교육과학연구, 제14권 제1호, pp. 53-63 (2012. 05)

# 수학 세계의 아름다움에 관한 고찰
# - 수학의 아름다움과 수학 교육이 나아갈 방향 -

현 종 익*

본 연구에서는 수학 속에 내재하고 있는 아름다움을 알아보고 이러한 아름다움이 수학 교육에 주는 의의에 대해 살펴보았다. 수학 세계에는 수많은 아름다움이 존재한다. 수학의 아름다움은 수학의 특색으로부터 나오는데, 수학 세계의 특색 중 하나는 수학의 대상을 수학적 기호로 표현한다는 것이다. 기호로 표현된 여러 가지 수에는 심미성(審美性)이 내재되어 있다. 마방진의 해법은 아주 오래전 동양에서 발견되었으나 지금에 와서도 그 방법이 아름답게 느껴진다. 수(數)뿐만 아니라 도형에서도 아름다움을 찾을 수 있다. 일례로, 일상에서 마주하는 선(線)조차도 만끽할 수 있는 아름다움이 존재하는 것이다. 학생들은 이러한 아름다움 발견함으로서 수학에 대해 흥미를 가지고, 수학이 위대한 학문임을 느낄 수 있다. 또한 수학 세계의 기본원리를 이해하고 주어진 문제를 자기 스스로 해결하려는 태도를 기를 수 있다. 따라서 교단에서 교사가 학생들로 하여금 수학의 아름다움을 발견하도록 하는 것은 수학 교육에 있어서 핵심적인 과제가 될 것이다.

* **주제어:** 수학의 장, 수학의 아름다움, 기수법, 황금분할, 정다면체, 문제해결

## Ⅰ. 서 론

우리의 주의에는 아름다움 그림, 아름다운 음악, 아름다운 건축, 영원히 잊지 못할 아름다운 시가 많이 있다. 그런데 형식적이고 추상적인 수학 세계에는 색깔도 없고, 소리도 없고, 시적인 표현도 없으나 아름다움이 존재한다. 프랑스의 위대한 수학자 Poincare(1854-1912)는 "수학 발전을 할 수 있는 사람은 수학 속에 내재하고 있는 질서, 조화, 전체적 구조와 신비로운 미를 느낄 수 있는 능력을 갖춘 사람이고 이러한 사람만이 가능하다"고 말했다고 한다. 그래서 수학적인 아름다움을 느낄 수 있는 마음을 기르고 발전시키는 일은 인간의 발견 능력의 동기와 깊은 관계가 있다.

수학교육에 있어서도 수학 세계의 아름다움을 개개의 문제 내용에서 느낄 수 있는 능력을 기르고, 수학의 형식적인 표현 속에 숨어 있는 수의 상호관계, 동형 상호관계, 전체적인 구조에 대한 이

* 제주대학교 교육대학 초등수학교육전공 교수(email: hyunji@jejunu.ac.kr)
◎ 접수일(2012년 4월 16일), 수정일(1차: 2012년 4월 30일, 2차: 2012년 5월 6일), 게재확정일(2012년 5월 15일)

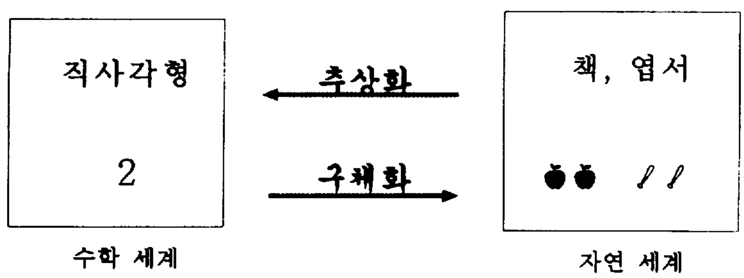
해, 감탄을 통하여 수학에 대한 관심과 적극적인 흥미를 갖도록 지도해야 할 것이다. 이와 같이 수학 세계의 기본원리를 이해하고 주어진 문제를 자기 스스로 해결하는 기쁨을 통하여 새로운 것을 발견할 수 있는 능력을 갖는 것은 수학에 대한 최고의 아름다움이다.

# II. 수학 세계

우리의 일상현상이나 자연현상에서 어떤 문제를 해결하기 위하여 수학적으로 처리하고 수학적으로 처리하는 공간을 우리는 수학 세계 또는 수학의 장이라고 하기로 한다. 자연현상의 수학적 문제는 반드시 수학 세계에서 생각하고 해결하자는 것이다. 그래서 먼저 수학 세계의 특색에 대해서 알아보기로 하자.

우리의 일상생활에서 사용되고 있는 용어와 대상은 그 표현과 뜻이 애매하여 수학 세계에서는 그대로 사용할 수 없다. 가령, "원은 둥근 선이다"라고 말할 때 이것은 원의 문학적 표현은 될 수 있으나 원이 갖는 정확한 정의는 될 수 없다. 수학에 있어서는 앞으로의 논리적 추론을 위하여 그 개념을 정확히 정의해야 한다. 그래서 원판, 둥근 컵의 밑면 등에서 물체가 갖는 자료, 색깔, 크기 등을 제외하고 공동으로 갖는 형태만을 추상화하여 원의 정의를 내릴 수 있다. 즉 "원은 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 집합이다."마찬가지로 바른 네모의 책상, 창문, 도화지, 엽서 등에서 공동으로 갖는 모양만을 추상화하여 "직 4각형은 밑면의 길이가 같고 네 각의 모두 직각인 4각형이다"라고 정의할 수 있다. 여기서 직 4각형의 정의는 추상적이고, 이상적인 개념이고 실제 존재하거나 인간의 능력으로 그릴 수 있는 실제가 아니다. 단지 직 4각형의 모양과 비슷한 실체가 존재하고 있을 뿐이다.

사과 2개, 연필 두 자루, 개 두 마리에서 이들이 갖는 개체, 색깔, 모양 등을 제외하고 이들이 공동으로 갖는 개수만을 추상화하여 "둘", "이"라고 말하고, 이것을 기호로 나타내어 "2"로 표시한다. 이와 같이 우리 주위의 개체에서 그 속성을 버리고 수량만을 추상화하여 수학 세계에서 이것을 기호화하여 자연수 1, 2, 3, 4, 5 … 를 창조한 것이다.




[그림 1]

수학 세계의 하나의 특색은 기호에 의한 표현이다. 음악에서 음의 표현, 전달을 위하여 악보를 이용하는 것과 같이 수학 세계에 있어서도 수학의 대상을 기호로 나타내면 시각적으로 간결하게 전달되고 사고의 절약을 가져와서 매우 편리하다. 그래서 수학 세계에서는 정확히 정의된 대상과 용어 그리고 기호로 차 있다고 할 수 있다.

다음, 생활현상이나 자연현상의 문제를 수학적으로 해결하기 위하여 먼저 기호와 대수적 표시, 도형 관계 표시로 수학적으로 사고할 수 있도록 수학 세계에서 표현되어야 한다. 따라서 수학 문제를 수학 세계에서 수학적으로 표현하고 수학적으로 풀어야 한다. 다음의 보기에서 수학적 표현을 구체적으로 생각하기로 한다.

[보기1] 남자 아동 3명과 여자 아동 2명이 있는데 모두 몇 명이 있습니까? 남자 아동 3명에 3을, 여자 아동 2명에 2를 대응시키고, 이들을 합한다는 연산을 기호 "+"를 사용하여 수학 세계에서는

$$3+2$$

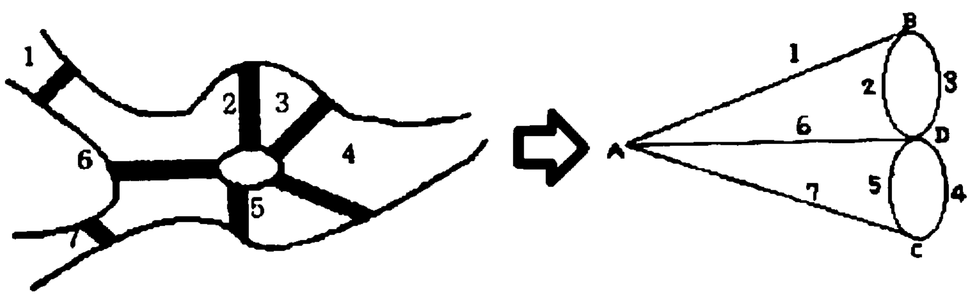
와 같이 표현하고, 계산에 의하여 5를 얻는다.

[보기2] 개와 닭이 합하여 10마리 있고, 그 발을 합하면 28개라 한다. 개와 닭은 각각 몇 마리입니까? 수학 세계에서는 개 x마리, 닭 y마리라 하고 연립방정식

$$x+y=10,\ 2x+2y=28$$

을 얻는다.

[보기3] Konigsberg시에 다음 [그림 2]와 같이 7개의 다리가 있다. 이들 다리를 한 번씩 건너서 모든 다리를 건널 수 있습니까? 다리는 두 점을 연결하는 선으로 생각하고, 육지와 섬을 생각하여 단지 점과 선의 연결 관계만을 생각하고 13살의 Euler는 다음의 그림을 얻었다.




[그림 2]

이 문제가 해결되기 위해서는 기점이 두 개 있거나 하나도 없어야 하는데 기점이 네 개 있으므로 해결이 불가능하다고 했다.

# Ⅲ. 수의 아름다움

수학은 글자 그대로 "수의 학문"이라 할 정도로 수 개념은 수학의 형성 과정에서 중요한 역할을 하고 있다. 그 중에서 자연수는 수의 세계에서 기본을 이루고 있다. 그리스의 Pythagoras는 "수는 만물의 근원이다"라고 말했고, 독일의 수학자 kronecker는 "자연수는 신의 창조한 것이고, 그 외의 수는 모두 인간이 만든 것이다"라고 말했다고 한다.

인간은 고대로부터 물건을 세거나 개수를 말하는데 수사를 사용하였고, 이것을 기호로 나타내고 숫자를 있게 되었다. 지금 우리가 사용하고 있는 Arabia 숫자 1, 2, 3, 4 … 10, 11, 12 … 는 가장 합리적이고 아름다운 기수법이다. 6세기의 인도에서 발견된 0은 없다는 것을 실제로 표현하여 수의 세계에서 혁명적인 표시법이었고, 이것은 Arabia숫자가 자리 잡기의 원리를 갖게 한 동기가 되었다. 이것에 비하여 한자의 숫자 표시

一, 二, 三 …… 十, ± …… 百, 千

은 0에 해당하는 한자 숫자가 없기 때문에 자리 잡기의 원리를 사용할 수 없다. 이것은 동향에서 수학이 발달하지 못한 한 예가 될 것이다. 따라서 Arabia숫자

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

는 아무리 큰 수와 극히 작은 수를 이것만으로 표시할 수 있는 자리 잡기의 원리를 갖춘 매우 아름다운 수라고 할 수 있다.

자연수에 관한 수학적 이론을 완성한 것은 이태리의 수학자 Peano(1858-1932)이다. Peano는 1, 후자, 자연수를 무정의 용어로 사용하여 다음의 5공리로 된 공리계를 설정하여 자연수를 연역적으로 구성하는 데 성공하였다. 여기서 x는 x'의 후자이고, N은 자연수의 집합이다.

Peano의 자연수의 공리계

N1 1은 자연수이다.

N2 x에 대하여 그의 후자 x'는 꼭 하나 있다.

N3 $x'=y'$이면 $x=y$

N4 1은 어떤 자연수의 후자도 아니다.

N5 N의 부분집합 M에 있어서 다음 두 조건을 성립시키면 $M=N$이다.

1) $1 \in M$
2) $x \in M$이면 $x' \in M$

이 공리계는 자연수가 갖고 있는 순서수에 관한 성질에 착안하여 본질적인 것을 추상화 한 것으로 참으로 완벽하고 아름다운 공리계라 할 수 있다. 여기서 자연수의 특색인 이산 집합과 무한 집합의 성질을 교묘히 표현한 것이다.

이것은 대응 $\Phi : N \to N\text{-}1$을 $\Phi(x)=x'$로 정의하면 N2, N3에 의하여 N은 그 진부분집합 N-1에 1대 1로 대응하고 있으므로 N은 무한집합이다. 그리고 N5에 의하여 자연수 n에 대한 명제 p(n)에 대하여

(1) $n=1$이면 $p(1)$은 참이다.
(2) $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

이 두 조건을 만족하면 p(n)은 모든 자연수 n에 대하여 참이 된다. 이러한 추론을 수학적 귀납법이라고 한다. 자연수 n에 대한 명제를 증명하는 데 수학적 귀납법으로 자연수를 대입하면 자연수는 무한이고 인생은 유한이라 불가능하다. 수학적 귀납법은 위의 두 가지를 밝히면 모든 자연수에 대하여 성립한다는 것이므로 얼마나 신기하고 완벽한 아름다움인가.

자연수에 있어서 가법은 $a,b \in N$에 대하여

$$a+1=a',\ a+b'=(a+b)'$$

로 정의된다. 이것을 이용하면 Edison이 이해하는데 곤란을 느끼던 $1+1=2$, $2+1=3$을 쉽게 이해할 수 있고, 자연수에 관한 정리 $a+b=b+a$도 쉽게 증명할 수 있다. 자연수의 집합은 이산 집합이고, 무한 순서 집합이므로 그들 사이에 신비한 공식이 성립한다.

[보기1] 다음의 3방진에 자연수 1, 2, 3, 4 ... 9를 대입하여 세로, 가로, 대각선의 수의 합이 같도록 기입하여라.

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td>$x$</td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

문제를 여러 가지로 대입하여 우연히 성립하는 것을 찾는 것은 수학적이 아니다. 수학적으로 해결하려면 다음과 같이 종합적으로 생각해야 한다.

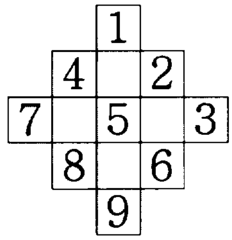
(1) $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

(2) $45 \div 3=15$

(3) $6 \leq x+1,\ x+9<15,\ 5 \leq x<6,\ \therefore x=5$

따라서 다음을 얻는다.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |




이 결과를 오른쪽과 같이 변형하면 홀수 방진에 관한 일반적인 결과를 얻을 수 있다.

[보기2] 집합론의 창시자 Cantor는 "수학은 자유성에 있다"고 말하고, 수학의 이론을 확장하거나 일반화할 수 있음을 주장했다. 자연수의 이론은 정수, 유리수, 무리수, 실수까지 확장하고 허수의 도입으로 실수는 복소수까지 확대되었다. Gauss는 복소수 a+bi를 평면상의 좌표(a, b)인 점으로 시각적으로 표시한 것은 복소수에 일대 혁신을 초래하였다.

Euler는 공식

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

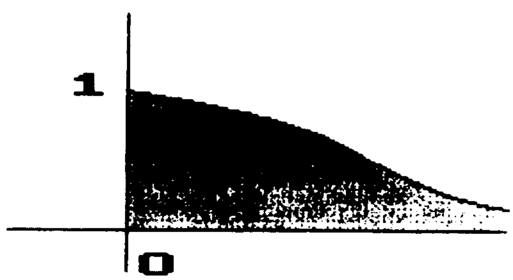
를 이용하여

$$e^{2\pi i} = 1$$

을 얻었다. 여기서 e=2.71828........., π=3.14159........는 끝이 없는 초월수이고 여기서 허수 $i = \sqrt{-1}$ 을 결합한 복잡희기한 수에 이상한 연산을 한 결과가 놀랍게도 1이 된다는 것이다. 이 얼마나 신비하고 놀라운 결과인가. Euler는 무신론자에게 신의 존재를 주장할 때 이 공식을 가끔 사용하였다고 한다.

[보기3] 같은 종류의 해석학도 다음과 같은 결과를 얻었다.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$




[그림 3]

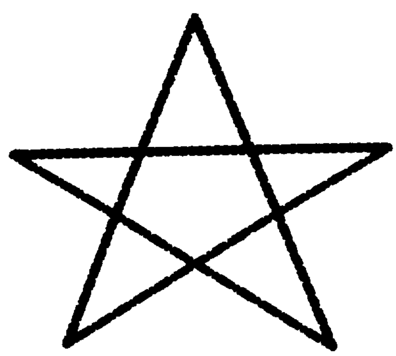
# Ⅳ. 도형의 아름다움

고대의 그리스인은 선(線) 가운데 가장 아름다운 것은 직선(直線)과 원(circle)이라고 생각했다. 직선은 곧은 선으로서 좌우로 무한히 연장할 수 있고, 영원히 만날 수 없고, 원은 둥근 선으로서 어느 점에서나 같은 거리와 굽음은 갖고 돌고 돌면 제자리에 올 수 있는 특색을 갖고 있다. 그래서 직선과 원을 유한 번 사용하여 그린 결과도 아름다운 곡선이라고 믿고 있었다. 따라서 그리스인은 직선을 그리는 자와 컴퍼스만을 도구로 사용하여 곡선을 그리는 방법을 생각했다. 이것을 Euclid의 작도의 공법이라 한다. 이와 같이 작도의 도구로서 자와 컴퍼스를 제한하면 작도 불가능한 문제가 있게 된다. 그리스 시대에 3대 작도 불가능 문제인 각의 3등분 문제, 원적문제, 입방배적문제는 너무나 유명하다. 다음 곡선과 입체 중에서 아름다운 문제를 찾아보기로 한다.

[보기1] 황금분할. Eudoxos(B. C. 400)는 한 선분 $\overline{AB}$를
$\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P로 분할 할 때 이것은 황금분할이라 했다.
이것을 계산하면

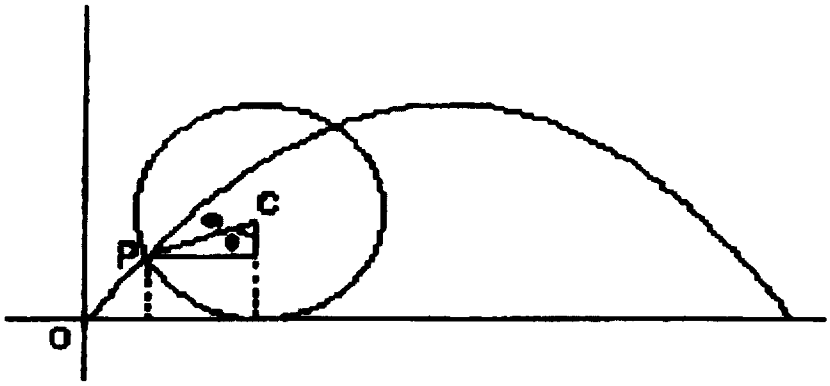
$$\overline{AB} : \overline{PB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.618 : 0.382$$

가 된다. 이것은 나뭇가지의 간격, 책의 세로, 가로의 비가 아름다운 비의 표준이 되고 있다. 황금분할은 정 5각형의 작도와 별표의 작도에 이용되고 있다. 별표 [그림 4]는 오늘까지 아름다운 도형으로 이용되고 있고, 실은 2500년 전 Pythagoras학파의 심벌로써 사용되었다고 한다.



[그림 4]

[보기2] Cycloid. [그림 5] 프랑스의 수학자 Pascal은 1858년 6월에 아름다운 곡선을 발견하고 치통이 있을 때 이 곡선만 생각하면 아픔을 잊을 수가 있었다고 한다. 한 원이 일직선상을 회전할 때 원주 상의 한 점 P가 그리는 곡선을 Cycloid(羅線)이라 한다. 이 방정식은 점 P의 회전각을 $\theta$라 하면



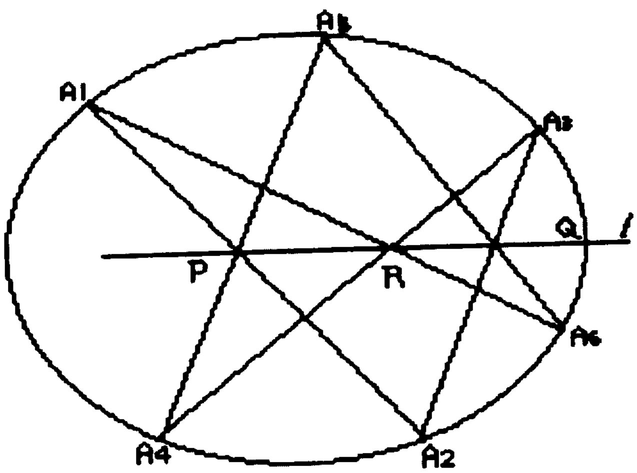

[그림 5]

$$x = a\theta - asin\theta\,, y = a - acos\theta$$

로 표시된다. 여기서 $a$는 원의 반경이다.

Cycloid는 교량의 아치, 건축 곡선으로 많이 이용되고 있다. 이 곡선은 매우 매력적인 성질을 많이 갖고 있다. 그래서 "기하학의 Helen", 또는 "Discard의 사과"라고 불리고 있다.

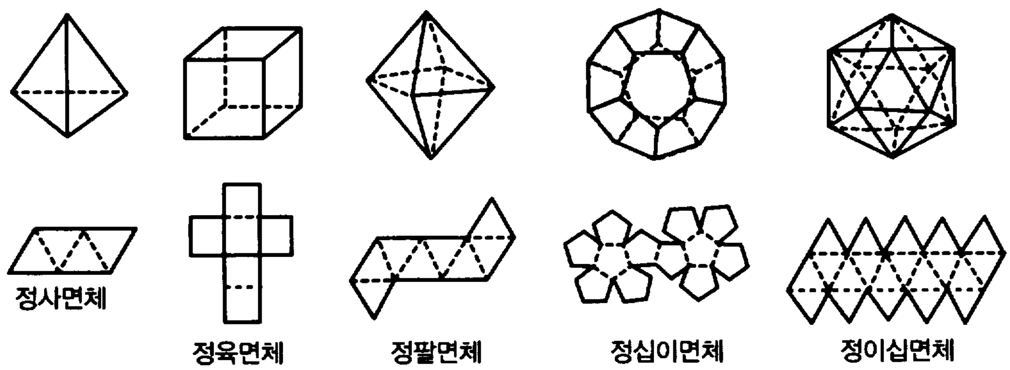
[보기3] 신비의 6각형, Pascal은 16살에 "2차 곡선에 내접하는 6각형에서 서로 마주보는 대변의 교점은 일직선상에 있다" [그림 6]을 발표했다. 여기서 맞보는 두 직선이 평행인 경우에는 그 교점을 무한 원점으로 잡는다. 이 정리는 원, 타원, 쌍곡선과 같은 모든 2차 곡선에서 성립하고 이 정리로부터 여러 가지의 성질을 유도할 수 있다. 그래서 후세에 사람들은 이것을 신비(神秘)의 6각형이라 했다.




[그림 6]

[보기4] 정다면체. 평면상에서 아름다운 정다각형은 무수히 존재한다. 그러나 공간에서 아름다운 정다면체는 몇 가지 존재하는가? 그리스의 Pythagoras는 "정다면체는 정 4면체, 정 6면체, 정 8면체, 정 12면체, 정 20면체의 5종류뿐이다."를 알고 있었다고 한다.

정다면체는 각 면의 합동인 다각형이고 각 모서리의 면과 각은 같은 것을 말한다. Euclid는 Euclid 원본에서 위의 정리를 완벽하게 증명하고 있다. Platon은 5개의 정다면체가 대단히 마음에 들어서 신이 창조한 것이라 생각하고, 만물은 4원소인 土, 空氣, 火, 水로 구성되었다는 그리스 철학을 입증하였다. 그리고 火의 기본 입자는 정 4면체, 空氣는 정 8면체, 水 는 정 12면체, 土는 정 6면체로 구성 하였고, 우주 창시자는 우주 전체를 정 20면체라고 생각하였다고 한다. 그래서 5종류의 정다면체를 "Platon의 도형[그림 7]"이라고 말하기도 한다.




[그림 7]

[보기5] 다면체의 정리. 정다면체뿐만 아니라 일반 볼록다면체에서 다음의 아름다운 성질이 성립한다. 18세기의 수학자 Euler는 "다면체에서 꼭짓점의 수를 V, 모서리의 수를 E, 면의 수를 F라 하면 $V+E-F=2$ 인 관계식이 성립한다."를 발표했다. 여기서 V, E, F는 다면체의 종류에 따라서 변하지만 $V+E-F$의 값은 언제나 일정하다는 것이다. 자연계에서 변하는 자연 가운데 변하지 않은 것을 찾는 것은 매우 중요하다. 다음 V, E, F의 관계는 다면체의 각 면이 평면으로 되어 있는 것이 아니고 고무 면으로 되어 있는 곡면으로 된 곡다면체라고 생각해도 무방하다.

이와 같이 다면체 대신에 곡다면체로 확대 생각하여 Euler의 표수

$$\chi(\tau) = V - E + F \ (\tau : \text{볼록다면체})$$

는 구면에 위상 동형인 곡면은 항상 2가 된다는 위상적 성질을 얻을 수 있다.

## V. 결 론

지금까지 수학 세계가 갖는 아름다움을 여러 가지 각도에서 알아보았다. 수학 세계의 특색인 형

식적이고 추상적인 사고의 산물인 수학적인 아름다움을 느낀다는 것을 좋아하는 사람만이 갖는 순수한 감정인 것이다. 수학 세계는 그림과 음악이 갖는 화려하고 격동적인 감격은 없으나 조각과 같은 차갑고 완벽하고 고상하고 신비로운 아름다움이 있을 것이다. 이와 같이 수학 세계의 아름다움을 통하여 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 될 것이다.

어느 날 밤에 산보를 나간 Thales는 별을 관찰하다가 정신을 잃고 늪에 빠졌다고 한다. 이때 동행한 여인이 "발밑에 일도 모르면서 어떻게 하늘의 일을 할 수 있겠는가?"라고 말했다고 한다.

지금 학생들은 앞에서 소개한 수학 세계의 고도의 아름다움을 느끼는데 부족할 것이다. 그래서 학생들이 매일 접하는 문제에 있어서 자기 스스로 생각하고, 계산하고, 결론을 얻을 때 만족감, 수학에 대한 자신감을 반복하여 가질 때 수학 세계의 아름다움을 간접적으로 느낄 수 있다고 생각한다. 그래서 교사는 가능한 한 학생 스스로 문제를 분석하고 해결하는 능력을 기르면서 수학에 대한 정확성과 다양성을 통하여 점차로 수학 세계의 아름다움을 갖도록 해야 할 것이다.

## 참고문헌

강완·백석윤(1999). **초등수학교육론.** 서울: 동명사

구광조·오병승(1985). **기초과정 기하학.** 서울:희중당.

김용찬·성제현·신택균·하영순·현종익(1984). **교양수학.** 서울: 형설출판사.

백용배(1982). **현대기하학.** 서울: 교학연구사.

백용배(1995). **기하학 개론.** 서울: 교학연구사.

백용배·진대호(1996). **해석기하학.** 서울: 세종출판사.

엄상섭(1976). **대학과정 일반기하학.** 서울: 교학사.

오승재(1994). **수학의 천재들.** 서울: 경문사.

육인선·심유미·남상이(1990). **수학은 아름다워 I.** 서울: 동녘.

육인선(1992). **수학은 아름다워 II.** 서울: 동녘.

현종익(2011). **세계수학사.** 서울: 교우사.

현종익(2011). **7차 개정 교육과정에 따른 초등수학교육론.** 서울: 교우사.

Barbara, J. R.(1985). Mental computation, *Arithmetic Teacher*, 32(6)

Freudenthal, H.(2008). **프로이덴탈의 수학교육론** [*Revisiting Mathemathics education* (*China Lectures*)]. (우정호 역). 서울, 경문사. (원전은 1991에 출판)

N. C. T. M(1989). *New directions for elementary school mathematics.* Yearbook.

Polya, G.(1957). *How to solve it? (2nd).* N. Y.: Doublede.

**<Abstract>**

# Consideration about Beauty of Mathematics World
## - Beauty of Mathematics and the Direction of Math Education -

Hyun, Jong-Ik
(Jeju National University)

The purpose of this study is to find beauty in mathematics and to examine that how this beauty have an influence on mathematics education. There are much beauty in mathematics world. Beauty of mathematics belongs to feature of math. One of the feature of math is to symbolize the object of it. Many symbolized numbers have much beauty. The solution of the magic square had been found since a long time ago, but we can feel that it is beautiful until now. We can find the beauty not only in number, but also in figure. To give an example, a line which we can see everyday has a beauty, either. Students can have an interests of math, and also they can feel math is a grand scholarship by finding this beauty. Moreover, they can develop their attitude to solve the problem themselves. So it is teacher's very important task to make students find beauty of mathematics.

**<Key words>** Field of mathematics, Buauty of mathematics, Numeration system, Golden section, Regular polyhedron, Probrem solving