碩士學位論文

7차 教育課程에서의 離散數學에 관한 硏究

- 그래프 단원을 中心으로 -

指導敎授 梁 永 五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 石 從

2004年 8月

7차 教育課程에서의 離散數學에 관한 研究

-그래프 단원을 中心으로-

指導教授　梁 永 五

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2004년 5월　일

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻
提出者 金 石 從

金石從의 教育學 碩士學位 論文을 認准함.

2004年 7月

審查委員長 ______________ 印

審查委員 ______________ 印

審查委員 ______________ 印

<抄錄>

7차 敎育課程에서의 離散數學에 관한 硏究
-그래프 단원을 중심으로-

金 石 從

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 梁 永 五

컴퓨터의 발달과 함께 이산수학은 전산을 전공하고자 하는 학생들에게는 필수 과목이 되었을 뿐만 아니라 수학을 전공할 학생들에게도 그 중요성과 유용성이 점점 더 강조되고 있는 추세이다. 이런 변화에 맞추어 우리나라에서도 2002년부터 적용되고 있는 고등하교 제7차 교육과정에서 '이산수학'을 심화 선택과목으로 채택하고 있다.

이에 따라 본 논문에서는 우리나라 고등학교에 처음 도입되어 가르치고 있는 이산수학의 역사적 배경과 개념을 고찰하였고, 고등학교 수학에서 이산수학의 필요성을 강조하였으며, 우리나라 고등학교 제6차, 7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용을 비교함과 동시에 우리나라 교육과정과 이웃 나라인 일본의 교육과정과 이산수학의 내용을 비교 분석하였다. 또한 그래프 단원에 포함되어 있는 여러 가지 그래프, 오일러 회로, 헤밀턴 회로, 수형도, 생성 수형도, 행렬과 그래프, 색칠문제 등을 중심으로 이미 제시되어 있는 정의를 보완 설명하였고, 이산수학의 교수학습자료로 활용하기 위하여 교재에 없는 정리의 추가와 증명이 안된 정리의 증명을 제시하였으며, 이들 개념을 보다 명확히 하기 위하여 실생활과 관련된 여러 가지 문제를 제작하여 제시하였다.

※ 본 논문은 2004년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

표 목 차

Ⅰ. 서 론

21세기 지식 정보화 시대에 살고있는 우리의 생활에 있어서 컴퓨터는 필수품이 되었다. 디지털컴퓨터는 부호화된 문자나 숫자와 같이 비연속적인 자료들을 입출력하고, 이들을 이산 수학적 개념하에서 모델링하여 처리하는데, 이는 이산수학의 영역으로써 정보화 사회에서 컴퓨터가 대중화되면서 그 중요성이 강조되고 있다. 산업사회에서는 미분, 적분 등과 같은 연속수학을 중시하고 주요 교육내용이 되었으나, 이제 비연속적인 자료들을 다루는 정보화 사회에서 이산수학이 중요시되고 있다. 따라서 이산수학이 교육내용으로 의미 있게 가르쳐질 필요가 있다. 이에 미국수학교사협의회(NCTM, The National Council of Teachers of Mathematics(1989)에서도 이산수학의 교육적 가치를 대수, 기하, 미적분 등과 같은 수준으로 평가하고, 이산수학을 9-12학년을 위한 교육과정에 포함시켰으며 NCTM(2000)에서도 여러 분야에 폭넓게 쓰이는 현대 수학인 이산수학이 수학교육과정에 없어서는 안 될 부분이라고 강조하고 있다.

실제로 이산수학은 경영분야에도 그 원리가 응용될 뿐 아니라 컴퓨터 공학의 발전으로 인해 증대된 계산력과 결합되어 여러 분야에 응용된다. 이산수학은 기존 수학과는 다른 신선한 문제를 학생들에게 제공할 수 있는 풍부한 자원을 가지고 있다. 또한 수학의 유용성을 강조하며 많은 문제해결의 도구를 제시해 주고 능동적 학습에 적합한 내용을 가지고 있어 수학에 대한 긍정적 태도를 길러주는 등 이산수학을 중등교육과정에서 강조해야 한다는 것은 근거가 충분하다.

이에 따라 교육부에서도 제7차 교육과정에서 고등학교 수학교과 심화선택의 하나로 이산수학을 독립된 교과로 채택하였다. 그러나 새로운 내용이 아무리 훌륭하고 필요한 것일지라도 도입되는 학교 현장의 상황에 따라 그 결과의 성패가 달라지기 마련이므로 일선 교사들의 역할은 매우 중요하다. 2002년부터 고등학교 1학년에 본격 적용되어 2003학년도부터 학생들을 가르치고 있는데 교사들이 이산수학의 내용에 대해 생소하다면 이산수학은 그 내용의 중요성에도 불구하고 선택의 문제에서부터 위협받게 될 것이 분명하다.

본 논문에서는 2003년도부터 고등학교에 처음 도입되는 이산수학의 역사적 배경과 개념을 소개하고 고등학교 수학에서 이산수학의 필요성을 살펴본다. 그리고 우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 수학교육과정과 일본의 수학교육과정을 비교 분석하고 아울러 여기에 포함된 이산수학의 내용을 비교하고 그래프 단원의 여러 가지 그래프, 여러 가지 회로, 수형도, 행렬과 그래프, 색칠 문제 등을 중심으로 정의를 보완 추가하고 증명이 제시되지 않는 정리들을 증명, 새로운 정리를 추가하며 아울러 실생활에 연관된 여러 가지의 예를 제시하여 교사들이 이산수학을 가르치는데 유용한 교수학습 자료도움을 주고자 한다.

Ⅱ. 이산수학

1. 이산수학의 역사적 배경과 개념

수학의 역사는 이산수학으로부터 시작되었다고 해도 지나친 말이 아니다. 가우스(Gauss, K. T.: 1777~1855)가 "수학은 모든 과학의 여왕이며, 정수론은 수학의 여왕이다"라고 말했듯이, 수학은 정수 특히 자연수에 기반을 두고 있다. 그러므로 수학 전반에 걸쳐 주어진 상황을 이해하기 위한 사고 방법은 자연수와 같은 이산적 대상이 갖는 성질을 탐구하는 이산수학에서 다루는 개념들을 기초로 삼는다.

이산이라는 말은 사전적 의미로 '분리된, 따로 따로의, 불연속의' 등이다. 그러므로 이산수학의 내용은 서로 떨어져 있는 대상들이 갖는 수학적 원리 및 내용으로 구성되어 있음을 추측할 수 있다. 이산수학은 수학의 한 분야로 일반적으로 미분, 적분과 같은 연속수학에 대조되는 개념이다. 연속수학에서 셀 수 없는 집합이 관심의 대상인 반면에, 이산수학에서 다루는 대부분의 집합은 유한하거나 셀 수 있는 집합이 관심의 대상이다. 연속수학의 주된 목적이 양의 측정과 관계된 문제상황에 있다면, 이산수학의 초점은 세기(counting)를 하는데 있다. 조합론, 그래프이론, 기호 논리학, 이산적 최적화, 암호론, 부울 대수학, 알고리즘분석 등의 수학의 다양한 분야들이 이산 수학에 포함된다. 전산학, 정보통신분야, 전기공학, 사회학, 심리학, 생태학 등의 다양한 분야에 응용될 수 있다는 점에서 이산수학은 최근에 가장 급속히 발전하고 있는 현대 수학분야의 하나이다.

이산수학이 유한과정을 다룬다는 의미에서 일부 주제에 대하여 유한수학과 매우 흡사한 것처럼 보이나. 그들은 서로 다르게 정의된다. 예를 들어, 그래프이론과 차분방정식 같은 것은 유한수학에서 찾아볼 수 없으며, 이산수학에서는 특히 알고리즘 방법을 강조한다. 알고리즘 분석은 극한에서의 개념과 유사한 사고를

요구한다. 이것은 후에 컴퓨터 공학이나 극한을 이해하는데 매우 유용한 도구가 될 수 있기 때문에 모든 학생들에게 알고리즘을 가르치는 것은 가치가 있는 일이다. 홍수처럼 쏟아지는 신기술로 나날이 복잡해지는 정보화 시대에 부응하는 현대인을 길러내기 위하여 전공을 불문하고 모든 학생들에게 어느 정도의 이산수학 교육을 시키는 것은 필수라 하겠다. 이런 이유로 우리나라에서도 이산수학이 제7차 교육과정에서 고등학교 선택과목으로 채택되었다. 여기서 중등과정의 이산수학은 수학뿐만 아니라 현대사회의 근간을 이루는 과학과 기술을 이해하고 응용할 수 있는 능력의 개발에 필수적이지만 매우 기초적인 사고 방법을 배울 수 있는 초보적이며 기본적인 내용을 담고 있다.

앞으로의 사회 발전 추세에 비추어 볼 때 더 응용적이고 더 활용적인 이산수학의 내용이 다루어져야 할 것이다. 또, 미국수학교사협의회(NCTM)에서 발표한 「학교수학을 위한 교육과정 및 평가기준(Curriculum and Evaluation standards for School Mathematics)」에서는 이산수학을 미래의 수학이라고 규정하고, 이산수학이 수학의 독립된 영역으로서가 아닌 수학의 모든 영역을 통합시켜주는 방향으로 나아가야 한다고 주장하고 있다.

2. 이산수학의 필요성

1990년대에 들어와서 수학의 새로운 분야로 이산 수학에 대한 관심이 깊어지고 국가 수준의 교육과정 속에서 수학의 중요한 학습 내용으로 여겨지고 있다. 이산수학은 수학구조 자체에 흥미를 쉽게 유발하고 수학의 본질적 성격을 반영할 뿐 아니라 정보를 다루기에 적합한 수학이기 때문이다.

Kenney(1991)는 중등학교 수학교육에서 이산수학을 가르칠 것을 강조하였는데 그의 주장에 의하면 다음과 같다.[1)]

1) 박수정 (2002),"제7차 교육과정의 선택과목인 이산수학에 관한 연구", 碩士學位論文, 대구대학교 교육대학원

첫째, 이산수학은 수학적 연관성들의 생성을 촉진하다.

둘째, 이산수학은 실세계에 응용할 수 있는 문제를 해결하기 위한 구조를 제공한다.

셋째, 이산수학은 공학적 환경에 적합하다.

넷째, 이산수학은 논리적 사고와 수학적 추론 능력을 길러 준다.

그리고 1989년의 NCTM의 보고서에는 중등학교에서의 이산 수학의 학습은 단지 대학 진학을 위한 학생뿐 아니라 모든 학생들의 학습에 포함되어야 한다고 추천했다. 이에 관련해서 Hart(1991)는 다음과 같이 이산수학의 중요성을 강조하였다.2)

첫째, 학생들에게 수학은 살아 움직이는 과목이라는 신념을 넣어 줄 수 있다. 학생들은 수백년 혹은 수 천년 동안 알려진 모든 수학이 무미 건조하고 삭막한 것이라고 믿는 듯하다. 수학에서 새로운 것을 발견할 수 없다고 생각하는 것은 너무 어렵기 때문이 아니라 새로운 것이 아무것도 남아있지 않다고 여기기 때문이다. 이는 수학의 많은 분야에서 나타나는 진보가 너무나도 기술적이어서 중등학생 수준의 수준의 시야에는 나타나지 않기 때문이다. 그럼에도 불구하고 이산수학의 많은 주제에서 수학적 배경이 거의 없는 학생들에게도 도입될 수 있는 새로운 발전이 나타나고 있다. 중등수학교육에서 나타나는 이산수학의 중요한 공헌중의 하나는, 교실에서 수학에 대한 흥미와 활력을 일으키는데 도움을 주는 것이다.

둘째, 이산수학은 학생들의 문제 해결과 수학적 모델링 능력을 향상시킨다. 문제 해결은 1980년대 수학교육의 중심 주제였다. 이것은 아직까지도 그렇다. 이산수학을 공부하는 것은 알고리즘적 문제 해결의 강력한 도구를 사용할 수 있는 능력의 개발을 통해 학생들의 문제 해결력을 놀란 만큼 개선한다. 수학적 모델링은 중요하며 학생들이 획득해야할 중요한 기술이다. 이산수학은 새롭고 유용한 수학적 모델을 많이 제공한다. 특히 그래프와 행렬은 흥미 있는 문제의 모델링에

2)강현욱(2001), "고등학교에서 이산수학의 지도에 관한 연구", 碩士學位論文, 강원대학교 교육대학원, p.9.

사용될 수 있고, 수학의 지도에 많은 활동 무대를 제공할 수 있다.

셋째, 이산수학은 실생활에 많은 응용을 할 수 있다. 이산수학은 산업, 경제, 경영 등에서 넓게 사용된다. 예를 들면, 그래프이론은 최적의 시간안에 수행되어야 할 거대한 프로젝트의 모든 소임무들을 효과적으로 계획하는데 사용될 수 있고, 계차 방정식은 고도의 기술 공학분야의 필수적인 수학적 도구이며, 행렬은 컴퓨터 그래픽의 기반이 된다. 1980년대에 와서는 현대 사회에 적합한 수학적 사고와 응용력의 개발를 위해 학생들에게 소개될 내용으로 선정된 새로운 주제중의 80%가 이산 수학이다. 이것은 다른 수학이 이산수학만큼 중요하지 않다는 것을 의미하는 것은 아니다. 오히려 이 관점은 이산수학이 상당히 유용하다는 것이고, 만일 우리가 수학에 대한 정당한 인식과 수학적 지식의 적절한 응용을 원한다면 전통적인 주제와 함께 이산 수학을 가르쳐야할 것이다.

넷째, 이산수학은 기존의 전통적인 수학(대수, 기하, 미적분)을 보완하고 풍부하게 한다. 이산수학은 기존의 수학에 새로운 내용을 추가할 뿐만 아니라 새로운 사고법도 추가한다. 그리고 이사고법은 기존의 문제를 해결하는 데에도 유용하다. 결국 기존의 수학을 공부하는 새로운 도구가 추가됨으로써 기존 수학이 더 보완되고 심화된다고 할 수 있다.

다섯째, 이산수학은 학생들의 수학적 흥미를 고취하기 좋은 내용이 많다. 흔히 기존의 퀴즈나 퍼즐 문제중 이산수학에서 취급하는 문제들이 많다. 이영하(1991)는 하노이 탑의 문제, 썩은 달걀 꾸러미 찾기 문제, 성냥개비 옮기기, 금괴가 있는 서랍 찾기 문제, 배추, 양, 늑대 옮기기 문제, 양동이에 물 길어오기 등이 이산수학 중 알고리즘 관련 내용에서 주로 소개되는 문제들이고 이들 문제의 대부분은 기존이 종이 연필보다는 여러 가지 실험 도구들을 사용하는 것이 편리하다고 말한다. 즉, 추론과정에서 복잡한 수식을 필요로 하지 않기 때문에 의사소통이 편하고 따라서 협동학습을 할 때에 특히 좋은 소재가 되는 것이다. 결국 이산수학은 내용과 교수학습 모두 학생들의 흥미유발에 용이하다는 장점을 갖는다.

Sheldon(1984)는 중등학교 수학교육과정에서 이산수학을 다음과 같은 이유로

강조하고 있다.[3]

첫째, 수학교육과정 그 자체에서의 사고력의 신장과 문제 해결력을 위하여,

둘째, 컴퓨터에 쉽게 접근하고, 활용과 응용을 원할하게 하기 위하여

셋째, 산업, 경제, 정치 등 다양한 분야에 활용하기 위하여,

넷째, 학생들의 흥미와 동기유발을 위하여 이산수학을 중등학교 수학에서 지도하여야 한다.

3. 제6, 7차 수학교육과정과 이산수학 내용

1) 제6, 7차 수학교육과정과 이산수학 내용

제6, 7차 수학교육과정을 이산수학 내용 중심으로 비교하여 보면 <표 1>, <표 2>에서와 같이 다음의 특징을 알 수 있다.

- 6차 수학교육과정의 중학교 1학년에서 다루어지던 도형의 관찰 영역의 내용(단일폐곡선, 꼭지점과 변으로 이루어진 도형, 오일러의 공식)이 삭제되어 7차 수학교과과정의 고등학교 선택과목인 이산수학에서 다루게 된다는 점이다.
- 중학교 2학년 확률과 통계 영역에서 다루던 내용인 기대값이 학습부담을 고려하여 삭제되었고, 중학교 3학년에서 다루던 산포도, 표준편차의 내용은 이동하여 7차 수학교과과정의 <10-가> 단계에서 다루는 점이다.
- 심화 선택과목인 이산수학을 제외한 7차 교육과정의 이산수학 내용은 6차 교육과정에서 다루던 내용을 거의 다루고 있다.
- 크게 변화된 내용으로는 6차 교육과정과 비교하여 큰 특징은 확률과 통계가 정보화 사회에서 방대한 자료 처리, 판단과 관련하여 중요성이 증가하면서 선택과목으로 독립되어 다루어지고 있다는 것을 들 수 있다. 특히, 확률과 통계는 따로 선택과목으로 독립되어 고등학교에서 다루게 되나 다른 과목에서 다

3) 박수정(2002), “제7차 교육과정의 선택과목인 이산수학에 관한 연구”, 碩士學位論文, 대구대학교 교육대학원, pp.6~7.

루고 있어 그 연결성이 매우 강한 것을 볼 수 있다.

학 년	영 역	6 차 내 용	7 차 내 용	비 고
1학년	수와 연산	집합의 뜻과 표현, 집합의 포함관계, 집합의 연산	집합의 뜻과 표현, 집합이 포함관계, 집합의 연산	
	확률과 통계	도수분포표, 히스토그램과 도수분포다각형, 상대도수, 누적도수	도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 도수분포표에서 평균 구하기, 상대도수, 누적도수	중3에서 이동
	도형의 관찰	단일폐곡선, 꼭지점과 변으로 이루어진 도형, 오일러의 공식	삭제	이산수학으로 이동
2학년	확률 통계	경우의 수, 확률의 뜻과 성질, 간단한 확률의 계산, 기대값	경우의 수, 확률의 뜻과 성질, 간단한 확률의 계산	기대값은 삭제
3학년		대표값과 평균, 산포도와 표준편차, 상관도, 상관표, 상관관계	삭제 삭제 상관도, 상관표, 상관관계	10-가로 이동 10-가로 이동

<표 1> 제6, 7차 중학교 수학교육과정과 이산수학 내용

학 년	영 역	6 차	7 차	비 고
		내 용	내 용	
1학년	수와연산	집합의 포함관계, 집합의 연산법칙, 명제의 뜻과 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건	집합의 포함관계, 집합의 연산법칙, 명제의 뜻과 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건	
	확률과 통계	·	대표값과 평균 산포도와 표준편차	중3에서 이동
수학 I	대수	행렬과 그 연산, 연립 일차 방정식과 행렬 등차수열과 등비수열, 여러 가지 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도	행렬과 그 연산, 연립 일차 방정식과 행렬 등차수열과 등비수열, 여러 가지 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도	
	확률과 통계	경우의 수, 순열, 조합, 이항정리, 확률의 뜻, 확률의 계산, 확률분포, 통계적 추정	경우의 수, 순열, 조합, 이항정리, 확률의 뜻, 확률의 계산, 확률분포, 통계적 추정	
수학 II	대수	일차변환과 행렬	삭제	

<표 2> 제6, 7차 고등학교 수학교육과정과 이산수학의 내용

2) 제7차 수학교육과정에서 이산수학 과목의 내용

제7차 고등학교 수학교육과정에서 새롭게 선택과목으로 도입되는 「이산수학」과 「확률과 통계」 과목의 영역과 내용은 아래 <표 3>과 같다.

교과명	영역	내용
확률과 통계	자료의 정리와 요약	도수분포표와 히스토그램, 줄기와 잎 그림, 대푯값, 산포도
	확률	확률의 뜻과 성질, 확률의 계산, 조건부 확률
	확률변수와 확률분포	이산 확률 변수, 이항 분포
이산수학	선택과 배열 그래프 알고리즘 의사 결정과 최적화	순열과 조합, 세는 방법 그래프, 여러 가지 회로, 수형도 수와 알고리즘, 점화관계 의사결정과정, 최적화와 알고리즘

<표 3> 7차 수학교육과정에서 「이산수학」, 「확률과 통계」 과목의 내용

4. 우리나라와 일본 교육과정

1). 우리나라 교육과정과 일본 교육과정의 비교

(1) 우리나라 제6, 7차 수학교육과정 비교

	6차		7차	
학년	과목	시수	단계 및 과정	과목 및 시수
1	공통수학	8	10단계	공통수학(8)
2	수학Ⅰ 수학Ⅱ	10	선택과정	일반선택 : 실용수학(4) 심화선택 : 수학Ⅰ(8), 수학Ⅱ(8), 미분과 적분(4), 확률과 통계(4), 이산수학(4)
3		10		

<표 4> 제 6, 7차 고등학교 수학과 과목편성

구분	단위수	영역	내　　　용
수학 10-가	4	수와연산 문자와 식 확률과 통계	집합의 연산법칙, 명제, 실수, 복소수 다항식과 그 연산, 나머지 정리, 인수분해, 약수와 배수, 유리식과 무리식, 방정식, 부등식 산포도와 표준편차
수학 10-나	4	도형 측정 규칙성과 함수	평면좌표, 직선의 방정식, 도형의 이동 부등식의 영역 함수, 이차함수의 활용, 유리함수와 무리함수, 삼각함수와 그 그래프, 삼각형에의 응용
수학 I	8	대수 해석 확률과 통계	지수와 로그, 행렬, 수열 수열의 극한, 지수함수와 로그함수 순열과 조합, 확률, 통계
수학 II	8	대수 해석 기하	방정식과 부등식 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법과 적분법 이차곡선, 공간도형과 공간좌표, 벡터
미분 과 적 분	4	해석	삼각함수: 삼각함수의 덧셈정리, 삼각방정식 함수의 극한: 삼각함수의 극한, 지수함수와 로그함수의 극한 미분법: 여러 가지 미분법, 도함수의 활용 적분법: 부정적분, 정적분, 정적분의 활용
실용 수학	4	계산기와 컴퓨터 경제 생활 생활 통계 생활 문제 해결	계산기, 컴퓨터 은행의 이용, 보험의 이용 자료의 정리, 확률과 통계 최적화 문제 해결, 생활 문제 해결
확률 과 통계	4	자료의정리와 요약 확률 확률변수와 확률분포 통계적 추정	자료의 정리, 자료의 요약 확률, 조건부 확률 확률변수, 확률분포 표본의 뜻, 구간추정
이산 수학	4	선택과 배열 그래프 알고리즘 의사결정과 최적화	순열과 조합, 세는 방법 그래프, 여러 가지 회로, 수형도 수와 알고리즘, 점화관계 의사결정과정, 최적화와 알고리즘
8과목	40		

<표 5> 우리나라 제7차 고등학교 수학교육과정

제6, 7차 수학교육과정의 세부 내용별과 일부 과목별로 비교 분석한 결과는 다음에 제시하는 표와 같다.

구분	제6차(공통수학)	제7차(10단계)	비 고
내용	진리집합	삭제	·
	지수와 로그	삭제	수학Ⅰ로 이동
	·	산포도와 표준편차	중3에서 이동
	·	두원의 위치관계	중3에서 이동
	도형의 평행이동	도형의 평행이동	좌표축 평행이동 삭제
	부등식의 영역	부등식의 영역	간략화
	삼차함수	삭제	·
	합성함수, 역함수	합성함수, 역함수	간략화
	지수함수, 로그함수	삭제	지수로그와의 계통성을 고려, 수학Ⅰ로 이동

<표 6> 고등학교 1학년 제 6, 7차 비교

구분	제6차	제7차	비고
내용	명제와 진리표	삭제	·
	행렬, 수열, 극한	삭제	·
	계산기와 컴퓨터	프로그래밍 등	강화
	·	자료의 정리와 요약	도입
	미분법과 적분법	삭제	·
	삼각함수와 복소수	삭제	·
	벡터	삭제	·
	순열과 조합	삭제	·
	·	최적화	도입

<표 7> 실용수학 내용의 제 6, 7차 비교

구분	제6차	제7차(수학 Ⅰ)	비고
내용	·	지수와 로그	공통수학에서 이동
	행렬, 수열	행렬, 수열	간략화
	·	지수함수와 로그함수	공통수학에서 이동
	수열의 극한	수열의 극한	직관으로 이해
	함수의 극한	삭제	수학Ⅱ로 이동
	미분법과 적분법	삭제	수학Ⅱ로 이동
	순열과 조합	염주순열, 중복조합 삭제	간략화
	통계	연속확률변수 삭제	간략화

<표 8> 수학 Ⅰ 내용의 제 6, 7차 비교

구분	제6차	제7차	비고
내용	일차변환과 행렬	삭제	·
	삼각함수의 덧셈정리	삭제	미분과 적분으로 이동
	삼각방정식	삭제	미분과 적분으로 이동
	복소수의 극형식	삭제	·
	여러 가지 함수의 극한	삭제	미분과 적분으로 이동
	여러 가지 함수의 미분과 적분	삭제	미분과 적분으로 이동
	·	함수의 극한	수학 Ⅰ에서 이동
	·	다항함수의 미분과 적분	수학 Ⅰ에서 이동

<표 9> 수학Ⅱ내용의 제 6, 7차 비교

(2) 일본 수학교육과정

일본의 고등학교 수학교과과정은 아래 표와 같이 6과목(수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ, 수학A, 수학B, 수학C) 16단위에서 새롭게 개정된 교육과정에서는 7과목(수학기초(필수), 수학Ⅰ(필수), 수학Ⅱ, 수학Ⅲ, 수학A, 수학B, 수학C) 18단위로 2단위수가 증가되고, 수학기초라는 과목이 추가된 점이 특징이다.

종전(從前)		개정(改訂)	
과 목	단 위 수	과 목	단 위 수
·	·	수학기초(필수)	2
수학Ⅰ	4	수학Ⅰ(필수)	3
수학Ⅱ	3	수학Ⅱ	4
수학Ⅲ	3	수학Ⅲ	3
수학A	2	수학A	2
수학B	2	수학B	2
수학C	2	수학C	2
6과목	16	7과목	18

<표 10> 일본의 종전과 개정 후의 과목편성

개정된 일본 수학교육과정의 내용을 살펴보면 아래 표와 같다.

구분	단위수	영역	내 용
수학 기초	2	수학과 인간의 활동 사회생활에 있어서 의 수리적인 고찰 쉬운 통계	수에 얽힌 인간의 발자취 도형의 과학과 인간의 발자취 사회생활과 수학 수리적인 생각 자료의 정리 자료의 경향의 파악
수학 I	3	방정식과 부등식 이차함수 도형과계량	식의 계산, 실수, 방정식과 부등식 이차함수와 그래프, 이차함수의 값의 변화 삼각비, 사인법칙과 코사인 법칙
수학 II	4	도형과 방정식 삼각함수 지수함수・로그함수 미분법・적분법	점과 직선, 원, 일반각, 삼각함수, 삼각함수의 성질, 삼각함수의 그래프 지수함수와 그래프, 로그와 성질, 로그함수와 그래프 미분계수와 도함수, 도함수의 응용, 적분법
수학 III	3	함수 극한 미분법 미분법의 응용 적분법 적분법의 응용	분수함수, 무리함수, 역함수와 합성함수, 호도법과 삼각함수 수열의 극한, 함수의 극한 미분계수와 도함수, 도함수의 계산, 삼각함수의 도함수, 로그함수의 도함수, 지수함수의 도함수, 고차도함수, , 곡선의 방정식과 도함수 도함수의 응용, 속도, 근사식 부정적분, 정적분 면적, 체적, 곡선의 ,
수학 A	2	경우의 수와 확률 논리와 집합 평면도형	집합과 원소의 개수, 경우의 수, 확률 명제와 조건, 명제, 조건과 집합, 명제와 증명 삼각형의 성질, 원의 성질
수학 B	2	복소수와 방정식의 해 평면벡터 공간벡터 복소수평면 확률과 확률분포 산법과 컴퓨터	복소수, 2차방정식의 해와 판별식, 해와 계수의 관계, 인수정리, 고차방정식 평면벡터와 그 연산, 벡터의 응용 공간좌표, 공간벡터, 위치벡터, 벡터의 성분, 내적 복소수 평면, 극형식, 드므와브르의 정리, 평면도형과 복소수 확률의 계산, 확률분포 산법과 컴퓨터
수학 C	2	행렬 여러 가지곡선 수치계산 통계처리	행렬의 연산, 행렬과 연립1차방정식 방정식과 도형, 매개변수표시와 극좌표 근사치과 오차, 이분법, 뉴튼법, 구분구적법, 사다리꼴 공식, 심프슨의 공식, 컴퓨터에 의한 수치적분 도수분포, 통계적 추측

<표 11> 현 일본 수학교육과정

개정된 일본 교육과정을 살펴보면 다음에 나오는 표에서와 같이 중학교에서 고등학교로 옮겨진 내용이 많이 있음을 알 수 있다.

중학교에서 옮겨진 내용	고등학교에서의 위치
수의 집합과 사칙(1학년)	수학 I
일원일차방정식(2학년)	수학 I
이차방정식 푸는 공식(3학년)	수학 I
여러 가지 사상과 함수(3학년)	수학 I
닮은 도형의 넓이의 비과 부피의 비(3학년)	수학 I
구의 겉넓이・부피(3학년)	수학 I
삼각형의 무게중심(2학년)	수학A
원의 성질의 일부(3학년)	수학A
자료의 정리(2학년)	수학기초, 수학B
표본조사(3학년)	수학기초, 수학C

<표 12> 일본교육과정의 개정에서 옮겨진내용

(3) 우리나라 교육과정과 일본 교육과정의 비교분석

일본 수학교육과정을 살펴보면 우리나라 교육과정에는 없는 「수학기초」라는 과목에 수학과 인간의 활동이라는 영역이 있고, 수학 C에서 매개변수표시와 극좌표가 있으며 수치계산 영역이 있는 것을 알 수 있다. 우리나라 교육과정 중에는 일본 교육과정에 없는 과목이 이산수학이다.

우리나라 실용수학에 있는 계산기와 컴퓨터에 해당하는 것이 일본의 수학 B에서 산법과 컴퓨터에 해당하는 것이다. 그리고 실용수학의 경제생활, 생활통계, 생활문제해결에 해당하는 것이 일본의 수학기초에서 사회 생활에서의 수리임을 알 수 있다. 그리고 수학 B에서 다루고 있는 극형식, 드무와브르의 정리 등은 우리나라에서는 삭제되었다.

2). **우리나라와 일본의** 수학과목의 목표

(1) 7차 교육과정에서 수학과목의 목표

<수학 10 단계 : 국민 공통 기본 교육과정>의 목표

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적 인개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

<수학 10-가>의 목표

가. 집합과 명제를 통해 수학적 문장을 이해하고, 복소수의 연산을 할 수 있다.

나. 다항식, 유리식, 무리식에 관한 계산을 통해 식에 대한 이해를 깊게하고, 방정식과 부등식을 풀 수 있다.

다. 산포도와 표준편차를 구할 수 있다.

<수학 10-나>의 목표

가. 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동에 관한 간단한 성질을 알 수 있다.

나. 부등식의 영역을 이해하고, 이를 통해 실생활 문제를 해결할 수 있다.

다. 이차함수, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 기본 개념을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<실용수학>의 목표

수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하고 탐구하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르

며, 이를 통하여 수학의 실용성을 인식한다.

가. 계산기와 컴퓨터를 사용하여 다양한 계산을 하고, 표나 그래프를 그릴 수 있다.

나. 은행과 보험에 관련된 여러 가지 비용 계산 방법을 알고, 합리적인 경제생활을 할수 있다. 실생활의 여러 가지 자료를 정리, 표현, 처리, 해석할 수 있다.

라. 실생활의 여러 가지 문제를 수학적으로 표현하고 해결할 수 있다.

<수학Ⅰ>의 목표

수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력, 수학적 사고력과 추론 능력, 여러 가지 정보를 바르게 이해하고 처리하는 능력, 문제를 해결하는 능력, 수학에 대한 긍정적인 태도 등을 길러 실생활 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

가. 행렬의 기본 개념과 성질을 이해하고, 이를 연립일차방정식의 풀이에 활용할 수 있다.

나. 지수와 로그 및 지수함수와 로그함수의 기본 개념과 성질을 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

다. 수열과 수열의 극한을 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

라. 확률과 통계의 기본 개념과 원리를 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 실생활 문제를 해결할 수 있다.

<수학Ⅱ>의 목표

수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력, 수학적 사고력과 추론 능력, 수학에 대한 긍정적인 성향 등을 길러 높은 수준의 여러 가지 문제를 스스로 이해하고, 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

가. 방정식과 부등식의 풀이 방법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나. 미적분의 기본 개념과 법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

다. 이차곡선, 공간도형, 공간좌표의 개념과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

라. 벡터의 개념을 이해하고, 이를 활용하여 도형을 고찰할 수 있다.

<미분과 적분>의 목표

여러 가지 함수의 극한의 개념을 이해하고 미분법과 적분법의 개념을 이해하여 실생활에 관한 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

가. 여러 가지 함수의 극한에 관한 성질을 이해한다.

나. 여러 가지 함수의 도함수를 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있다.

다. 어러 가지 함수의 적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

라. 미분과 적분을 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

<확률과 통계>의 목표

관찰된 자료를 처리하고 해석하는 활동을 경험하고, 확률과 통계의 기본적인 개념, 원리, 법칙 등을 활용하여 여러 가지 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

가. 관찰된 자료를 정리하고, 그 자료의 분포와 특성을 파악할 수 있다.

나. 확률의 뜻과 성질을 알고, 생활 속에서 일어나는 여러 가지 우연 현상을 이해한다.

다. 이항분포와 정규분포를 이해하고, 이와 관련된 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

라. 통계적 추정을 이해하고, 여론 조사, 설문 조사 등의 결과를 해석할 수 있다.

(2) 일본 수학과목의 목표

<수학기초>의 목표

수학과 인간과의 접촉과 사회생활에 있어서 수학이 해내고 있는 역할에 대해서 이해시키고 수학에 대한 흥미, 관심을 높임과 동시에 수학적으로 보는 방법과 생각하는 방법의 좋은점을 인식하고 수학을 활용하는 태도를 길러낸다.

<수학Ⅰ>의 목표

방정식과 부등식, 이차함수 및 도형과 계량에 대해서 이해시키고 기초적인 지식의 습득과 기능의 습득을 꾀하고 그것들을 정확하게 활용하는 능력을 길러냄과 동시에 수학적으로 보는 방법과 생각하는 방법의 좋은 점을 인식할 수 있도록 한다.

<수학Ⅱ>의 목표

식과 증명, 고차방정식, 도형과 방정식, 여러 가지 함수 및 미분·적분의 고찰에 대해서 이해시키고, 기초적인 지식의 습득과 기능의 습득을 꾀하고 사상을 수학적으로 고찰 처리하는 능력을 길러냄과 동시에 그것들을 활용하는 태도를 길러낸다.

<수학 Ⅲ>의 목표

극한, 미분법 및 적분법에 대해서의 이해를 깊게하고, 지식의 습득과 기능의 습득을 꾀하고, 사상을 수학적으로 고찰 처리하는 능력을 길음과 동시에 그것들을 적극적으로 활요하는 태도를 길러낸다.

<수학 A>의 목표

평면도형, 집합과 논리 및 경우의 수와 확률에 대해서 기초적인 지식의 습득과 기능의 습득을 꾀하고, 사상을 수학적으로 고찰 처리하는 능력을 길음과 동시에 수학적으로 보는 방법과 생각하는 방법의 좋은 점을 인식 할 수 있도록 한다.

<수학 B>의 목표

수열, 벡터, 통계 또는 수치계산에 대해서 이해시켜, 기초적인 지식의 습득과 기능을 익숙하게 익힘을 꾀하고, 사상을 수학적으로 고찰하고 처리하는 능력을 길음과 동시에, 그것들을 활용하는 태도를 길러낸다.

<수학 C>의 목표

행렬과 그 응용, 식과 곡선, 확률분포 또는 통계처리에 대해서 이해시키고, 지식의 습득과 기능의 습숙(습득하고 익히다)을 꾀하고 사상을 수학적으로 고찰 처리하는 능력을 길음과 동시에 그것들을 적극적으로 활용하는 태도를 기른다.

3). 우리나라 와 일본 교육과정에 포함된 **이산수학**의 내용

아래 표에 나와 있듯이 같이 우리나라의 이산수학과목을 제외해서 살펴보면 일본교육과정에서 수학 C 과목에 나오는 수치계산은 우리나라 교육과정에서는 다루지 않으며 다른 내용은 일치한다고 할 수 있다.

구 분	영 역	내 용
10단계(10-가)	수와 연산	집합의 포함관계, 집합의 연산법칙, 명제의 뜻과 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건
	확률과 통계	산포도와 표준편차
수학 I	행렬	행렬과 그 연산
	수열	등차수열, 등비수열, 여러 가지 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도
	확률과 통계	경우의 수, 순열, 조합, 이항정리, 확률의 뜻, 확률의 계산, 확률분포, 통계적 추정
확률과 통계	자료의 정리와 요약	도수분포표와 히스토그램, 줄기와 잎 그림, 대표값, 산포도
	확률	확률의 뜻과 성질, 확률의 계산, 조건부 확률
	확률변수와 확률분포	이산 확률 변수, 이항 분포

<표 13> 우리 나라 고등학교 교육과정에 포함된 내용

구 분	영 역	내 용
수학 A	장합의 수와 확률	집합,순열,조합,이항정리,사상과 확률, 확률의 기본성질, 기대값
	논리와 집합	조건과 집합
수학 B	확률과 확률분포	조건부 확률, 사상의 독립·종속, 확률의 계산
	확률분포	확률분포, 확률변수의 기대치, 확률변수의 분산과 표준편차, 확률변수의 변환, 확률변수의 화와 적, 이항분포
수학 C	행렬	행렬의 연산, 행렬과 연립1차방정식
	수치계산	근사치와 오차, 이분법,
	통계처리	도수분포, 통계적 추측

<표 14> 일본 고등학교 교육과정에 포함된 내용

5. 7차 교육과정에서의 이산수학

1) 성격

이산 수학은 10단계의 수학에 도달 여부와 관계없이 학생들이 선택할 수 있는 과목으로서, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속의 이산 상황의 문제를 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르게 한다. 이 과목은 수학에서 이산적인 내용의 학습을 경험하고자 하는 학생들이 이수하기에 알맞은 과목이다.

이산 수학의 내용은 이산적인 상황에 맞는 사고의 적용을 강조하여 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사 결정과 최적화 등의 영역으로 하고, 이산적 상황의 문제를 쉽고 흥미롭게 학습할 수 있도록 다양한 실생활을 소재로 하여 구성한다.

이산 수학의 학습에서는 수학 학습에서 습득된 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 이산적인 상황을 간결히 표현하고 처리할 수 있도록 하는데 중점을 둔다. 또, 전 영역에 걸쳐서 복잡한 계산이나 문제 해결을 위하여 계산기나

컴퓨터를 적극적으로 활용한다.

2) 목표

수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있다.

(1) 일상적인 정보에서 수량적인 관계나 법칙을 계산기나 컴퓨터를 이용하여 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

(2) 세기의 기본이 되는 방법과 집합이나 자연수를 나누는 방법을 이해하고, 이를 이용하여 실생활에서 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.

(3) 사물의 현상을 그래프와 행렬 등을 이용하여 조직·해석하고, 이를 활용 할 수 있다.

(4) 여러 가지 문제를 알고리즘적으로 사고하고 처리하는 능력을 기른다.

(5) 다양한 의사 결정 과정과 상충적인 상황에서 합리적이고 논리적인 사고를 필요로 하는 문제를 해결할 수 있다.

3) 내용체계

이산수학의 내용을 체계화하면 다음과 같다.

영 역	내 용	
선택과 배열	순열과 조합	경우의 수 순열 조합
	세기의 방법	배열의 존재성 포함배제의 원리 집합의 분할 여러 가지 분배의 수
그래프	그래프	그래프의 뜻 여러 가지 그래프
	여러 가지 회로	오일러 회로 해밀턴 회로
	수형도	여러 가지 수형도 생성 수형도
	그래프의 활용	행렬의 뜻 그래프와 행렬 색칠문제
알고리즘	수와 알고리즘	수와 규칙성 수와 알고리즘
	점화관계	두 항 사이의 관계식 세 항 사이의 관계식
의사결정과 최적화	의사 결정 과정	2×2게임 선거와 정당성
	최적화와 알고리즘	계획 세우기 그래프와 최적화

<표 15> 이산수학의 내용 체계표

4) 내용

(1) 선택과 배열

① 순열과 조합

합·곱의 법칙을 이해하고, 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있으며 순열과 조합의 뜻을 알고, 어떤 주어진 조건을 만족하는 순열이나 조합의 수를 구할 수 있다.

② 세기의 방법

비둘기집의 원리를 이용하여 배열의 존재성에 관련된 실생활의 문제를 해결할수 있게하고 포함배제원리를 이해하고 수를 셀 수 있게 하며 여러 배열을 가지고 분할을 할 수 있도록 한다.

(2) 그래프

① 그래프

그래프의 뜻을 알고, 기본적인 용어를 알 수 있으며 임의의 그래프에서 꼭지점의 차수와 변의 수 사이의 관계를 이해하고 여러 가지 그래프를 안다.

② 여러 가지 회로

그래프에서 오일러회로가 존재하기 위한 필요충분조건을 이해하고 해밀턴 회로가 존재하기 위한 충분조건이나 필요조건을 이해한다.

③ 수형도

수형도에서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 이해하고 주어진 그래프의 생성수형도를 찾을 수 있다.

④ 그래프의 활용

행렬의 뜻을 알고, 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있으며, 그래프를 행렬로 나타내고, 그 성질을 알 수 있도록 하여 색칠문제 등의 실생활 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

(3) 알고리즘

① 수와 알고리즘

수와 관련된 여러 가지 규칙성의 문제를 해결할 수 있도록하며 자연수를 이진법으로 나타내는 알고리즘, 소수를 판정하는 알고리즘, 최대공약수와 최소공배수를 구하는 알고리즘을 이해한다.

② 점화관계

두 항, 세 항사이의 관계식을 이해한다.

(4) 의사 결정과 최적화

① 의사 결정 과정

결정적인 2×2 게임에서 의사 결정 과정의 변화를 알고 여러 가지 선거 방법의 수학적 의미와 그 정당성을 이해한다.

② 최적화와 알고리즘

실생활에 나타나는 계획세우기의 최적화 문제를 해결할 수 있고 도로망에서 최적의 경로를 구할 수 있다.

5) 교수·학습 방법

(1) 1～10단계 수학학습에서 습득한 지식과 기능을 활용하여 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하게 하고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.

(2) 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사 결정과 최적화 영역의 특성과 난이도를 고려하여 수준에 알맞게 재구성하여 지도할수 있으나 내용이 통합적으로 이해되도록 한다.

(3) 학습자 중심의 관찰, 조사, 수집, 탐구 활동을 강조함으로써, 수학의 이산적인 상황에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하고 이산 수학의 가치와 실용성을 인식하게 한다.

6) 평가

수학 학습의 평가는 획일적인 방식을 지양하고, 수학 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등의 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 다음과 같은 사항을 고려하여 수업 목표에 충실한 평가가 될 수 있도록 한다.

(1) 수학 학습 평가는 학생 개개인의 전인적인 성장과 수학 학습을 돕고, 교사) 자신의 수업 방법을 개선하기 위한 것이어야 한다.

(2) 학생의 학습 활동 측면에 대한 평가뿐만 아니라 수학 학습의 지도를 담당하는 교사의 지도 활동 측면에 대해서도 자발적인 평가를 함으로써 발전적인

수학 학습 지도 개선의 참고 자료로 사용한다.

(3) 학생의 인지 발달 수준을 고려하고, 교육 과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하여 평가한다.

(4) 인지적 영역에 대한 평가는 사고력 신장을 위하여 결과보다는 과정을 중시해야 하며, 기본적인 지식, 개념의 이해, 기본적인 계산 기능 등에 중점을 둔다.

(5) 문제 해결에 대한 평가에서는 결과뿐만 아니라 문제의 이해 능력과 문제 해결과정을 파악학 수 있도록 한다.

(6) 수학적 성향에 대한 평가에서는 학생들의 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심과 흥미의 정도를 파악할 수 있도록 한다.

(7) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 이해, 용어의 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 기능, 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력, 실생활 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하는 태도 등을 강조하여 평가한다.

(8) '이산수학' 교육 과정에 제시되어 있는 내용에 대한 학습 성취 수준을 전반적으로 평가하여야 한다.

(9) 평가 기준의 수준 구분은 학습 목표, 수학적 가치와 유용성, 내용의 복합성, 지식과 기능의 종류의 활용 범위 등의 정도에 따른다.

Ⅲ. 그래프 이론

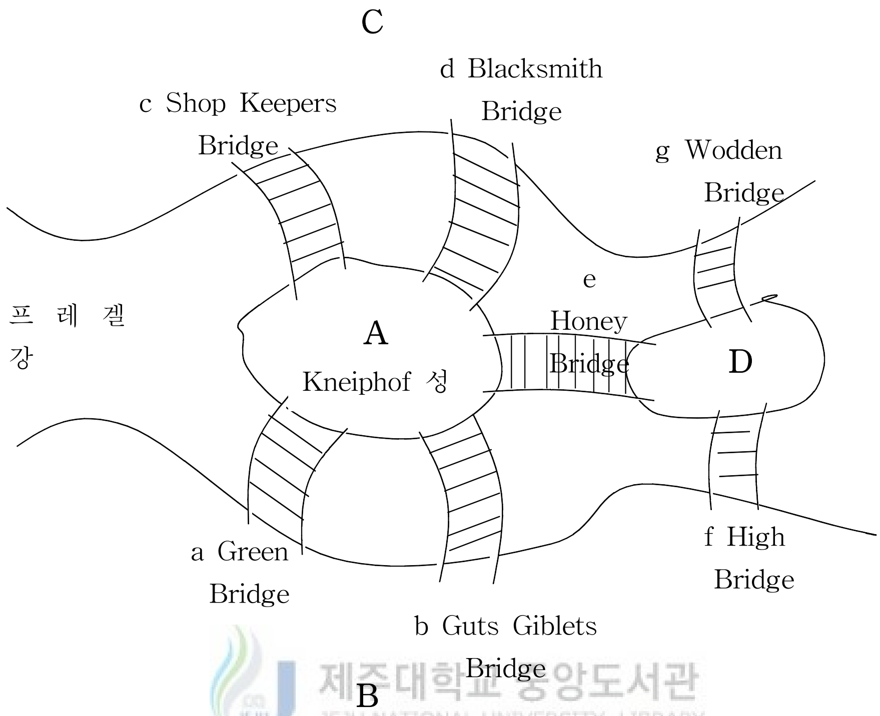
1. 그래프 이론의 역사와 수학

1) 그래프의 기원

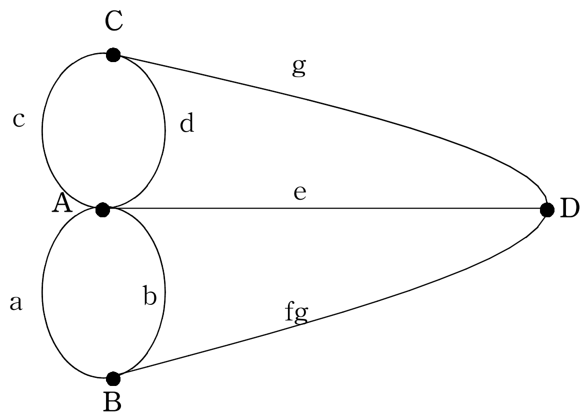
그래프는 컴퓨터 과학 분야에서 가장 많이 사용되는 수학적 모델 중의 하나이다. 어떠한 대상을 평면 위의 점들로 표시하고 그 대상들 사이의 관계를 적절히 선으로 연결하는 가시적인 그래프 형태는 사람들의 일상생활에서도 무의식 중에 많이 사용되고 있다.

그래프는 1736년 쾨니스베르그(Kőnigsberg)의 다리 문제를 해결하기 위해 수학자이고 물리학자인 오일러(Euler)가 처음으로 사용한 것으로 기록되어 있다. 프러시아의 쾨니스베르그 지방의 프레겔(Pregel)강은 Kneiphof 섬 주위를 지나 두 개의 지류로 나뉘어 지나간다. 그리고 그 강 위에는 7개의 다리가 그림 <Ⅲ-1>의 (1)와 같이 놓여있다. 쾨니스베르그의 다리 문제란 임의의 한 점에서 출발하여 일곱 개의 다리를 단 한번씩만 지나서 출발점으로 되돌아 올 수 있는가 하는 문제이다. 오일러는 모든 다리를 단 한 번만 거쳐서는 절대 출발한 지점으로 돌아올 수 없다고 결론지었다. 우선 오일러는 문제해결에 영향을 미치지 않는 사항들을 생략하였다. 섬의 크기, 다리의 길이 등을 단순화하여 점과 선으로 표시하여 <그림 Ⅲ-1>의 (2)와 같은 형태로 만들었다.

(1) 쾨니스베르그(Kőnigsberg)의 프레겔(Pregel)강의 일부



(2) 오일러의 그래프



<그림 Ⅲ-1> (1) 쾨니스베르그의 프레겔l강의 일부 (2) 오일러의 그래프

그래프의 꼭지점(vertex)에 연결된 변(edge)의 수를 차수(degree)라고 할 때, 오일러는 각 정점의 차수가 짝수인 경우에만 임의의 꼭지점에서 출발하여 각 변을 단 한번씩만 거치고 출발한 꼭지점으로 되돌아 오는 길이 있음을 증명하였다. 이러한 것을 오일러 경로(Eulerian Walk)라고 부른다. 쾨니스베르그의 다리문제는 모든 꼭지점의 차수가 홀수이므로 오일러의 경로는 존재하지 않는다.

이러한 최초의 응용 이후, 그래프는 여러 분야에 광범위하게 이용되어 왔다. 전기 회로의 분석, 각도시를 연결하는 도로망이나 항공망, 수송망, 각 전화국들을 연결하는 통신망, 화학 구조의 표현, 저유지들을 연결하는 송유관, 유전 공학, 언어학, 연구 계획 설정 등 여러 분야에 응용되고 있다. 특히 컴퓨터 공학에서는 컴퓨터 네트워크, 고집적 회로의 설계, 컴퓨터 그래픽스, 컴파일러의 최적화, 정보의 조직과 검색등 다양한 분야에서 응용되고 있다. 사실 모든 수학적 구조 중에서 그래프가 가장 광범위하게 사용된다고 해도 과언은 아니다.

2) 오일러

오일러(1707. 4.15~1783. 9.18)는 스위스의 수학자·물리학자이고, 바젤 출생으로 주로 독일·러시아의 학사원을 무대로 활약하였고, 해석학의 화신(化身), 최대의 알고리스트(algorist: 數學者) 등으로 불렸다. 그의 연구는 수학·천문학·물리학뿐만 아니라, 의학·식물학·화학 등 많은 분야에 광범위하게 걸쳐 있다. 처음에는 목사가 되기 위하여 바젤대학에서 신학과 헤브라이어를 공부하였으나, 수학에서 J. 베르누이의 관심을 끌어 곧 D. 베르누이, N. 베르누이와 사귀었다. 이와 같이 베르누이가(家) 사람들의 조언과 상트페테르부르크 학사원에 간 베르누이 형제의 소개로, 처음에는 그 학사원의 의학부에 이어서 수학부에 적을 두었다. 40년 프리드리히대왕의 초청을 받아 베를린으로 이주하였다. 그 후 24년간 베를린학사원의 수학부장으로서 연구에 몰두하였으나 점차 궁정에서의 인기가 떨어져 다시 예카테리나 여제(女帝)의 청을 받자 66년에 상트페테르부르크로 돌아왔다. 후에 시력을 잃고 장님이 되었으나 천부적인 기억력과 강인한 정신력으로 연구를 계속하였다. 수학자로서의 연구를 시작한 시기는 뉴턴이 죽은 시기에 해당

하여 해석기하학·미적분학의 개념은 갖추어져 있었으나 조직적 연구는 초보단계로 특히 역학·기하학의 분야는 충분한 체계가 서 있지 않았다. 이러한 미적분학을 발전시켜 <무한해석 개론 : Introductio in Analysis Infinitorum>(1748), <미분학 원리 : Institutiones Calculi Differontial>(1755), <적분학 원리 : Institutiones Calculi Integrelis> (1768~1770), 변분학(變分學:극대 또는 극소의 성질을 가진 곡선을 발견하는 방법)을 창시하여 역학을 해석적으로 풀이하였다. 이 밖에도 대수학·정수론(整數論)·기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다. 그 중에도 삼각함수의 생략기호(sin, cos, tan)의 창안이나 '오일러의 정리' 등은 널리 알려져 있다. 베를린 시대에 프리드리히 대왕의 질녀에게 자연과학을 가르치기 위하여 쓴 <독일 왕녀에게 보내는 편지>는 당시 계몽서로서 유명하였으며 7개 국어로 번역 출판되었다.

3) 헤밀턴

헤밀턴(1805~1865)은 영국의 수학자·이론물리학자이고 아일랜드 더블린 출생으로 변호사의 아들로 태어나 어릴 때부터 신동으로 통하였다. 백부(伯父)의 외국어 교육으로 13세 때에 이미 10여 가지 외국어를 익혔다고 한다. 수학에 흥미를 가지고 뉴턴·라그랑주·라플라스 등의 저서를 읽어, 대학 입학 당시에는 이미 수학을 거의 통달하였으며, 또 광학계(光學系)에 관한 뛰어난 이론과 아이디어를 창안하였다. 1824년 더블린대학의 트리니티 칼리지에 입학, 27년 재학 중인 칼리지의 천문학 교수로 선임되었으며, 던싱 천문대장을 겸하였다. 이듬해 <광선계의 이론> 제1부를 발표하였는데 이것은 해밀턴의 특성함수(特性函數)를 도입한 것으로, 광학계에 대한 일반적인 대수적 이론을 세운 것이며, 기하광학(幾何光學)의 기초이론이었고, 후년의 역학이론을 출발시키는 기본이 되었다. 이어 원뿔굴절[圓錐屈折]을 예견하였는데(1832), 이것은 H.로이드에 의하여 실증되었다. 그 무렵부터 광학을 도입한 역학의 모든 분야에 이를 확장시키려는 시도에서 특성함수를 사용한 빛의 전파(傳播)와 질점(質點)의 운동을 통일, 34년 변분원리(變分原理)라고 하여 '해밀턴의 원리'를 확립하였다. 또한 '해밀턴의 정준운동(正

準運動) 방정식' 을 수립함으로써, 해석역학(解析力學)의 기초를 확립하기도 하였다. 한편, '4차원법' 을 착상하여 그 이론의 전개에 노력하였고, 이론물리학의 모든 것을 포괄하는 유용성을 밝히려 하였으나 실현되지 않았다. 그러나 그에 의하여 대수계(代數系)에 대한 다양한 길이 열렸고, 그 후의 대수학 및 물리학에 대한 응용에 커다란 영향을 끼쳤다. 워즈워스・콜리지 등과도 교유하였다.

2. 그래프 영역의 내용 분석

이산수학 교과서의 그래프 영역을 중심으로 내용을 살펴보면서 그래프 관련 수학용어의 정의와 주의할 점, 증명 없이 사용되는 정리의 증명을 제시하고 교과서에 없는 Welch-Powell의 알고리즘을 소개하였으며 실생활과 관련된 보다 다양한 예들을 제시하여 학생 및 교사들에게 도움을 주고자 한다.

단 원	정 의	교재	보완 및 추가	페이지		실생활문제 (논문 페이지)
				교과서	논문	
그래프	그래프	○	○	49	35	문제1(p39)
	꼭지점	○		49	35	
	변	○		49	35	
	같은 그래프	○	○	49	36	
	꼭지점의 차수	○		51	38	
	완전그래프	○		53	40	
	평면그래프	○	○	54	40	
	면의 차수	×	○		40	
여러 가지 회로	경로	○		58	44	문제2(p45) 문제3(p46) 문제4(p48)
	회로	○		58	44	
	연결된그래프	○			44	
	오일러 회로	○		58	44	
	한붓그리기	×	○		45	
	해밀턴 회로	○		63	48	
	해밀턴 경로	○		63	48	
수형도	수형도	○		66	50	문제5(p55) 문제6(p56) 문제7(p56)
	생성수형도	○		72	52	
	깊이 우선검색방법	○	○	74	54	
	너비 우선 검색방법	×	○		54	
그래프의 활용	행렬	○		77	58	문제8(p68) 문제9(p72) 문제10(p72) 문제11(p73)
	행렬의 덧셈과 뺄셈	○		78	58	
	행렬의 실수 k배	○		78	58	
	행렬의 곱셈	○	○	79	59	
	인접행렬	○		80	61	

<표 16> 정의 및 실생활문제

단 원	정리 및 알고리즘	교재		보완 및 추가	페이지		비고
		유무	증명		교과서	논문	
그래프	정리1.1	○	×	○	51	38	
	정리 1.2	×		○		38	
	정리 1.3	○	○		53	40	
	정리 1.4	×		○		41	
	정리 1.5	×		○		42	
여러 가지 회로	정리 2.1	×		○		45	
	정리 2.2	○	×	○	59	45	
	정리 2.3	○	×	○	63	48	
수형도	정리 3.1	○	○		69	51	
	정리 3.2	○	×	○	69	51	
	정리 3.3	○	×	○		52	
그래프의 활용	정리 4.1	○	×		80	61	
	정리 4.2	○	×		80	61	
	정리 4.3	○	×		80	62	
	정리 4.4	○	○	○	82	62	
	정리 4.5	×	×	○		62	
	정리 4.6	○	×	○	81	62	
	정리 4.7	×		○		67	
	알고리즘	×		○		64	

<표 17> 교과서에 있는 정리와 보완 추가된 정리

1). 그래프

1.1) 그래프의 뜻

【탐구 1】 교과서 48쪽

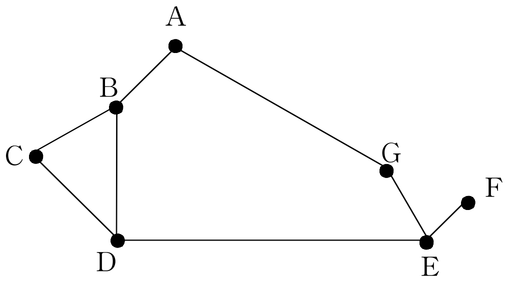
하늘이의 가족은 다음 지도에 나와있는 보문호 근처의 숙소를 출발하여 불국사, 분황사, 석굴암, 박물관, 천마총, 민속공예촌 등 여러 지점을 돌아보려고 한다. 답사할 곳과 길을 간단히 나타내는 방법은 무엇인가?

(1) 위의 지도에서 답사할 곳을 다음과 같이 A, B, C…등으로 나타내었다.

보문호	분황사	천마총	박물관	불국사	석굴암	민속공예촌
A	B	C	D	E	F	G

투명지를 이용하여 각 지점을 표시하고 A, B, C…등으로 나타내어보자.

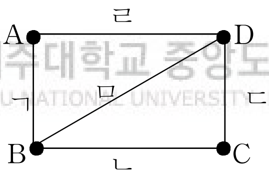
(2) (1)에서 얻은 그림에서 두 지점 사이에 다른 지점을 거치지 않는 도로가 있으면 그 두 지점에 대응하는 두 점을 선으로 연결하면 다음과 같은 그림이 된다.



<그림 Ⅲ-3>

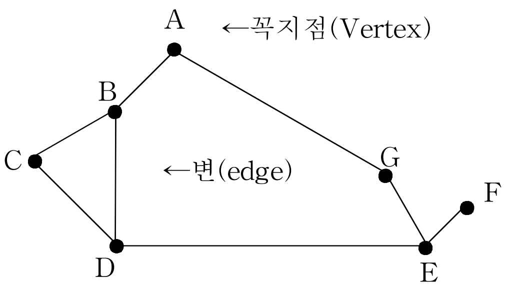
【**정의 1.1**】 점과 선으로 이루어진 그림을 **그래프**라고 한다. 그래프에서 점을 **꼭지점**이라 하고, 꼭지점을 연결한 선을 **변**이라고 한다.

일반적으로 우리가 알고 있는 일차함수, 이차함수 등의 그래프와는 다른 의미이다. 다음 그림을 살펴보면서 부연설명을 하면



꼭지점의 집합이 {A, B, C, D}이고 변의 집합이 {ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ}이며 변 ㄱ은 꼭지점 A와 B가 결합해서 만들어진 것이다. 마찬가지로 변 ㄴ은 꼭지점 B와 꼭지점 C가 결합해서 만들어진 것이다. 다른 변들도 마찬가지이다. 그리고 다음에 나오는 정의 1.2)도 우리가 말하는 일차함수, 이차함수 등과의 다른 점 중의 하나라고 할 수 있다.

【보기 1】 다음 그림은 위의 탐구활동에서 만들어진 그래프이다.

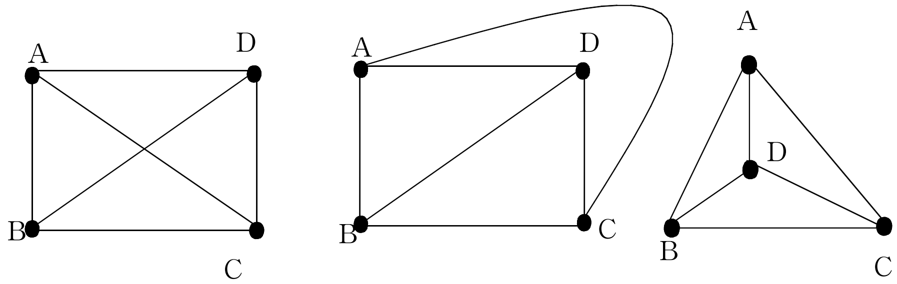


【정의 1.2】 꼭지점의 위치를 바꾸거나 변을 구부리거나 늘이거나 줄여서 같은 그림으로 그려질 수 있으면 두 그래프는 같은 것으로 본다

이 정의에서 '변을 구부리거나' 에서 각이 있게 구부리면 점이 생긴다고 학생들은 생각할 수 있으므로 꼭지점의 개수가 변하지 않는다는 것을 강조해야 할 것 같다. 그리고 같은 그래프라고 하는 것보다는 동형(같은 형태의 그래프)로 하는 것이 좋을 것 같다. 그래서 정의를 다음과 같이 새로 정의하는 것이 바람직하다.

【정의 1.2】 꼭지점의 개수가 같고 꼭지점을 연결하는 변의 개수가 같은 두 그래프가 꼭지점의 위치를 바꾸거나 변을 구부리거나 늘이거나 줄여서 같은 그림으로 그려질 수 있으면 이 두 그래프를 **동형그래프** 라고 한다.

【보기 2】 다음 세 그래프는 동형그래프(같은 그래프)이다.



【탐구 2】 교과서 50쪽

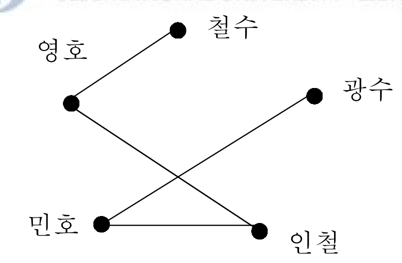
다섯명이 한조를 이루어 악수를 하였다. 각 사람이 악수한 횟수의 합과 악수한 총 횟수는 어떤 관계가 있는가?

【활동】 영호, 철수, 광수, 인철, 민호가 악수를 나눈 결과가 다음과 같다고 하자.

	영호	철수	광수	인철	민호
영수		○		○	
철수	○				
광수					○
인철	○				○
민호			○	○	

(1) 위의 결과를 각 사람을 꼭지점으로 하고 악수한 두 사람을 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.

풀이)



(2) 이 그래프에서 한 꼭지점에 이어진 변의 개수는 무엇을 의미할까?

(3) 이 그래프에서 모든 변의 개수는 무엇을 의미할까?

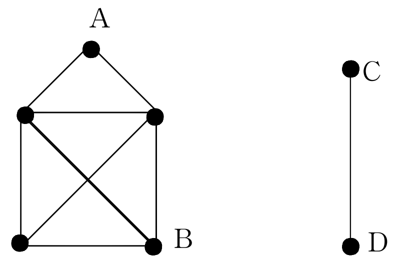
(4) 이 그래프에서 각 꼭지점에 이어진 변의 개수의 합과 모든 그래프의 변의 개수 사이에는 어떤 관계가 있는가?

【토론】

앞의 다섯 사람이 각각 정확히 세 번씩 악수할 수 있는지를 말하여라.

【정의 1.3】 그래프에서 한 꼭지점에 연결된 변의 개수를 그 **꼭지점의 차수**라고 한다.

【보기 3】 다음 그래프에서 A의 차수는 2, B의 차수는 3, C 와 D의 차수는 각각1이다.



※ 위의 탐구활동과 토론에서 다음과 같은 정리가 만들어진다.

【정리 1.1】 그래프의 모든 꼭지점의 차수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이다.

【증명】 변마다 두 개의 꼭지점이 있으므로 모든 꼭지점의 차수를 더하면 변의 수의 두 배가 된다. ▲

두 꼭지점 사이의 변을 두 손이 악수를 하고 있다고 생각하여 이 정리를 **악수정리**라고도 한다.

【정리 1.2】 그래프에서 홀수점의 개수는 짝수개이다.(토론 2와 관련된 정리)

여기서 차수가 짝수인 점을 짝수점, 홀수인 점을 홀수점이라 한다.

【증명】 그래프에서 꼭지점의 차수의 합은 짝수점들의 차수의 합과 홀수점들의 차수의 합을 더한 것과 같고 이것은 정리 1-1에 의해 변의 수의 두 배이므로 항상 짝수임을 알 수 있다. 이때 짝수점들의 차수의 합은 항상 짝수가 되므로 홀수점들의 차수의 합도 짝수가 되어야 한다. 따라서, 홀수를 짝수 번 합하면 짝수가 되므로 홀수점의 개수는 짝수개가 존재하게 된다. ▲

실생활문제 1)

어떤 모임에서 홀수번 악수한 사람의 수는 짝수임을 보이시오.

【증명】모임에 참석한 각 사람을 꼭지점으로 하고, 악수를 변으로 대응시켜 생각해 보자. 그러면, 악수는 두 사람이 하는 것으로 꼭지점의 차수의 합은 짝수가 된다. 따라서, 홀수 번 악수한 사람은 차수가 홀수인 꼭지점이 되므로 정리 【1.2】에 의하여 그 수는 짝수이다. ▲

1.2) 여러 가지 그래프

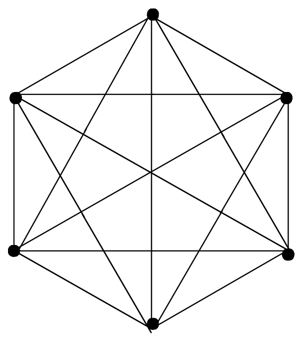
【탐구 1】교과서 52쪽

여섯 개의 농구팀이 서로 다른 팀과 한 번씩 경기를 갖는 리그전을 벌인다고 하자. 이 때, 총 몇 번의 경기가 이루어져야 하는가?

【활동】

1) 여섯 개의 농구팀을 꼭지점으로 하고 두 팀이 경기를 하는 경우를 변으로 나타내어 그래프를 완성하여 보자.

2) 변의 개수를 세어보자. ※ 지면상 간략하게 고쳤음.



【토론】

1) n개의 팀이 리그전을 벌이는 경우를 그래프로 나타낼 때, 각 꼭지점의 차수를 말하여라.

2) 위의 결과를 이용하여 활동 2)에서 얻은 그래프의 변의 개수를 구

하는 방법을 말하여라.

※ 위의 활동과 토론에서 다음과 같이 완전그래프의 정의를 만들 수 있다.

【정의 1.4】 서로 다른 두 꼭지점 사이에 항상 변이 있는 그래프를 **완전그래프**라고 한다.

【정리 1.3】 n개의 꼭지점을 갖는 완전그래프의 변의 개수는 $_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

【증명】 완전그래프에서는 서로 다른 두 꼭지점 사이에 항상 변이 있으므로 변의 개수는 n개의 꼭지점에서 서로 다른 두 꼭지점을 뽑는 방법의 수와 같으므로 $\frac{n(n-1)}{2}$ 이다. ▲

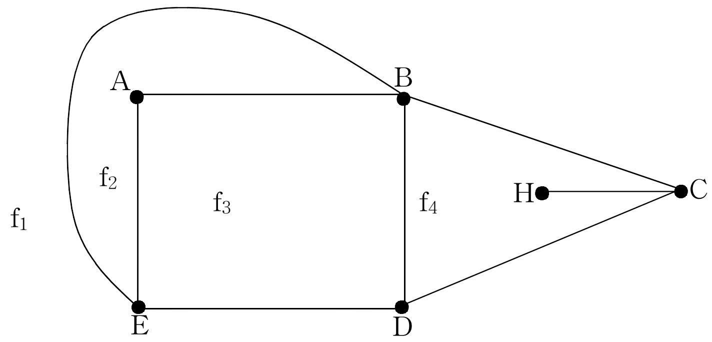
【정의 1.5】 변이 꼭지점에서만 만나게 평면 위에 다시 그릴 수 있는 그래프를 **평면그래프**라고 한다.

같은 뜻이지만 부정어를 이용함으로써 강조하게 되므로 다음과 같이 정의하는 것이 바람직하다.

【정의 1.5】 변이 <u>꼭지점 외에서는 만나지 않게</u> 평면 위에 다시 그릴 수 있는 그래프를 평면그래프라고 한다

【정의 1.6】 평면그래프를 평면 위에 그렸을 때, 평면이 변에 의하여 여러 영역으로 나눠진다. 이 영역을 **면**(face)이라 하고, 이 때 각 면의 경계는 변들의 회로(cycle)으로 이루어져 있는데 면 f의 경계를 이루는 회로의 길이(변의 개수)를 **면의 차수**라고 한다.

【보기4】



이 평면그래프는 4개의 영역으로 분할되어 4개의 면 f_1, f_2, f_3, f_4가 존재한다. 면 f_1의 경계는 회로(B, C, D, E, B)이며 회로의 길이는 4이므로 f_1의 차수는 4이다. f_2 의 경계는 회로(A, B, E, A)이고 차수는 3, f_3의 경계는 회로 (A, B, D, E, A)이고 차수는 4, f_4의 경계는 회로(B, C, H, C, D, B)이고 차수는 5이다. 어떤 변이 두 면 사이의 경계를 이루거나 또는 한 면 내에 포함되어 있거나 관계없이, 각 면의 경계를 이루는 순환에 꼭 두 번씩 나타난다. 그러므로 평면 그래프에서 각 면의 차수의 총합은 변의 개수의 2배가 된다.

【정리 1.4】(오일러의 공식) v개의 꼭지점과 e개의 변을 갖는 연결된 임의의 평면그래프를 변이 꼭지점에서만 만나도록 그렸을 때 , 평면이 변에 의하여 나누어진 영역의 총 개수를 f라고 하면 $v-e+f=2$이다.

【증명】 변의 개수 e에 관한 수학적 귀납법으로 증명하자. $e=0$일 때, 즉, 변의 개수가 0일 때는 꼭지점 하나로 되어있는 그래프이다. 이 경우 $v=1$, $e=0$, $f=1$이므로 $v-e+f=2$이다.

$e=1$이면 $v=2$, $f=1$이므로 $v-e+f=2$가 성립한다.

임의의 평면그래프에서 e=n일 때, $v-e+f=2$가 성립한다고 가정하면, e=n+1일 때도 성립함을 보이면 된다. 변을 하나 더 추가하는 방법은 다음의 2가지 경우가 있다.

첫째, 새로운 꼭지점 하나를 추가하여 다른 변과 겹치지 않도록 이미 있던 꼭지점과 연결하는 경우이다. 이 때에는 v와 e는 1씩 증가하지만 f는 변하지 않으므로 $(v+1)-(e+1)+f=v-e+f=2$가 성립한다.

둘째, 이미 그래프 내에 있던 두 꼭지점 사이에 변을 추가하여 연결하는 경우로 추가하는 변은 다른 변들과 겹치지 않아야 하므로 v는 변하지 않고 e와 f는 1씩 증가한다. 즉, $v-(e+1)+(f+1)=v-e+f=2$가 성립한다. 따라서 e=n+1일 때도 $v-e+f=2$가 성립한다. ▲

참고 : 6차 교육과정에서는 중학교 1학년 교과서에서 오일러의 공식을 $v-e+f=1$로 했었는데 이것은 면을 평면도형의 내부에 있는 것만을 생각한 것이다. 그래서 면의 개수가 하나 줄어들었기 때문이다.

다음 정리를 제시한 이유는 연습문제(교과서 56쪽)에 아래와 같은 문제가 있는데 만약 학생이 " $q\leq 3p-6$이 어떻게 해서 성립합니까?" 하고 물었을 때, 교사는 대답할 수 있어야 하기 때문에 제시한다.

'p개의 꼭지점과 q개의 변을 갖는 평면그래프에서는 부등식 $q\leq 3p-6$이 성립한다. 이를 이용하여 5개의 꼭지점을 갖는 완전그래프는 평면그래프가 아님을 보여라.'

【정리 1.5】 연결된 평면 그래프에서 꼭지점의 개수를 v, 변의 개수를 e라 하면 $e\leq 3v-6$인 관계가 성립한다.(단 $v\geq 3$인 경우)

【증명】 연결된 평면그래프이며 $v\geq 3$이므로 최소 변의 개수는 $e\geq 2$이다. $e=2$인 경우 $v=3$이므로 이들 관계가 성립한다. 그러므로 $e\geq 3$라 하자. 각 면의 차수의 총합은 $2e$이고 각 면은 3이상의 차수를 가지므로 $2e\geq 3f$이다. 즉,

$f \le \dfrac{2e}{3}$ 이다. 이를 오일러 공식(정리 1.4)에 대입하면

$$2 = v - e + f \le v - e + \frac{2e}{3} = v - \frac{e}{3}$$

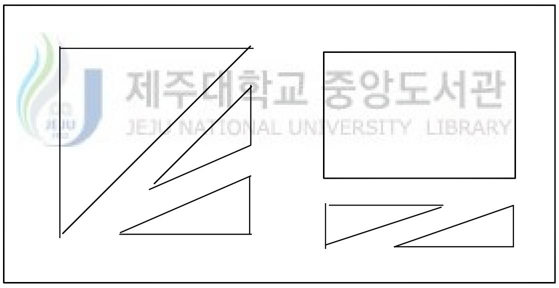
가 된다. 따라서 양변에 3을 곱하면 $e \le 3v - 6$ 이다. 끝.

2) 여러 가지 회로

2.1) 오일러 회로

【탐구 1】 교과서 57쪽

신문 배달을 시작한 철이는 며칠 동안 신문을 돌리다 보니 지나갔던 길을 또 지나가는 경우가 있는 것을 알게 되었다. 다음 그림은 배달 지역의 지도인데 모든 길을 반드시 지나가야만 할 때, 철이는 지나갔던 길을 다시 지나가지 않고 신문 배달을 잘 마칠 수 있을까?



【활동】

1) 철이가 지나갔던 길을 다시 지나가지 않고 신문 배달을 마칠 수 있는 방법을 알기 위해 배달 지역을 그래프로 나타내려고 한다. 이 때, 얻어지는 그래프를 그려 보아라.
2) 위 1)의 그래프를 이용하여 한 번 지나갔던 길은 다시 지나가지 않으면서 배달을 모두 마칠 수 있는 방법이 있는지 알아보아라.

【토론】

1) 위의 탐구에서 제시된 문제를 그래프의 꼭지점과 변을 써서 다시 말하여라.
2) 실제 배달 지역 지도를 이용하여 문제를 해결할 때와 점과 변으로

나타낸 그래프를 이용할 때의 차이점이 무엇인지 말하여라.

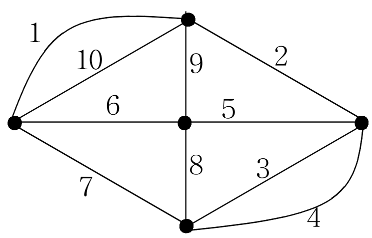
【정의 2.1】 **경로**란 그래프의 한 꼭지점에서 이어진 변을 따라 변을 반복하지 않으면서 또 다른 꼭지점으로 이동할 때, 순서대로 꼭지점을 나열한 것을 말한다.

【정의 2.2】 **회로**(circuit)란 한 꼭지점에서 출발하여 이 꼭지점으로 되돌아오는 경로를 말한다.

【정의 2.3】 **연결된 그래프란** 임의의 두 꼭지점을 잇는 경로가 있는 그래프를 말한다,

【정의 2.4】 **오일러 회로는 연**결된 그래프에서 꼭지점은 여러 번 지날 수 있지만 모든 변을 오직 한번만 지나는 회로를 말한다.

【보기】 위의 탐구활동에 있는 지도를 보면서 아래와 같은 그래프를 그릴 수 있다.



위의 그래프에서 숫자가 쓰인 순서대로 따라 가면 꼭지점은 여러 번 지나지만 모든 변을 꼭 한번만 지나서 처음 출발한 점으로 올 수 있다.

【정의 2.4】 연필을 떼지 않고 모든 변을 한 번만 지나는 것을 **한 붓 그리기** 라고 한다.

【정리 2.1】 오일러 회로가 존재하는 것은 한 붓 그리기가 가능하다. 그러나 한붓그리기가 가능하다고 해서 오일러 회로가 존재하는 것은 아니다.

【증명】 홀수점이 2개인 그래프는 한 붓 그리기가 가능하나. 출발점과 도착점이 다르다. 그래서 한 붓 그리기가 가능하다고 해서 오일러 회로가 존재하는 것은 아니다. ▲

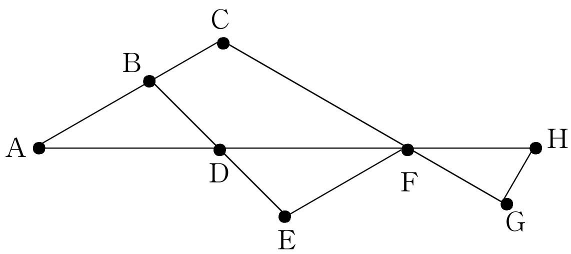
【정리 2.2】 연결된 그래프에서 '오일러회로가 존재' 하기 위한 필요충분조건은 '모든 꼭지점의 차수가 짝수이다.'라는 조건이다.

【증명】⇒)연결된 그래프에서 오일러 회로가 존재한다면 이 회로가 어떤 꼭지점을 지나게 되면 그 꼭지점의 차수를 2만큼 증가시키게 된다. 이때, 모든 변이 회로에 한 번 나타나므로 모든 꼭지점의 차수는 짝수가 된다.

⇐) 그래프를 모든 꼭지점의 차수가 짝수인 연결그래프라고 가정하면 각 꼭지점의 차수는 2이상임을 알 수 있다. 따라서, 그래프는 어떤 회로를 포함하는데 중복이 없도록 계속해서 지나가면 반드시 원래의 꼭지점으로 되돌아온다. 이것을 반복해서 남는 변이 없게 될 때, 이 회로를 오일러 회로라 한다. ▲

【실생활문제 2】 다음 그래프는 교실에 있는 8대의 컴퓨터의 네트워크를 나타낸 그래프이다.

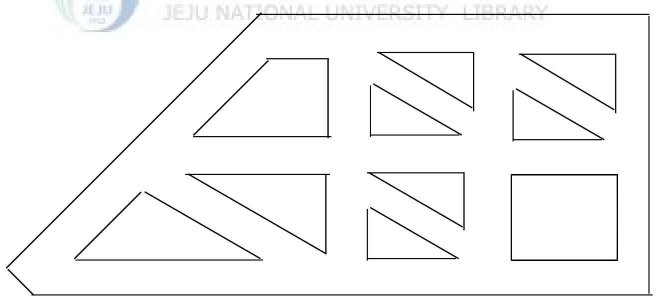
컴퓨터와 컴퓨터 사이의 선을 한번씩만 확인하기 위해서는 어느 컴퓨터에서 출발하여 어느 컴퓨터에서 끝내야 하는가?



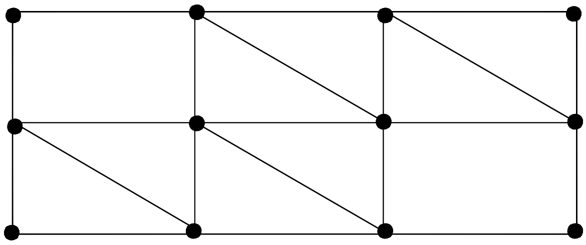
【풀이】 위의 그래프에서 A의 차수는 2, B의 차수는 3, C의 차수는 2, D의 차수는 4, E의 차수는 2, F의 차수는 5, G의 차수는 2, H의 차수는 2이므로 차수가 홀수인 꼭지점은 B와F 둘 뿐이다. 그러므로 B에서 출발하여 F에서 끝나던지 F에서 출발하여 B에서 끝나면 된다.

【실생활문제 3】

신시가지의 도로 연결이 아래 그림과 같을 때, 길의 중앙에 중앙선을 그리려고 한다. 지나갔던 길은 다시 지나가지 않고 그릴 수 있을까?



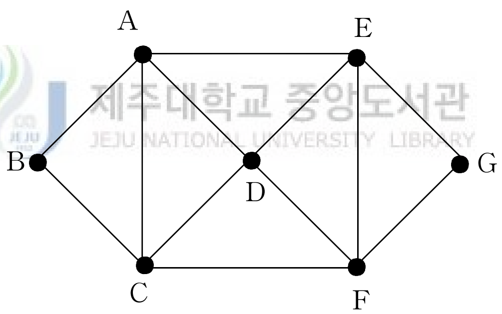
【풀이】 위의 그림을 보면서 교차로를 꼭지점, 도로를 변으로 하여 그래프를 그리면 아래 그림과 같다. 여기서 홀수점이 2개 있으므로 오일러회로가 존재하진 않지만 오일러 경로는 존재하므로 지나갔던 자리는 지나지 않고 중앙선을 그릴 수 있다.



2.2) 헤밀턴 회로

【탐구 1】 교과서 62쪽

어느 택배 회사 직원이 물건을 배달하여야 할 곳과 그 배달할 길을 그려보니 아래 그림과 같았다. 회사 A에서 출발하여 배달을 마치고 다시 회사 A로 돌아와야 한다면 어떤 경로로 배달하는 것이 좋겠는가?



【활동】

(1) 꼭지점 A에서 시작하여 모든 꼭지점을 단 한 번씩만 지나 꼭지점 G에 이르는 경로를 찾아라. 또, 이러한 경로의 개수를 구하여라.

(2) 꼭지점 A에서 시작하여 모든 꼭지점을 단 한 번씩만 지나는 회로를 찾아보아라. 또, 이러한 회로의 개수를 구하여라.

【토론】

(1) 모든 꼭지점을 단 한 번씩만 지나는 회로를 찾을 때, 변의 개수가 많고 적음이 영향을 주는지 말하여라.

(2) 여러 개의 모든 꼭지점을 단 한 번씩만 지나는 회로 혹은 경로 중에서 하나를 선택할 때, 배달하는 사람의 입장에서 어떤 요소를

중요하게 생각해야 할지 말하여라.

(3) 위의 그래프가 오일러회로를 갖는지 말하여라.

(4) 위의 그래프의 오일러회로는 모든 꼭지점을 한 번씩만 지나는가?

(5) 모든 꼭지점을 한 번씩만 지나는 회로는 모든 변을 다 지난다고 할 수 있는가?

【정의 2.5】 **해밀턴 회로**란 그래프에서 모든 꼭지점을 오직 한 번씩만 지나며 시작점으로 돌아오는 회로를 말한다. **해밀턴 경로**란 그래프에서 모든 꼭지점을 오직 한 번씩만 지나지만 시작점으로는 돌아오지 않는 경로를 말한다.

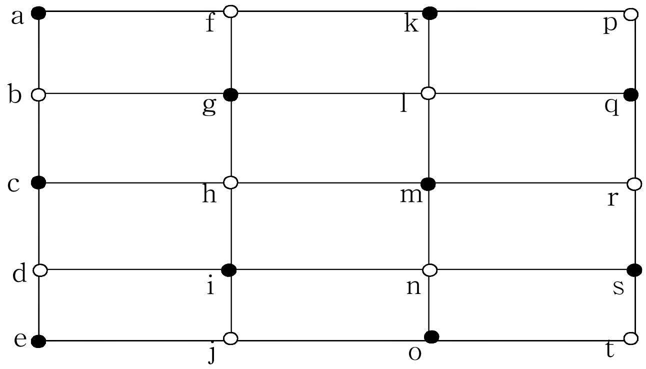
【정리 2.3】 꼭지점의 개수가 n개이고 각 꼭지점의 차수가 $\frac{n}{2}$ 이상인 연결된 그래프는 해밀턴 회로를 갖는다.(단, $n \geq 3$)

【증명】 황석근외(2001), 「이산수학」, 블랙박스, p.5. ▲

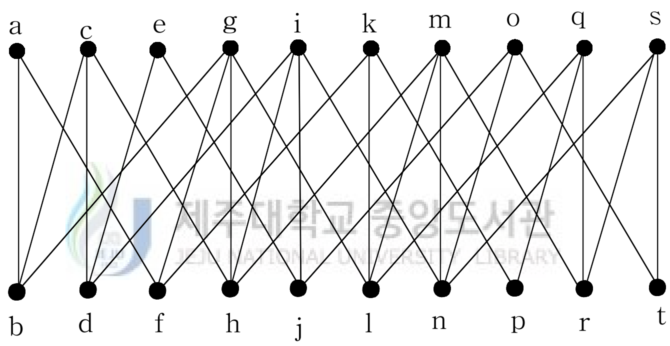
【실생활문제 4】

2학년 5반 학생은 총 20명인데 4명씩 5줄로 앉아있다. 20명 전원이 인접한 자리로 이동할수 있는가?(여기서 인접한 자리로 이동이란 뜻은 전, 후, 좌, 우 네 방향중의 하나로 이동)

【풀이】 학생을 꼭지점으로 하고 바로 인접한 경우는 다른 색으로 하여 그래프를 그릴 수 있다.



이 그래프를 변형하여 다음과 같은 모양으로 그릴 수 있다.



이 그래프는 흰색 점의 개수와 검은색 점의 개수가 같으므로 해밀턴 회로가 존재한다. 그러므로 인접한 자리로 이동할 수 있다. ▲

3) 수형도

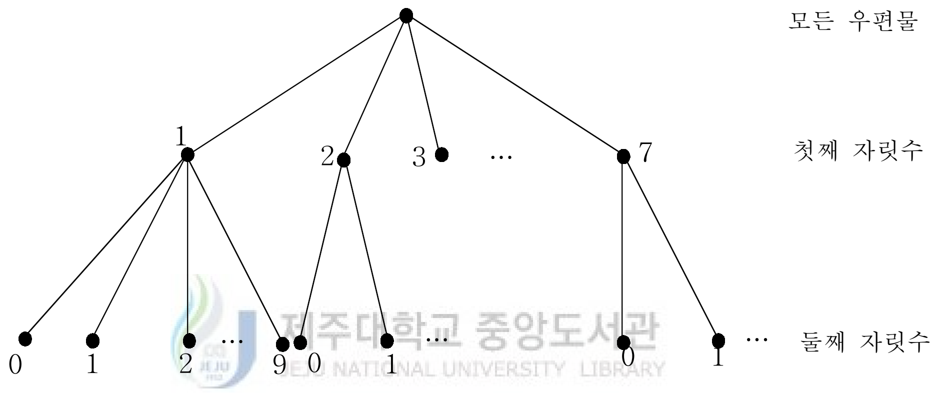
3.1) 수형도

【탐구 1】 교과서 65쪽

정보통신부는 신속한 우편배달을 위하여 우편번호를 반드시 기재하도록 하고 있다. 우편물은 첫째 자릿수에 따라 다음과 같이 분류된다.

번호	1	2	3	4	5	6	7
지역	서울	강원	충청	경기	전라	경남, 제주	경북

이렇게 나누어진 우편물은 그 다음 자릿수에 따라 10개의 소지역으로 다시 세분된다. 이러한 분류 과정의 일부를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 그래프는 어떤 성질을 만족할까?



【활동】

1) 위의 그래프에서 각 꼭지점에 이르는 경로는 항상 존재 하는가?, 존재한다면 그런 경로는 몇 개인가?
2) 위의 그래프에서 차수가 1인 꼭지점에서 차수가 1인 또 다른 꼭지에 이르점는 경로를 찾아보아라. 또, 변을 가장 많이 갖는 경로의 양 끝 꼭지점의 차수를 말하여라.

【정의 3.1】 수형도란 회로를 갖지 않는 연결된 그래프를 말한다.

【토론】

1) 여러 개의 수형도를 그리고 변의 꼭지점의 개수와 변의 개수를 세어보아라.
2) 수형도에서 차수가 1인 꼭지점을 차례로 한 개씩 삭제하여 만들어지는 수형도에서 꼭지점의 개수와 변의 개수를 구하여라.

3) 어떤 수형도의 꼭지점의 수를 v, 변의 개수를 e라 할 때 v와 e사이 에는 어떤 관계가 있는가?
4) 두 개 이상의 꼭지점을 갖는 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 반드시 있는가?
5) 꼭지점의 수와 변의 수가 같은 수형도가 있는가?

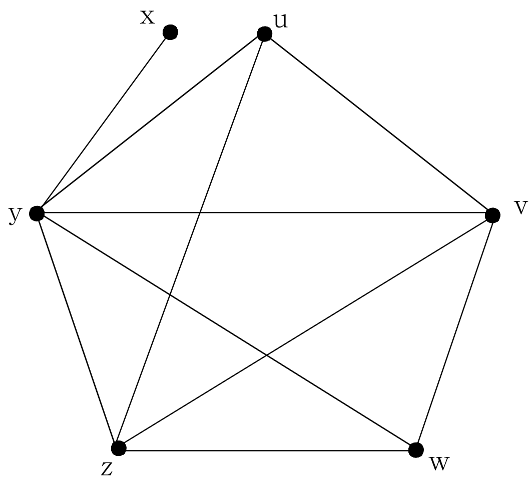
【정리 3.1】 수형도에서 꼭지점의 개수를 v, 변의 개수를 e라 하면 $v-e=1$이다.

【정리 3.2】 두 개 이상의 꼭지점을 갖는 모든 수형도는 차수가 1인 꼭지점이 적어도 두 개 이상이 존재한다.

【증명】 꼭지점의 개수를 v라고 하면 수형도에서 변의 개수는 $v-1$이고, 악수정리에 의하여 꼭지점의 차수의 합은 변의 개수의 두 배이므로 $2(v-1)$이 된다. 모든 꼭지점의 차수가 2이상이면 차수의 합이 2v 이상이므로 앞의 사실에 위배된다. 따라서, 차수가 1인 꼭지점이 존재해야 하고, 만약 한 개만 존재한다면 꼭지점의 차수의 합이 $2(v-1)+1=2v-1$ 이상이 되어 앞의 사실에 위배된다. 따라서, 차수가 1인 꼭지점이 적어도 둘 이상 존재한다. ▲

3.2) 생성 수형도

【탐구 1】 교과서 72쪽
아래와 같은 연결된 그래프에서 변을 지워서 수형도를 만들려고 한다.
이 때, 효과적인 방법은 무엇인가?



【활동】

1) 회로가 있으면 그 회로의 임의의 한 변을 삭제한다.
2) 회로가 없을 때까지 1)의 과정을 반복한다.
3) 1)과 2)에서 얻어진 그래프는 연결되어 있는가?
4) 1)과 2)에서 어떠한 그래프가 얻어지는가?
5) 어느 변을 삭제해도 연결되지 않은 상태로 되는 그래프는 수형도임을 설명하여라.

【지도상의 유의점】연결된 그래프에서 변을 삭제할 때 연결된 상태를 유지할 수 있도록 변을 삭제하려면 반드시 회로 위의 변을 삭제하여야 함을 이해할 수 있도록 지도한다.

【정의 3.2】 생성수형도란 연결된 그래프에서 변을 제거하여 얻어지는 수형도를 말한다.

참고 : 주어진 그래프의 생성수형도는 그 그래프의 모든 꼭지점을 포함해야 하고, 변은 일부분만 포함해도 된다.

【정리 3.3】그래프가 연결되어 있기 위한 필요충분조건은 그래프가 생성수형도

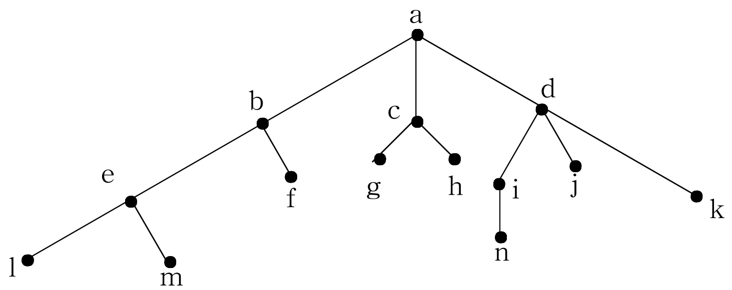
를 갖는 것이다.

【증명】 ⇒) 그래프 G가 연결되어 있다고 가정하자. 만일 G가 회로를 갖지 않으면 G는 수형도이다. G가 회로를 갖는다고 가정하자. 이 회로에서 변을 하나 삭제하여 생성된 그래프는 여전히 연결되어 있다. 만약 변을 삭제한 그래프가 회로를 갖지 않으면 작업을 멈추고 회로를 계속 가지면 궁극적으로 회로를 갖지 않는 연결되어 있는 부분 그래프 T를 생성할 수 있다. T는 수형도이고 T가 G의 모든 꼭지점들을 포함하므로 T는 G의 생성수형도이다.

⇐) 그래프 G가 생성수형도 T를 갖고 있다고 가정하고 a와 b를 G의 꼭지점들이라 하자. 그러면 a와 b는 T의 꼭지점들이고 T는 수형도이므로 a에서 b로의 경로가 존재한다. 또한, 이 경로는 G에서도 a에서 b로 의 경로가 된다. 따라서, G는 연결되어 있다. ▲

【탐구】 교과서 73쪽

컴퓨터에서는 파일이 수형도와 같은 구조로 임의 접근기억장치 (random-access memory)에 저장된다. 저장된 파일로부터 어떤 정보를 '찾기'하면 체계적으로 각 꼭지점을 이동하면서 검색하게 된다. 다음 수형도의 꼭지점 a로부터 시작하여 모든 꼭지점을 검색하려면 어떤 순서로 검색하면 좋을까?



【활동 1】

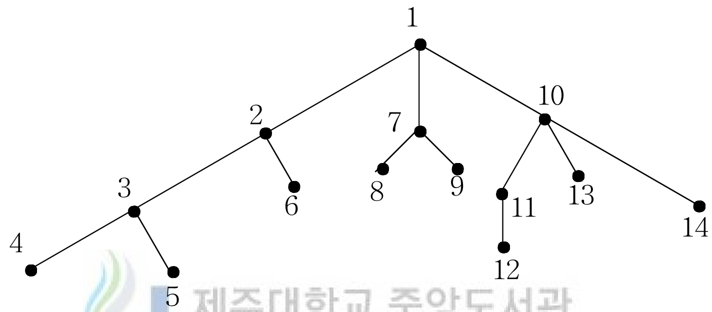
먼저 a를 현재의 꼭지점으로 둔다.

1) 현재 꼭지점에 아직 검색되지 않은 꼭지점이 변으로 연결되어 있으면 그중의 하나의 꼭지점을 검색하고 그 꼭지점으로 이동하여 현재 꼭지점으로 한다.

2) 현재 꼭지점과 변으로 연결된 모든 꼭지점이 검색되었다면, 현재 꼭지점이 검색되기 바로 이전에 검색된 꼭지점으로 되돌아가서 그 꼭지점을 현재 꼭지점으로 한다.

3) 더 이상 검색할 꼭지점이 없으면 검색을 끝내고 그렇지 않으면 위 1)로 되돌아 간다.

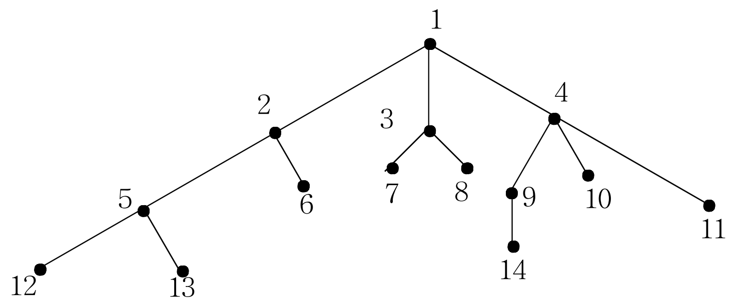
위의 순서를 따라 검색한 순서를 나타내면 다음과 같다.



참고 : 【활동 1】 같은 순서로 검색하는 방법을 **깊이 우선 검색 방법**이라고 한다.

【활동 2】 이번에는 다음과 같은 순서로 검색하여보자

현재 꼭지점 a가 아직 검색되지 않은 꼭지점과 인접해 있으면 그 중 한 개인 b를 검색한다. 이렇게 해서 꼭지점 a에 인접한 꼭지점 중 검색되지 않은 모든 꼭지점을 검색하면 그 중 하나를 차례로 선택하여 현재 꼭지점으로 하고 다시 같은 방법으로 계속 검색한다. 이 순서대로 주어진 수형도를 검색해 보면 다음과 같다.

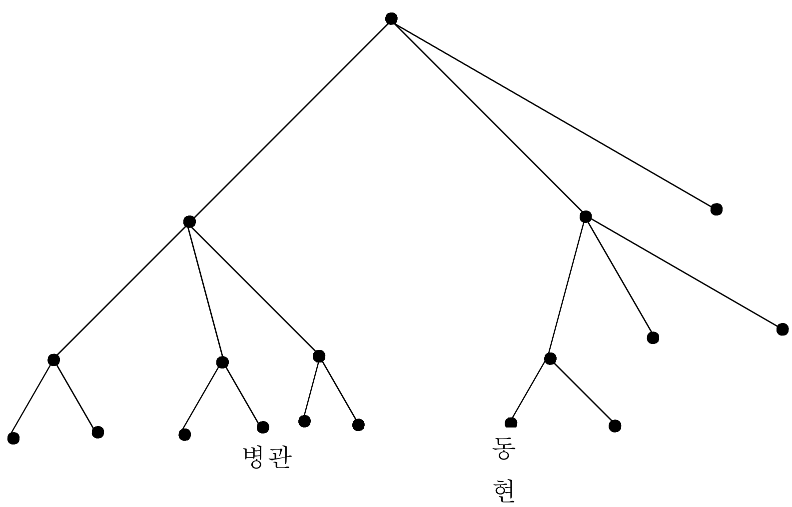


참고 : 【활동 2】와 같은 순서로 검색하는 방법을 **너비 운선 검색 방법**이라고 한다.

참고 : 깊이 우선 검색방법과 너비 우선 검색 방법을 사용하여 생성수형도를 구할수 있다.

【실생활문제 5】

다음은 어느 가족의 가계도를 수형도로 나타낸 것이다. 병관이와 동현이는 몇 촌인가?



【풀이】 선분의 수가 6개이므로 6촌이다. ▲

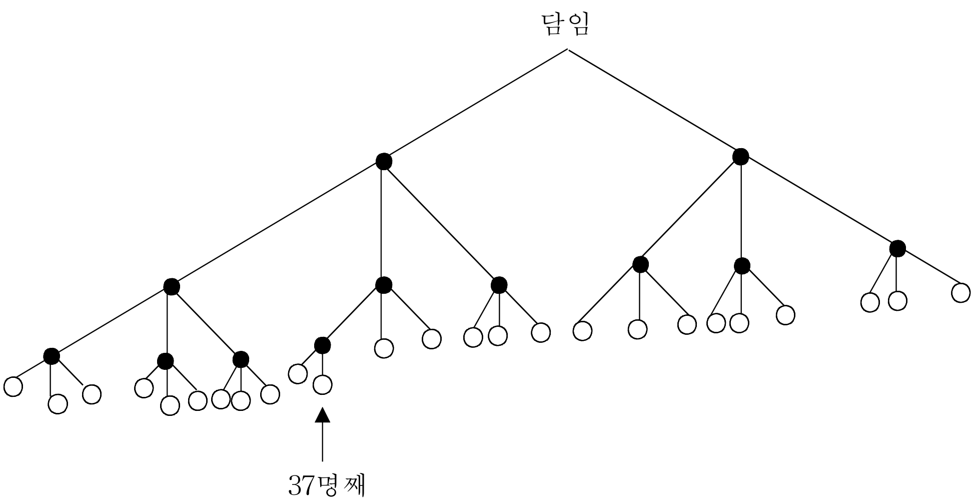
【실생활문제 6】 2학년 10학급이 춘계 체육대회에서 토너먼트로 축구경기를 하려고 한다. 우승하는 사람이 나올 때까지의 총 경기수를 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다고 한다.)

【풀이】 경기에 출전한 학급을 꼭지점으로 하고 두 학급사이의 경기를 두 꼭지점 사이의 변으로 생각하여 그래프를 그리면 이 그래프는 연결되어 있고 회로가 없는 수형도이다. 즉, 꼭지점이 개수가 10개이고 변의 개수가 9개인 수형도가 된다. 그러므로 경기 수는 9가 된다. ▲

【실생활문제 7】

어느 고등학교의 2학년 3반 학생수는 37명이다. 방학중 비상연락망은 담임이 두 학생에게 전화로 연락을 하면 전화를 받은 학생은 3명의 다른 학생에게 전화를 하도록 되어 있다. 전화를 받은 후 다른 학생에게 전화를 해야 하는 학생은 모두 몇 명인가?

풀이) 선생님과 학생을 꼭지점으로 하는 수형도를 그리면 다음과 같다.



이 수형도 검은 점은 전화를 받은 후에 전화를 한 학생이고 하얀 점은 전화를 받기 했는데 전화는 하지 않은 학생이므로 전화를 한 학생수는 12명임. ▲

4) 그래프의 활용

4.1) 행렬과 그래프

【탐구 1】 교과서 77쪽

어는 전자 대리점에 근무하는 두 영업 사원의 주간 판매 실적을 나타내는 표를 아래와 같이 만들었다. 두 사람의 판매 실적을 동시에 다루는 편리한 방법은 무엇인가?

첫 주 판매실적

	오디오	냉장고	TV
갑	2	3	5
을	4	3	2

둘째 주 판매실적

	오디오	냉장고	TV
갑	1	2	4
을	2	3	2

【활동】

1) 두 주간의 판매 실적을 두 개의 표에 가상으로 적어보아라.

2) 두 주간의 판매 실적을 합한 표를 만들어라.

3) 둘째 주의 판매 실적은 첫 주의 판매 실적과 얼마나 차이가 있는가?

4) 셋째 주의 판매 실적이 둘째 주의 판매 실적의 두 배가 되도록 셋째주의 판매 실적 표를 만들어라.

【토론】

위의 두 자료의 값을 더할 때는 어떻게 더하였는지를 말하여라.

【정의 4.1】 어떤 수들을 직사각형 모양으로 배열해 놓은 것을 행렬이라 하고, 행렬의 가로줄을 행, 세로줄을 열이라 한다.

$m \times n$ 행렬 : 행의 개수가 m, 열의 개수가 n인 행렬

【보기】 위의 첫 주 와 둘째 주 판매실적에서 다음과 같은 행렬을 만들 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

【정의 4.2】 행렬의 크기가 같은 두 행렬의 덧셈과 뺄셈은 똑같은 위치에 있는 두 수를 더하거나 빼고, 행렬의 실수 k배는 모든 수에 k배하여 구한다.

【보기】

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

【탐구 2】 교과서 78쪽

한 전자 대리점에서 판매하는 오디오가 35만원, 냉장고가 80만원, TV가 55만원이라고 하자, 한 주간에 갑과 을이 판매한 제품의 수가 다음 표와 같을 때, 두 사람의 총 판매금액은 행렬을 이용하여 어떻게 구할 수 있을까?

	오디오	냉장고	TV
갑	2	1	3
을	1	3	1

【활동】

1) 오디오, 냉장고, TV의 각 한 대의 값을 하나의 3×1행렬 A를 구하

여라.
2) 갑과 을의 판매 금액을 동시에 나타낸 2×1행렬 B를 구하여라.
3) 위에서 구한 행렬 A와 B를 판매액을 나타내는 행렬과 함께 써서 (판매대수)×(판매 단가) =(판매액) 과 같은 등식이 되도록 나타내어라.

【정의 4.3】 앞 행렬의 한 행과 뒤 행렬의 한 열을 택하여 **같은 위치**에 있는 수끼리 곱하여 합한 값을 결과 행렬에 적어준다. 이때, 이 값이 적히는 위치는 앞에서 택한 행과 열이 **만나는 위치**에 적는다.

※ 【정의 4.3】과 같이 우리말로만 정의 해서는 이 행렬을 배운 사람들은 이해를 하겠지만 처음 접하는 학생들은 **같은 위치**, **만나다**는 말과 **만나는 위치**의 뜻을 이해하는데 어려움이 있을 것 같다.

그래서 다음과 같이 정의를 내리는게 좋을 것 같다.

【정의 4.3】 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$일 때, 두 행렬의 곱

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

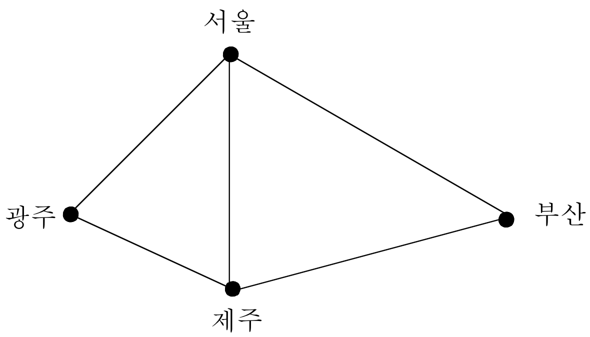
$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

이다.

【보기】 위의 탐구활동에서 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 \\ 80 \\ 55 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 315 \\ 330 \end{pmatrix}$

【탐구 3】 교과서 80쪽

다음 그래프는 여러 도시 간에 개설된 어느 항공사의 항로를 나타낸 것이다. 이 그래프에서 도시와 도시 사이의 관계를 수로 나타내려면 어떻게 하면 좋은가?



【활동】

1) 위 그래프를 보고 아래와 같은 표를 만들어 항로가 개설되어 있는 곳에 는 1. 항로가 개설되어 있지 않은 곳에는 0을 써보자.

	서울	부산	광주	제주
서울				
부산				
광주				
제주				

2) 각 도시 이름이 있는 맨 윗줄과 제일 왼쪽 열을 없애고 숫자만 남게 하여 다음의 큰 괄호 안에 넣어 보자.

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$$

【토론】

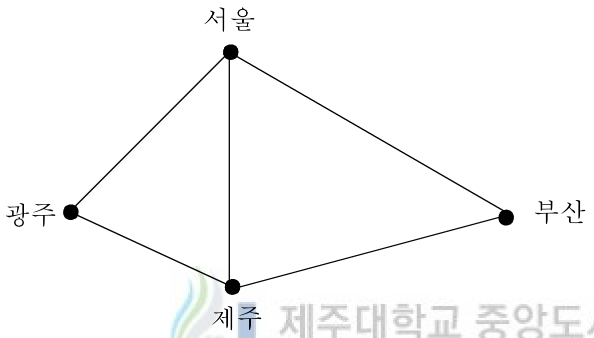
1) 위에서 얻은 큰 활호 안의 가로줄에 있는 수의 합은 그래프의 각 꼭지점의 차수와 어떤 관계가 있는지 말하여라.

2) 위에서 얻은 큰 괄호 안에 나타난 모든 수의 합은 그래프의 변의

수와 어떤 관계가 있는지 말하여라.

【정의 4.4】 인접행렬이란 그래프의 각 꼭지점 사이의 연결관계를 나타내는 행렬을 말한다.

【보기】 위의 탐구 활동에서의 인접행렬은 다음과 같다.



$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

【정리 4.1】 인접행렬의 각 행의 값의 합은 그 행에 대응하는 꼭지점의 차수와 같다.

증명) 인접행렬은 그래프에서 꼭지점과 꼭지점이 연결되어 있을 경우는 1, 연결되어 있지 않을 경우는 0으로 나타내므로 각 행의 값의 합은 그 행에 대응하는 꼭지점의 차수와 같다. ▲

【정리 4.2】 인접행렬의 모든 값의 합은 그래프의 꼭지점들의 차수의 합과 같다.

【증명】 인접행렬의 각 행의 값의 합은 그 행에 대응하는 꼭지점의 차수와 같으므로 인접행렬의 모든 값의 합은 그래프의 꼭지점들의 차수의 합과 같다. ▲

【정리 4.3】 인접행렬의 모든 값의 합은 그래프의 변의 개수의 합의 두 배이다.

【증명】 인접행렬의 모든 값의 합은 그래프의 꼭지점들의 차수의 합과 같고 그래프의 꼭지점들의 차수의 합은 변의 개수의 두 배이므로 인접행렬의 모든 값의 합은 그래프의 변의 개수의 합의 두 배이다. ▲

【4.4】 인접행렬 A에 대하여 A^2의 각 값은 그 값에 해당하는 두 꼭지점을 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로의 개수이다.

【증명】 실생활 문제를 풀면서 설명하도록 하겠다. ▲

【정리 4.5】 그래프의 인접행렬 A에 대하여 A^n의 각 값은 그 값에 해당하는 두 꼭지점을 잇는 변이 n개인 경로의 개수와 같다.(이때, 경로는 변을 반복할 수 있다.)

【증명】 실생활 문제를 풀면서 설명하도록 하겠다. ▲

【정리 4.6】 그래프의 인접행렬 A에 대하여 행렬 A^2의 대각선에 있는 값은 그래프의 꼭지점의 차수와 같다.

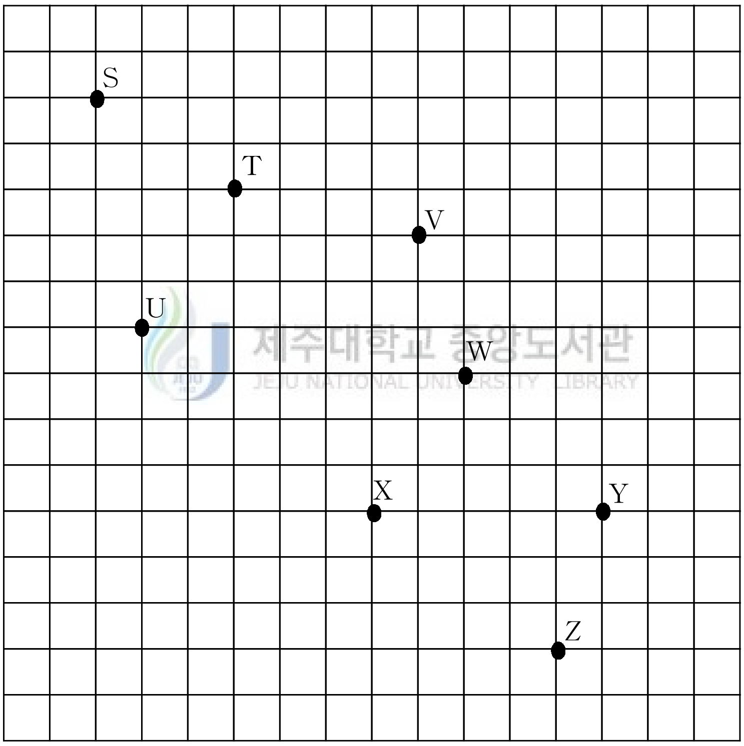
【증명】 【정리 4.4】의 A^2의 각 값은 그 값에 해당하는 두 꼭지점을 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로의 개수이므로 A^2의 대각선의 각 값은 각 꼭지점에서 원래 꼭지점까지의 두 개의 변으로 이루어진 경로의 개수이므로 각 꼭지점에 인접해 있는 꼭지점의 수와 같다. 즉 각 값은 각 꼭지점의 차수와 같다. ▲

4.2) 색칠문제

【탐구 1】 교과서 83쪽

어느 운송회사는 이 회사의 차량에 무선 통신망을 설비하고 아래 그림에 위치한 여덟 개의 지사에서 관리하게 하려고 한다. 지형적인 조건과 송신기의 출력을 고려하여 통신에 간섭이 일어나지 않도록 거리가 25km 이하인 지사끼리는 서로 다른 주파수를 사용해야 한다면 이 운송회사가 확보해야 할 주파수는 최소로 몇 개인가?

(눈금 단위 : 5km)



【활동】

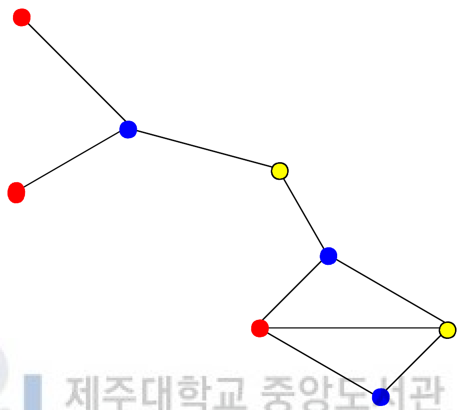
1) 각 지사를 꼭지점으로 하고 떨어진 거리가 25km이하인 두 지사를 나타내는 꼭지점끼리는 변으로 연결하여 그래프를 그린다.

2) 간섭이 생기지 않게 주파수를 부여하여야 하므로 이웃한 꼭지점을 다른 색으로 칠하기로 한다.

3) 사용할 주파수의 수를 최소가 되게 한다. 즉 색의 수를 최소로 한다.

참고 사항 : 그래프에서 변으로 연결된 두 꼭지점은 서로 다른 색으로 모든 꼭지점을 색칠할 때, 그래프를 적절하게 색칠한다고 한다.

위의 탐구활동에서 그래프를 다음과 같이 그리면 3가지 색으로 가능하다.



그래프를 색칠하는 방법으로 Welch-Powell의 알고리즘이 있다.

1단계 : 그래프의 꼭지점을 차수에 따라 내림차순으로 배열한다(차수가 같은 정점들의 순서는 임의로 정한다)

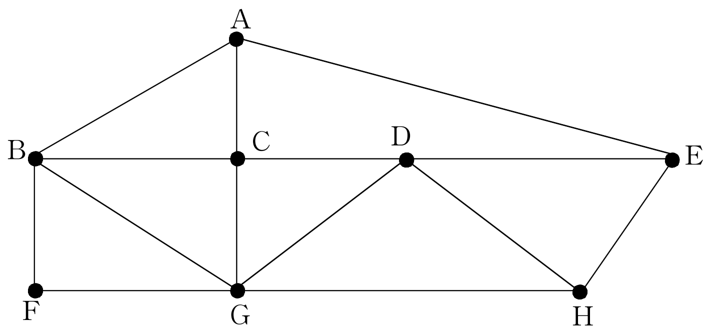
2단계 : 차수가 가장 큰 정점을 첫 번째 색으로 배색한다. 이미 배색된 꼭지점과 인접하지 않은 배열내의 모든 꼭지점을 같은 색으로 칠한다.

3단계 : 배열에서 먼저 나타나는 칠해지지 않은 꼭지점을 두 번째 색으로 배색하고, 배열내의 순서에 따라 이미 배색된 이 꼭지점과 인접하지 않은 모든 꼭지점을 같은 색으로 칠한다.

4단계 : 배열내의 모든 꼭지점이 배색될 때까지 (단계3)의 과정을 반복한다.

▲

【보기3】 다음 그래프를 Welch-Powell의 알고리즘으로 배색하라.



【풀이】 꼭지점들의 차수를 구하면 A:3차, B:4차, C:4차, D:4차, E:3차, F:2차, G:5차, H: 3차이다.

1단계: 꼭지점들을 차수에 따라 내림차순으로 배열하면 G, B, C, D, A, E, H, F 이다.

2단계: 꼭지점G를 첫 번째 칠하고 이미 칠해진 이 꼭지점과 인접하지 않은 A를 같은 색으로 칠한다.

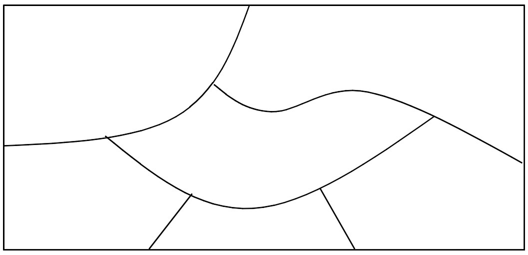
3단계: 아직 칠해지지 않고 배열의 다음 순서에 있는 B를 두 번째 색으로 배색하고 인접하지 않은 D를 같은 색으로 칠한다. 반복해서 C를 세 번째 색으로 배색하고 인접하지 않은 E와 F를 같은 색으로 칠한다. 반복해서 H를 네 번째 색으로 칠하면 모든 꼭지점이 칠해졌으므로 끝난다.

즉, 첫 번째 색={G, A}, 두 번째 색={B, D}, 세 번째 색={C, E, F}, 네 번째 색={H}으로 칠한다.

【탐구 2】 교과서 85쪽

어떤 지도에서는 경계가 서로 닿아 있는 지역을 서로 다른 색을 칠하여 경계를 분명히 구별하고 있다. 예를 들면, 우리나라 지도에서 서울시, 경기도 등의 지역을 서로 다른 색으로 칠할 수 있다. 몇 가지 색이면 모든 경계가 구별되도록 색칠할 수 있을까? 필요한 최소의 색의 수는 어떻게 구할 수 있을까?

【활동】 1) 아래 그림과 같이 경계가 주어진 지도를 색칠해 보자. 서로 경계가 만나는 부분이 있으면 서로 다른 색을 사용하도록 하자.

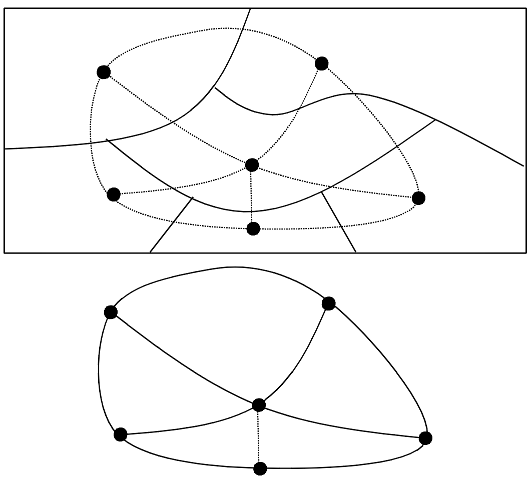


2) 위의 구역을 칠하는 데 필요한 최소의 색의 수를 구하여라.

3) 주어진 구역의 지도를 색칠할 때 필요한 최소 색의 수를 구하기 위하여 그래프 색칠하기를 이용하려고 한다. 그래프로 나타내기 위하여 무엇을 꼭지점으로 하고, 또 꼭지점 사이의 변은 어느 경우에 그어야 하는지를 말하여라.

4) 주어진 그래프를 적절하게 칠할 수 있는 최소의 색의 수와 꼭지점의 최대 차수 사이에 어떤 관계가 있는가?

방법) 지도에서의 한 영역은 꼭지점으로 두 영역의 경계선은 변으로 하여 그래프를 그린다.



【정리 4.7】 모든 평면그래프를 적절하게 칠하는 것은 4가지 색이면 충분하다.

【설명】 1976년 경 미국의 두 수학자 아펠과 하켄에 의하여 4색 문제가 해결되었다. 1976년, 미국 일리노이 대학의 볼프강 하켄(Wolfgang Haken)과 케네스 아펠(Kenneth Appel)은 새로운 테크닉을 개발했다. 그들은 '유한한 구획으로 나뉘어져 있는 유한한 개수의 지도들로부터 무한히 많은 구획으로 나뉘어진 무한개의 지도들을 유추해 낼 수 있다' 고 주장했던 하인리히 히쉬(Heinrich Heesch)의 업적을 줄곧 연구해 왔었다. 히쉬는 유한한 개수의 지도만으로 일반적인 경우를 다룰 수 있는 방법을 개발해 냈었다.

하켄과 아펠은 4색 문제를 히쉬의 아이디어로 단순화시키긴 했지만 그들이 얻은 결과는 '무한히 많은 모든 지도들이 4색으로 칠해질 수 있음을 증명하려면 1,482가지의 유한한 지도들만 고려하면 된다' 는 것이었다. 즉, 1482가지의 지도들이 모두 네 가지 색으로 칠해질 수 있음을 증명한다면 그것은 곧 모든 종류의 지도에 대해서도 성립한다는 결론이었다.

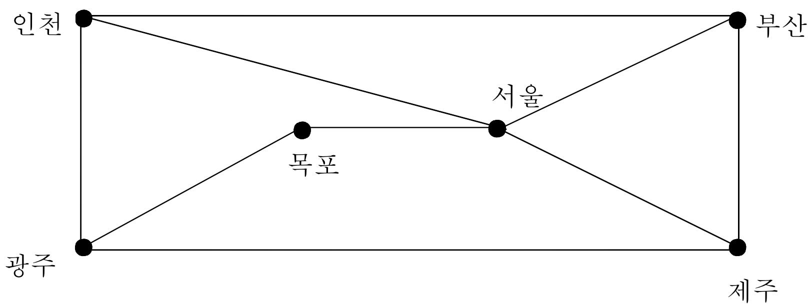
이를 증명하려면 대형 컴퓨터를 이용해도 100년 동안은 돌려야 될 정도의 문제였다. 그러나 하켄과 아펠은 이에 대한 알고리즘을 연구(불필요한 부분은 계산하지 않게 하는 등의 연구)하여 1976년 6월, 1,200시간 동안 컴퓨터를 돌려 이를 증명했다.

발표된 증명은 본문과 도해를 담은 대략 50쪽과 2,500개의 또 다른 도해를 담은 85쪽 및 그 증명의 여러 부분에 대한 상세한 설명을 담은 400쪽의 마이크로피시(microfiche)와 함께 액면 그대로 받아들여야만 하는 계산 결과가 포함되어 있다.

아펠과 하켄의 증명은 완벽한 것으로 검증되었지만 지나치게 복잡하고, 기계의 힘을 빌렸으며, 이 문제의 증명 이외에는 쓸모가 전혀 없는 등의 이유로 수학자들을 그리 기쁘게 하지는 않았다.

이것은 우아하고 단순한 방법으로 증명되어야 할 문제로 여전히 남아 있다. ▲

【실생활문제 8】 아래에 있는 그래프는 도시와 도시를 연결하는 항공노선을 나타낸 것이다. 두 도시 사이를 운행하는 서로 다른 **항공노선의 수**를 다음 각 경우에 구하시오.



1) 제주에서 인천으로 갈 때 경유지가 한 곳인 경우

2) 제주에서 부산으로 갈 때 경유지가 두 곳인 경우

【풀이】 이 경우에는 도시의 수가 몇 개 안 되고, 항공 노선도 복잡하지 않으므로 각 경우를 생각하여 해결할 수 있겠지만, 보다 도시의 수가 많고 항공노선도 복잡하다면, 각 경우를 생각하여 해결하는 것은 아주 어렵다. 따라서, 이 경우에 행렬을 이용하여 해결함으로써 보다 일반적인 경우에도 행렬을 이용하여 쉽게 해결할 수 있음을 다음 순서에 의하여 보인다.

첫째) 행렬에서 행과 열을 구분하기 위해 위의 도시들을 아래와 같이 숫자로 표시한다.

광주: 1, 인천:2, 부산:3, 서울:4, 목포:5, 제주:6

여기서, 문제를 좀더 편리하게 풀기 위하여 경로(route)와 그의 길이(length)를 예를 들어서 쉽게 설명한다.

인천(2)에서 부산(3)까지 가는 방법은 다음과 같이 몇 가지 방법이 있다.

인천(2)→부산(3)

인천(2)→서울(4)→부산(3)

인천(2)→광주(1)→목포(5)→서울(4)→부산(3)

이때 2→3, 2→4→3, 2→1→5→4→3등을 각각 2에서 3으로의 길이가 1, 2, 4인 경로라 한다.

따라서 여기서의 질문은 다음과 같이 바꾸어 말할 수 있다.

① 6에서 2로의 경로 중 길이가 2인 경로의 수는 몇 개인가?

② 6에서 3로의 경로 중 길이가 3인 경로의 수는 몇 개인가?

둘째) 각 도시 사이에 노선이 있으면 1로, 없으면 0으로 표시한다.

도시	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	0	1	1
5	1	0	0	1	0	0
6	1	0	1	1	0	0

셋째) 둘째)로부터 다음과 같은 행렬 A를 얻는다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 i행과 j열의 원소가 1이면, 이것의 의미는 I에서 j로의 경로중, 길이가 1인 경로가 1개 있음을 의미한다.

넷째) i에서 j로의 경로 중, 길이가 2인 경로를 어떻게 구할 수 있는지 알아보

자.

답을 얻기 위하여 A^2을 구해본다.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

여기서 A^2의 i행 j열의 원소가 바로 i에서 j로의 경로 중, 길이가 2인 경로수 수임을 알 수 있다. 그 이유는 다음과 같다.

A^2의 i행 j열의 원소는 $a_{i1}a_{ij} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{i6}a_{6j}$이다. 그런데 $a_{i1}a_{ij}$는 i에서 j로의 경로 중 1을 경유해서 가는 경로이고, $a_{i2}a_{2j}$는 I에서 j로의 경로 중, 2를 경유해서 가는 경로이며, 마찬가지로 $a_{i6}a_{6j}$는 i에서 j로의 경로 중, 6을 경유해서 가는 경로이다. 그러므로 A^2의 i행 j열의 원소는 i에서 j로의 경로 중 경유지가 한곳인 모든 경로의 수를 나타냄을 알 수 있다. 따라서 ①의 답은 A^2의 6행 2열의 원소인 3이다.

실제로, 그 세 경로는 다음과 같다.

제주(6)→서울(4)→인천(2)

제주(6)→광주(1)→인천(2)

제주(6)→부산(3)→인천(2)

같은 방법으로, i에서 j로의 경로 중, 길이가 3인 경로의 수는 A^3을 구해봄으로서 알 수 있다.

다섯째) ②의 답을 얻기 위하여, A^3을 구해본다.

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & 7 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 6 & 4 & 7 & 9 \\ 6 & 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

그러므로 ②의 답은 A^3의 6행 3열의 원소인 7이다. 실제로 그 일곱 경로는 다음과 같다.

제주(6)→부산(3)→제주(6)→부산(3)

제주(6)→부산(3)→서울(4)→부산(3)

제주(6)→부산(3)→인천(2)→부산(3)

제주(6)→서울(4)→인천(2)→부산(3)

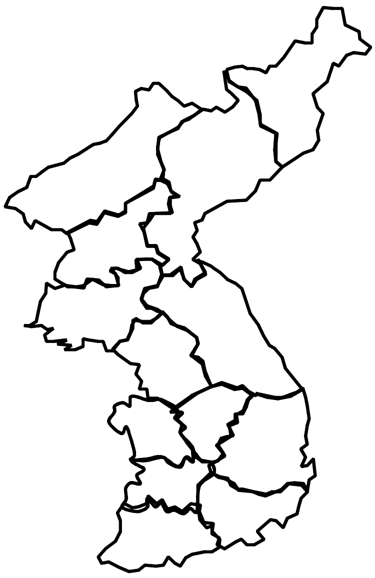
제주(6)→서울(4)→제주(6)→부산(3)

제주(6)→광주(1)→제주(6)→부산(3)

제주(6)→광주(1)→인천(2)→부산(3)

결론적으로, i에서 j로의 경로중, 길이가 k인 경로의 수(경유지가 $k-1$곳)는 A^k의 i행 j열의 원소임을 알 수 있다. ▲

【실생활문제 9】 다음과 같은 우리나라 지도에 색을 칠하여 경계를 구분할 때 최소의 색을 사용하여 칠하여 보자.



【실생활문제 10】 어느 고등학교의 A, B, C, D, E, F, G, H 다섯 선생님은 아래 표와 같이 7개의 회의에 참석해야 하는 사람들이다. 다음 물음에 답하여라.

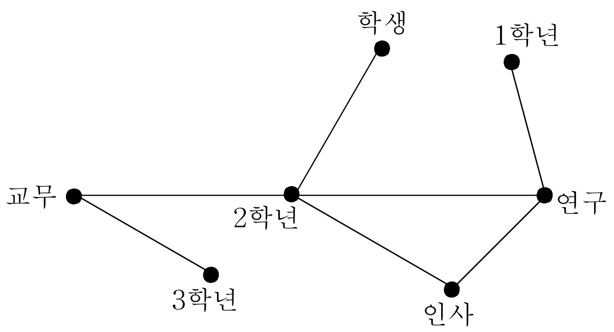
교사 \ 회의	A	B	C	D	F	G	H
교무	○	○					
연구			○				○
학생						○	
인사			○	○			
1학년							○
2학년	○			○		○	
3학년		○					

1) 각 과를 꼭지점으로 하고 공통으로 소속된 선생님이 있는 두 과에 해당하는 꼭지점은 변으로 이어 그래프를 그려라.

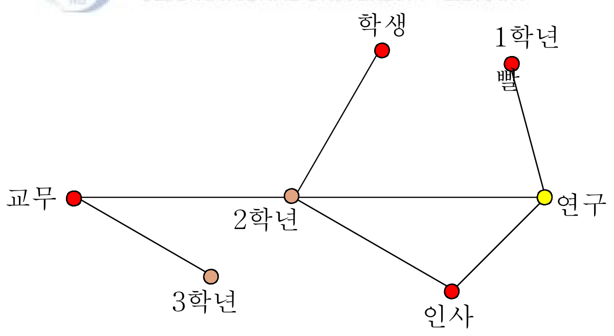
2) 7개의 회의에 필요한 시간대의 개수는 최소 몇 개인가?

【풀이】

1)



2) 같은 선생님이 소속된 두 과는 동시에 회의 시간을 잡을 수 없으므로 인접한 꼭지점은 다음 그림과 같이 서로 다른 색으로 칠할 수 있다. 따라서 구하는 시간대의 개수는 최소 3가지이다.



▲

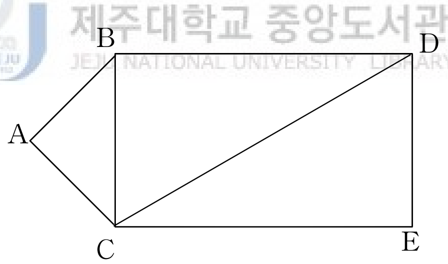
【실생활문제 11】

다섯 명의 연사 A, B, C, D, E가 한시간씩 강연하는 강연회가 있다. 아래와 같이 연사들도 다른 연사들의 강연을 듣고 싶어한다. 연사들이 듣고 싶은 강연을 모두 들을 수 있도록 시간을 조정한다고 할 때, 이 강연회가 끝나려면 최소한 몇 시간

이 필요할까?

연사	연사가 듣고 싶어하는 강연의 연사
A	B, C
B	C, D
C	A
D	C
E	C, D

【풀이】 A, B, C, D, E를 꼭지점으로 하고 두 연사 중 한 연사라도 다른 연사의 강연을 듣고 싶으면 두 연사 사이에 변으로 연결하는 그래프를 생각하면 아래의 그래프와 같다.



이제 두 연사 중 한 연사라도 다른 연사의 강연을 듣고 싶으면 두 연사는 시간을 달리 잡아야 하므로 위의 그래프에서 인접한 꼭지점은 서로 다른 색깔을 갖도록 모든 꼭지점을 색칠하는 색칠문제와 같아진다. 세 꼭지점 A, B, C가 한 회로를 이루므로 적어도 세 가지 색깔은 필요하다. 꼭지점 A, B, C에 각각 빨강, 파랑, 노랑을 칠하고 D에는 빨강, E에는 노랑을 칠하면 위의 조건을 모두 만족하므로 빨강, 파랑, 노랑 세 가지 색깔만 있으면 충분하다. 그러므로 이 강연회가 끝나려면 적어도 3시간이 필요하다. ▲

Ⅳ. 결론

정보화 사회에서는 정보처리의 중요성이 중대하여 전통적인 수학만을 고집하기보다는 변화하는 사회적 요구에 대처할 수 있는 학습 내용을 고려해야 한다. 이산적인 대상과 유한한 절차 과정을 다루는 이산 수학은 이런 요구에 적합한 수학의 분야이다. 미국에서는 1998년에 미국수학교사 협의회(NCTM, The National Council of Teachers of Mathematics)가 이산수학의 교육적 가치를 대수, 기하, 미적분 등과 같은 수준으로 평가하고, 미국 중등수학 교육표준에 이산수학을 포함시켰다. 우리나라가 제7차 수학과 교육과정에서 이산수학을 심화 선택과목으로 선정하게 된 것도 이런 맥락에서라고 본다.

본 논문에서는 이산수학의 배경과 개념, 필요성, 6차 교육과정과 7차 교육과정에서 이산수학교과 외에 들어 있는 이산수학의 내용을 살펴보고 이웃 나라인 일본 교육과정과 우리나라 교육과정을 비교하였으며 일종교과서인 이산수학의 내용 중의 하나인 그래프 영역을 중심으로 살펴보면서 그래프, 같은 그래프, 평면그래프, 행렬의 곱셈 등의 정의를 보완하였으며, 면의 차수, 한 붓 그리기의 정의를 추가하였고 , 수형도의 깊이 우선검색방법과 너비 우선검색방법을 설명하였다. 그리고 지도상의 주의할 점을 제시하였다. 그리고 교과서에 없는 오일러의 공식과 그 증명을 제시하고, 오일러의 회로가 존재하기 위한 필요충분조건의 정리의 증명, 해밀턴 회로를 갖기 위한 충분조건에 대한 정리와 증명, 그 밖의 증명 없이 사용되는 여러 가지 정리의 증명을 제시하였고, 또한 색칠하는 방법으로 Welch-Powell의 알고리즘을 소개하였으며, 신시가지에서 도로의 중앙선을 긋는 방법, 제주에서 다른 도시로 갈때의 항공노선의 수를 구하기 등 보다 다양한 실생활의 예들을 제시하여 학생 및 교사들에게 이산수학의 교수학습자료로 활용하는데 도움을 주고자 한다.

참 고 문 헌

교육부 (1992) .고등학교 교육과정(1) (교육부 고시 제1992-19호), 대한교과서주식회사.

교육부(1997). 고등학교 교육과정(1)[별책4] (교육부 고시 제1997-15호), 대한교과서 주식회사.

신현성 외(2002), 이산수학,(주)천재교육, 교육인적자원부, 강원대학교 1종 도서편찬위원회.

신현성 외(2002), 이산수학 교사용 지도서, 교육인적자원부, 강원대학교 1종 도서편찬위원회.

신현성 외(2003), 아름다운 이산수학, (주)천재교육

이장주 외(2003), 해법문제집, (주)천재교육

이대웅, 김윤호(2001), 이산수학, 도서출판 그린

조병호(2003), 이산수학, 도서출판 정일

金慶泰(1988), 이산수학, 홍릉과학출판사

황석근외(2001), 「이산수학」, 블랙박스

일본문부성(2002), "고등학교학습지도요령해설 數學編, 理數編", 實敎출판주식회사

度도信三・大島利雄 외(2002), "수학 B″, 교연출판주식회사

이지현(2002), "7차 교육과정에서 새로 도입된 이산수학의 주제 연구", 碩士學位論文, 건국대학교 교육대학원

박수정(2002), "제7차 교육과정의 선택과목인 이산수학에 관한 연구", 碩士學位論文, 대구대학교 교육대학원

유 선(2001), "이산수학의 현장정착을 위한 기초조사 연구"碩士學位論文, 이화여자대학교 교육대학원

권소영(2002), "그래프 이론의 지도방안 연구", 碩士學位論文, 홍익대학교 교육대학원

劉恩喜(2002), "행렬을 이용한 실생활 문제와 해결에 관한 고찰", 碩士學位論文,

순천대학교 교육대학원
張淵煥(1994), "도형에 관한 지도 방안 연구",碩士學位論文, 단국대학교 교육대학원
朴權龍(2002), "이산수학의 한 분야인 의사 결정과 최적화에 관한 연구",碩士學位論文, 제주대학교 교육대학원
강현욱(2001), "고등학교에서 이산수학의 지도에 관한 연구", 碩士學位論文, 강원대학교 교육대학원
석상호(2002), "고등학교에서의 이산수학에 관한 연구-그래프 단원을 중심으로-", 碩士學位論文, 경희대학교 교육대학원
박윤근(2002), "제7차 교육과정의 이산수학 연구", 碩士學位論文, 경희 대학교 교육대학원
http://mathschool.com.ne.kr/hermite.htm#오일러
http://mathschool.com.ne.kr/thales.htm#헤밀턴
http://www.mathman.pe.kr/math/color4.htm

<Abstract>

A Study on Discrete Mathematics, an Elective Subject
of the 7th National Curriculum
- Focusing on graph part -

Kim, Seog-Jong

Major in Mathematics Education
Graduate School of Cheju National University of Education
Jeju, Korea

Supervised by professor Yang, Youngoh

As computer develops more, discrete mathematics has become not only the requires subject for students who wants to major in computer but also has been focused on by those that will specialize in mathematics. So its importance and value is being emphasized .

Considering the current trends in education, our country chose discrete mathematics as an optional subject for deepening learning.

The main purposes of this thesis are: It introduces the background and concepts of discrete mathematics which is first tried and has been taught to emphasize on the necessity of discrete mathematics in high school maths. It compares not only the contents of sixth curriculum discrete maths with that in seventh curriculum mathematics but also the curriculum of our country

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2004.

with that of Japan. With graph in graph units. Euler circuit, Hamilton curcuit, tree, spaning tree, marix and graph, problem with coloring, it gives a supplementary explanation to the presented definitions, makes more theorems and established ones that are not proved. Also it presents and deals with subjects related to everyday life on order for this concepts to be definite.