碩士學位論文

Descriptor 시스템의 H_∞ 다중목적 제어기 설계

濟州大學校 大學院

通信工學科

金 貞 住

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

1999年 12月

Descriptor 시스템의 H_∞ 다중목적 제어기 설계

指導敎授 康 鎭 植

金 貞 住

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

1999 年 12 月

金貞住의 工學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 林 載 允 印

委 員 李 鎔 鶴 印

委 員 康 鎭 植 印

濟州大學校 大學院

1999年 12 月

H_∞ Multiobjective Controller Design for Descriptor System

Jeong-Ju Kim
(Supervised by professor Jin-Shig Kang)

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF ENGINEERING

DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATION ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

1999. 12.

목 차

Abstract 1

Ⅰ. 서론 3

Ⅱ. Descriptor 시스템 5

1. Descriptor 시스템 5
2. Descriptor 시스템의 극점 7

Ⅲ. 제어 설계 문제 9

1. Lyapunov 조건 9
2. LMI 영역 10

Ⅳ. 극배치를 포함한 상태 되먹임 H_2/H_∞ 설계 16

1. 상태 되먹임 H_2/H_∞ 설계 16
2. 설계예(위성자세제어시스템) 21
3. 제어기 설계 및 시뮬레이션 23

Ⅴ. 극배치를 포함하는 출력 되먹임 H_∞ 설계 32

1. 출력 되먹임 H_∞ 제어기 설계 32
2. 설계예(레이더 안테나) 39
3. 제어기 설계 및 시뮬레이션 41

Ⅵ. 결론 45

참 고 문 헌 47

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Abstract

Many of the engineering systems such as electrical circuits, communication networks, power systems and aerospace systems can be modelled by a descriptor system which is similar to the state space representation of the system.

In this thesis, a control algorithm for the descriptor system by using H_∞ synthesis with a regional pole placement constraint was presented. It is well known that the H_∞, H_2 optimization problems are reformulated by the Linear Matrix Inequality(LMI) and the stable system must satisfy the Lyapunov equation. Also, in this thesis, the complex valued convex function can be characterized and the multiple characteristic function can be characterized multiple convex regions. They are converted to the single LMI which can be solved easily by using the LMI toolbox of the Matlab. Singular systems, in which the number of the poles and zeros of the system is changed, can be modelled by descriptor system. When the number of poles of the system is changed due to the parameters variation, the system can be modelled by two subsystems as the one is static system and the other is dynamic one. And these two systems are connected serially by the manner that the one system output is connected to the input of the other system. Descriptor system can be treated such a singular system easily. Sufficient conditions for feasibility are derived for a general class of convex regions of the complex

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

plane. These conditions are expressed in terms of LMI's. By using these LMI's, the state feedback and output feedback controllers are designed, and with these controllers, the H_∞ and pole placement constraints are satisfied. To show the suggested controller has a good properties, it was applied the presented state feedback controller to satellite attitude system and output feedback controller to radar antenna.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Ⅰ. 서론

비선형 시스템 제어는 대부분 선형화과정에 의하여 선형 상태공간 시스템으로 표현하고 선형 시스템 제어방법을 사용하고 있지만 선형화 과정에서의 오차, 물리 파라미터의 변화 등에 의하여 특이 시스템(singular system)이 되어버리는 경우가 많으며, 이러한 시스템을 표현하기 위한 방법으로 descriptor 표현이 사용되고 있다. 이 descriptor 시스템은 전기적인 회로망, 파워 시스템, 우주공학, 화학공정 등의 엔지니어링 시스템과 경제적, 생물학적 시스템 망 분석 등 특이 시스템(singular system) 등을 모델링 할 때 이용되고 있다 (Gahinet 등,1995)(Ardema,1983)(Tang and Okubo,1995). descriptor 시스템은 임펄스모드와 대수적인 시스템의 구속조건을 명백하게 묘사할 수 있고, 이러한 descriptor 시스템 이론은 실제적인 문제와 상태공간형을 기초로 한 제어이론 사이의 차를 없애주는 중요한 역할을 한다(Dai,1989).

일반적인 제어 시스템은 오버 슈트, 정착 시간, 상승 시간 등의 과도응답 특성을 나타내는 성능 지수를 고려하여 설계하여야 한다. 이러한 성능 지수로부터 시스템의 극점이 존재해야 하는 영역을 알 수 있으며, Gutman 등은 어떤 특정 영역에 시스템의 극점이 존재하기 위한 조건과 특성 영역에 대해 정의된 일반화된 Lyapunov방정식을 만족하는 해가 존재하는 제어기 설계방법을 제시하였다 (Gutman and Jury,1981).

그러나 실제 환경은 시간에 따라 변화할 수 있고 또한 운전조건들이 변할 수 있기 때문에 제어시스템은 이러한 변화에 견딜 수 있어야 한다. 제어시스템이 실제 환경에서 적절하게 동작하기 위하여 가져야하는 성질을 강인성이라고 한다. 이러한 강인한 안정성 여유를 증가시키기 위해 사용되는 제어방법이 1980년대에 연구되어지고 있는 H_∞제어이론으로 G. Zames 등에 의하여 처음으로 정식화되었다. 이러한 강인성이 제어 연구자들 사이에 주요한 관심사가 되었고 여러 연구자들에 의해 H_∞ 제어, J. Doyle에 의한 μ합성, I. Horowitz에 의한 정량적인 되먹임이론, 구조화된 불확실성에 대한 Kharitonov의 이론에 근거한 방법

등. 강인한 다변수 제어 시스템을 설계하기 위한 다른 방법들에 대한 연구 결과들이 발표되었다(Shahian and Hassul,1993).

본 논문에서는 비선형 시스템을 descriptor 시스템으로 선형화하고 동적 상태를 나타내는 descriptor 시스템에 대하여 강인한 제어 시스템을 설계하기 위한 H_∞구속조건을 포함하는 극배치기법을 사용하여 상태 되먹임 제어기와 출력 되먹임 제어기를 설계한다. 안정한 영역에 극점이 존재하기 위한 Lyapunov 조건과 H_2, H_∞에 대한 복소수 평면상에서의 convex영역의 일반적인 조건을 만족하는 LMI에 대하여 논한다. 제시된 제어방법의 타당성을 증명하기 위해 상태 되먹임 제어 시스템 설계에서는 위성자세제어시스템을 적용하고, 출력 되먹임 제어 시스템설계에는 레이더 안테나에 대해 적용시켜 각각에 대한 시뮬레이션을 수행한다.

본 논문의 구성은 제Ⅰ장에서는 descriptor 시스템과 H_∞의 연구의 목적과 필요성, 그리고 연구진행방향에 대하여 논하고, 제Ⅱ장에서는 descriptor 시스템에 대한 정의와 descriptor 시스템의 극점에 대하여 서술하고, 제Ⅲ장에서는 LMI 영역과 Lyapunov 방정식에 대한 극점배치의 안정영역을 제시한다. 제Ⅳ장에서는 H_∞구속조건과 H_2구속조건을 만족하는 극배치 제어기 설계방법을 제시하며 위성자세시스템에 적용한다. 그리고 Ⅴ장에서는 H_∞구속조건을 만족하는 출력 되먹임 극배치 제어기 설계 방법을 제시하며 레이더 안테나에 적용한다. 마지막으로 제Ⅵ장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Ⅱ. Descriptor 시스템

1. Descriptor 시스템

비선형 시스템을 모델링 할 경우 descriptor 시스템 표현이 유용할 경우가 많이 있으며, 특히 동작영역의 변화에 대하여 선형화 된 시스템의 극점수가 변할 경우에는 descriptor 시스템으로 표현하여야 한다. descriptor 시스템의 동역학식은 다음과 같다.

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{1a}$$

$$y = Cx \tag{1b}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

여기서 $x \in R^n$인 상태벡터, $u \in R^p$인 입력벡터, $y \in R^q$인 출력벡터이며, $E \in R^{n \times n}$인 descriptor 행렬, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, $C \in R^{q \times n}$이다. 식(1)의 시스템에 대한 전달함수는 라플라스 변환과 행렬 연산을 이용하여 구할 수 있다. 먼저 E가 full rank 인 경우에는 식(1)을 라플라스 변환하여 정리하면 전달함수는 다음과 같다.

$$G_D(s) = C(Es - A)^{-1}B \tag{2}$$

그러나 일반적인 비선형 시스템을 동작영역에서 선형화할 경우 E는 full rank 를 보장하지 않는다. E의 rank가 $m < n$이라면 다음 식을 만족하는 unitary 행렬 T가 존재한다.

$$TE = \begin{bmatrix} E_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서 T는 full rank 이며 $\|T\|_2 = 1$을 만족한다. 그리고 E_1의 rank 는 m이다. 이 경우에 시스템 동력학 식은 m개의 동적 상태와 $n-m$개의 정적 상태를 갖는 시스템으로 표현할 수 있다. 식(1)의 양변에 T를 곱하면 다음과 같다.

$$T\dot{E}x = TAx + TBu \tag{4}$$

식(4)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} u \tag{5}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

식(5)로부터 동적 시스템과 정적 시스템으로 분리하여 쓰면 다음과 같다.

$$E_1\dot{x}_1 = \overline{A}_{11}x_1 + \overline{A}_{12}x_2 + \overline{B}_1 u \tag{6a}$$

$$0 = \overline{A}_{21}x_1 + \overline{A}_{22}x_2 + \overline{B}_2 u \tag{6b}$$

식(6a)는 동적 시스템이며 식(6b)는 정적 시스템이다. 그리고 식(6b)로부터 $\overline{A}_{22}$가 정칙(nonsingular)이라면 x_2는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_2 &= -\ \overline{A}_{22}^{-1}(\ \overline{A}_{21}x_1 + \overline{B}_2 u) \\ &= -\ \overline{A}_{22}^{-1}\ \overline{A}_{21}x_1 - \ \overline{A}_{22}^{-1}\ \overline{B}_2 u \end{aligned} \tag{7}$$

그리고 출력식은

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2$$
$$= (C_1 - C_2 \ \overline{A}_{22}^{-1} \ \overline{A}_{21}) x_1 - C_2 \ \overline{A}_{22}^{-1} \ \overline{\overline{B}}_2 u \tag{8}$$

로 된다. 식(6a)와 식(7), 식(8)을 이용하여 동적 시스템의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$G_{DI}(s) = \tilde{C}(sE_1 - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \tag{9}$$

여기서

$$\tilde{C} = C_1 - C_2 \ \overline{A}_{22}^{-1} \ \overline{A}_{21}$$
$$\tilde{A} = \overline{\overline{A}}_{11} - \overline{A}_{12} \ \overline{A}_{22}^{-1} \ \overline{A}_{21}$$
$$\tilde{B} = B_1 - \overline{A}_{12} \ \overline{A}_{22}^{-1} \ \overline{B}_2$$
$$\tilde{D} = -C_2 \ \overline{A}_{22}^{-1} \overline{B}_2$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이며, 이때 시스템의 특성 다항식은

$$\det (sE_1 - \tilde{A}) = 0$$

로 되어 m개의 극점을 갖는 시스템이 된다.

2. Descriptor 시스템의 극점

식(1)로 표현되는 descriptor 시스템에 대한 극배치 제어문제를 고찰하기 위하여 일반적인 동적 시스템에 대한 고유치, 고유벡터의 관계를 고려하자.

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u$$
$$y = C_0 x \tag{10}$$

식(10)의 시스템의 극점은 A_0의 고유치와 같으며, 이때 A_0행렬의 고유치행렬 Λ_0와 고유벡터 행렬 V_0는 다음 식을 만족한다.

$$A_0 V_0 = V_0 \Lambda_0 \tag{11}$$

따라서 식(1)의 시스템은 E가 full rank 라면 식(1a)의 양변에 E의 역행렬을 곱하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E^{-1}Ax + E^{-1}Bu \\ &\triangleq A_0 x + B_0 u \end{aligned} \tag{12}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이때 A_0의 고유치가 시스템의 극점이 되므로 식(1)의 descriptor 시스템의 극점은 $E^{-1}A$의 고유치가 시스템의 극점임을 알 수 있다. 그리고 E의 rank가 m일 때 식(10)의 동역학식은

$$E_1 \dot{x} = \tilde{A} x_1 + \tilde{B} u \tag{13a}$$
$$y = \tilde{C} x_1 + \tilde{D} u \tag{13b}$$

로 됨을 알 수 있다. 식(13)의 시스템의 극점은 $E_1^{-1}\tilde{A}$의 극점이 된다.

Ⅲ. 제어 설계 문제

1. Lyapunov 조건

선형시스템의 응답특성은 극점의 위치에 관련되어 있다. 예를 들면 극점 $\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$를 갖는 2차시스템의 시간응답은 비제동고유주파수 $w_n = |\lambda|$, 제동비 ζ와 제동고유주파수 w_d에 의해 특성화된다. 따라서 제어시스템의 시간응답특성을 좋게 하기 위해서는 정해진 영역에 λ를 정해야한다. 극점의 위치를 포함하는 영역을 정의하기 위하여 다음과 같은 영역을 고려하자.

$$x < -\alpha < 0,\ |x+jy| < r,\ \tan\theta x < -|y| \qquad (14)$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

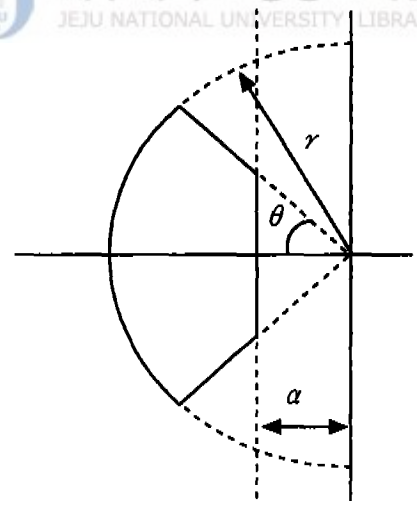


Fig. 1 Region $S(\alpha, r, \theta)$

여기서 α는 최소 감쇠비, $\zeta = \cos\theta$는 최소 댐핑비, $w_d = r\sin\theta$는 최대 비제동

고유 주파수이다. 이것은 최대 오버슈트, 지연시간, 상승시간, 정착시간 등을 고려할 수 있는 변수들이다. 이들 영역은 $S(\alpha,r,\theta)$로 표현될 수 있으며 Fig. 1에 영역을 보였다. D를 복소수 좌반면의 영역이라고 하자. 만일 D영역에 모든 극점들이 존재한다면 동적 시스템 $\dot{x}=Ax$는 D에서 안정하다고 한다. 확장하면 A는 D에서 안정이고, 특히, A가 안정하다면 대칭행렬 X는 다음 식을 만족한다.

$$AX+X^TA<0,\ X>0 \tag{15}$$

이 식은 Lyapunov 안정조건을 나타내는 식이다.

2. LMI 영역

제주대학교 중앙도서관

정의1(LMI영역) : 만일 대칭행렬 $\alpha=[\alpha_{kl}]\in R^{m\times m}$이고 행렬 $\beta=[\beta_{kl}]\in R^{m\times m}$이면 복소수평면의 부분집합 D는 LMI 영역이라고 부르며, 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$D=\{z\in C:\ f_D(z)<0\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f_D(z): &= \alpha+z\beta+\bar{z}\beta^T \\ &= [\alpha_{kl}+\beta_{kl}z+\beta_{lk}\bar{z}]_{1\le k,l\le m} \end{aligned} \tag{17}$$

특성방정식 f_D는 $m\times m$ Hermitian 행렬로 구성된 함수이고 "<0"는 음의 한정을 나타낸다. 즉, LMI영역은 z와 $\bar{z}$내의 LMI로 표현되거나 $x=Re(z)$와 $y=Im(z)$로 표현되는 복소수평면의 부분집합으로 convex이다. 또한 $z\in D$이고, $f_D(\bar{z})=\overline{f_D(z)}<0$이며 실수 축에 관하여 대칭이다. 주어진 LMI영역에서 극

점의 위치는 다음과 같은 $m\times m$행렬로 특성화된다.

$$M_D(A,X) := \alpha\otimes X+\beta\otimes(AX)+\beta^T\otimes(AX)^T \\ =[\alpha_{kl}X+\beta_{kl}AX+\beta_{lk}XA^T]_{1\le k,l\le m} \tag{18}$$

여기서 $\otimes$는 행렬의 Kronecker곱을 의미한다.

다음 정리는 복소평면상의 부분공간 D에 대한 시스템의 안정도 조건이다.

정리1 : 만일 행렬 A가 D내에서 안정이면 X는 대칭행렬이고 식(19)를 만족한다.

$$M_D(A,X)<0,\ X>0 \tag{19}$$

(증명)

1) 충분조건

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

A의 고유치를 λ라 두고 고유벡터를 $v\in C$라 두면 $v^HA=\lambda v^H$라고 쓸 수 있다. 그리고 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$와 식(17), 식(18)을 이용하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned}&(I_m\otimes v^H)\,M_D(A,X)\,(I_m\otimes v)\\&=(I_m\otimes v^H)\{\alpha\otimes X+\beta\otimes(AX)+\beta^T\otimes(AX)^T\}(I_m\otimes v)\\&=\alpha\otimes v^HXv+\beta\otimes v^HAXv+\beta^T\otimes v^H(AX)^Tv\\&=(v^HXv)\,f_D(\lambda)\end{aligned} \tag{20}$$

이 식으로부터 $M_D(A,X)<0$이고 $X>0$은 $f_D(\lambda)<0$이고 $\lambda\in D$라는 것을 알 수 있다. 따라서 식(19)을 만족하면 A가 D내에서 안정하다.

2)필요조건

A가 D내에서 안정하다고 가정하자. 그러면 $M_D(A,X)<0$이고 $X>0$가 되는 실수 행렬이 존재해야 한다. 함수 M_D를 확장하기 위해 복소수 행렬 $A\in C^{n\times n}$과 $X=X^H\in C^{n\times n}$을 정의하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_D(A,X):=\alpha\otimes X+\beta\otimes(AX)+\beta^T\otimes(AX)^H \tag{21}$$

첫째로 A가 대각 행렬 $\triangle=\mathrm{Diag}(\lambda_i)$인 경우를 고려하자. 이때 $\lambda_i\in D$이다. 이 식으로부터

$$M_D(\triangle,I)=U^T\mathrm{Diag}(f_D(\lambda_i))U \tag{22}$$

이 된다. 여기서 U는 permutation 행렬이다. 따라서 $M_D(\triangle,X)<0$은 $X:=I$라는 결과를 얻는다. 일반적인 경우 $\triangle$는 A의 고유값의 대각행렬이다. A의 Jordan 표준형으로 변환하기 위하여 $\lim_{k\to\infty}T_k^{-1}AT_k=\triangle$를 만족하는 T_k를 구할 수 있으며, 이때 T_k는 full rank이다. 여기서 $M_D(Y,I)$는 Y에 대하여 연속인 함수이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{k\to\infty}M_D(T_k^{-1}AT_k,I)=M_D(\triangle,I)<0 \tag{23}$$

따라서 k가 충분히 크다면 $M_D(T_k^{-1}AT_k,I)<0$이다. 어떤 k와 $T:=T_k$ 일 때 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$와 식(18)을 적용한다면 다음과 같이 표현할 수 있다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(I_m \otimes T)\, M_D(T^{-1}AT, I)\, (I_m \otimes T^H) = M_D(A, TT^H) \tag{24}$$

식(24)와 $M_D(T^{-1}AT, I) < 0$은 $M_D(A, X) < 0$임을 보여준다. 여기서 $X := TT^H > 0$이다. (증명끝)

식(18)의 $M_D(A, X)$와 식(17)의 $f_D(z)$는 $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$의 관계식으로서 서로 관련되어진다. 예를 들어 반경이 r이고 중심이 $(-q, 0)$인 원은 다음과 같은 특성방정식을 갖는 LMI영역이 되고 Fig. 2와 같다.

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{pmatrix} < 0 \tag{25}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

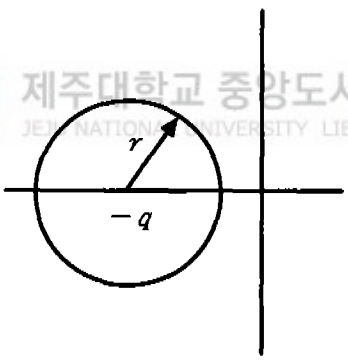


Fig. 2 The disk of radius r and center $(-q, 0)$

식(25)의 $f_D(z)$는 복소평면상의 원 내부영역을 특성화한 특성식이며, 이를 LMI 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -rX & qX+AX \\ qX+XA^T & -rX \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0 \tag{26}$$

그리고 $\alpha = r = 0$인 $S(0,0,\theta)$인 좌반면의 섹터영역에 대하여 적용하여보자. 다음 식을 만족하는 양의 반한정 행렬 X가 존재한다면 행렬 A의 고유치들은 $S(0,0,\theta)$인 영역 내부에 존재한다.

$$(W \otimes A)X + X(W \otimes A)^T < 0 \tag{27}$$

여기서 $W = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$이다. 그리고 $S(0,0,\theta)$는 다음과 같은 복성화함수를 갖는 convex 영역이다.

$$f_\theta(z) = \begin{pmatrix} \sin\theta(z+\bar{z}) & \cos\theta(z-\bar{z}) \\ -\cos\theta(z-\bar{z}) & \sin\theta(z+\bar{z}) \end{pmatrix} \tag{28}$$

정리1에서 만일 $X > 0$이라면 행렬 A는 $S(0,0,\theta)$에서 극점을 갖으며 다음과 같이 표현할 수 있다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{pmatrix} \sin\theta(AX + XA^T) & \cos\theta(AX - XA^T) \\ -\cos\theta(AX - XA^T) & \sin\theta(AX + XA^T) \end{pmatrix} < 0 \tag{29}$$

따라서 Fig. 1의 $S(\alpha, r, \theta)$인 영역에 A의 고유치가 존재하기 위해서는 다음으로 주어지는 LMI들의 양한정 공통해 X가 존재하여야 한다.

$$AX + XA^T + 2\alpha X < 0 \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} -rX & AX \\ XA^T & -rX \end{pmatrix} < 0 \tag{31}$$

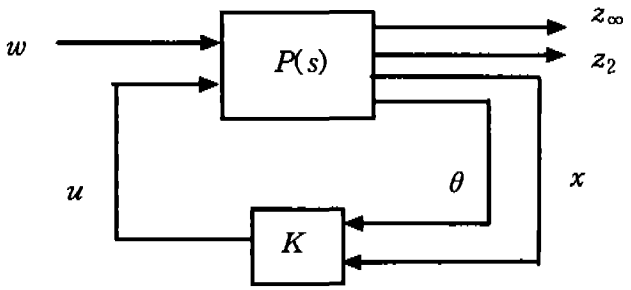
$$\begin{pmatrix} \sin\theta(AX + XA^T) & \cos\theta(AX - XA^T) \\ -\cos\theta(AX - XA^T) & \sin\theta(AX + XA^T) \end{pmatrix} < 0 \tag{32}$$

식(30), 식(31), 식(32)의 LMI들은 따로 계산되는 게 아니라 대각화 방법으로 하나의 LMI로 표현될 수 있으며, 이에 대한 공통해 X는 MATLAB의 LMI ToolBox를 이용하여 계산될 수 있다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

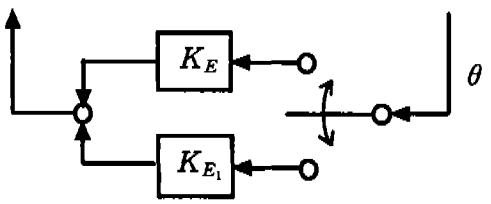
Ⅳ. 극배치를 포함한 상태 되먹임 H_2/H_∞설계

1. 상태 되먹임 H_2/H_∞ 설계



(a)State feedback control

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY



(b)Structure of θ

Fig. 3 State feedback control structure

이 장에서는 Fig. 3과 같이 LTI 제어구조를 갖는 H_2/H_∞성능과 극배치가 조합된 상태 되먹임에 관하여 논한다. 여기에서 E는 descriptor 행렬이고, θ는 E가 full rank일 때와 full rank가 아닐 때 스위칭역할을 한다. 그리고 폐루

프 극점들은 복소평면상의 좌반면 부분집합 D내에 존재하여야 한다.

다음과 같은 descriptor 형 LTI시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_{p1} w(t) + B_{p2} u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{p\infty} x(t) + D_{p\infty 1} w(t) + D_{p\infty 2} u(t) \\ z_2(t) &= C_{p2} x(t) + D_{p22} u(t) \end{aligned} \tag{33a}$$

E가 full rank이면 식(33a)의 플랜트 동역학 식은 다음과 같은 일반화된 상태공간 표현으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_{\infty 1} w(t) + D_{\infty 2} u(t) \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \tag{33b}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

여기서 $A = E^{-1}A_p$, $B_1 = E^{-1}B_{p1}$, $B_2 = E^{-1}B_{p2}$이며, E가 full rank가 아니라면 동력학식은 Ⅱ장의 식(6)과 같이 정적 시스템과 동적 시스템으로 분리하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= E_1^{-1} (\overline{A}_{11} x_1 + \overline{A}_{12} x_2 + \overline{B}_{11} w + \overline{B}_{21} u) \\ 0 &= \overline{A}_{21} x_1 + \overline{A}_{22} x_2 + \overline{B}_{12} w + \overline{B}_{22} u \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_{\infty 1} w(t) + D_{\infty 2} u(t) \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \tag{33c}$$

여기서 x_1은 동적 시스템의 상태값이며, x_2는 정적 시스템의 상태값이다. 제어기 설계과정에서 정적 시스템 부분을 소거하기 위하여 식(33c)를 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{x}_1(t) = E_1^{-1}(\overline{A}_{11} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21})x_1 + E_1^{-1}(\overline{B}_{11} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{B}_{12})w$$
$$+ E_1^{-1}(\overline{B}_{21} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{B}_{22})u \qquad (33d)$$
$$z_\infty(t) = C_\infty x(t) + D_{\infty 1} w(t) + D_{\infty 2} u(t)$$
$$z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} u(t)$$

식(33d)는 식(33b)의 일반화된 플랜트의 상태 공간 표현과 그 형식이 일치하여 다만 상태값과 행렬의 크기만 다르다는 것을 알 수 있다. 따라서 향후의 제어기 설계는 식(33b)의 일반화된 표현을 이용하여도 일반성을 잃지 않는다. 여기서 $T_{wz_\infty}(s)$는 w에서 z_∞의 폐루프 전달함수이고, $T_{wz_2}(s)$는 w에서 z_2의 폐루프 전달함수로 정의한다. 식(33b)에서 상태 되먹임 제어입력을 $u = -K_E x$로 하면, 이때 폐루프 동역학식은 다음과 같다.

$$x = (A - B_2 K_E)x + B_1 w$$
$$z_\infty = (C_\infty + D_{\infty 2} K_E)x + D_{\infty 1} w \qquad (34)$$
$$z_2 = (C_2 + D_{22} K_E)x$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

제어기 설계문제는 다음과 같이 정식화된다.

· 복소평면상의 좌반면의 부분영역 D내에 폐루프극점을 배치한다.

· H_∞성능 : $\|T_{wz_\infty}\|_\infty < \gamma$이 되게 한다.

· H_2성능 : $\|T_{wz_2}\|_2$를 최소가 되게 한다.

즉, 본 논문에서 다루고자 하는 제어기 설계문제는 위의 세가지 조건을 동시에 만족하는 상태 되먹임 제어기를 구하는 것이다. 여기서 극배치 구속조건은 $X_D > 0$이면 다음을 만족한다.

$$[\alpha_{kl}X_D+\beta_{kl}A_{cl}X_D+\beta_{lk}X_DA_{cl}^T]_{1\le k,\,l\le m}<0 \tag{35}$$

H_∞구속조건은 다음 식을 만족하는 해 $X_\infty>0$이 존재할 경우에 성립한다.

$$\begin{pmatrix} A_{cl}X_\infty+X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cl\infty}^T \\ B_{cl} & -I & C^T \\ C_{cl\infty}X_\infty & D_{cl\infty} & -\gamma^2 I \end{pmatrix}<0 \tag{36}$$

H_2구속조건은 제어 그래미언 $A_{cl}X_2+X_2A_{cl}^T+B_{cl}B_{cl}^T<0$의 양한정 해 X_2로부터 $\min\|T_{wz_2}\|_2^2=\min\{\mathrm{Trace}(C_{cl2}X_2C_{cl2}^T)\}$ 임을 알 수 있다. 이 최적화 문제는 일반적으로 직접 해를 구할 수 없다. 따라서 양한정 대칭행렬 Y를 도입하여 준최적 문제로 변환하고 그 해를 구하여야 한다(Doyle 등,1992). 변환된 준최적 문제는 다음 식을 만족하는 Y를 구하는 문제로 된다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_{cl}X_2+X_2A_{cl}^T+B_{cl}B_{cl}^T<0 \tag{37}$$

$$\begin{pmatrix} Y & C_{cl2}X_2 \\ X_2C_{cl}^T & X_2 \end{pmatrix}>0 \tag{38}$$

여기서 식(38)은 $Y>C_{cl2}X_2C_{cl2}^T$이며, 이러한 X_2와 Y에 대하여 H_2구속조건은 $\min\|T_{wz_2}\|_2^2<\min\{\mathrm{Trace}(Y)\}$가 된다. 제어 목적은 H_∞조건 즉, $\|T_{wz_\infty}\|_\infty<\gamma$와 극 배치조건을 만족하는 상태 되먹임 이득 K에 대하여 T_{wz_2}의 H_2를 최소화시키는 것이다. 따라서 이와 같은 제어 목적은 식(35)~식(38)의 LMI들에 대하여 다음과 같이 표현되는 공통해를 구함으로서 달성되어질 수 있다.

$$X = X_D = X_\infty = X_2 > 0 \tag{39}$$

이때 H_2성능은 다음과 같이 표현된다.

$$J(T_{wz_2}) := \inf\{\mathrm{Trace}(Y) : X, Y, K\} \tag{40}$$

식(40)은 $X_D = X_\gamma = X_2 = X$이며, 식(35)~식(38)을 만족한다. 여기서 보조 성능가격함수 $J(T_{wz_2})$은 H_∞와 극배치 조건에 의한 H_2성능의 최적에 대한 상한 값이다. 식(40)의 최적화 문제는 convex 최적화 문제가 아니다. 여기서 convex 최적화 문제로 변환하기 위하여 보조변수 $L := KX$를 도입하면 식(35)~식(38)은 다음과 같이 재구성된다.

$$[\alpha_{kl} X + \beta_{kl} U(X, L) + \beta_{lk} U(X, L)^T] < 0 \tag{41}$$

$$\begin{pmatrix} U(X,L) + U(X,L)^T & B_1 & V(X,L)^T \\ B_1^T & -I & D_{\infty 1}^T \\ V(X,L) & D_{\infty 1} & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \tag{42}$$

$$\begin{pmatrix} Y & C_2 X + D_{22} L \\ (C_2 X + D_{22} L)^T & X \end{pmatrix} > 0 \tag{43}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

여기서

$$U(X, L) := AX + B_2 L, \quad V(X, L) := C_\infty X + D_{\infty 2} L \tag{44}$$

이며, 식(41)~식(43)은 convex임을 알 수 있다. (X^*, Y^*, L^*)를 최소값 문제에 대한 최적해라고 하면 상태 되먹임 이득 $K^* := L^*(X^*)^{-1}$은 H_∞의 성능이 γ보다 작아지게 하며 폐루프 극점위치가 복소평면상의 convex 영역 D 내부에

위치하게 한다. 그리고 이때 H_2성능이 $\sqrt{\text{Trace}(Y^*)}$보다 작다는 것을 알 수 있다.

2. 설계예(위성자세제어시스템)

인공위성은 고속운동을 하는 것처럼 보이나 이는 지구의 중력과 태양, 달 등의 인력에 의한 운동이며, 위성 자체는 정지해 있는 것이다. 그러나 지구와의 통신을 위하여서는 적당한 자세를 위치해야 되며, 외란 등의 요소에 의하여 자세의 변화를 가져올 수 있게 된다. 따라서 위성은 일반적으로 자세제어를 요구하므로 안테나 센서 및 태양계기판의 방향이 적절히 맞추어져야 한다. 인공위성의 방향을 기술하는 각 θ는 반드시 관성기준, 즉 어떠한 각 가속도도 갖지 아니하는 기준에

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

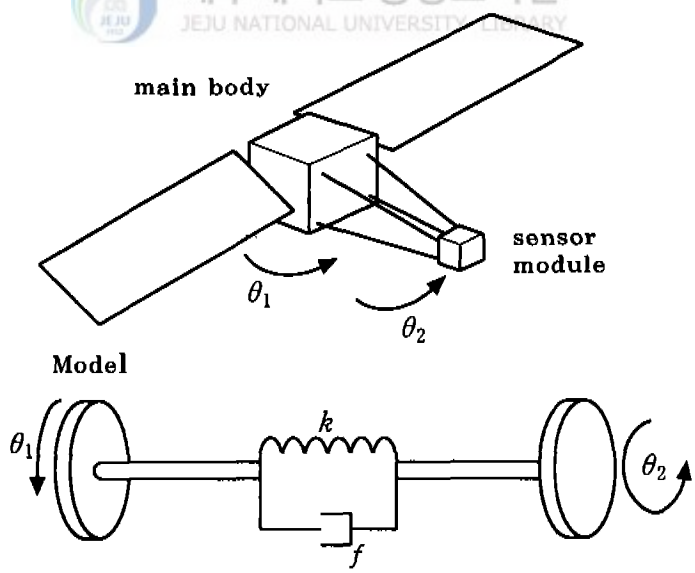


Fig. 4 A sketch of the satellite

대해 측정되어져야 한다. 그리고 인공위성에 작용하는 미소한 외란 토크가 있을 수 있으며, 주로 태양계기판의 어떠한 불균형에 작용하는 태양압력에서 발생하기도 한다. 만약 이 시스템이 안테나신호로부터 θ를 측정함으로써 제어되고 그 신호를 제어용 분사를 구동하기 위해 사용함으로써 제어되어진다면 측정치 θ와 가해진 제어입력 사이의 구성에 있어서 Fig. 4와 같이 인공위성에 대해 2개의 질량체가 토크상수가 k이고 댐핑상수가 f인 용수철에 의해 연결된 것으로 모델링 될 수 있으며, 이 계는 회전운동방정식 형태로 표현할 수 있다. Newton의 법칙으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) &= T + w \\ J_2\ddot{\theta}_2 + f(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

여기서

θ_1, θ_2 : 주 몸체와 센서 모듈의 yaw 각

k : 토크상수

f : 댐핑상수

T : 제어토크

w : 토크장애

J_1, J_2 : 관성모먼트 이다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

제어 목적은 외란입력 w에 대해 출력 θ의 변화를 최소로 하여야 한다. 즉, 각 위치 θ_2에 대하여 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

1) $w \rightarrow \theta_2$의 H_∞의 γ를 최소화한다.

2) $w \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ T \end{pmatrix}$의 전달함수인 H_2를 최소화한다.

3)페루프 극점위치를 half-plane의 교점 $x < -0.1$이고, 중심점에서의 내각이

$3\pi/4$인 영역에 배치한다.

식(46)에서 상태벡터를 $x_s^T=(\theta_1\ \theta_2\ \dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2)$라 두면 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x_s}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_1} & \frac{k}{J_1} & -\frac{f}{J_1} & \frac{f}{J_1} \\ \frac{k}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & \frac{f}{J_2} & -\frac{f}{J_2} \end{pmatrix} x_s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{pmatrix} (w+T) \qquad (46)$$

$$y=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)x_s$$

식(46)에서 이 시스템은 1입력 1출력이며, 4상태인 시스템임을 알 수 있다. 그리고 관성계수 k와 댐핑상수 f등의 영향을 받는 시스템이다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

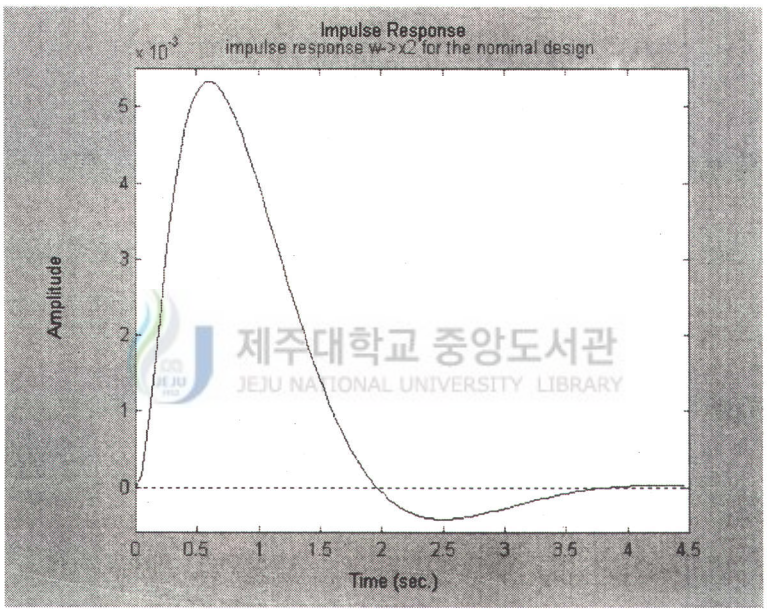
3. 제어기 설계 및 시뮬레이션

식(45)를 descriptor 시스템으로 표현해보면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -f & f \\ k & -k & f & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (w+T) \qquad (47)$$

$$z_\infty = \theta_2, \quad z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} T \tag{48}$$

1) E행렬이 full rank 인 경우($J_1 = 1$, $J_2 = 0.1$)



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 5 Impulse response $w \rightarrow \theta_2$ for the nominal design

공칭모델인 경우, 즉, $k=0.2450$, $f=0.0188$인 경우의 응답 특성은 Fig. 5와 같고, H_∞의 성능값은 0.000816이다. Fig. 6은 w에서 θ_2의 변수 k와 f에 의해 나타낸 임펄스 응답특성이다. 파라미터의 변화에도 불구하고 안정한 응답특성을 보이고 있고, γ값에 따라 응답특성이 각각 달라지는 것을 알 수 있다.

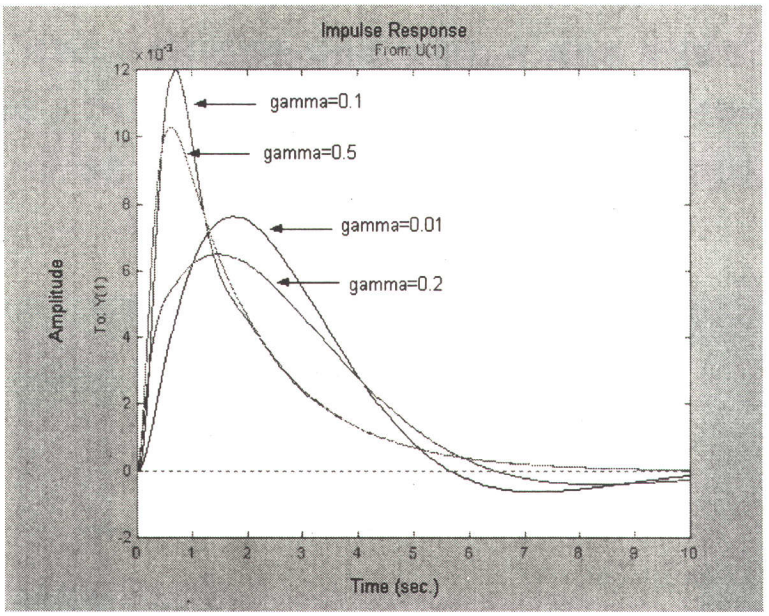


Fig. 6 Impulse responses for the extremal values of k and f

제주대학교 중앙도서관

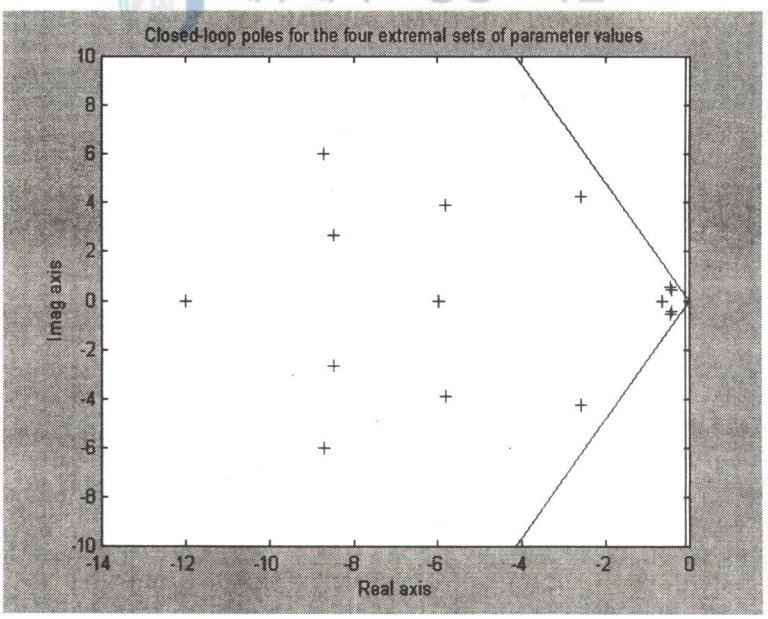
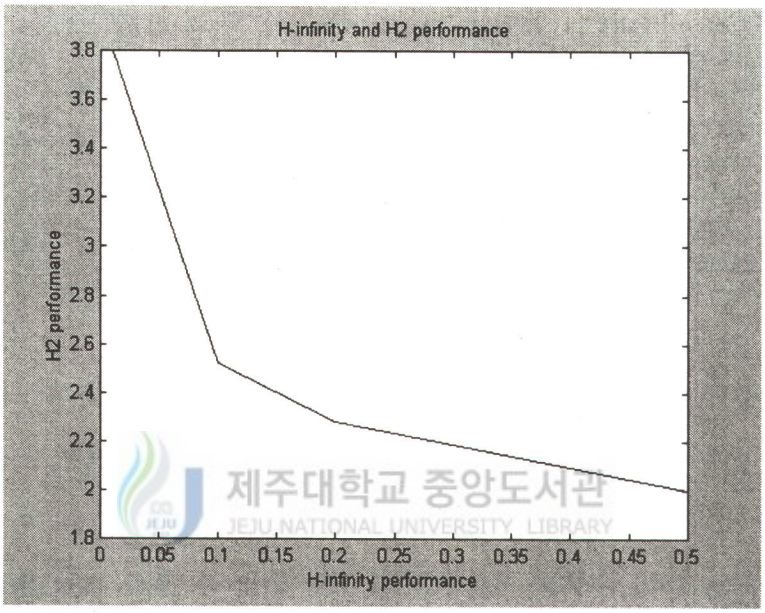


Fig. 7 Corresponding closed-loop poles

Fig. 7은 폐루프 극점의 위치를 나타낸 것이다. 이 폐루프 극점들은 요구되는 조건 즉, α가 0.1이고, 내각이 $3\pi/4$인 안정한 영역에 모두 존재한다는 것을 알 수 있다. Fig. 8은 H_∞와 H_2의 성능관계를 그래프로 나타낸 것이다. 그림에서



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 8 H_∞ and H_2 performance

보여지는 바와 같이 H_∞성능은 서로 반비례하여 H_∞성능을 줄이면 H_2성능이 커지게 된다. 따라서 H_∞성능과 H_2성능을 동시에 최소로 하는 최적 제어기를 구할 수 없으며, 일반적으로는 H_∞성능과 H_2성능의 선형결합을 줄이는 해를 구하게 된다. H_∞와 H_2 의 성능값에 따라 구하여진 제어기와 폐루프 극점위치를 Table. 1에 보였다. Table. 1에서 보면 H_∞성능이 0.01일 때 최소이지만 H_2성능은 가장 크며, H_2성능이 1.9975일 때 최소이지만 이때 H_∞성능이 가장

Table. 1 Performance of robust design (nonsingular)

H_∞	H_2	$w_1H_\infty + w_2H_2$ ($w_1=1$, $w_2=0.1$)	K_E	Pole
0.01	3.7916	0.38916	[125 28 72.490 17.617 112.24]	-8.4641±2.6580i -0.45396±0.57412i
0.1	2.5218	0 35218	[23.420 -3.1962 7.5878 12.164]	-12.003 -0.63152 -2.6008±4.2376i
0.2	2.2836	0.42836	[15 981 -5.6312 6.2405 5.9355]	-8.7104±5.9886i -0.40683±0.46026i
0.5	1.9975	0.69975	[9.6188 -5.3738 4.8037 1.5808]	-5.8061±3.9065i -5.9825 -0.63962

크게 됨을 알 수 있다. 그리고 H_∞성능과 H_2성능을 동시에 고려하는 $w_1H_\infty + w_2H_2$성능은 $H_\infty=0.1$, $H_2=2.5218$일 때 가장 작게 됨을 알 수 있다. 그러나 이 값도 $w_1=1$, $w_2=0.1$로 단위를 같아지게 하였을 경우이며 w_1과 w_2의 선택에 따라 다를 수 있다. 폐루프 극점들은 제시된 LMI 영역, 즉, α가 0.1인 half plane 의 교점 $x<-0.1$ 이고, 내각이 $3\pi/4$내에 놓여져 있다는 것을 알 수 있다.

2) E행렬이 full rank가 아닌 경우($J_1=1$, $J_2=0$)

Fig. 9는 descriptor 행렬이 full rank가 아닌 경우, 즉, 공칭모델에 대한 응답특성이다. 이때 H_∞의 성능값은 0.000909이고, Fig. 5와 비교해보면 성능값이 약간 크다는 것을 알 수 있다. 그리고, 변수 k와 f에 의한 임펄스 응답특성은 Fig. 6과 같은 응답특성으로 나타난다. Fig. 10은 γ값에 따른 임펄스 응답

제주대학교 중앙도서관

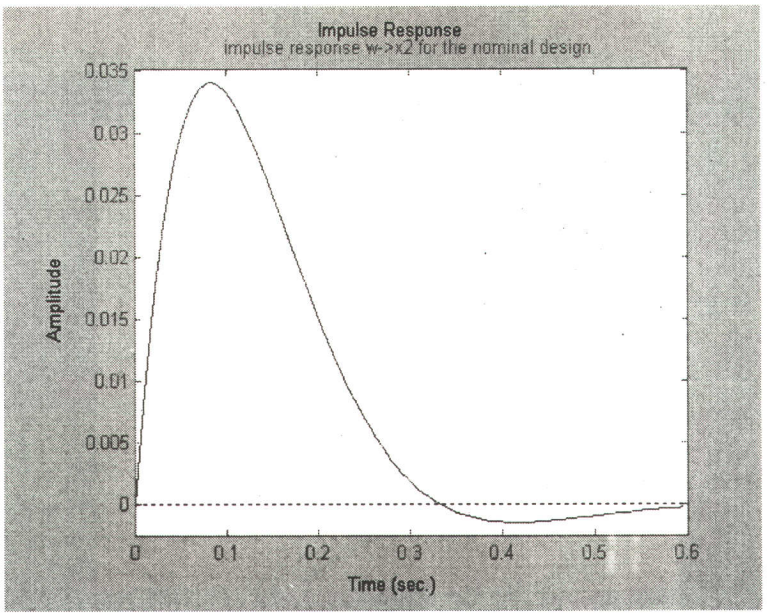


Fig. 9 Impulse response $w \rightarrow \theta_2$ for the nominal design

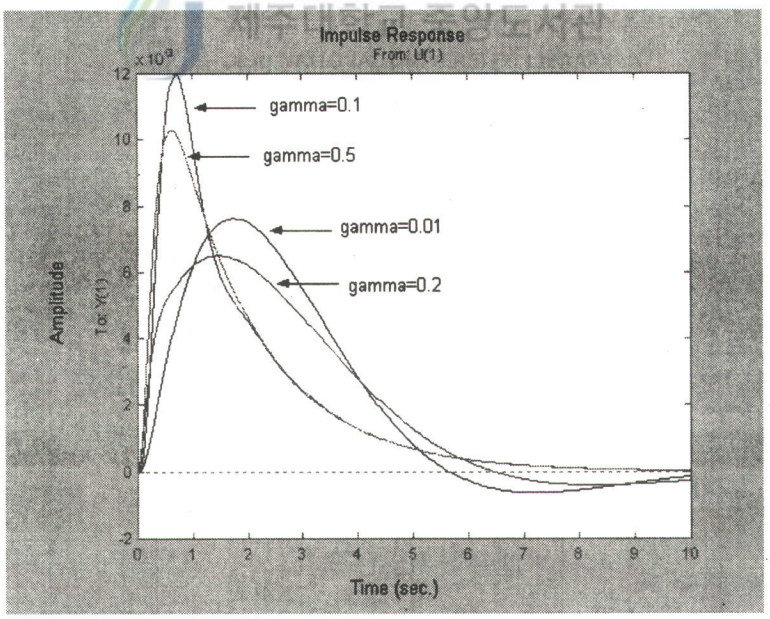


Fig. 10 Impulse responses for the extremal values of k and f

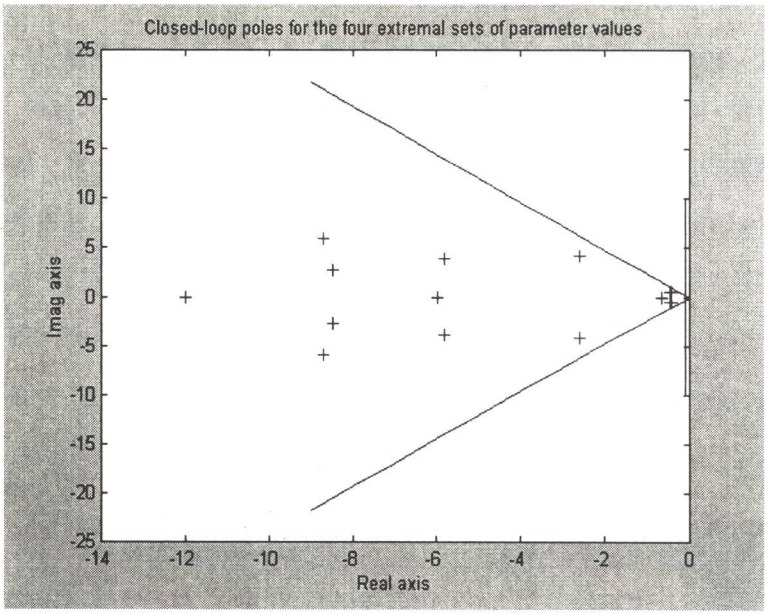


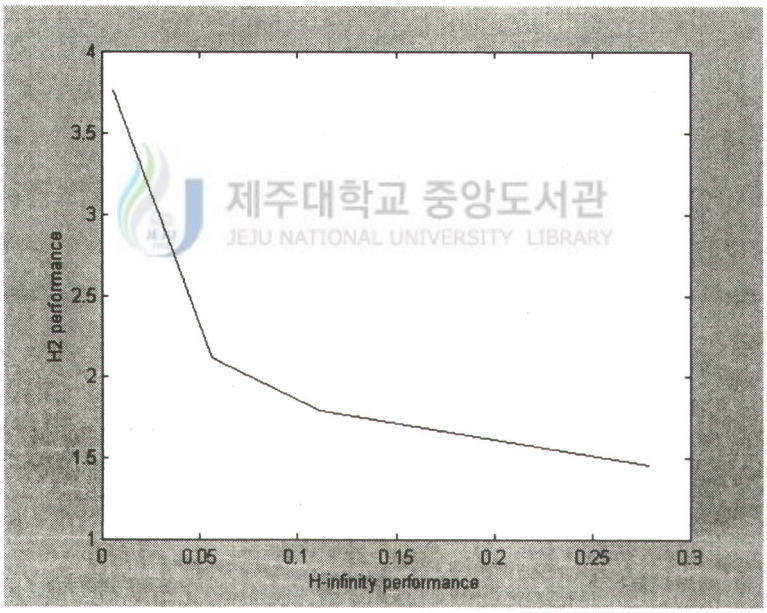
Fig. 11 Corresponding closed-loop poles

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Table. 2 Performance of robust design (singular)

H_∞	H_2	$w_1 H_\infty + w_2 H_2$ ($w_1=1$, $w_2=0.1$)	K_{E_1}	Pole
0.01	3.8952	0.39952	[-141.14 -37.506 -18.923]	-8.4641±2.658i -0.45396±0 574121
0.1	2.1891	0.31891	[-16.585 -1.3072 -5.9883]	-12.003 -2.6008±4.2376i -0.63152
0.2	1.8415	0.38415	[8.4894 -0 46092 -4.2363]	-8.7104±5.9886i -0.40683±0.46026i
0.5	1 4640	0.64640	[-3.4617 -0.11972 -2.6790]	-5.8061±3.9065i -5.9825 -0.63962

특성이다. 즉, E가 full rank가 아닌 경우에도 full rank인 경우와 같은 응답특성이 나타난다는 것을 알 수 있다. Fig. 11은 descriptor 행렬이 full rank 가 아닌 경우의 폐루프 극점의 위치를 나타낸 것이다. 이 극점의 위치는 원하는 위치, 즉, $\alpha=0.1$이고, 내각이 $3\pi/4$인 영역에 극점이 존재하여 안정한 시스템이 된다는 것을 보여준다. 그리고 이러한 결과로서 descriptor 시스템을 이용하여 행렬 E가 full rank가 아닌 특이행렬인 경우에도 시스템을 제어할 수 있다는 것을 알 수 있다. Table. 2는 H_∞와 H_2, 제어기, 그리고 극점의 위치에 대하여 표로 나타낸 것이다. Fig. 12는 H_∞와 H_2의 성능관계를 나타낸



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 12 H_∞ and H_2 performance

것이다. 이 역시 H_∞와 H_2가 서로 반비례관계인 것을 알 수 있다. 즉, H_∞성능이 0.01일 때 H_2는 최대값 3.8952가 된다. 그리고 H_2성능의 최소값인

1.4640일 때 H_∞는 최대값인 0.5가 된다. H_∞성능과 H_2성능을 동시에 고려하는 $w_1 H_\infty + w_2 H_2$성능은 $H_\infty = 0.1$, $H_2 = 2.1891$일 때 0.31891로서 가장 작게 됨을 알 수 있다. 그러나 이 값도 $w_1 = 1$, $w_2 = 0.1$로 단위를 같아지게 하였을 경우이며 w_1과 w_2의 선택에 따라 다를 수 있다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Ⅴ. 극배치를 포함하는 출력 되먹임 H_∞ 설계

1. 출력 되먹임 H_∞제어기 설계

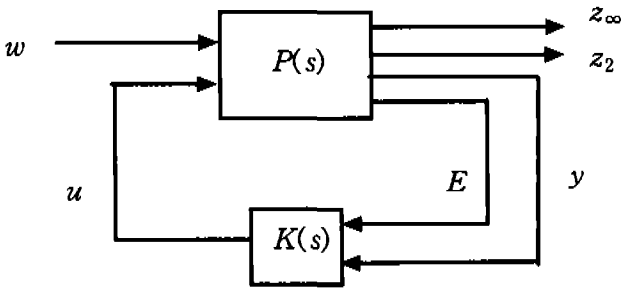


Fig. 13 Output feedback control

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이 장에서는 극배치 구속조건을 포함하는 출력 되먹임 H_∞제어기 설계에 대하여 서술한다. 다음과 같은 descriptor 형 LTI 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_{p1} w(t) + B_{p2} u(t) \\ z(t) &= C_{p1} x(t) + D_{p11} w(t) + D_{p12} u(t) \\ y(t) &= C_{p2} x(t) + D_{p21} w(t) + D_{p22} u(t) \end{aligned} \tag{49a}$$

여기서 E가 full rank이면 식(49a)의 플랜트 동역학 식은 다음과 같은 일반화된 상태공간 표현으로 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)
\end{aligned}
\tag{49b}
$$

여기서 $A = E^{-1} A_p$, $B_1 = E^{-1} B_{p1}$, $B_2 = E^{-1} B_{p2}$이다. 그리고 E가 full rank 가 아니라면 동력학식은 다음과 같이 정적 시스템과 동적 시스템으로 분리하여 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= E_1^{-1} \left(\overline{A}_{11} x_1 + \overline{A}_{12} x_2 + \overline{B}_{11} w + \overline{B}_{21} u \right) \\
0 &= \overline{A}_{21} x_1 + \overline{A}_{22} x_2 + \overline{B}_{12} w + \overline{B}_{22} u \\
z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\
y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)
\end{aligned}
\tag{49c}
$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

LTI 제어기 $K(s)$는 다음과 같은 상태공간형태로 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\
u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

폐루프 전달함수 $T_{wz}(s) = D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl}$이 된다. 여기서

$$
A_{cl} := \begin{pmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix} \tag{51}
$$

$$
B_{cl} := \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{pmatrix} \tag{52}
$$

$$
C_{cl} := (C_1 + D_{12} D_K C_2 \; D_{12} C_K) \tag{53}
$$

$$
D_{cl} := D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \tag{54}
$$

제어기 설계문제는 LMI 안정영역 D와 H_∞성능 $\gamma>0$와 LTI 제어법칙 $u=-K(s)y$가 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

· 폐루프 극점이 안정한 영역 D에 존재한다.

· $\|T_{wz}\|_\infty<\gamma$이어야 한다.

여기서 $T_{wz}(s)$는 w에서 z의 폐루프 전달함수이며. 보편적 손실이 없는 경우 $D_{22}=0$이다. $K(s)$가 strictly proper($D_K=0$)이고 A가 빠른 응답모드라면 즉, 모든 고유치가 유한한 크기의 실수축상에 있다면 다음 식을 만족한다.

$$\mathrm{Trace}(A_{cl})=\mathrm{Trace}(A)+\mathrm{Trace}(A_K) \tag{55}$$

여기서 A_{cl}이 빠른 응답모드라면 A_K역시 빠른 응답모드를 갖는다는 것을 알 수 있다. Ⅳ장에서 논의된 결과에 따르면, X_D, X_∞가 양의 반한정 행렬인 식(35), 식(36)과 제어기 행렬이 $\Omega_K:=\begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix}$이라면 식(33)의 해가 존재한다고 할 수 있다. 따라서 식(36)의 조건은 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

제주대학교 중앙도서관

$$\begin{pmatrix} A_{cl}X_\infty+X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl}X_\infty & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix}<0 \tag{56}$$

Lyapunov 행렬 $X>0$이 식(35)와 식(56)을 만족하기 위하여 극 배치를 갖는 H_∞ 제어기 설계문제를 다음과 같이 정의한다.

정의2 (출력 되먹임 제어기 설계문제) : $X=X_D=X_\infty$의 특징을 갖고, 식(35)와 식(56)을 만족시키는 $X>0$ 와 제어기 $K(s)\equiv\Omega_K$ 을 구한다.

출력 되먹임인 경우 부가적인 어려움은 식(35)와 식(56)이 $B\Omega_K CX$형태의 비선형 구간을 포함한다는 것이다. 이것은 다목적 출력 되먹임 분석을 위한 LMI 조건의 유도에서 오랫동안 장애로 여겨져 왔지만 이 비선형성은 제어기 변수의 적절한 변화에 의해 제거될 수 있다. 즉, $A \in R^{n\times n}$이고, $D_{22} \in R^{p2\times m2}$이고, k를 ($A_K \in R^{k\times k}$) 제어기 차수라 두자. 출력 되먹임인 경우에 있어서 제어기 변수의 변화는 Lyapunov 행렬 X를 다음과 같게 둠으로써 정의된다.

$$X=\begin{pmatrix} R & M \\ M^T & U \end{pmatrix}, \quad X^{-1}=\begin{pmatrix} S & N \\ N^T & V \end{pmatrix}, \quad R\in R^{n\times n}, \quad S\in R^{n\times n} \tag{57}$$

새로운 제어기변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_K} &:= NA_KM^T + NB_KC_2R + SB_2C_KM^T + S(A + B_2D_KC_2)R \\ \boldsymbol{B_K} &:= NB_K + SB_2D_N \\ \boldsymbol{C_K} &:= C_KM^T + D_KC_2R \end{aligned} \tag{58}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이 변수는 다음과 같은 특징을 갖는다.

- $\boldsymbol{A_K}, \boldsymbol{B_K}, \boldsymbol{C_K}$는 각각 $n\times n$, $n\times m_2$, $p_2\times n$이다.
- 만일 $M\in R^{n\times k}$와 $N\in R^{n\times k}$이 full row rank라면, 주어진 A_K, B_K, C_K와 행렬 R, S, M, N, D_K 그리고 식(58)을 만족하는 제어기 행렬 A_K, B_K, C_K를 구할 수 있다.

여기서 A_K, B_K, C_K는 $k=n$일 때 유일하게 정해진다. 즉, M과 N이 정방행렬이고 가역행렬일 때 제어기 변수들은 유일하게 정해진다. 식(57)과 $XX^{-1}=I$로부터

$$MN^T = I - RS \tag{59}$$

이다. 따라서 M과 N은 $I-RS$가 역행렬이 존재할 때 full row rank이다. 다음의 정리는 출력 되먹임 제어기의 가해성에 대한 결과이다.

정리2 : 정의2에서 해 $(X, K(s))$를 갖는다고 가정하자. 그러면 $\hat{X}$와 $\hat{X}^{-1}$의 식(57)에서 $I-RS$의 역행렬이 존재하는 해 $(\hat{X}, \hat{K}(s))$를 갖는다.

(증명) k를 제어기 $K(s)$의 차수라 하자. $k \geq n$인 경우는 보편적 손실이 없다고 가정하는 경우이다. 먼저 $k < n$라고 가정하고, $\lambda \in D$라고 두면 정의2에서의 다른 해는 $(\hat{X}, \hat{K}(s))$이다. 여기서 $\hat{X} := \mathrm{Diag}(X, I_{n-k}) > 0$이고 $K(s)$는 full order 제어기이다.

$$\begin{aligned} \hat{A}_K &:= \mathrm{Diag}(A_K, \lambda I_{n-k}), \quad \hat{B}_K := \begin{pmatrix} B_K \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{C}_K &:= (C_K, 0), \quad \hat{D}_K = D_K \end{aligned} \tag{60}$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$k \geq 0$과 식(57)에서처럼 $X > 0$이라고 가정하자. 식(57)과 식(60)으로부터 $S = (R - MU^{-1}M^T)^{-1}$ 이다. 여기서 $I - RS = -MU^{-1}M^T(R - MU^{-1}M^T)^{-1}$ 이다. 만일 M이 full row rank가 아니라면 $I-RS$는 특이행렬이며, 이러한 경우에는 full rank가 될 때까지 M을 섭동(perturbation)시킨다. 따라서 부등식(35)와 식(56), 그리고 $X > 0$은 M의 섭동이 매우 작을 때 $\hat{X}$와 $K(s)$에 의하여 만족하는 값으로 되며, 이때 정의2의 출력 되먹임 제어기 설계문제는 $I-RS$가 역행렬을 갖을 때 해를 갖는다. (증명끝)

정의2를 만족시키는 해를 구할 수 있으며, 이러한 조건들이 상태 되먹임의 확장으로써 출력 되먹임을 구성할 수 있음을 보이는 것이다.

정리3 : D를 좌반면에 존재하는 구속된 임의의 LMI 영역이라고 가정하고 식 (17)을 그에 대한 특성함수라 하자. 정의2의 출력 되먹임 제어기 설계 문제는 다음의 LMI들이 공통인 해를 갖는다면 해가 존재한다.

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \tag{61}$$

$$\left[\alpha_{kl} \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} + \beta_{kl} \Phi + \beta_{lk} \Phi^T \right]_{k,l} < 0 \tag{62}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{63}$$

$R = R^T \in R^{n \times n}$, $S = S^T \in R^{n \times n}$이다. 여기서

$$\Phi := \begin{bmatrix} AR + B_2 C_K & A + B_2 D_K C_2 \\ A_K & SA + B_K C_2 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\Psi_{11} := \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2 C_K + C_K^T B_2^T & B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ (B_1 + B_2 D_K D_{21}^T) & -\gamma I \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\Psi_{22} := \begin{bmatrix} A^T S + SA + B_K C_2 + C_2^T B_K^T & (C_1 + D_{12} D_K C_2)^T \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & -\gamma I \end{bmatrix} \tag{66}$$

$$\Psi_{21} := \begin{bmatrix} A_K + (A + B_2 D_K D_{21})^T & SB_1 + B_K D_{21} \\ C_1 R + D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{bmatrix} \tag{67}$$

(증명)

1)필요조건

$X > 0$이라 두고 $K(s)$가 정의2의 해라고 하자. 이때 X는 다음 식을 만족한다.

제주대학교 중앙도서관 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$X\Pi_2 = \Pi_1 \tag{68}$$

여기서 $\Pi_1 := \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi_2 := \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{pmatrix}$이다. 정리2로부터 M과 N이 full row rank라면 Π_2는 full column rank이다. 식(68)과 Π_2의 full column rank를 이용하면 $\Pi_2^T\Pi_1 = \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0$이다. 그리고 식(35)는 블럭 대각 행렬 $\mathrm{Diag}(\Pi_2^T, \cdots, \Pi_2^T)$와 $\mathrm{Diag}(\Pi_2, \cdots, \Pi_2)$에 의한 식이고, 식(58)의 변수의 변환에 의해서 식(64)를 정의할 수 있다. 그리고 LMI조건인 식(63)은 $\mathrm{Diag}(\Pi_2^T, I, I)$와 $\mathrm{Diag}(\Pi_2, I, I)$에 의한 식(56)에 의해 유도된다.

2)충분조건

R, S, A_K, B_K, C_K, D_K가 식(61)~식(63)을 만족한다고 가정한다. 구속조건 식(61)은 $I-RS$가 역행렬을 갖으면 $I-RS = MN^T$와 같이 인수분해를 가능하게 한다. 그러면 식(68)에서 행렬 Π_2는 정방행렬이고 가역행렬이다. $X := \Pi_1\Pi_2^T$라고 하고 A_K, B_K, C_K가 식(58)의 유일한 해라고 하자. 그리고 n차 제어기 $K(s) := D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K$라고 하자. 필요조건에서 식(57)~식(59)는 $X > 0$인 식(35)와 식(56)에서 유도되었다. Π_2가 역행렬을 갖는다면 출력 되먹임 제어기의 X와 $K(s)$를 구할 수 있게 된다. (증명끝)

이 LMI의 해로부터 제어기를 구현하는 과정은 특이치분해를 거쳐 full rank 인수분해 $MN^T = I - RS$를 계산하고 식(58)을 이용하여 제어기변수 A_K, B_K, C_K, D_K를 계산한다. 이때 $K(s)$는 n차 제어기이고 H_∞구속조건은 $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$가 되며, D영역에 있는 폐루프 극점의 위치를 배치할 수 있다. 정리3은 폐루프 극점이 D내에 존재하는 H_∞제어기를 구성하기 위한 간단한 과정을

제주대학교 중앙도서관 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

제시하며 변수 R과 S가 $X=\Pi_1\Pi_2^T$에 의한 Lyapunov 행렬 X를 결정하고, 변수 A_K, B_K, C_K, D_K의 제어기 $K(s)$를 결정한다. 극점 구속조건이나 H_∞ 구속조건 중 어느 하나가 제거되었을 때 정리3의 LMI 구속조건은 필요충분조건이 된다. 특히 정리3은 출력 되먹임의 convex영역에서 극 배치의 문제에 있어서 명확하고 다루기 쉬운 해를 제시하며, 극배치 조건을 포함하는 H_∞ 최적화를 가능하게 한다. 즉, 식(61)~식(63)을 만족하면 $R, S, A_K, B_K, C_K, D_K, \gamma$에서 γ를 최소화시키며 출력 되먹임 제어기 설계에서 해를 갖기 위한 가장 최소값인 γ가 된다. 그리고 폐루프 극점이 D내에 존재하며 γ가 최적 H_∞성능의 상한값이다.

2. 설계예(레이더 안테나)

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

극배치 구속조건과 H_∞구속조건을 갖는 출력 되먹임 제어기 설계 예를 보이기 위하여 레이더 안테나의 회전속도를 제어하는 시스템을 고려하자. 레이더 안테나

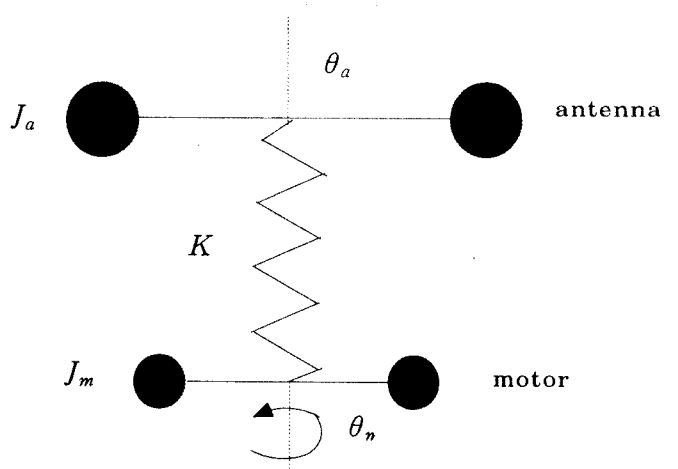


Fig. 14 Second-order model of a radar antenna

의 간략화된 기계적 모델은 Fig. 14와 같다. 여기서 모터 토크 $u=T$은 입력이고, 각 속도 $y=\dot{\theta}_a$는 출력이다. 이 시스템의 공칭 전달함수는 다음과 같다.

$$G_0(s)=\frac{30000}{(s+0.02)(s^2+0.99s+30030)} \tag{69}$$

여기서 제어목적은 토크 T로부터 안테나 각속도 $\dot{\theta}_a$를 제어하는 것이다.

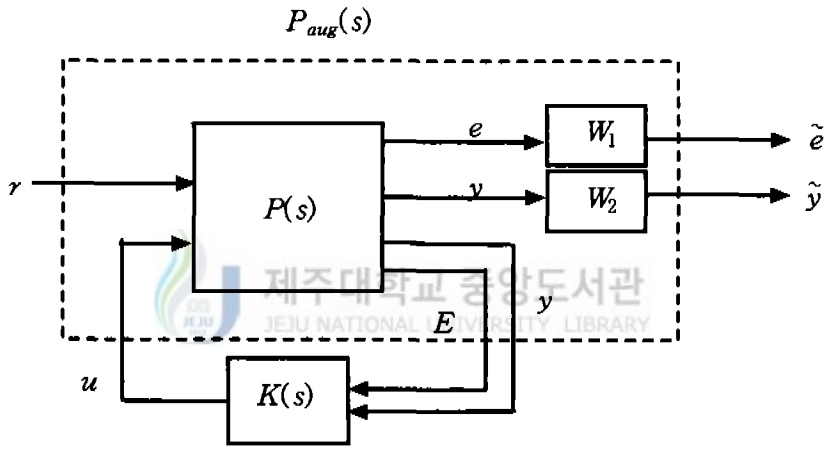
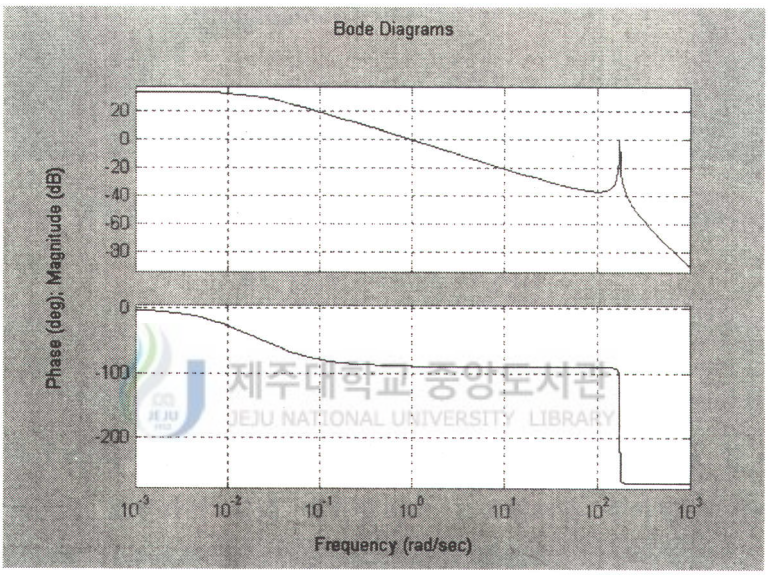


Fig. 15 Equivalent standard H_∞ problem

Fig. 15는 제어 구조로 $P(s)$는 $G_0(s)$에 의해 결정되는 공칭 플랜트, W_1과 W_2는 각각 플랜트 특성을 향상시키기 위한 저역통과필터, 고역통과필터이다. 그리고 $P_{aug}(s)$는 W_1과 W_2가 포함된 확장된 플랜트이다. $P(s)$를 출력 되먹임 제어를 하게 되면 응답특성이 불안정한 결과가 나타난다. 즉, 추적 및 외란제거는 감도 함수 S가 저주파수에서 작아야 한다. 이는 주파수에 의존하는 감도 함수가 $|S|\leq W_1^{-1}$ 또는 $|W_1S|\leq 1$의 조건을 만족해야 한다는 것을 의미한다. 마찬가지로

고주파수 영역에서는 보조 감도 함수 T가 설정된 가중치보다 작아야 한다. 즉, $|T| \leq W_2^{-1}$ 또는 $|W_2 T| \leq 1$이다.

3. 제어기 설계 및 시뮬레이션



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 16 Bode frequency response of the $G_0(s)$

Fig. 16은 공칭플랜트 $G_0(s)$에 대한 bode 주파수응답특성이다. 플랜트는 특정 부분에 특이점이 생기는 불안정한 시스템이다. Fig. 17은 저역 통과 필터 W_1과 고역 통과 필터 W_2를 추가하지 않았을 때 r에서 y로의 폐루프 시스템의 단위계단 응답과 플랜트 입력에서 잡음방해에 의한 임펄스 응답을 나타낸 것이다. r에서 y로의 단위계단 응답의 정착시간은 약0.4초이고, 임펄스 잡음에 대한 응답은 약 8초동안 진동하고 있음을 알 수 있다. Fig. 18은 감도 함수 S와 보조감

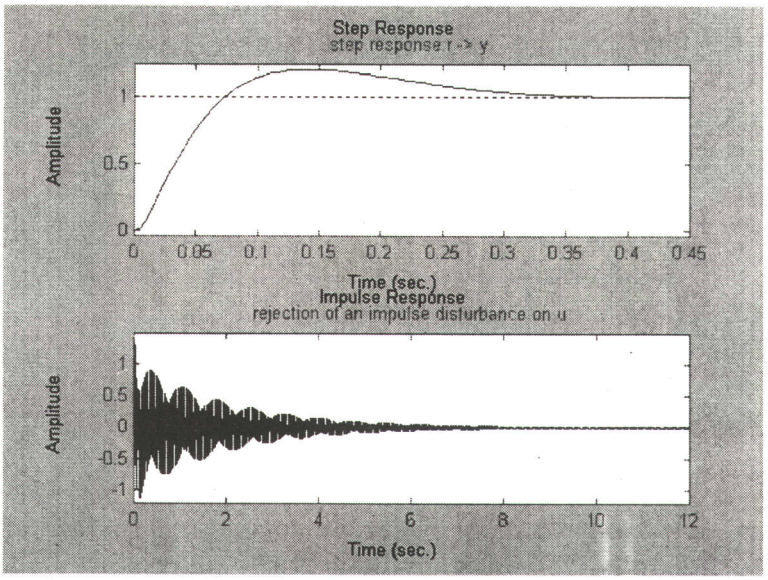


Fig. 17 Response y for an impulse disturbance at the plant input

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

도함수 T의 주파수 응답특성이다. 즉, 저주파에서는 S가 작은 특성을 보이고 있으나 고주파에서 특이점이 보이고 있고, T가 작게 유지되는 것을 알 수 있다. 이러한 응답특성을 보완하기 위해 저역필터와 고역필터를 추가한 확장된 플랜트에 대하여 제어기를 설계하면 제어기는 다음 식과 같다.

$$K=\left[\begin{array}{cccccc|c} 332.38 & 151.96 & 48.509 & -5.3786 & -1882.2 & -187640 & 40.272 \\ -146.27 & 4321.9 & 1339.7 & -14.33 & -101.32 & -33279 & -52894 \\ -611.86 & 8508.4 & 2636.6 & -23.282 & 1625.3 & 115640 & -99291 \\ 597.86 & -7699.2 & -2389.5 & 21.674 & -1621.7 & -119510 & 96671 \\ 80.879 & 1850.1 & 574.99 & -4.8081 & 398.75 & 35842 & -22413 \\ 8934.9 & -115280 & -35737 & 275.66 & -19055 & 662650 & 1434000 \\ \hline -33008 & -15893 & -5064.8 & 541.41 & 188680 & 18818000 & -0.0020669 \end{array}\right] \quad (70)$$

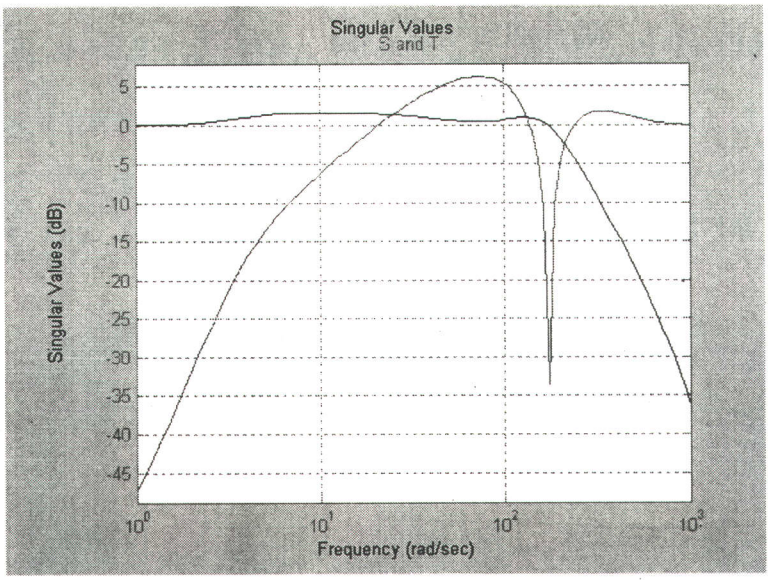
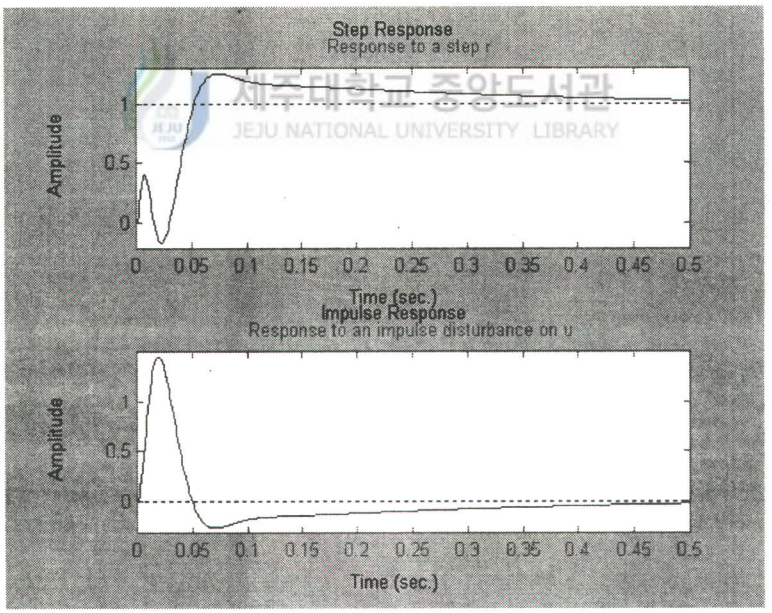


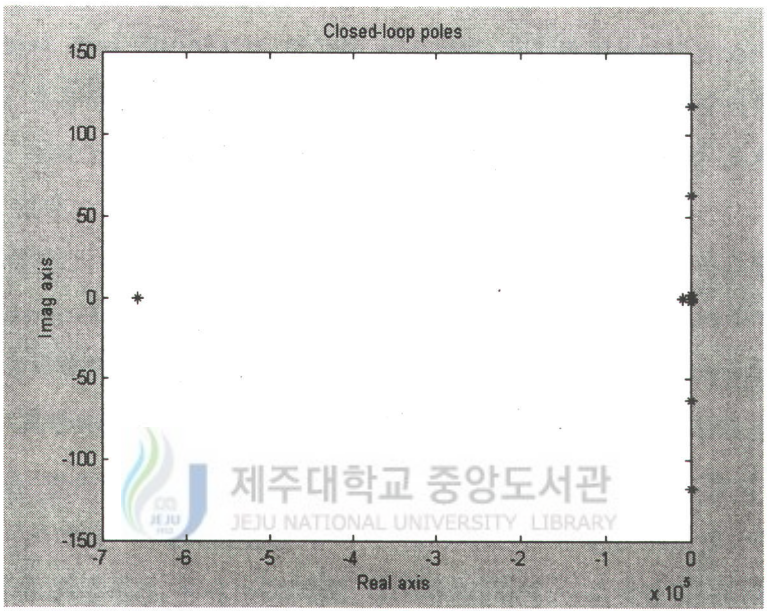
Fig. 18 The singular value of S and T



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 19 Response to a step r and response $\tilde{y}$ for an impulse disturbance at the plant input (conic sector : -0.4, inner angle : π /1.2)

여기서 $W_1(s)=0.9+\frac{s}{200}$ 이고, $W_2(s)=\frac{s^2+16s+200}{s^2+1.2s+0.8}$ 이다. Fig. 19는 고역필터와 저역필터를 달았을 때의 응답특성이다. Fig. 17과 Fig. 19를 비교해 보면 응답에 대한 정착시간이나 상승시간에서 향상된 특성을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. Fig. 20은 폐루프 극점의 위치를 나타낸 것이다. 여기서 요구되는



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 20 Closed loop poles

조건 conic sector가 -0.4이고, 내각이 $\pi/1.2$인 영역 내부에 극점이 존재한다는 것을 알 수 있다. 즉, 폐루프 극점의 영역을 제시하여 H_∞ 구속조건을 만족하는 제어기를 설계할 수 있음을 알 수 있다. Table. 3에 H_∞성능 및 폐루프 극점을 보였다.

Table. 3 Performance of output feedback

H_∞	Pole
1.4436	-658540, -10234, -642.63±117.57i, -179.95, -59.366±62.493i, -2.6469±2.4040i, -0.90493

Ⅵ. 결론

시스템을 제어하기 위해서는 일반적으로 전달함수표현과 상태공간표현을 주로 사용하지만 선형화과정에서의 오차나 파라미터 값이 변함에 따라 극점수가 변하는 특이 시스템인 경우에는 여러 가지 문제점을 포함하고 있다. 이와 같이 파라미터 변화에 대하여 특이 시스템으로 변하는 시스템인 경우에 descriptor 형태의 시스템표현이 유용하다. 특히, 이 시스템 표현은 임펄스 모드와 대수적인 시스템의 구속조건을 명백하게 표현할 수 있고 실제적인 문제와 이론사이의 오차를 없애주는 장점이 있다.

본 논문에서는 비선형 시스템을 제어하기 위해 descriptor 시스템의 구조를 이용하여 descriptor 시스템의 rank에 따른 특이 시스템과 비특이 시스템에 관하여 서술하였고, 시스템이 안정하기 위한 극배치 영역을 Lyapunov 방정식과 LMI로 표현하였다. 그리고 H_2/H_∞구속조건에 대한 복소평면상의 convex영역의 조건을 만족하는 LMI들을 적용하여 상태 되먹임 제어기와 출력 되먹임 제어기를 설계하였다. 시뮬레이션을 통하여 파라미터가 변하는 시스템, 즉 위성자세 제어시스템에 적용시켜 특이 시스템인 경우와 비특이 시스템인 경우 고려하여 상태 되먹임 제어기를 설계하였고, 레이더 안테나에 적용시켜 H_∞구속조건을 만족하는 출력 되먹임 제어기를 설계하였다.

그 결과, 시스템이 안정하기 위한 극점의 위치를 안정한 영역, 즉, 복소평면상의 좌반면의 $S(\alpha,r,\theta)$영역에 대한 극배치조건과 H_∞와 H_2의 구속조건을 만족하는 상태 되먹임 제어기 설계할 수 있었고, 극배치조건과 H_∞조건을 만족하는 출력 되먹임 제어기 설계할 수 있었다. 상태 되먹임 제어기 시뮬레이션 결과는 Table. 1과 Table. 2에서 알 수 있듯이 극점의 위치가 α가 0.1이고, 내각이 $3\pi/4$인 안정한 영역 내에 비특이 시스템인 경우에는 H_∞성능이 〔0.01 0.1 0.2 0.5〕일 때 H_2성능이 〔3.7916 2.5218 2.2836 1.9975〕인 제어기 K_E의 설계 결과를 얻었고, 특이 시스템인 경우에는 H_∞성능이 〔0.01 0.1 0.2

0.5]일 때 H_2성능이 [3.8952 2.1891 1.8415 1.4640]인 제어기 K_{E_1}의 설계 결과를 얻었다. 출력 되먹임 제어기 시뮬레이션 결과는 Table. 3과 같이 극점의 위치가 conic sector가 -0.4이고, 내각이 $\pi/1.2$인 안정한 영역 내에 H_∞성능이 1.4436으로서 식(70)과 같은 제어기를 설계할 수 있었다. 이러한 결과들은 다중목적 또는 구속화된 제어기를 설계하는데 유용하게 사용된다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

참 고 문 헌

Ardema, M.D., 1983, Singular Perturbations In Systems And Control, Springer Verlag, pp.1~17.

변증남, 1999, 선형시스템이론, 교보문고, 서울, 483 pp.

Chilali, M. and Gahinet, P., 1996, H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, IEEE Trans, Automat. Contr., vol.41, no.3, pp.358-366.

Dai, L., 1989, Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag,

Doyle, J., Francis, B. and Tannenbaum, A., 1992, Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Company.

Eric, M.,Benoit, F.,Rene, F., Michel, Z. and Jean, M., 1998, H_2/H_∞ Control Design : LMI Techniques for Space Applications, Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications, pp.995~1000.

Franklin, F., Powell, J. and Abbas Emami Naeini, 1986, Feedback Control of Dynamic Systems, addison Wesley.

Gahinet, P., 1996, Explicit Controller Formulas for LMI-based H_∞ Synthesis, Automatica Vol.32, No.7, pp.1007~1014.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J.and Chilali, M., 1995, LMI Control Toolbox, The Math Works Inc.,

Gutman, S. and Jury, E. I., 1981, A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane, IEEE Trans, Automat. Contr., vol.26, no.4, pp.853-862.

제주대학교 중앙도서관 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Ikedia, M., 1985, The system theory based on descriptor from representation, J. of the Society of Instrument and Control Engineers, pp.597~604.

강진식, 1997, 극배치를 이용한 ALPD 시스템의 제어기 설계, 제주대학교 산업기술연구소, 제주대학교 산업기술연구소 논문집 Vol.8, No.1, pp.67~75..

김종식, 1998, 선형제어시스템공학, 청문각, pp.1~536.

Lewis, F.L., 1986, A survey of linear singular systems, Circuit Systems signal process, pp.3~36.

Mario Sznaier and Juanyu Bu, 1998, Mixed l_1/H_∞ Control of MIMO Systems via Convex Optimization, IEEE Trans, Automat. Contr., vol.43, no.9, pp.1229~1241.

Rajendra Bhatia, 1997, Matrix Analysis, pp.1~27.

Shahian, H. and Hassul, M., 1993, Control system design using matlab, 484 pp.

Tang, H. and Okubo, S., 1996, The model following control systems for descriptor system, Proc. of the 11th KACC, pp.372~375.

제주대학교 중앙도서관

본 논문과 관련된 저자의 발표 논문

1. 학술발표대회논문집

· 김정주, 강진식. "Descriptor 시스템 모델링 및 H_∞를 이용한 극배치 제어기 설계", 한국통신학회 · 대한전자공학회 · 전기학회 제주지부 합동학술발표회 논문집, pp.71~80. 1999

2. 게재 논문집

· 김정주, 이준형, 강진식, "Descriptor 시스템 모델링 및 극배치 제어기 설계", 제주대학교 산업기술연구소 논문집 Vol.10, No.1, pp.74~82, 1999

· 김정주, 강진식, "Descriptor 시스템의 H_∞ 다중목적 제어기 설계", 제주대학교 정보통신연구소 논문집 제2권, pp27~35, 1999

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

감사의 글

본 논문의 결실을 맺기까지 배움의 길을 넓혀주신 강진식 교수님께 깊은 감사를 드립니다. 항상 온화한 모습으로 학문의 길을 이끌어 주신 이용학 교수님과 문건 교수님, 조언과 격려로서 아낌없는 관심을 주신 김홍수 교수님과 임재윤 교수님 그리고 양두영 교수님께 감사드립니다.

매사에 힘이 되어준 강부식 선배님과 정동성 선배님, 항상 곁에서 넉넉한 웃음으로 대해주신 홍성욱 선배님과 이권익 선배님께 감사드리며, 2년 동안 학문의 동지로 지내왔던 성익, 정란, 호진, 그리고 궂은 일에도 잡다한 일을 도맡아 한 연구실 후배 준형, 학부생 상학에게 고마운 마음을 전합니다. 대학원의 석사과정과 조교생활을 무리없이 할 수 있게 도움을 주신 고경생 선생님과 김희선 선생님, 조교 김형준, 후배 진경과 은진, 그리고 지면되진 않았지만 물신양면으로 도움을 주신 많은 분들에게 감사의 마음을 전합니다.

끝으로 오늘이 있기까지 믿음과 사랑을 주신 어머니와 아버지, 어려움 속에서도 항상 곁에 있어준 언니와 형부, 오빠와 올케언니, 사랑스러운 조카들, 그리고 9년여 동안 삶의 힘이 되어준 영원한 벗 임태성님과 함께 이 논문의 완성된 기쁨을 나누고 싶습니다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY