)d,\kappa\rangle$$
$$\times\langle(5a)e,b,j|5,(ab)\kappa,j\rangle\langle(5c)f,d,j|5,(cd)\kappa,j\rangle$$

b

또한

$$\langle(12)a,(34)b,\kappa|(13)c,(24)d,\kappa\rangle$$
$$=\sum_{\tau}\langle(12)a,b,\kappa|1,(2b)\tau,\kappa\rangle\langle 2.(34)b,\tau|3,(24)d,\tau\rangle$$
$$\times\langle 1,(3d)\tau,\kappa|(13)c,d,\kappa\rangle$$

위의 關係로 부터 다음을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\3&4&b&f\\c&d&5&j\end{Bmatrix}=(-1)^{a+b+c+d}\sum_{\kappa}(-1)^{2\kappa}[\kappa]$$

$$\times\begin{Bmatrix}1&2&a\\3&4&b\\c&d&\kappa\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&a&e\\b&j&\kappa\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&c&f\\d&j&\kappa\end{Bmatrix}\qquad(\text{IV}-1)$$

$$=(-1)^{a+b+c+d}\sum_{\kappa\tau}(-1)^{2(\kappa+\tau)}[\kappa,\tau]\begin{Bmatrix}1&2&a\\b&\kappa&\tau\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}3&4&b\\2&\tau&d\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}c&d&\kappa\\\tau&1&3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&a&e\\b&j&\kappa\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&c&f\\d&j&\kappa\end{Bmatrix}\qquad(\text{IV}-2)$$

6j와 9j symbol에 대한 定義

$$\begin{Bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{Bmatrix}=[3,6]^{\frac{1}{2}}(-1)^{1+2+4+5}\langle(12)3,4,5|1,(24)6,5\rangle$$

$$\begin{Bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{Bmatrix}=[3,6,7,8]^{\frac{1}{2}}\langle(12)3,(45)6,9|(14)7,(25)8,9\rangle$$

를 使用하였다. 6j symbol에 대한 argument 는 $(-1)^{1+2+4+5}=(-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5}$ 임을 意味한다.

式(IV-1)에 6j symbol의 直交性

$$\sum_{j}[j,j'']\begin{Bmatrix}1&2&j'\\3&4&j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&2&j''\\3&4&j\end{Bmatrix}=\delta_{j'j''}$$

을 利用하면 다음의 두 關係式도 얻어진다.

$$\sum_{e}[e]\begin{Bmatrix}5&j&\kappa\\b&a&e\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\3&4&b&f\\c&d&5&j\end{Bmatrix}$$
$$=(-1)^{a+b+c+d+2\kappa}\begin{Bmatrix}1&2&a\\3&4&b\\c&d&\kappa\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&c&f\\d&j&\kappa\end{Bmatrix}\qquad(\text{IV}-3)$$

$$\sum_{f}[f]\begin{Bmatrix}5&j&\kappa\\d&c&f\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\3&4&b&f\\c&d&5&j\end{Bmatrix}$$
$$=(-1)^{a+b+c+d+2\kappa}\begin{Bmatrix}1&2&a\\2&4&b\\c&d&\kappa\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&a&e\\b&j&\kappa\end{Bmatrix}\qquad(\text{IV}-4)$$

9j symbol과 6j symbol은 3j symbol로의 變換이 容易하므로 식(IV-1)-(IV-4)를 利用하므로서 12j symbol의 값은 쉽게 求해진다.

V. 12j Symbol의 計算

特殊한 몇가지 경우 12j symbol은 9j나 6j symbol로 簡單히 表現되어 그 값이 쉽게 얻어질 수 있다.

〈1〉. 12 j값중 하나가 零일때

$j_5=0$이면 식(I-1)에서 12j symbol은 9j symbol과 같다. 卽

$$\begin{Bmatrix}1&2&a&e\\3&4&b&c\\c&d&0&j\end{Bmatrix}=[a,c]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix}1&2&a\\3&4&b\\c&d&j\end{Bmatrix}$$

이다. $j_1\ j_4\ j$중 하나가 零일때도 식(II-1)의 代称關係式에 의해 9j symbol로 된다.

$$\begin{Bmatrix}0&2&2&e\\3&4&b&f\\3&d&5&j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4&2&d&f\\3&0&3&e\\b&2&j&5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}j&e&b&3\\f&5&3&2\\d&2&4&0\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}5&e&2&2\\f&j&d&3\\3&b&0&4\end{Bmatrix}=[2,3]^{-\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix}5&e&2\\f&j&d\\3&b&4\end{Bmatrix}$$

$j_1\ j_4\ j_5\ j$를 제외한 나머지 j중 하나가 零일때는 식(II-1)과 (IV-1)을 쓰면

$$\begin{Bmatrix}1&1&0&5\\3&4&b&f\\c&d&5&j\end{Bmatrix}=(-1)^{3b+c+d}[b]\begin{Bmatrix}1&1&0\\3&4&b\\c&d&b\end{Bmatrix}$$
$$\times\begin{Bmatrix}5&0&5\\b&j&b\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}5&c&f\\d&j&b\end{Bmatrix}$$
$$=(-1)^{1+4+5+b+2c+d+j}[1,5]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix}d&c&b\\3&4&1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}d&c&b\\5&j&f\end{Bmatrix}$$

로 된다.

〈2〉. 12 j값중 하나가 $\frac{1}{2}$일때

式(IV-1) 과 (IV-2)를 利用하면

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 & j_2+\frac{1}{2} & e \\ j_3 & j_4 & b & f \\ j_3+\frac{1}{2} & d & j_5 & j \end{Bmatrix} = (-1)^{1+j_2+j_3+b+d}$$

$$\times \sum_{\kappa} \sum_{\tau=\kappa-\frac{1}{2}}^{\kappa+\frac{1}{2}} (-1)^{2(\kappa+\tau)} [\kappa,\tau] \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & j_2 & j_2+\frac{1}{2} \\ b & \kappa & \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & b \\ j_2 & \tau & d \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_3+\frac{1}{2} & d & \kappa \\ \tau & \frac{1}{2} & j_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_5 & j_2+\frac{1}{2} & e \\ b & j & \kappa \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_5 & j_3+\frac{1}{2} & f \\ d & j & \kappa \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{2(j_2+j_3+j_b+j_d)+1}}{[j_2, j_2+1, j_3, j_3+1]^{\frac{1}{2}}} \sum_{\kappa} (-1)^{2\kappa} [\kappa]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_5 & j_2+\frac{1}{2} & e \\ b & j & \kappa \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_5 & j_3+\frac{1}{2} & f \\ d & j & \kappa \end{Bmatrix}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} (-j_2+b+\kappa+\frac{1}{2})(j_2+b-\kappa+\frac{1}{2})(j_3+d-\kappa+\frac{1}{2}) \\ \times (-j_3+d+\kappa+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & b \\ j_2 & \kappa-\frac{1}{2} & d \end{Bmatrix} \\ +(j_2+b+\kappa+\frac{3}{2})(j_2-b+\kappa+\frac{1}{2})(j_3+d+\kappa+\frac{3}{2}) \\ \times (j_3-d+\kappa+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & b \\ j_2 & \kappa-\frac{1}{2} & d \end{Bmatrix} \end{array} \right\}$$

로 되고, κ값이 決定되면 特定한 j에 대해 計算된 6j symbol의 公式(Edmond, 1957)을 代入하여 12 j symbol의 값을 求할 수 있다. 이때 κ는 $(j_2+\frac{1}{2})+b$ 또는 $(j_3+\frac{1}{2})+d$의 결합에 의해 決定된다.

VI. 摘 要

以上에서 12j symbol의 몇가지 特性을 考察해 보았다. 12j symbol은 16 代称関係式과 직교관계식 및 점화관계식에 의해 6j symbol로의 변환이 可能하여 그 값 또한 이미 알려진 Wigner 6j 값에 의해 쉽게 얻어지고 두 狀態사이의 관계는

$$|e,b,j,m\rangle = \sum_{all\ m} [a,b,c,d,e,f]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1 & 2 & a & e \\ 3 & 4 & b & f \\ c & d & 5 & j \end{Bmatrix} |f,d,j,m\rangle$$

로 된다. 이러한 結果를 이용하므로서 실제 複素 spectrum 理論이나 核構造 계산에 수반되는 벡터 결합계수는 쉽게 구해질 것이 期待된다.

벡터 결합계수는 한 결합모형에서 다른 모형으로의 젼이에 대한 직접적인 응용보다는 벡터결합된 상태들 사이에서 주어지는 Tensor 積의 행렬요소를 계산하는 데 더 긴요히 應用된다.

引 用 文 獻

Edmond, A. R. 1957. Angular momentum in quantum mechanics. Princeton Univ. Press 107, 125~132.

Jahn, H. A. and Hope, J. 1954. Phys. Rev., 93, 318.

Ord-Smith. R. J. 1954. Phys. Rev., 94, 1227.

Racah, G. 1942. Phys. Rev., 62, 438.

Racah, G. 1943. Phys. Rev., 63, 367.

Schwinger, J. 1952. On angular momentum. U. S. Atomic Energy Commission, NYO-3071.

Wigner, E. P. 1951. On matrices which reduce Kronecker products of representations of S.R. groups. (unpublished)