中等數學敎育에서의 實驗的 指導方法에 관한 研究*

-確率 및 統計敎育을 中心으로-

金 益 贊

On Practical Teaching Methods in Secondary Mathematics Education

Kim Ik-chan

Summary

Probability should be taught for its practical uses in everyday life. But most textbook problems about probability and statistics in secondary education are concocted for the sole purpose of providing drill. The best means to develop the intuitive background of probability and to learn to think in statistical terms is Monte Carlo method using random devices with geometry as a way of thinking.

I suggest the experimental methods from probability assignment to Markov Chain and Reliability theory with familiarizing the student and applying probability.

序　論

산업사회의 규모가 커지고 多樣化되면서 不確實性에 대한 科學的 豫測에의 중요성과 依存度가 나날이 증대되고 있다. 최근에는 일기예보에도 確率이 적용되고 있는 중이다. 確率과 統計는 이제 수학의 한 범주로서 知的인 開發만이 목적이 아니라, 생활속의 한 方便으로서 적절히 활용할 수 있도록 교육되어야 한다는 점을 시사한다. 그러나 현재 中等數學敎育 분야에서 차지하고 있는 確率과 統計敎育은 中學校 23개 단원중 3개 단원, 高等學校가 약 17개 단원에서 2개 단원이며, 분량면에서 볼 때 중학교는 전 數學 학습량의 9%, 高等學校는 약 11%에 머물고 있다. 그나마 활용을 위한 槪念의 파악과 실제적 응용보다는 人爲的 지식의 開發을 위한 例題 및 문제들로 편재되어 있음을 지적할 수 있다.

---

*이 논문은 1987년도 제6차 IBRD 교육사업중 사범대 과학교육계 교수 해외연수계획에 의하여 연구되었음.

師範大學 助敎授

본 硏究에서는 이러한 問題點을 감안하여 確率敎育의 목표를 再檢討하고, 학생들로 하여금 스스로 確率模型을 만들고, 確率을 生活化하는 습관을 키워주며, 현실에 적용하고 활용할 수 있는 實驗的인 指導方法과 적절한 例題들을 모색하여 보려는 데 그 뜻이 있다.

確率指導의 目標 및 內容

1. 指導目標

確率을 指導하는 理由를 다음의 세가지로 생각할 수 있다.

첫째 確率의 指導는 학생들의 精神的인, 그리고 知的인 發達에 중요하기 때문이다. 現實世界를 이해함에는 確率槪念을 먼저 이해함이 先決된다. 確率槪念은 우리 주위의 世界를 科學的으로 洞察하도록 만드는 要體라고 할 수 있다. 數學敎育은 학생들의 精神的인 發展에 많은 도움을 주지만, 그러나 특히 確率論의 硏究는 우리가 실재 경험상, 거의 모든 현상에서 나타나는 不確實性을 직면함에 있어 학생들로 하여금 명확한 論理的 思考를 하도록 가르친다. 특히 確率硏究는 학생들의 바람직한 人間性을 형성한다는 측면에서도 그 효과를 기대할 수 있다. 학생이 자신이 세운 어떤 目標에 失敗했을 때 만일 그 학생의 失敗가 단지 우연성에 기인한 사실임을 이해한다면 자신의 努力을 포기하지 않고 오히려 재도전하는 용기를 북돋울 수 있다. 즉, 우연성의 개념에 대한 이해는 자신의 失敗를 타인에게 돌리는 낡은 思考方式을 근절하고 自我 發展을 이루는, 좋은 人間性으로 改善시키는 효과를 가져온다고 할 수 있다.

둘째로 確率은 日常生活에서의 活用과 우리가 당면하는 여러 분야에서의 應用을 위해서 가르쳐져야 한다. 우리들은 누구나 일상생활에 있어서 豫測하지 못하는 위험 부담을 가지고 있는 바, 確率論은 그러한 예기치 못하는 危險과 재해에서 우리가 취할 수 있는 合理的인 行爲를 가르치고 있다. 보험의 적절한 이용은 우리가 확률을 이용하는 좋은 例이다. 즉, 우리 일상생활은 우연의 法則에 대한 지식을 요구하고 있을 뿐만 아니라 특히 과학, 기술, 경제분야 등 專門的인 분야는 물론, 전공과 관련없는 분야, 이를테면 유전공학, 방사능 에너지, 전자 에너지와 같은 첨단 분야에 대하여도 그 기본적 이해를 위해서 確率論의 지식은 보편화되고 상식화되고 있다고 본다.

마지막으로 確率은 數學敎育을 위하여 필요불가결하기 때문에 지도되어야 한다. 確率論의 기초에 익숙하면 實世界와 數學의 관계를 이해하고 실제로 數學模型의 槪念을 파악하는 데 도움을 준다. 만일 確率이 數學敎育에서 제거된다면 현실로서의 數學은 어떤 것이며 또 數學이 그들을 위해서 할 수 있는 것에 관한 적절한 모양을 그려낼 수가 없다. 따라서 數學敎育에 確率敎育을 포함하는 것이 數學敎育에서의 現代的 경향과 일치하며 양쪽에 동등한 이익을 가져오게 된다. 例를 들어 학생들이 集合論과 Boolean代數의 기초에 익숙해 있지 않을 때, 數學敎育은 그것을 보다 용이하게 할 것이며 반대로 確率공부는 그러한 槪念을 사용하게 되는 아주 有用한 경우가 되어 그 이해를 서로 돕게 만들 수 있게 되기 때문이다.

2. 指導 內容

세계 주요 국가의 確率 統計敎育은 교육제도와 학교의 형태, 학년간의 복잡성으로 인하여 다양한 형태로 구분되고 있으나 그 敎育 內容은 대체적으로 통일화되고 있다. 다음은 가장 一般的이라고 생각되는 모형으로서, 캐나다의 British Columbia州 12학년, 確率과 統計敎育에 대한 개괄적인 지도 내용이다. 同學年은 우리의 고등학교 2~3학년에 해당한다.

① 집합산

$A \cup B$, $A \cap B$, A^c,

집합의 분배법칙

n(A) - 집합의 원소의 수

② 순열과 조합

계승의 개념, 이항정리

경우의 수 문제 - 순열, 조합

③ 기초 확률

표본공간, 간단한 例

조건부 확률, 독립사건, 배반사건 반복시행

(Bernoulli 시행)
우연성의 게임, 기대값
수학적 확률과 통계적 확률

④ 통계
그래프에 의한 자료의 표시
평균, 중앙값, 최빈수 - 그 계산과 활용(그룹화 자료와 비그룹화 자료)
표준편차, '커브의 등급'
표본론 - 임의 표본, 표본의 분산, 소표본, 대표본
상관관계, 가설검정

⑤ 자유선택 항목
논리 — $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \rightarrow b$, $\sim a$, 진리표, 역, 대우, 명제산, 추론
지수 및 log함수와 그래프
2항분포와 정규분포

위의 내용들은 우리 中等敎育에서의 確率과 統計 교육과정과 대부분 一致하고 있다. 그러나 캐나다는 상기 내용의 교육에 100시간 시수를 할당하고 있는데 반하여, 우리의 지도 예정시수는 48시간으로, 50% 이하 수준의 수업량만을 할당하고 있음은, 그 지도 방법과 병행하여 적절히 上向 조절되어야 할 과제라고 본다. 한편 교사가 좀 더 효율적으로 지도하기 위해서는 몇가지 論題들이 지도 내용에 포함되어야 할 것이다.

確率指導는 統計的 規則性의 概念에 친근한 학생을 만드는 것으로 出發하여야 한다는 것이 바람직스럽다. 왜냐하면 統計的 規則性의 提示가 바로 確率論의 背景을 의미하기 때문이다. 이 概念은 잘 선택된 例와, 實驗을 통해서 설명되어야 할 것이다. 다음으로 確率의 數學的 理論이, 이것을 설명하고 이해시키는데 도움을 주어야 한다는 사실을 학생들에게 분명히 한다. 그런 연후 必要한 水準과 量의 確率理論을 지도한다. 다음 단계는 여러 분야에서 나타나는 우연현상에 대한 설명이나 豫見에 確率論을 적용하는 것이다. 추가하여 確率論의 歷史的 사실들을 그 개념과 연관지어 討論한다면 학생들의 確率的 思考方法의 지도에 큰 효과를 거둘 것이다.

指導方法

幾何는 사고하는 한 方法이다. 기하에서 오는 직관은 우리의 思考를 인도하여 새로운 결과를 제안하도록 한다. 즉, 기하는 새로운 思考의 풍부한 근원으로서 모든 수학적 훈련이 기하에서 싹터 왔다고 볼 수 있다. 確率敎育도 幾何와 유사한 그림의 형태를 사용함으로써 그 이해를 증진시키고 중요한 아이디어를 創出할 수 있다고 본다.

또 하나의 思考方法이 統計的 思考이다. 즉, 어떤 實驗의 1回 시행의 결과는 豫測할 수 없음에도 불구하고 많은 횟수의 시행이 반복될 때에 일어날 수 있는 그 특수한 일에 대한 平均 진술이 가능하다. 그 특수한 경우의 比率 - 確率의 實驗的 背景 - 은 무엇인가? 不幸히도 우리는 先驗的으로 幾何的인 직관은 가졌으나 確率的 直觀은 가지지 못하였다. 따라서 중요한 것은 確率에 대한 직관적 배경의 개발이다.

우리는 數學과 物理的 世界를 이해하고 이들 사이에 연결 고리를 알게 될 때에 비로소 物理的 世界에 數學을 應用할 수 있다. 確率과 現實 世界사이에는 많은 관련이 있으며, 중요한 것은 일상생활에서 접근할 수 있는 實世界의 분야들을 확률과 연결시켜 주는 일이다. 즉 확률에 대한 실제적 느낌을 개발해 내도록 하는 것이 바로 核心이다. 학생들은 전형적인 例를 통해서 나타나는 수 많은 任意현상에 익숙해지도록 한다. 이러한 직관적 實例에 의해 학생들의 思考를 변경시켜 나간다. 물론 이러한 思考의 변경은 학생들이 어리고, 사고하는 습관이 고정되지 않았을 때 시작하면 가장 효과적으로 이루어 질 것이다. 즉, 그의 사고가 자연스럽게 確率的 사고의 습관으로 형성되어 질 때까지, 實例의 의한 確率的 입장은 계속적으로 다루어져야 한다.

1. 任意 數字와 Monte Carlo 方法

1) 任意 數學(Random Digit)

학생들에게 任意 숫자를 만들어 내는 회전판을 준

비하도록 한다.

(1) 같은 크기로 나누어진 Fig.(1-1) 과 같이 번호 붙은 회전판이 있다. 그것을 계속적으로 돌리면 一連의 긴 10進數의 例을 만들 것이다. 각 학생들에게 그러한 수 100개로 된 리스트를 만들어 보도록 한다.

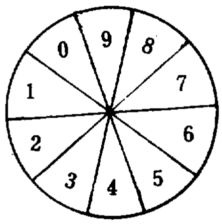

Fig. 1-1

(2) 0과 1 두 숫자만 있는 균형잡힌 동전이 Fig.(1-2) 같이 두개 있다. 이 동전을 여러번 돌리면 임의의 2진수의 例를 만든다. 각 학생들에게 100개로 된 리스트를 만들도록 한다.

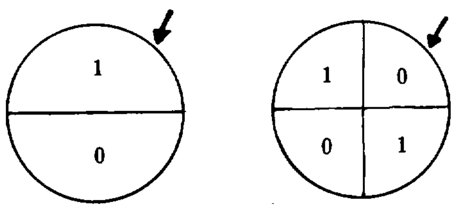

Fig. 1-2

(3) Fig.(1-3) 과 같은 주사위가 있다. 이것은 밑이 6인 임의의 6진수를 만들어낸다. 학생들에게 500개의 수로 된 블럭을 만들도록 한다.

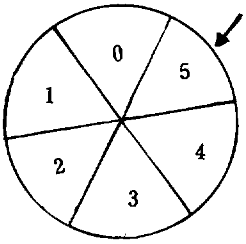

Fig. 1-3

(4) 50명이 있는 학급에서 다음과 같은 숫자들을 만들도록 한다. 그러면 단 시간에도 상세하게 조사해 낼 수가 있다. 또는 팀을 짜서 조사시킨다.

① 같은 빈도로 나타나는 10진수, 두쌍의 수, 세쌍의 수들 모두를 조사해 보도록 한다.

② 조사된 모든 수의 블럭에서 동일한 빈도가 나타난다는 것을 2진수인 경우에만 체크해 보도록 한다.

③ Fig.(1-1) 에서 얻어지는 10진수에서 짝수는 0, 홀수는 1로 다시 정리시킨다. 그러면 Fig.(1-2) 에서 동전을 던지는 결과와 같다. 또 Fig.(1-1) 에서 6,7,8, 9가 나오면 버리기로 하면, 그것은 Fig.(1-3) 의 주사위와 같은 형태가 된다.

④ 구해낸 모든 블럭내의 숫자의 길이가 같고 또 모든 수가 같은 빈도로 나왔다고 하자. 다음과 같은 결론을 끌어내어 보도록 한다.

·길이 2인 블럭중 37보다 작은 것의 빈도는 $\frac{37}{100}$ (100개에서 37개)

·길이 3인 블럭중 144보다 작은 것의 빈도는 $\frac{144}{1000}$ (1000개에서 144개)

⑤ 잇달아 나오는 수치들을 관찰해 보자. 이러한 수치들은 다음에 나올 수치를 豫見하는 데는 아무런 도움이 안 된다는 것을 인식시킨다.

(5) 다음은 2진수 0과 1로 된 회전판이다. 이것을 불균형 동전이라고 하자. 균형잡힌 동전을 불균형 동전형태로 변화시킬 수 있다. 즉, 두 자리 길이의 블럭을 택한 다음 00→0, 01→1, 10→1, 11→1로 대응시키면 된다. 균형잡힌 동전 대신 주사위나 또는 균형잡힌 적당한 다른 10진수의 모형에 의해서 변화시킬 수도 있다. 한편 이러한 동전 실험은 다음 실험으로 나타날 숫자를 예견하는 데 아무런 영향도 주지 않는다는 것을 인식시킨다.

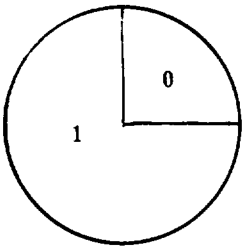

Fig. 1-4

(6) 처음 나온 수치가 다음 나오는 수치에 영향을 주는 경우를 생각해 보자. Fig.(1-5) 와 같은 두 회전판이 있다. 어느쪽부터 먼저 회전시켜도 좋다. 회전 후에 나온 결과가 다음 회전시킬 회전판을 결정한다. 즉, 왼쪽 회전판부터 회전해서 만일 0이 나오면 왼쪽을, 1이 나오면 오른쪽을 회전해 나간다.

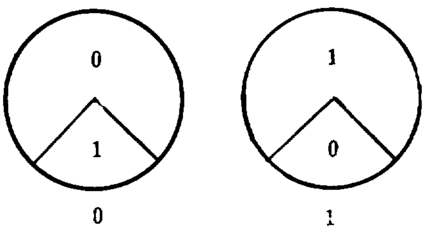

Fig. 1-5

50번 회전하여 다음과 같은 결과가 나왔다고 하자.

000000000 111 0 11 0 111 0 111111 000000 111111 0000 1 00 11 0 1

이것은 0과 1의 두 수자로 이루어진 수열의 같은 빈도를 가졌지만 그러나 같은 수들이 집단화되어 있다. 만일 Fig.(1-6) 과 같이 서로 반대되는 형태이면 그것은 완전히 任意的인 것으로 두 수의 빈도는 동일하다. 例를 들면,

11011001010101100110101101010101100100100110010110

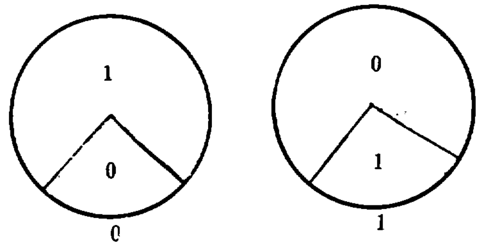

Fig. 1-6

이제 학생들에게 현실세계란, 대부분 복잡한 구조의 一連의 기다란 10진수의 列로 만들어지는 하나의 集合體임을 인식시킬 順序이다. 例를 들어주자.

① 창 밖을 지나는 사람을 관찰한다. 男→1, 女→0 으로 대응시켜 보면 다음과 같은 수들을 만들 것이다.

110000111011111001110·····

② 도로를 지나는 차량에 대해 버스는 1, 다른 차는 0이라고 하면,

10000000001011000010000····

③ 하루의 어떤 시간을 정하여 그날의 일기를 기록한다. 건조할 때 →0, 습기찰 때 →1이라면,

0000111001000111110111000000······

④ 영어 교과서의 적당한 면을 열어 문장을 읽는다. 자음에는 0, 모음에는 1로 대응시키면,

011010101······

⑤ 1988년 1월 1일부터 서울특별시내에서 출생한 신생아의 수를 기록한다.

24,14,21,18,23,26,16,19,······

사실상 어떤 실험이나 관찰의 반복의 기록이란, 수치들의 一連의 列인 것이다. 이러한 一連의 유사한

例에 의해서 중요한 思考가 발생되어야 한다.

즉 이러한 실제 과정 대신, 동전이나 다른 임의적 考案에 의한 시행의 결과들을 연구하는 것으로 充分하다는 사실의 인식이다.

2) Monte Carlo방법

확률문제를 해결하는 통상적인 방법은 解析學이다. 그러나 만일 解析學에 관한 지식에 없거나, 관련된 문제를 풀만큼 숙련되지 않았을 때, 또는 실험이 경비문제나 시간상의 제약이 따를 때 Monte Carlo방법이 요구된다. 이 방법은 우선 실제 현상에 대응하는 任意현상을 모형화하는 考案 方法을 선택한 후 이의 시행을 거쳐, 연구코자 하는 사건의 발생횟수를 실제적으로 실험을 통해서 확인하고 근사적인 확률과 기대값, 그리고 確率分布 등을 찾는 方法이다. 이 方法을 사용하는 가장 중요한 이유는 이것이 통계적으로 思考하는 方法을 배우고 確率에 대한 직관적 배경을 개발시키는 데 최선의 방법이기 때문이다.

(例) 용해된 100 파운드의 유리제조액에서 1파운드 유리병 100개를 만들어내려고 한다. 용해된 액체내에 100개의 微石이 임의로 分布되어 있다. 만일 이 微石이 병에 혼합되면 병을 폐기하게 된다. 우량품은 얼마나 생산될 것인가?

Fig.(1-7) 과 같은 정사각형을 용해액으로, 내부의 작은 정사각형들을 微石으로 모형화하자. 任意 數字를 사용해서 용해액에 100개의 微石을 혼합시켜 나간다. 학생들에게 100쌍의 任意 10진수의 수치를 난수표, 또는 회전판으로 찾도록 한다.

例를 들어

47 82 24 68 78 06 33 70 36 09
42 32 22 38 70 74 73 96 46 96
34 52 00 82 01 31 18 57 16 48
94 22 58 75 82 68 68 04 79 81
67 69 23 71 74 99 16 08 68 31
85 14 35 61 76 84 07 84 50 62
77 74 23 91 44 94 49 37 08 92
56 99 50 05 18 05 84 91 91 94
05 41 26 17 37 45 22 82 20 01
28 37 78 07 52 91 25 32 18 61

이 나왔다고 하자.

즉 사각형 (4,7) 에 최초의 微石이 들어가고 두번째 微石은 (8,2) 에 들어갔음을 의미한다.

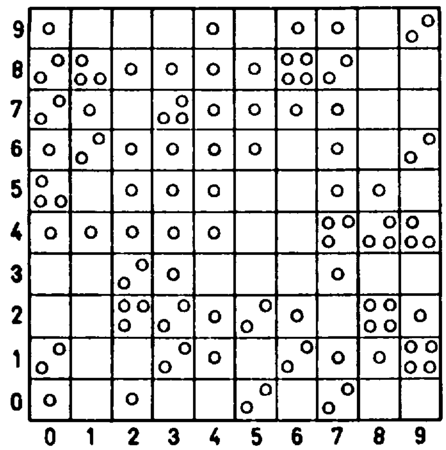

Fig. 1-7

따라서 우리는 다음과 같은 分布를 얻게 된다. 참고로 이의 理論的 分布를 기록했다.

Table 1. Distribation of stones.

微石의 수	0	1	2	3	3이상
병의 수	37	39	14	7	3
理論的 分布	36.6	37.0	18.4	6.1	1.9

우량품의 비율은 이론적으로 ($1-1/100)^{100} \approx 0.366$이며 우리는 Monte Carlo 방법에 의해 그와 근사적인 값 0.37을 찾아 내었다.

2. 確率指導와 그 實例

1) 確率配定

전체 합이 1되는 加重値들을, 1회 시행하는 실험의 각 결과에 배정하는 경우부터 생각하자. 통상 이것은 상대돗수의 신뢰성에 의해 동기화된다. 面이 0과 1인 균형잡힌 동전을 여러번 던진다. 양쪽 面이 거의 같은 빈도로 나타난다.

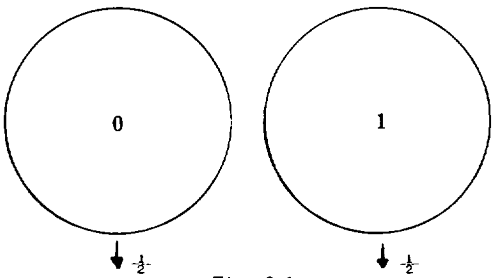

Fig. 2-1

따라서 各 面에 같은 가중치 $\frac{1}{2}$을 배정한다. 물론 이것은 특수한 경우에 해당한다. 가장 일반적인 경우는 Fig.(2-2) 와 같은 앞침의 경우이다.

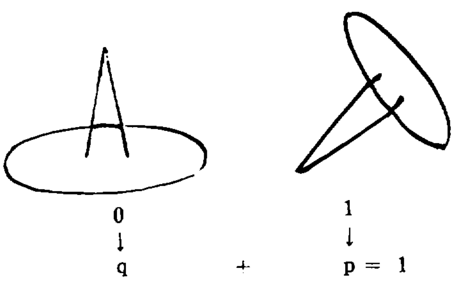

Fig. 2-2

그 결과가 0또는 1인 실험을 계속 시행했을 때 나타난 0과 1의 상대돗수가 각각 q와 p, 단 p+ q= 1 이라고 하면 0→q, 1→p를 배정시킨다. 주사위의 경우도 마찬가지로 처리한다. n개의 공이 들어있는 바구니는 n개의 결과를 가지는, 일어날 경우가 같은 실험에 대한 모형이다.

반경 1인 원을 s_1, s_2, $\cdots$, s_n으로 n개의 부채꼴로 나누어, 호의 길이를 각각 p_1, p_2, $\cdots$, p_n이라고 하자. 이것은 가장 일반적인 有限確率空間(S, P)에 대한 모형이 된다. 따라서 유한집합 $S=\{s_1, s_2, \cdots s_n\}$이고 S상의 함수 $p: s_i \to p_i$로 두면 $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum p_i = 1$ 이다. 이제 S의 모든 부분집합 위에서 집합함수 P를

$$P(A)=\sum_{s_i \in A} p_i,\ P(\phi)=0$$

으로 정의하여 사건 A에 확률을 배정한다.

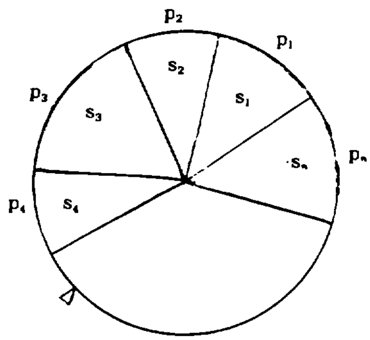

Fig. 2-3

일어나는 경우가 같은 실험은 함수 p가 상수함수 즉 $p_i=\frac{1}{n}$이니

$$P(A)=N(A)/N(S)$$

가 된다.

다음으로 한 실험을 독립적으로 반복시행하는 실험의 경우를 생각하자. 던지는 횟수의 列은 그 결과가 2進數의 列로 이루어진 複合시행이다. 이러한 數의 列은 평면상의 격자의 경로로 따라가며 적당한 방법으로 가중치를 배정하면 된다. 예를 들어 01101→qpp qp= p^3q^2은 가장 손쉬운 방법이 될 것이다. 이러한 방법으로 모든 형태의 독립사건과 Markovian과정에 확률을 배정할 수 있다.

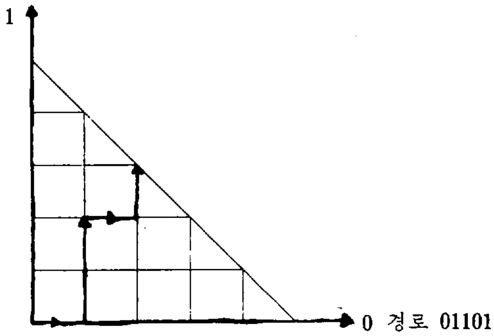

Fig. 2-4

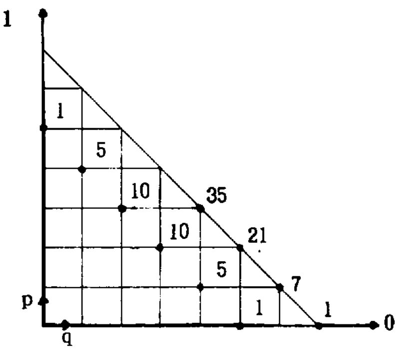

Fig. 2-5

(例 1) 광호와 현준은 탁구시합에 있어서 서로 호적수이다. 그들 시합에서 광호의 勝率은 $p=0.6$, 현준은 $q=0.4$로 나타난다. 그러나 실제로 그들은 자신의 勝率을 모르고 있어서 一連의 시합에서 과반수 이상 이긴 사람을 승자로 규정하기로 하였다. 3회와 5회의 시합을 할 때 현준이 이길 확률은 얼마인가?

a) 광호가 승리할 때 1, 패할 때 0이라고 하면 一連의 3회 시합은 8가지 결과, 즉 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111이다. 현준이 승리하는 경우는 000, 001, 010, 100이므로 이 사건에 대한 확률은

$$q^3+3q^2p=0.352$$

b) 5회 시합에 대한 승자의 기록은 5개의 2진숫자로 나타난다. 그것은 원점에서 출발하여 $x+y=5$인 직선에 도착하는 Fig.(2-5) 와 같은 격자점의 경로로 설명할 수 있다.(5,0), (4,1) 과 (3,2) 를 따라가는 모든 경로가 현준의 승리를 의미하므로 그 가중치의 합계는

$$q^5+5q^4p+10q^3p^2=0.31744$$

(例2) Fig.(2-6) 과 같은 두개의 서로 대칭型 채널이 2진수 0과 1을 송신한다. 강한 잡음 때문에 0이 1로, 또 1이 0으로 잘못 송·수신되는 확률이 $q=0.2$라고 한다. 이제 한개의 숫자로 된 전언문을 송신한다고 하자. 잡음에 의해 와전되는 것을 막기 위해서 0 대신 00000을, 1 대신에 11111을 송신한다. 수신자는 세숫가 이상 수신되면 해독한다고 할 때 전언문이 잘못 해독될 확률은?

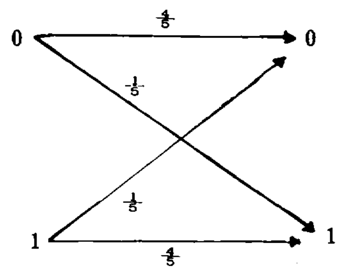

Fig. 2-6

이것은 명백히 (例1) 의 b) 와 같다. 따라서 전언문을 잘못 해독할 확률은

$$q^5+5q^4p+10q^3p^2=0.05792$$

(例3) (가설검정)

갓 태어난 병아리는 곡식을 인지하는 능력이 있는가? 아니면 경험에 의해서 알게 되는가? 이 의문을 알기 위해서 곡식 모양의 종이로 만든 둥근 모형과 3각 모형을 서로 같은 수만큼 만든다. 병아리가 둥근

모형을 쪼을 때는 1, 3각형 모양을 쪼을 때는 0을 기록한다. 만일 그 기록이 1111011101로 나타났다고 하자.

다음의 두가지 대립가설이 나온다.

H_0 : $p=\frac{1}{2}$, 즉 그 병아리는 아직 곡식이 둥글다는 것을 모른다.

H_1 : $p>\frac{1}{2}$, 즉 아무런 훈련이 없어도 곡식처럼 보이는 둥근 대상물을 좋아한다.

이제 우리는 그 전체 가중치가 5%보다 작은 영역안에 관찰된 결과가 놓인다면 미리 H_0를 기각하는 것으로 결정하자. 10번의 쪼음이 H_0 아래서 같은 가중치를 가지고 관찰할 때 모두 $2^{10}=1024$개의 서로 다른 쪼음의 數의 列이 존재한다. 이들 중에서 두번 이하 쪼으게 되는 수의 列의 갯수는

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}=56$$

따라서 56/1024= 5.5%이므로 실험기록 10개의 쪼음만으로는 확신할 수 없고 더 많은 수치들을 수집하여야 한다. 이제 20개의 쪼음이 다음과 같이 관찰되었다고 하자.

11111001111110111001

0의 비율이 처음보다 더 많지만 수의 列은 더 길다. 5회 이하의 쪼음의 수는 더 길다. 5회 이하의 쪼음의 수의 열의 갯수는

$$\binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3}+\binom{20}{4}+\binom{20}{5}$$

$=1+20+190+1140+4845+15664=21860$

한편 전체 수의 列은 $2^{20}=1,048,576$이다.

따라서,

21,860/1,048,576 = 2.069%

이번에는 확신을 가지고 H_0를 기각한다.

2) 確率變數의 期待값

대부분의 교과서 문제들은 기교와 훈련을 위한 目的으로 만들어져 있다. 이러한 문제들을 확률, 확률변수, 기대값과 같은 중요한 개념을 가지고 학생들과 친밀해질 수 있는 문제로 바꾸어 보자.

(例4) Fig.(2-7) 과 같은 놀이판이 있다. 1000원을 내면 한번 돌릴 수 있고 이때 표지판이 가리키는 수의 100배 만큼의 액수를 받는다고 하자. 받게되는 액수 X가 確率變數이다. X의 期待값 E(X)는 X의 각 값들의 確率에 의한 加重値를, X의 값에 加重化한 平均으로 정의한다. 이것은 일련의 놀이에서 game당 평균 상금을 계산함에서 연유되었다. 기대값은

$E(X)=\Sigma X(s_i)P(s_i)$ 와

$E(X)=\Sigma x_i P(X=x_i)$

두가지 형태로 사용된다. 위의 例에서

$$E(X)=\frac{4}{10}\cdot 2+\frac{3}{10}\cdot 11+\frac{2}{10}\cdot 4+\frac{1}{10}\cdot 50=9.9$$

즉 이러한 놀이를 오래 계속할 때 game당 평균 10원의 이익을 남기게 된다.

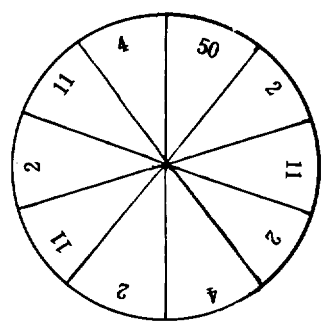

Fig. 2-7

2000원 내고 두번 즉 2X나 2500원으로 2X+5의 놀이는 E(2X), E(2X+5)로, 더욱 일반적으로 E(cX+d)를 찾아낼 수 있다.

인기있는 놀이는 Fig.(2-8)과 같은 놀이판이다. 1600원 내고 내부 원의 수 X에 걸거나 또는 외부 원 Y에 걸 수 있다. 3200원 내고 X+Y의 game을 할 수도 있다.

이때의 E(X), E(Y), E(X+Y)를 구하고 또 E(X)+E(Y)와 비교해 보면

$$E(X)=\frac{3}{8}\cdot 10+\frac{1}{8}\cdot 14+16+\frac{1}{8}\cdot 50=15.75$$

$$E(Y)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 10+\frac{1}{8}\cdot 2.4+\frac{1}{8}\cdot 100$$

$$=15.80$$

$$E(X+Y)=31.55=E(x)+E(y)$$

X^2의 놀이를 생각해 보자

$$E(X^2)=\frac{3}{8}\cdot 100+\frac{1}{8}\cdot 196+\frac{1}{4}\cdot 256+\frac{1}{8}\cdot 2500$$
$$=438.5$$

그리고 $E(X^2)>[E(X)]^2$임을 알게 된다.

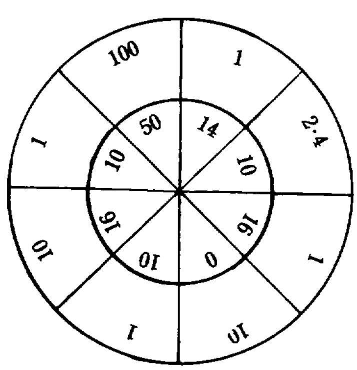

Fig. 2-8

조건부 확률과 全確率 규칙의 形式化는 난해한 과정이지만 그러나 문제해결에 있어서 수형도, 그래프의 이용, 경로를 통한 곱셈 형태로 구상해 보도록 한다.

(例5) 어떤 제품이 A,B 두 기계에 의해 생산된다. 이 제품의 우량여부 신빙도가 A제품은 q_1, B가 q_2라고 한다. A,B가 전체량중 각각 p_1과 $p_2=1-p_1$ 생산하며 이 생산품이 임의로 혼합되어 있다고 하자. 우량품으로 신빙할 수 있는 확률 P(R)은 얼마인가?

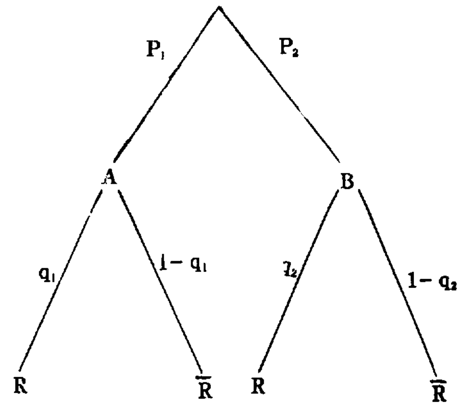

Fig. 2-9

그림에서 $P(R)=p_1q_1+p_2q_2$를 얻는다. 한편 직관적으로

$$R=(R\cap A)\cup(R\cap B),$$
$$P(R)=P(A)P(R|A)+P(B)\cdot P(R|B)$$

를 얻을 수 있다.

3) Markov連鎖

Markov連鎖는 應用力이 대단히 풍부하며, 體系的인 방법으로 개발되어야 한다. 出發點 v을 선택하고 v에 계속하여 한 方法 T를 적용시켜 나가면

$$v,\ vT,\ vT^2,\ vT^3,\cdots$$

와 같은 數列을 얻게 된다. 이 수열의 최종적인 형태는 무엇이며 또 出發點은 그것에 영향을 미칠 것인가 등 흥미롭고 有用한 많은 理論的 문제들이 주어진다.

학생들은 이러한 數列에 대해 곧 몇가지 가능한 형태를 발견할 것이다. 즉

① 무한 回의 시행이 존재하며

② 순환의 형태가 나타나고,

③ 이 수열은 어떤 不動點으로 접근한다. 그것은 出發點의 영향을 받지만 대부분 초기상태와는 무관한 경우도 많다.

正常혼합 과정부터 알아보자

Fig.(2-10)과 같이 두 탱크의 기름을 혼합하는 경우, 매 시간단위후 첫 탱크의 $\frac{1}{2}$이 둘째 탱크로, 두번째 탱크의 $\frac{2}{5}$가 처음 탱크로 흘러 들어간다고 한다.

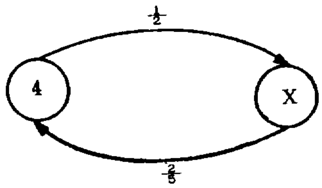

Fig. 2-10

왼쪽 탱크에 4갤런 넣고 오른쪽에 x갤런 넣었다고 가정하자. 初期分布가 p+ q= 1인 vector $v=(p, q)$로 주어질 때 正常分布상태 즉,

흘러 들어간 量= 흘러 나온 量

이 되도록 하는 x는

$$\frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{2}{5}\cdot x,\ x=5$$

따라서 $v=(\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$인 定常分布를 구할 수 있다. 유사한 방법으로 처음에 1갤런의 기름을 두 탱크에 분배한다. 일정한 시각동안 이 두 탱크의 내용물이 어떤 정해진 혼합比率에 의해 아래의 두 탱크로 흘러 내려간다. Fig.(2-11)에 나타난 혼합비율 T와 $vT=v$인 식에 의해서 vT의 성분은

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{4}{9},\quad \frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{9}$$

따라서, $v=(\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$인 正常分布를 찾아낼 수 있다.

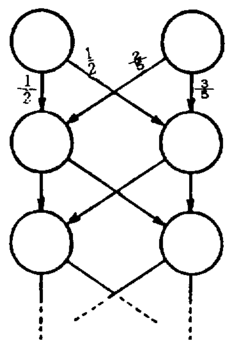

Fig. 2-11

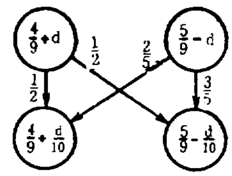

Fig. 2-12

만일 한 과정이 定常分布에서 d만큼 치우친 分布로 출발할 경우가 되는 Fig.(2-12)를 살펴보자. 즉,

$$v=(\frac{4}{9}+d,\ \frac{5}{9}-d)$$

라고 하자. vT의 처음 성분은

$$\frac{1}{2}(\frac{4}{9}+d)+\frac{2}{5}(\frac{5}{9}-d)=\frac{4}{9}+\frac{d}{10}$$

이므로, $v=(\frac{4}{9}+d,\ \frac{5}{9}-d)$,

$$vT=(\frac{4}{9}+\frac{d}{10},\ \frac{5}{9}-\frac{d}{10}),\ \cdots\cdots,$$

$$vT^n=(\frac{4}{9}+\frac{d}{10^n})$$ 이 되고

이때는 初期分布와는 독립하여 定常分布로 수렴한다.

3개 이상의 상태를 갖는 Fig. (2-13)과 같은 Morkov 연쇄인 경우 n+1개의 상태가 0,1,2,⋯,n으로 표시되었다.

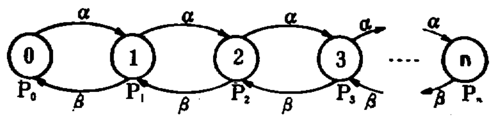

Fig. 2-13

정상분포 $v=(p_0, p_1, p_2, \cdots p_n)$ 을 찾기 위해서 (단 $\Sigma p_r=1$) Fig. (2-13)에서 $x=\frac{\alpha}{\beta}$ 라고 두면,

$$P_r = x^r p_0, \quad p_0^{-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad r=0, 1, 2, \cdots, n$$

이고 Fig. (2-14)에서는

$$P_r = \frac{x^r}{r!} p_0, \quad p_0^{-1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!}, \quad r=0, 1, 2, \cdots, n$$

임을 쉽게 알 수 있다.

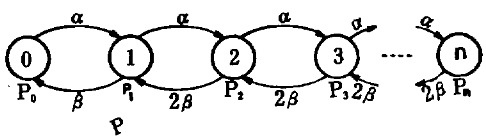

Fig. 2-14

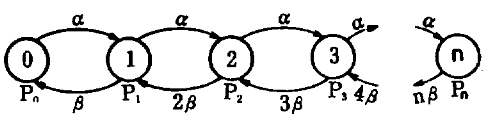

Fig. 2-15

Fig.(2-13)는 최대길이 n인 한 사람의 봉사자에 대한 待機列의 그래프이며 병원 등에서 기다리는 경우에 나타난다. α와 β는 도착과 봉사에 대한 強度를 나타내는 任意數値이다.

Fig.(2-14)는 은행 또는 우체국과 같은 2 봉사 待機列을 나타내고 Fig.(2-15)는 주차장과 같이 n봉사 待機列을 의미한다.

Markov 連鎖를 의미하는 수열은 이외에도 학생들에게 기하급수와 지수급수, 나아가서 수렴, 극한과 무한급수 연구에 좋은 동기를 제공할 것이다.

(例6) 서울특별시에서는 매년 시내에 사는 사람의 3%가 郊外로 移住하고 郊外에 사는 사람의 2%가 市內에 移住한다고 한다. 市內와 郊外에 사는 사람 수의 합이 일정하다고 할 때 오랜 세월이 경과하면 시내와 郊外의 人口의 比는 어떻게 되겠는가?

먼저 처음의 市內, 郊外 인구의 초기분포를 $p_0=(p, q)$, (단, $p+q=1$) 라고 하자. 문제의 경우 방법 T는

$$T = \begin{array}{c|cc} & \text{시내로 이주} & \text{교외로 이주} \\ \hline \text{시내사람} & 0.97 & 0.03 \\ \text{교외사람} & 0.02 & 0.98 \end{array}$$

이 될 것이다. r년후의 인구의 분포는 p_0T^r으로 주어지고 이것은 r의 증가에 따라 T의 不動 Vector $vT=v$를 만족하는 vertor $v=(v_1, v_2)$에 가까와진다. 따라서

$$0.97v_1 + 0.03v_2 = v_1$$
$$0.03v_1 + 0.97v_2 = v_2$$

이고 또 $v_1+v_2=1$이니 $v_1=\frac{2}{5}$, $v_2=\frac{3}{5}$

따라서 세월이 경과할수록 시내와 교외의 인구의 분포의 比는 2 : 3에 가까와 진다.

4) Reliability

n개 부분으로 이루어진 한 組織(system)을 생각해보자. 어떤 임의의 순간에서 각 부분은

작동할 때→1, 작동하지 않을 때→0

의 어느 한 상태에 있다고 하면 전조직의 상태공간 S는 2^n개의 상태로 이루어질 것이다. S를 두 부분집합 $S=F\cup W$로 분할하여 이 조직의 상태가 W에 속하면 조직은 稼動하고, F에 속하면 故障이라고 하자. 시간이 흐르면서 각각의 부분들이 변하여 전 조직은 n차원의 부분집합 W상에서 임의 보행을 수행하는 것으로 간주할 수 있다. 조직은 F가 되자마자 멈추므로 F는 吸收상태의 집합이다. 각 부분의 작동확률은 p, 작동하지 않은 확률은 $q=1-p$이고 각각이 독립이며 시간要因은 생략하기로 한다.

조직의 信賴性 R(P)란 전 조직이 稼動하는 확률, 즉 L에서 R로의 工程이 이루어짐을 의미한다. 몇가지 유형의 조직을 살펴보자.

① 直列조직 : 부분들이 직렬로 연결된 상태이며 조직중 임의의 한 부분이라도 작동치 않으면 고장이다. 11····11만이 W의 상태에 속하며 따라서

$R(p) = p^n$

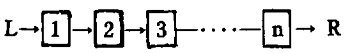

Fig. 2-16

② 竝列조직 : 부분들이 竝列로 이루어진 상태이며 모든 부분이 작동하지 않을 때 고장이다. 00····00만이 F의 상태에 속하며 고장확률은 q^n, 따라서 신뢰성

$R(p) = 1-q^n = 1-(1-p)^n$

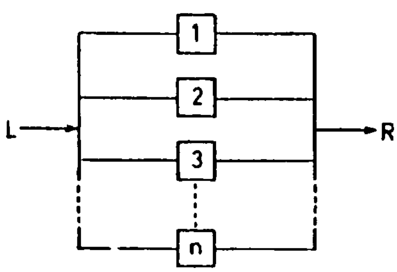

Fig. 2-17

③ 직병렬의 경우 : Fig.(2-18) 과 같이 먼저 3가지 기본조직을 생각하고 복잡한 조직에 이용한다. 조직 Ⅲ의 신뢰성은 $1-q^2 = 1-(1-p)^2 = 2p-p^2$이며

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = p + p - p^2 = 2p - p^2$으로 계산할 수 있다.

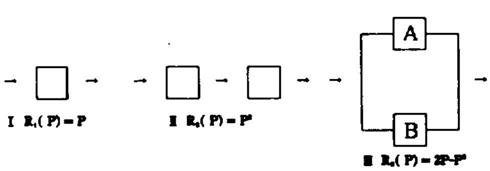

Fig. 2-18

i) Fig.(2-19) 의 조직Ⅳ는 Ⅲ에 Ⅱ의 경우를 적용시킨다. 따라서

$R_4(p) = (R_3 \cdot R_2)(p) = 2p^2 - p^4$

만일 Boolean대수에 의해 조직 Ⅳ의 확률을 계산해 보면

$W = (A \cap B) \cup (C \cap D)$

$P(W) = P(A \cap B) + P(C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$
$= P(A)P(B) + P(C)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D)$
$= 2p^2 - p^4$

ii) Fig.(2-20) 의 조직Ⅴ는 Ⅱ에 Ⅲ의 경우를 적용시켜서,

$R_5(p) = (R_2 \cdot R_3)(p) = (2p - p^2)^2 = 4p^2 - 4p^3 + p^4$

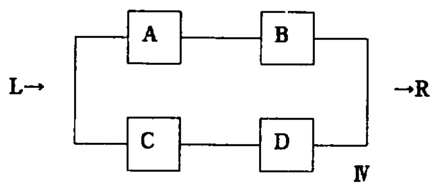

Fig. 2-19

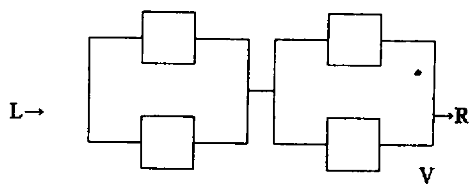

Fig. 2-20

iii) Fig. 2-21 일 때의 조직Ⅵ은 Ⅱ와 Ⅲ을 적용해서

$R_6(p) = R_3(p) \cdot R_1(p) = (2p-p^2)p = 2p^2 - p^3$

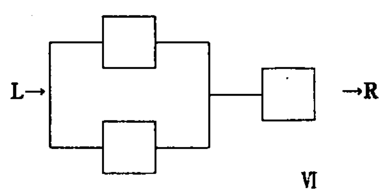

Fig. 2-21

iv) 조직Ⅶ은 두 병렬조직으로 된 하나의 직렬이므로

$$R_7(q) = (1-q^3)(1-q^2)$$

그러나 조직Ⅷ은 조건부 확률이 필요하다. E가 작동하는 경우와 작동하지 않는 경우로 분리시켜서 생각하도록 학생들을 지도한다.

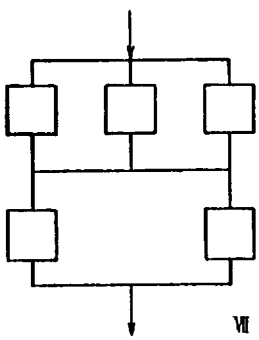

Fig. 2-22

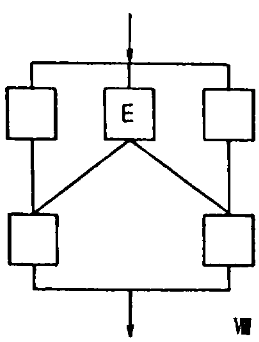

Fig. 2-23

(例7) 3개의 기계 부분들이 並列로 작동하며 이들 각각은 常數의 고장률 $\alpha = 0.01$을 가진다. 이들을 작동시킨다면 信賴性은 얼마나 향상되겠는가?
단 $t = 10$시간으로 비교한다.

이 문제는 앞의 Fig.(2-16)으로 쉽게 응용되지만, 고장시간 T가 指數分布를 따른다는 사실이 추후에 학습되어야 이해될 것이다. 그러나 각 조직에 대해서 信賴性에 대한 기본개념을 인식함이 가장 중요하다. 각 기계부분이 상수고장률로서 $\alpha = 0.01$을 가지니 T는 지수분포에 따르고 따라서 각 부분의 신뢰성 R(t)는

$$R(t) = e^{-0.01t}$$
$$\therefore R(10) = e^{-0.1} = 0.905$$

한편 병렬상태의 조직 S의 신뢰성은,

$$R(10) = 1-(1-0.905)^3 = 1-0.00086 = 0.99914$$

따라서 약 9.4%의 향상을 얻을 수 있다.

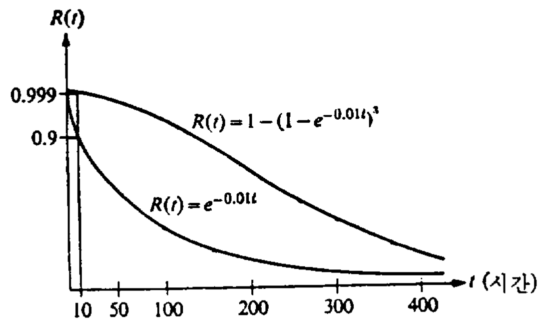

Fig.2-24

다음으로 무한과정에 대하여 두가지 例를 제시한다. 무한과정은 시간上에서 不變하는 경향이 있기 때문에 그 分析이 보다 간단하다.

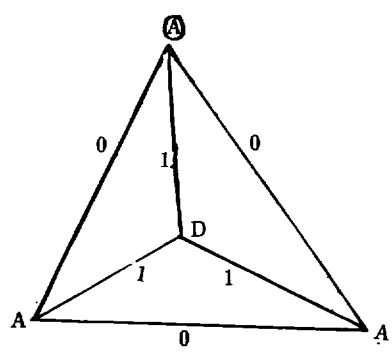

Fig.2-25

(例 8) Fig.(2-25) 와 같은 정사면체의 정점 Ⓐ에, 0또는 1로만 진행하는 딱정벌레가 있다. 다른 정점까지 닿는 데 1분이 소요되며 D에 도착하면 살충제에 의해 죽게 된다. 수명을 X라 하고 X의 分布와 기대값을 구하여 보자

사건 $X=n$은 경로 000‥‥01에 해당하며 $P(X=n)=(\frac{2}{3})^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$, 사건 $X>n$은 경로 000‥‥00이고 $P(X>n)=(\frac{2}{3})^{n}$, 또 그 여사건의 확률 $P(X\leq n)=1-(\frac{2}{3})^{n}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

X의 기대값은 $\sum_{1}^{\infty}n(\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$로 곧 구할 수 있으나 실험적인 방법을 사용한다. 임의의 정점 A에서 D로 가는 기대시간은 동일하며 그것을 a라고 하자. 300개의 딱정벌레가 정점 A에서 출발한다면 그 총수명시간은 300·a분이다. 1分후에 딱정벌레그룹이 생존한 시간은 300分, 100마리는 D에 도착하고 나머지 200마리는 처음 출발할 때와 같은 상태로서 총 200·a分 살게 될 것이다.따라서 300a= 300+200·a 즉 a=3 이다. Monte Carlo방법을 사용하여 이 결과를 확인토록 한다.

(例 9) 한 사람이 Fig.(2-26) 의 0 상태에 서 있다고 하자. 균형잡힌 동전을 던져 1이 나오면 오른쪽으로, 0이 나오면 왼쪽으로 한 단계씩 이동하며 상태3에 닿으면 게임이 끝난다고 할 때, 이 게임의 보행길이 X에 대한 평균과 기대값을 구하자.

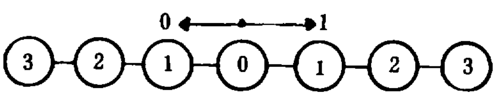

Fig. 2-26

Fig.(2-27) 과 같은 수형도를 만들면 기대값 a에 대한 방정식을 세울 수 있다. 즉

$$a=\frac{1}{2}(2a+a)+\frac{1}{4}(3+a-1)+\frac{1}{4}\cdot 3$$
$$\therefore a=9=3^{2}$$

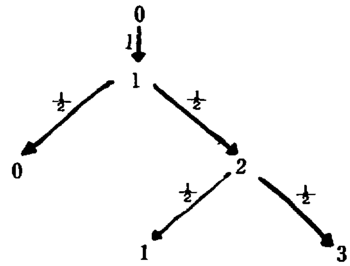

Fig. 2-27

한편 Fig. (2-28) 의 Markov연쇄 도표로 부터

$$p(X=3)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad P(X=5)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4},\quad P(X=7)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{2},\cdots\cdot$$

$$P(X=2n+1)=\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}=\frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{n},$$

$$P(X>2n+1)=(\frac{3}{4})^{n}$$

됨을 알 수 있다.

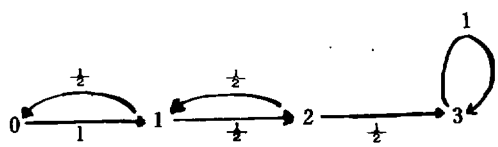

Fig. 2-28

학급에서 이 실험을 1000회 시행하고 만일 $X>49$인 사건이 두번 발생하였다고 놀랄 일은 아니다. 왜냐하면 $P(X>49)=(\frac{3}{4})^{24}=0.001$이기 때문이다. 거리 3일때 흡수상태에 도착하려면 임의 보행자는 평균적으로 3^{2}의 걸음이 요구된다. 일반적으로 거리 n일때 원점에서 장벽에 도착하는 데는 평균적으로 n^{2}의 걸음이 필요하다. 이것을 실험의 방법으로 규명한다.

한 사람이 원점에서 출발하여 10걸음 걸었다. 원점에서 그 최종거리의 제곱이 이익금이라고 할 때 게임당 평균 이익을 알아보고자, 학급에서 100회의 실험을 시행하고서 나타난 최종거리는 다음과 같다.

4,2,2,8,2,2,2,6,6,2,4,4,2,0,2,8,0
4,4,8,0,0,2,2,0,2,4,2,2,0,2,6,2,0
2,0,2,2,0,2,4,4,8,2,0,0,0,4,4,0,2
4,2,4,2,0,0,0,4,4,2,2,2,0,4,4,2,4
2,4,2,8,2,2,2,4,0,2,4,0,4,4,2,0,2
2,2,6,0,4.0,2,4,6,2,0,0,0,4,2

따라서 게임당 평균이익은 $\frac{1060}{100} = 10.6$ 즉 기대금액은 10이다. 실제로 출발점에서 거리의 제곱의 기대값은 각 걸음에 대해서 1씩 증가한다. x점에서의 임의 보행자를 생각하여 보자. 한 걸음후 그는 확률 $\frac{1}{2}$로 x+1이나 또는 x-1지점에 있을 것이다.

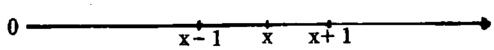

Fig. 2-29

한편 $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$, $(x-1)^2 - x^2 = -(2x-1)$ 즉 제곱한 거리 2x+1이 증가하거나 2x-1이 감소한다. 실제 증가한 양의 평균은 $\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}(2x-1) = 1$이며 따라서 n걸음후 출발점에서 거리자승의 기대값은 n이다.

結　　論

中等數學敎育에 있어서 교과과정에 의거한 確率과 統計敎育의 내용과 지도방법을 재음미하고 주위의 현실에 직접 적용할 수 있는, 살아있는 교육이 될 수 있는 방법을 모색하여 보았다. 確率敎育은 우선 시각적인 효과를 극대화면서 Random device를 적절히 구사하여, 실제적 실험방법인 Monte Carlo方法을 활용하면 좋은 교육효과를 얻을 수 있다고 본다. 이 관점에서,

1. Random Digit의 풍부한 活用을 통하여 일어날 可能性이 같은 頻度와 그렇지 않은 경우에 대한 概念을 이해시키고
2. 獨立事件과 從屬事件의 理解를 명확히 하며
3. 實際的 實驗·觀察과 Random Device와의 應用을 통하여 現實과 數學과의 關係를 스스로 이해할 수 있도록 誘導한다.
4. Monte Carlo 方法에 의하여 確率의 配定, 有限確率空間, 2項分布와 假說檢定의 實例를 들어 確率概念을 이해하도록 하고
5. 確率變數와 期待값을 가장 기본적인 現實生活의 例로서 설명한다.
6. 現代的 應用分野로서의 Markov 과정을 中等과정에서 개념의 이해에 무리없는 초보적인 지식에 의해 正常分布에서 n-surver 待機 列까지를 언급함으로서 그 活用度와 함께 數例와 極限, 無限級數 등의 硏究에 動機를 제공하여 確率 指導 目標를 재음미 하도록 하였고
7. 信賴性 理論은 平易한 Random Digit에 의해 출발하는 기본적인 System의 活用에 있으며 이들 과정에서 자연스럽게 實例를 통해 무한과정을 도입한다.
8. 이들 모든 과정에서 視角的인 효과를 높일 수 있는 幾何的 도형을 사용하여 中等數學敎育에서의 確率·統計 分野의 實驗的 指導方法을 提示하였음.

摘　　要

中等數學敎育에 있어서 確率 統計에 대한 指導方法으로서 ① Random devices의 活用 ② 實驗的 方法인 Monte Carlo method를 利用해서 현 교과과정에 나와있는 기초분야에서 現代的 應用분야까지 指導方法을 모색하였음.

引 用 文 獻

ASA. 1964. Report of the committee on probability and statistics in the secondary school. Amer. Stat. 14. No.4 : 17~25.

Barnett, V. 1982. Teaching statistics in schools throughout the world. Inter. Stat. Insti.

Bodmer, W.F. 1985. Understanding statistics. J.R. Stat. soc. A : 69~81.

Copeland A.H. 1941. Fundamental concepts of the theory of probaility . Am. Math. Monthly. 48 : 522~530.

Halberstam, H. and Peressini, A. 1986. On the value of examinations. J. of UIUC : 476~493.

韓國敎育開發院, 1987. 中學校 數學 1, 2, 3.

————, 1987. 中學校 數學 敎師用 指導書. 1, 2, 3.

Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. 1980. Comparative studies of Mathematics Curricula- Change and Stability. 1960~1980.

鄭英鎭, 1987. 高等學校 數學 I, II-1, II-2. 학연사.

———. 1987. 高等學校 數學 I, II-1, II-2 敎師用 指導書, 학연사.

具滋興, 1977. 高級統計學, 仁荷大學校 出版部 : 363~364.

金應泰·金年植, 1982, 數學敎育 敎材論, 二友出版社.

金 應泰·朴漢植·禹正晧, 1985, 數學敎育學 槪論, 서울大學校 出版部.

金弘基·韓哲淳, 1981, 敎養數學, 淸文閣 : 103~104.

McKnight, C.C. 1987, The underachieving curriculum, Stipes Pub. Co.

文敎部, 1982, 高等學校 새 敎育課程 槪要.

朴漢植·具光祖, 1982, 數學科 敎授法, 敎學社.

Råde, L. 1970, The Teaching of Probability and Statistics, ALMQVIST and WIKSELL

Shulte, A. P. and Smart, J. R. 1981, Teaching Statistics and Probability-1981 year book. Nat'l council, Teacher of Math.

신동선·박두일·황선형, 1987, 高等學校 數學 I, II-1, II-2, 어문각,

Travers, K. J. and Stout, W. F. 1985, Using Satistics. Addison-Wesley Pub. Co.

————. 1985, Using statistics, Teacher's Guide Addison-Wesley Pub. Co.

Univ. of Sheffield. 1986. Teaching Statistics. vol 8.

————. 1987, Teaching Statistics. Vol 9.