非線形 多變數 서보계의 設計에 관한 연구

姜 昌 男*

A Study on the Design of Servomechanism for Nonlinear Multivariable Systems

*Kang Chang-nam**

Summary

In this paper, the servomechanism synthesis for nonlinear multivariable systems is onsidered. while nonlinear characteristics can be seen in various manners, we concentrate on certain classes of nonlinear systems than to attack the general cases.

Following nonlinear systems are treated; systems with input channel nonlinearity, systems with output channel nonlinearity, and each nonlinear characteristic is assumed to be sector-type.

firstly we present feedback laws that insure the stability of compensated nonlinear ststems.

Next, based on these results, derive necessary conditions that the nonlinear systems to be controlled must satisfy to be able to get the desired "servomechanism performance".

Furthermore, the existence condition of an unique equlibrium point are also investigated.

序 論

非線形 制御 시스템의 설계는 狀態變數法, 周波數應答法등 많은 설계법이 확립돼있는 선형 제어 시스템인 경우와는 달리 선형시스템의 極, 零點 개념이 사용될 수 없고 平衡點의 唯一性과 局所 안정성등의 문제때문에 일반적 논의가 어려워서 설계연구는 그다지 진척이 안되고 있다.

비선형 시스템의 설계방법에 대해서는 비선형 특성을 線形化하여 선형시스템 이론을 적용하는 방법이 있다.

비선형 특성이 弱非線形인 경우는 이것으로 충분하긴 하나 결과가 불안하게 남는다. 비선형 특성을 엄밀하게 취급한 것들(Desoer and wang, 1979. Vidyasager, 1980. 池田, et all, 1973)이 있으나 안정화문제를 다룬것이 대부분이다. 비선형 사보 문제를 Robust제어의 입장에서 취급한 연구도 있다(Doraiswam, 1983).

본 논문은 비선형 특성을 어떤 부류로 한정해서 外亂의 영향을 받지않고 스텝상태에서 목표치에 추종하는 비선형사보 시스템을 설계하는 방법에 대해서 연구하였다.

* 海洋科學大學

대상 시스템

다음 3개의 부류에 속하는 비선형시스템을 생각해보자

S_1 ; $\dot{x}=Ax+B\sigma$, $\sigma=\varphi(u)$ $y=Cx$---- (1)

S_2 ; $\dot{x}=Ax+Bu$, $\sigma=Cx$ $y=\varphi(\sigma)$ - (2)

S_3 ; $\dot{x}=Ax+B\sigma$, $\sigma=\varphi(u,x)$ $y=Cx$---- (3)

단, $x\in R^n$, y, u, $\sigma\in R^m$, $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $C\in R^{m\times n}$ B, C : 최대계수를 가진다.

S_1, (S_2) ,S_3는 비선형요소가 선형부의 前(後)에 있는 것으로 이들 시스템을 제어대상으로 생각할 때 大域漸近安定으로 外亂을 제거하여 목표치에 추종하는 閉 루프계의 설계를 생각해 보자.

S_1, S_2, S_3에 대해서 다음과 같이 가정을 해보자.

가정1 (A, B)은 可制御쌍, (C, A)는 可觀測쌍

가정2 (C, A, B)는 傳達零點을 原點으로 가지지 아니한다.

가정3 외란, 목표치가 스텝(step)상에서 변화한다. 또 S_1,S_2에 대하여 비선형특성은 다음 가정을 만족하는 것으로 한다.

가정4 $0 < k_{L_i} \le \dfrac{\varphi_i(u_i)-\varphi_i(\tilde{u}_i)}{u_i-\tilde{u}_i} \le k_{H_i} < \infty$ ..... (4)

여기에서 $K_L \triangleq \mathrm{diag}[k_{L_i}]$, $K_H \triangleq \mathrm{diag}[k_{H_i}]$

시스템 S_1에 대한 서보계의 설계

지금 식(1)에서 나타난 제어대상에 대하여 Fig.1에 나타낸 것처럼 I-P형 서보기구를 생각해 보자.

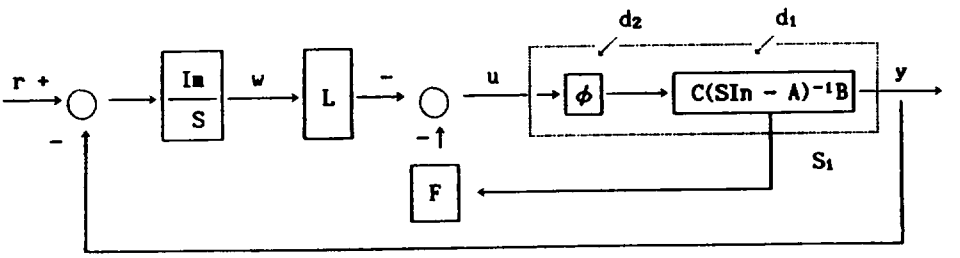

Fig. 1. Servomechanism for system S_1

여기에서 F,L은 각각 m*n m*m의 定數行列의 계인이고 그 값은 다음과 같이 정한다. 외란을 고려하면 식(1)은

$$\dot{x} = Ax + B\sigma + d_1,\ \sigma = \varphi(u + d_2),\ y = Cx \quad \cdots\cdots (5)$$

($d_1 \in R^n$, $d_2 \in R^m$)으로 되고

이것은 閉루프의 관계식

$$\dot{w} = r - y,\ u = -Fx - Lw \quad \cdots\cdots (6)$$

($w \in R^m$)에서

폐루프계의 상태방정식은

$$\dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{B}\sigma + \eta,\ \sigma = \varphi(u+d_2),\ u = -\bar{F}\xi \quad \cdots\cdots (7)$$

$y = \bar{C}\xi$ 로 된다.

단, $\xi = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$

$\eta = \begin{bmatrix} d_1 \\ r \end{bmatrix}$, $\bar{F} = [\,F, L\,]$, $\bar{C} = [\,C, 0\,]$

지금 $\xi=0$가 되는 평형상태를 고려하여 이때의 각 변수의 값을 添字 s를 붙여서 나타내면 식(7)에 의해

$$Ax_s + B\sigma_s + d_1 = 0,\ \sigma_s = \phi(u_s + d_2)$$
$$r=y_s\ ,\ y_s=Cx_s,\ u_s=-Fx_s - Lw_s \quad \cdots\cdots (8)$$

로 되고 목표치와 제어량은 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

다음은 평형상태가 유일하게 존재하기 위한 조건을 구한다.

식(8)에 의해서

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 \\ r \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (9)$$

로되 임의의 d_1, r에 대하여 x_s, σ_s가 유일하게 결정되는 필요충분 조건은 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ 이 된다.

이것은 가정2와 같다. 또 가정4에 의해 $\phi(s)$은 1대1 대응이므로 $\sigma(s)$에 대하여 u_s는 유일하게 정해진다. 여기에서 임의의 d_1, d_2, r에 대하여 얻어지는 어떠한 x_s, u_s에 대해서도

$$\det L \neq 0 \quad \cdots\cdots (10)$$

이되면 w_s는 유일하게 정해지고 평형상태는 유일하게 존재하게 된다. 지금 平衡狀態를 기준으로 잡고 여기에서 변한 각 변수값을 첨자 e를 붙여서 사용하면 식(7)에 의해

$$\dot{\xi}_e = \bar{A}\xi_e + \bar{B}\sigma_e$$
$$\sigma_e = \phi(u_e) \quad u_e = -\bar{F}\xi_e \quad \cdots\cdots (11)$$
$$y_e = \bar{C}\xi_e$$

이 된다. 단 $\phi(u_e) \triangleq \phi(u_e+u_s+d_2)-\phi(u_s+d_2)$ 이어서 가정4에 의해서 $k_{L1} \leq \phi(u_{e1})/u_{e1} \leq k_{H1}$ 로 되어 목표치나 외란의 크기에 관계없이 비선형 특성을 취급하는 것이 가능하다.

여기서 문제가 되는 것은 식(11)을 대역점근안정인 피드백 게인 F를 결정할 필요가 있다. 우선 (A, B)는 가제어쌍인 것이 가정1,2에서 명확하게 나타나 있으므로 다음의 안정화 문제와 같게 된다.

즉 다음의 리카치방정식을 생각해 보자.

$$PT + T'P - 2P\bar{B}K_L\bar{B}'P + Q'Q + R = 0 \quad (12)$$

단, $T = \bar{A} + \alpha I_{n+m} - 2^{1/2}\bar{B}K_L(K_H-K_L)^{-1/2}Q$ $\cdots\cdots (13)$

또 $Q \in R^{m*(n+m)}$, $R \in R^{(n+m)*(n+m)}$ $(R=R;\geq 0)$ 이어서 이것들은 식(12)가 적어도 하나의 정정해 P를 가진다. 이때 식(12)의 유일한 정정해 P를 사용해서

$$\bar{F} = B'\bar{P} + 2^{1/2}(K_H-K_L)^{-1/2}Q \quad \cdots\cdots (14)$$

로하면 식(11)은 임의의 減衰度 $\alpha(>0)$로 大域漸近안정으로 된다.(前田, 1971).

식(14)으로 정한 F를 사용한 행렬 A-BF는 안정행렬이므로

$$\mathrm{rank}(\bar{A}-\bar{B}\bar{F}) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-BF & -BL \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (15)$$

에 의해 rank BL=m, 한편 B는 최대계수를 가지는 것으로 가정하고 있기 때문에, rank B=m이다. 만약 rank L=m'<m이라면 rank BL=m'<m이 된다. 따라서 rank L=m이 되야 하고 L은 正則 즉 식(10)은 성립한다. 이상을 총괄하면 다음과 같다.

시스템 S_1은 가제어1,2,3을 근본으로 하여 식(14)처럼 F=[F : L]을 정하는 것에 의해 임의의 減衰度에 α에서 임의의 스텝상 목표신호에 추종하는 서보계 Fig.1을 구성하는 것이 가능하다.

시스템 S_2에 대한 서보계의 설계

대상시스템(2)식에 外亂을 가하였다.

$$\dot{X} = Ax + Bu + d_1$$
$$y = \phi(\sigma+d_2) \quad \cdots\cdots (16)$$

$d_1 \in R^n$, $d_2 \in R^m$로되는 시스템에 대하여 Fig.2와 같은 I-P형 서보계를 생각해보자. 이때 식(6)이 성립하므로 전체시스템은 다음과 같다.

$$\dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{B}u - Hy + \eta$$
$$\sigma = \bar{C}\xi \ , \ u = -\bar{F}\xi \quad \cdots\cdots (17)$$
$$y = \phi(\sigma + d_2)$$

단, $\xi, \bar{B}, \eta, \bar{F}, \bar{C}$는 식(7)과 마찬가지로

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$$

이다. 전절과 마찬가지로 $\dot{\xi}=0$로되는 평형상태를 생각해보면 Fig.2의 계는 제어량과 목표치가 일치하는 것을 알고 나중에 설계문제에 대해서는 평형상태의 유일성과 F에 의한 대역점근안정화의 2개의 문제에 이르른다. 평형상태의 유일성에 관해서는 전절과 마찬가지로 가정2와 (10)식이 필요충분조건이 된다. 여기서는 대역점근화문제에 대하여 보자. 평형상태 ξ_s에서 각 변수의 변화를 첨자를 붙여서 나타내면

$$\dot{\xi}_e = \bar{A}\xi_e + \bar{B}u_e - Hy_e$$
$$\sigma_e = \bar{C}\xi_e \ , \ u_e = -\bar{F}\xi \quad \cdots\cdots (18)$$
$$y_e = \phi(\sigma_e)$$

로 된다.

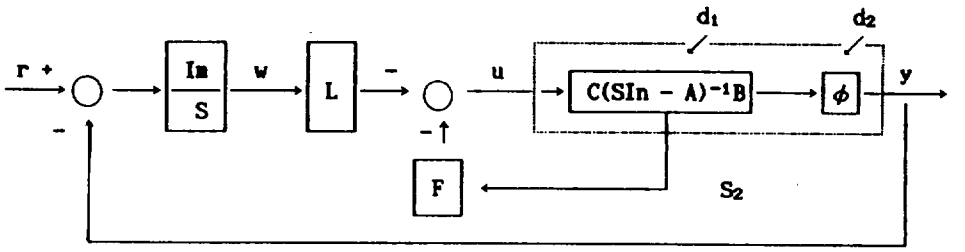

Fig. 2. Servomechanism for system S_2

단, $\varphi(\sigma_e) \triangleq \varphi(\sigma_e + \sigma_s + d_2) - \phi(\sigma_s + d_2)$이다.

서보계의 설계는 식(18)시스템의 대역점근화문제에 이르지만 식(11)과 비교하면 알 수 있는 것처럼 이 경우 시스템 구조가 틀리기 때문에 통상의 안정화 수법은 사용할 수 없으므로 다음 방법을 생각해보자.

지금 $K_M = (K_H + K_L)/2$, $K_W = (K_H - K_L)/2$로 놓고 $\varphi(\sigma_e) \triangleq \varphi(\sigma_e) - K_M\sigma_e$로 정의한다. 이때 다음과 같은 수식이 성립한다.

$$\phi'(\sigma_e)\phi(\sigma_e) \le \sigma'_e K^2_W \sigma \quad \cdots\cdots (19)$$

식(18)을 고쳐쓰면

$$\dot{\xi}_e = (\bar{A} - \bar{B}\bar{F})\xi_e - H\phi(\sigma_e) \quad \cdots\cdots (20)$$
$$\sigma_e = C\xi_e$$

단 $\tilde{A} = \bar{A} - HK_M\bar{C} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -K_MC & 0 \end{bmatrix}$로 된다.

이때 Fig.2는 Fig.3처럼 된다.

우선 어떤 행렬 P를 설계파라메타가 0인 것으로 가정하여 행렬 P와 리카치(Riccati) 방정식에 상당하는 등식을 만들어낸다.

지금 $P = \begin{bmatrix} P_1 & \beta P_2 \\ \beta P'_2 & \beta P_3 \end{bmatrix}$ $(P_1 = P'_1 \in R^{n*n},$

$P_3 = P'_3 \in R^{m*m}$ $P_2 \in R^{n*m}, \beta > 0)$

이 되는 n+m차 정방행렬 P를 생각해보면 다음식이 성립한다.

$$\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}'P - P\bar{B}\bar{B}'P = -Q \quad \cdots\cdots (21)$$

여기서 P,Q는 정해지는 행렬이고 이 P를 사용하여 게인행렬 $\bar{F}$를 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{F} = [F : L] = \bar{B}'P/2 = [B'P_1/2 \ \beta B'P_2] \quad (22)$$

지금 $V(\xi_e)=\xi'_e P\xi_e$로 놓고 식(22)를 식(11)에 대입할 때의 해에 따라 V의 시간미분을 잡아주면 다음과 같다.

$$\dot{V}(\xi_e)=\xi'_e(P\tilde{A}+\tilde{A}'P-P\bar{B}\bar{B}'P)\xi_e-(\xi'_e PH+\phi'(\sigma_e))(H'P\xi_e+\phi(\sigma_e))+\phi'(\sigma_e)\phi(\sigma_e)+\xi'_e PHH'P\xi_e \quad \cdots\cdots(23)$$

여기에서 $Q\triangleq Q_1+Q_2$, $Q_1=\begin{bmatrix} C'K^2_M C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ·(24)

로 잡고 식(21)을 대입하면

$$\dot{V}(\xi_e) = -[\sigma'_e K^2_M \sigma_e-\phi'(\sigma_e)\phi(\sigma_e)]-(H'P\xi_e+\phi(\sigma_e))'(H'P\xi_e+\phi(\sigma_e))-\xi_e(Q_2-PHH'P)\xi_e \quad \cdots\cdots(25)$$

로 된다.

우변 제1항은 식(19)에 의해 정정해가 아니므로 결국 P와 Q_2-PHHH'P을 정정해라고 말할 수 있으면 되고 여기서 지금 행렬 P_1은 n차 리카치 방정식의 유일한 정정해이다.(가정1)

$$P_1(A+\alpha I_n)+(A+\alpha I_n)'P_1-P_1BB'P_1 = -C'K^2_M C \quad \cdots\cdots(26)$$

α는 임의의 양의실수

식(26)을 사용해서 식(21)의 좌변을 계산하면 Q가 결정된다. 여기서

$$P'_2A-P_3K_MC-P'_2BB'P_1=0 \quad \cdots\cdots(27)$$

로 놓으면

$$Q_2=\mathrm{diag}[2\alpha P_1+\beta(P_2K_MC+C'K_MP'_2),\beta^2P'_2BB'P_2] \text{ 이 된다.} \cdots\cdots(28)$$

P_1은 식(26)의 해이므로 행렬 $(A-BB'P_1)$은 正則行列이 되므로 식(27)에 의해서 다음과 같이 된다.

$$P'_2=P_3K_MC(A-BB'P_1)^{-1} \quad \cdots\cdots(29)$$

여기서 P의 정정해 조건을 생각해 보자. P_1은 正定行列, 또 P_3를 정정행렬로 선택하면 행렬P가 正定이기 위한 필요 충분조건은 다음과 같다.

$$P_1-\beta P_2(\beta P_3)^{-1}\beta P'_2=P_1-\beta P_2P^{-1}_3P'_2 > 0 \quad \cdots\cdots(30)$$

여기에서 $P_3\triangleq K^{-1}_M$으로 선택하면 식(29)를 고려하여 식(30)을 계산해서

$$0<\beta<\lambda_{min}P_1/\lambda_{max}\{[C(A-BB'P_1)^{-1}]'K_M*[C(A-BB'P_1)^{-1}]\} \quad \cdots\cdots(31)$$

로 파라미터를 선택하면 P는 정정행렬로 되는 것을 알 수 있다.

다음에 q_2-PHH'P의 정정조건을 고려해보자. 윗식의 P와 식(28)에서

$$Q_2-PHH'P=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w'_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(32)$$

단 $w_1=2\alpha P_1+\beta(P_2K_MC+C'K_MP'_2)-\beta^2P_2P'_2$

$w_2=-\beta^2P_2P_3$.

$w_3=\beta^2(P'_2BB'P_2-P^2_3)$으로된다.

지금 $G(s)=C[sI_n-(A-BB'P_1]^{-1}B$로 놓자 ··(33)

행렬 w_3이 정정일 조건은 식(29)를 사용하면

$$G(0)G'(0) > K^{-2}_M \quad \cdots\cdots(34)$$

인 것을 알 수 있고 다음과 같이 변형된다.

$$\lambda_{min}[G(0)G'(0)] >1/[_{min}K_{Mi}]^2 \quad \cdots(35)$$

행렬 w_1이 대칭, W_3이 정정이므로 Q_2-PHH'P가 정정이기 위한 필요충분조건은

$w_1-w_2w^{-1}_3w'_2 > 0$이고 이 조건을 만족하는 β는 $\lambda_i(w_1-w_2w^{-1}_3w'_2) \geq c+b\beta-a\beta^2 > 0$에 의하여

$$0<\beta<(-b+(b^2+4ac)^{1/2})/2a \quad \cdots\cdots(36)$$

단 $a=\lambda_{max}[P_2P'_2+P_2(K_MG(0)G'(0)K_M-I_m)^{-1}P'_2]$ (>0)

$b=\lambda_{min}[P_2K_MC + C'K_MP_2]$

$c = 2\alpha\lambda_{min}P_1 (>0)$이 된다

이상을 정리해 보면, 시스템 S_3는 가정1,2,3을 근본으로 $F=(1/2)B'P_1$, $L=-(1/2)BG'(0)$을 정함으로서 Fig.2에 나타난 것 같은 임의의 스텝상목표치에 추종하는 서보계를 구성하는 것이 가능하다. 단 P_1은 식(26)의 해 G(s)는 식(33)에서 얻어진다. 또 이 서보계를 구성하기 위해서는 식(35)가 성립하고 설계파라미터는 식(31), (36)을 만족해야 한다.

시스템 S_3에 대한 서보계의 설계

식(3)에 표시한 시스템을 생각해보자. 여기에서 $\varphi(x,u)=f_m(x)+u$로 하고 스텝상에서 外亂 $d_1 \in R^n$, $d_2 \in R^n$을 고려해보면 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}=Ax + Bf_m(x+d_1) + Bu+d_2 \quad \cdots\cdots (37)$$
$$y=Cx$$로 된다.

여기에서 f_m은 $R^n \rightarrow R^m$이고 다음과 같다.

$$\{f_m(u_1)-f_m(u_2)\}'\{f_m(u_1)-f_m(u_2)\} \leq k^2_m(u_1-u_2)'(u_1-u_2) \quad (u_1 \neq u_2,\ k_m \neq 0) \quad \cdots\cdots (38)$$

임의의 크기의 스텝상 목표신호에 추종하는 서보기구로서 앞에서 고려한 I-P형 서보기구를 생각해보자. 기호는 앞에와 같이 잡자.

$$\dot{w}= r - y \quad \cdots\cdots (39)$$
$$u=-Fx - Lw$$

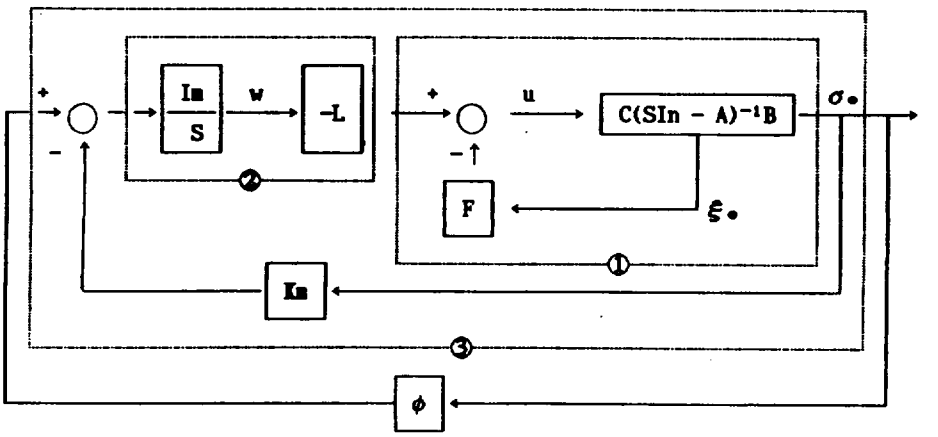

Fig. 3. Equivalent system to Fig. 2

전절과 마찬가지로 평형상태(x_s, w_s)가 유일하게 정해지는 필요충분조건은 가정2와 식(10)이다. 평형상태에서 각변수의 값을 기준치로 해서 측정한 변수치에 첨자e를 붙여서 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\xi}_e=\bar{A}\xi_e+\bar{B}u_e+\bar{B}g_m(x_e) \quad \cdots\cdots (40)$$
$$u_e=-\bar{F}\xi_e$$로 된다.

단, $\xi_e=\begin{bmatrix} x_e \\ w_e \end{bmatrix}$, $\bar{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{B}=\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\bar{F}=[\,F:\ L\,]$

$$g_m(x_e)\triangleq f_m(x_e+x_s+d_1)-f_m(x_s+d_1)$$

이때 다음을 만족한다.

$$g'_m(x_e)g_m(x_e) \leq k^2_m x'_e x_e \quad \cdots\cdots (41)$$

식(40)을 大域漸近安定으로 하는 게인행렬 F를 정하기 위해서는 다음의 n+m차의 리카치(Riccati) 방정식을 생각해보자.

$$P(\bar{A}+\alpha I_{n+m}) + (\bar{A}+\alpha I_{n+m})'P - PBB'P + Q = 0$$
$$Q=diag[k^2_m I_n,\ \delta^2 I_m],\ \delta \neq 0 \quad \cdots\cdots (42)$$

식(42)가 唯一한 正定解를 가지는 것은 $(\bar{A}\ \bar{B})$의 可制御性과 Q의 形態에 의하여 명확해지는데 지금 이것을 P로 하면 다음 식처럼 되고

$$\bar{F} = \bar{B}'P \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

식(40)은 임의의 減衰度 $\alpha(>0)$에서 대역점근안정화가 된다.

또 식(43)처럼 됐을때 행렬 L이 (10)식을 만족하는 것은 전과 마찬가지이고 시시템 S_a는 가정1, 2 및 식(38)를 토대로 하여 식(43)처럼 $\bar{F}=(F, L)$을 정함으로서 임의의 감쇠도 α에서 임의의 크기의 스텝상 목표신호에 추종하는 서보기구 식(38), (39)를 구성하는 가능하다.

摘 要

본 논문에서 고려된 서보특성으로서는 임의의 크기의 스텝상 目標信號를 追從하고 外亂의 영향을 제거하는 것을 나타냈다. 이 문제를 생각하기 위해서 制御對象에 포함된 非線形特性을 3부류로 한정하여 각각 시스템에 대한 설계법을 도입하였다. 즉 우선 목표치가 零인 경우 안정화의 방법을 생각했고 이 결과를 이용하여 I-P형 서보계에 의한 서보계의 설계법을 검토했다. 특히 비선형 특성이 제어대상의 出力側에 있는 경우 充分條件으로 制約이 가해졌고 入力側에 있는 경우와 비교하여 서보계의 구성은 복잡하게 되는 것을 알았다.

參 考 文 獻

Desore C. A. and Y. T. Wang. 1979. The Robust Nonlinear Servomechanism Problem, *International Journal of Control*, 29-5, 804~828.

Doraiswam. R. 1983. Robust Control of a Class of Nonlinear Servomechnism Problem, *Proc. IEE*, pt. D. 30-2, 63~71.

池田, 前田, 兒玉, 1973. 多變數フィートック制御系 の時間領域での設計ー線形時變システムと非線形システムの安定化, システムと制御, 17-11, 662~671.

前田. 1971. 非線形システムの狀態フィートック大域指數安定化, 計測自動制御學會論文集, 5-2, 166~171.

Vidyasager. M. 1980. On the Stabilization of Nonlinear Systems Using State Detection, *IEEE Trans. on automatic Control*, Ac-25-3, 504~509.