碩士學位論文

GSP를 이용한 삼각함수 성질에 관한 이해

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金　宰　煥

2007年　8月

GSP를 이용한 삼각함수 성질에 관한 이해

指導教授 梁 成 豪

金 宰 煥

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2007年 8月

金宰煥의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 ________ 印

委 員 ________ 印

委 員 ________ 印

濟州大學校 敎育大學院

2007年 8月

<抄錄>

GSP를 활용한 삼각함수 성질에 관한 이해

金 宰 煥

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 梁 成 豪

본 논문에서는 삼각함수의 성질을 이해하는데 GSP를 활용하였다. 삼각함수의 성질을 이해하기 위하여 '삼각함수의 그래프'를 먼저 제시하였고, 그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 '삼각함수의 성질'의 변화과정을 단계별로 시각화하였다.

'삼각함수의 성질'을 이해하는데 대수적인 증명을 하기 전에 그래프의 평행이동과 대칭이동을 통한 시각적 접근으로 먼저 제시된다면 학생들이 좀 더 흥미를 가지고 접근할 수 있고, '삼각함수의 성질'을 대수적으로 이해하는데 도움을 줄 것으로 기대한다.

* 본 논문은 2007학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

지금의 학생들은 식을 그 자체로만 여기는 경향이 있으며, 그래프를 단지 부분적인 정보를 얻는 것으로 여기며, 전반적인 방법의 이해 발달에는 어려움을 가지고 있는 학생이 많다. 그래프는 함수에 대한 사고의 다른 면을 제공하지만 많은 학생들은 그래프와 그 안에 내재하고 있는 대수식 사이를 거의 관련짓지 못한다. Dreyfus와 Eisenber(1990)는 그 이유를 학생들이 책과 강의에서 정보를 연속적으로 얻는데 의존하는 데에 반해서 그래프적인 정보는 비연속적이기 때문이라고 말하고 있다. 그래프 그리기와 해석하기는 함수에 대한 기본적인 이해가 시작되는 곳이다. 처음에는 질적 접근을 통해서 그림을 그려보는 것으로 시작하여 점차적으로 형식적인 틀에 맞추어 그래프를 그려 나가도록 해야 할 것이다. 학생들에게 그래프가 어떤 상황을 얼마나 효율적으로 기술하는가를 알게 하는 기회를 제공한다. 그래서 평소 삼각함수 단원을 공부하면서 개념파악이 잘 안되어 이해하기 힘들어하는 라디안, 삼각함수의 정의 및 삼각함수의 그래프를 시각화하여 삼각함수의 성질에 접근할 수 있으면 좋겠다고 생각하였고, 본 논문은 삼각함수의 성질에 접근함에 기하소프트웨어인 GSP프로그램을 이용해 삼각함수에 대한 내용을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 연구하였다. 애니메이션을 준 삼각함수의 그래프 자취의 흔적 남기기, 점을 드래그 함에 따라 모양 변하기 등 다채로운 기능을 통해 흥미를 갖고 학습에 임할 수 있도록 연구하여 정리하였다.

7차 교육과정의 ‘7-가’ 단원에서 일차함수 $y=ax$를 배우고 ‘8-가’ 과정에서 $y=ax+b$를 배울 때 $y=ax$를 y축으로 b만큼 평행이동하는 것을 적용하고 있고, ‘9-가’의 이차함수 $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2-q$ (단, $a\neq 0$)를 배울 때는 $y=ax^2$ (단, $a\neq 0$)를 기본 그래프로 하여 x축, y축으로 평행이동하여 설명하고

있다. 또 유리함수는 $y=\frac{a}{x-p}+q$는 $y=\frac{a}{x}$를 기본으로 하여 x축, y축으로 평행이동하여 설명하고 있다. 무리함수도 같은 방법인 평행이동과 대칭이동으로 설명하고 있다.

그러나 삼각함수의 성질은 그래프의 평행이동 또는 대칭이동보다는 대수적으로 먼저 접근하고 있다.

현행 교과서는 다수는 '삼각함수의 성질' 뒤에 '삼각함수의 그래프'가 제시되는 순서로 전개되어진다. 삼각함수의 그래프를 학습하지 않고 삼각함수의 성질을 먼저 접하게 되면 학생들은 삼각함수의 성질을 삼각함수의 중요한 공식으로서 암기하기 쉽다. 그러므로 '삼각함수의 그래프'를 학습한 후, 그래프를 통하여 '삼각함수의 성질'을 생각해 보도록 전개되어야 한다는 것이 본 연구의 핵심이다. 현행 교과서들 중 '삼각함수의 성질' 단원이 '삼각함수의 그래프' 단원 뒤에 나오는 경우도 몇 가지 있으나, 이는 단원의 순서만 달리 했을 뿐 전개 내용은 그래프와의 관계는 비연속적이다.

2. 사인과, 코사인, 탄젠트의 기원

1) 사인(sine)과 탄젠트(tangent)

″sin″ 기호는 1624년 영국의 수학자 에드문트 군터(Edmund Gunter ; 1581 ~ 1626)가 처음으로 사용하였다. “sin″은 sine로 ”tan″은 tangent로 썼다.

기호 ″sin″은 sine을 축약한 것인데, sine은 “길의 커브, 땅의 움푹 들어간 곳, 옷의 주름, 꼬불꼬불한 길, 가슴“ 등의 다양한 의미를 가진 라틴어 ”sinus″에서 온 것이다.

tangent는 “접촉하고 있다.”는 의미를 가진 라틴어 ″tangĕns″에서 온 것이다. 이러한 이유로 tangent가 “접선”으로 번역되고 있기도 한다.

“탄젠트”라는 용어는 1583년 덴마크의 수학자 토머스 핑케(Thoas Fincke ; 1561~ 1656)가 만든 것으로 알려져 있다. 에드문트 군터가 독창적으로 sin, tan라는 기호를 고안한 것이 아니고, 실제로는 그 이전에 사용했던 기호를 개량한 것이다. 이를 테면, 군터에 앞서, 특징은 군터와의 기호와는 달리 축약을 의미하는 점 “.”이 떨어져 나가고, 이에 군터의 기호로 정착된 것이다. 군터가 기호 sin, tan를 사용한 것이 사실이지만, 그가 본격적으로 이 두 기호를 사용한 것으로 보기는 어렵다. 기호 sin은 1634년 프랑스의 수학자 에리곤네(Pierre Hèrigone ; 1580 ~1643)의 책에서 처음으로 사용하였고, 지라드가 1626년에 기호 sine를 처음 사용하였다는 주장도 있다. 그러나 지라드(Girard)가 사용했던 표기 방식은 현재와는 다소 다르게 실제로는 A의 사인을 “sinA″로 A의 코사인을 ”cosA″로 표현했다.

또한 1631년 리차드노우드(Richard Norwood)는 삼각법에 대한 책에서 사인을 “s″, 코사인을 ”sc″, 탄젠트를 “t″, 코탄젠드를 ”tc″, 시컨트를 “sec″라고 사용하였다.

이 기호가 널리 사용되기 시작한 것은 1632년 영국의 수학자 윌리엄 오트레드(Willa Oughtred ; 1574 ~ 1669)가 사용하면서부터이다.

2) 코사인(cosine)

"cos"은 라틴어 cosinus(cosine)을 줄여 쓴 것으로서 1620년 군터가 complement -um(complement)와 sinus를 합친 "co.sinus"를 사용한 것을 제안했지만 1658년 뉴턴에 의해 cosinus로 수정되었으며 1729년 레오나드 오일러에 의해 최초로 "cos"로 사용되었다.

하지만 오일러가 독창적으로 기호를 고안한 것은 아니고 그 이전에 쓰이던 기호를 개량한 것이다.

한편 1588년에는 토머스 핑케가 그의 저서 "구면기하학(Geometria Rotundi)"에서 코사인의 기호로 sine complement의 약자인 "sin.com"을 사용하기도 하였다. 또한 1674년 영국의 수학자 조우너스 무어(Jonas Moor ; 1617 ~1679)는 "수학개론"이라는 책에서 "cos"라는 기호로 사용하기도 하였다.

3) 시컨트(secant)

"sec" 라는 기호는 1632년 윌리엄 오트레드가 처음 사용하였지만 그 이전에 덴마크의 수학자 토머스 핑케가 1583년 그의 저서 "구면기하학(Geometria Rotundi)" 에서 "할선"의 의미를 가진 라틴어 secans(secant)를 줄여서 "sec."라는 기호를 사용하였다.

4) 코탄젠트(cotangent)

1588년 토머스 핑케가 1583년 "구면기하학(Geometria Rotundi)"에서 코탄젠트에 대한 기호로 tangent complement의 약자인 "tan.com."을 사용하였다.

조우너스 무어경은 1764년에 쓴 "수학개론(Matheatical Copendiu)이라는 책에서 "Cot."라는 기호를 사용하였으며 사무엘지케(Samuel Jeake)는 1693에 쓴 그의 저서 "산술(Arithmetick)"이라는 책에서 코탄젠트에 대한 기호로 "cot."를 사용하였다. 현재 사용하는 기호 "cos"는 1758년 독일의 수학자 캐스트너(Abraha Gotthelf Kaestner ; 1719 ~ 1800)가 "산술, 기하, 삼각법에 원리"라는 책에서 처음 사용하였다.

Ⅱ. 본 론

1. GSP의 개요

수학은 추상화와 형식화된 대상을 조직함으로써 패턴을 탐구하는 학문이기 때문에 다른 어떤 과목에 비해 교과의 대상이 학생의 인지 수준과 맞지 않을 가능성이 많다. 결국 자신의 눈으로 사물을 바라보는 노력과 함께 주변에서 이를 뒷받침해주는 노력이 절대적으로 필요하다. 여기서 컴퓨터는 중요한 역할을 담당하게 된다. 컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학적인 대상을 구체적인 표현 형태로 제시할 수 있을 뿐 아니라 그 대상의 조작이 학생들의 통제 내에서 일어날 수 있다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어 질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계에서 Graphic 이나 Animation, Simulation을 통한 학생들의 자기 주도적인 직관적 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

1) GSP의 역사

GSP는 펜실베니아의 Morvianeogkr의 Dr.Doris Schattchneider와 Swartmare 대학의 Dr.eugene Klote의 지도아래 국립 과학 기초 기금 연구(Nationnal Scienc-e Foundation funded project)인 Visual Geometry Project의 부분으로 개발되었다. GSP 외에도 시각적 기하학 프로젝트가 The Stella Octangula 와 The Platon-ic Solids를 제작하였으며 Key Curriculum Press에 의해 출간돼 비디오, 실용교재 및 조작 교구 등이 있으며 개발자이자 프로그래머이며 VGP의 연구원 Nicholas Jackie은 프로그램의 초기버전을 공개하고 많은 교사와 다른 이용자들

이 실험해 보는 방법 등을 통하여 여러 사람들의 의견을 수렴하여 개발하였다. Nicholas는 1990년에 Key Curriculum Press의 지원을 받아 교실에서 실험・탐구할 수 있는 베타버저인 소프트웨어를 개발하였다. 30개 학교를 중심으로 스케치패드를 실험・탐구하였다. 소문이 나자 50개 이상의 장소로 퍼져 나갔고 많은 사람들이 학교의 수학에 GSP에 대한 필요성을 인식하게 되었다. GSP의 첫해에 Key Curriculum Press는 그 프로그램이 학교에서 얼마나 효과적인가를 연구하기 시작하였다. 미국 국립 과학 기초 연구소의 한 작은 사업으로 지원받은 이 연구는 1992년 교수 지침과 교육과정 자료, 발전적인 변환과 프리젠테이션을 첨가한 버전 2인 GSP를 만들었다, 이 버전에서 특히 달라진 것을 프렉탈을 작도할 수 있는 재귀적인 스크랩트가 포함된 것이다. 윈도우용인 보안된 버전이면서 측정치에 의한 변화, 스크랩트 도구, 개선된 작도할 수 있는 능력 등을 고루 갖춘 버전 GSP 3이 1993년 3월에 출시되었고 1995년 4월에는 저번 3.1이 발표되었다. 또한 JSP(Java Sketchpad)가 완성된 것은 아니지만 1997년 1월 21일 처음 버전인 DR1 이 발표되었고 DR2의 몇 가지 버그를 수정하여 1997년 10월에 발표한 DR2.1이 있다.

2) GSP특징

평면도형을 그리는 컴퓨터 프로그램인 GSP의 몇 가지 특징은 다음과 같다.

(1) 그래프의 특징을 잃지 않으면서 자유자재로 도형을 변화시킬 수 있다.
그래프를 한 번 그리면 그 형태가 고정되어 있는 것이 아니라 그것이 갖고 있는 고유한 성질은 유지하면서도 모양을 자유로이 바꿀 수 있다.
(2) 애니메이션 기능과 자취를 그리는 기능이 있다.
그래프를 점의 집합이라고 할 때 그 도형은 점의 자취로써 설명할 수 있다. 이러한 자취를 애니메이션 기능을 써서 그릴 수 있다. 여기서 애니메이션은 여러 개의 장면을 눈의 착각을 이용해 움직임을 보여주는 것이 아니라 한 화면에서 연필로 선을 그리듯이 바라는 도형을 그려준다. 물론 여러 개의 도형을 그리는 데

에 동시에 애니메이션 기능을 쓸 수 있다.

(3) '자취(Trace)'기능에 의한 점찍기로 도형을 그릴 수 있음으로써 도형이 그려지는 과정을 사실적으로 보여준다. 그래프를 프로그램 짜듯이 작석하여 입력하면 그에 해당하는 도형을 그려가기 때문에 칠판에 직접 그리는 것과 같은 효과를 얻을 수 있다.

(4) 'Script' 기능이 작도의 순서를 기록, 재생하여 준다.

프로그램을 짜듯이 하여야만 그림을 그려주는 다른 것과 달리 'Script'화면을 활성화 시킨 뒤 작도하여 가면 작도하는 순서에 따라 스스로 그 과정을 기록해 나가고 그것을 재생하여 주기 때문에 평면 기하의 지도에 매우 유용하다고 하겠다.

(5) 측정 기능이 있어 측정을 통해 그려진 그림으로부터 가설을 세울 수 있고 증명을 통해 그 가정을 증명할 수 있는 바탕을 제공한다.

(6) 여러 가지 변환을 자유롭게 구사할 수 있다.

평행이동, 회전이동, 확대・축소, 대칭이동을 바라는 값만큼 입력시켜 변환할 수 있고, 화면의 어떤 도형에 나타난 특정한 값만큼 변환시킬 수 잇다.

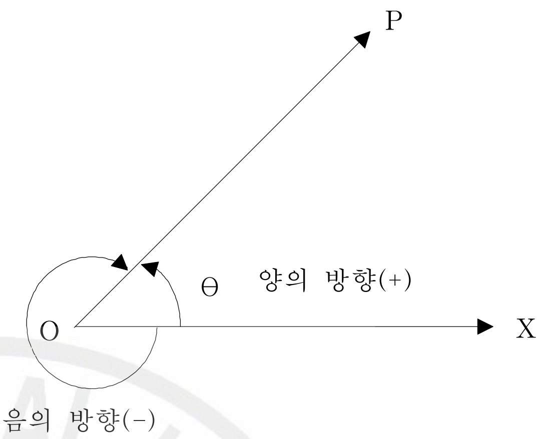
(7) '보이기, 감추기' 기능으로 특정한 요소를 지우지 않고도 화면에서 사라지게 하고 다시 그것을 언제든지 보여줄 수 있다. 미리 그려놓은 여러도형을 설명한 것들만 따로 보이게 할 수 있다.

(8) 자체 계산기 기능이 있어 측정된 값의 비교와 새로운 측정이 가능하다. 측정해 놓은 값들의 합, 차, 곱, 비 따위를 계산하여 도형이 가지고 있는 성질을 관찰하는데 도움을 준다.

2. 일반각과 호도법

1) 일반각

오른쪽 그림과 같이 평면 위에 두 직선 XO와 OP로 이루어진 ∠XOP가 있다. ∠XOP는 반직선 OP가, 고정되어 있는 반직선 OX의 위치로부터 출발하여 점 O를 중심으로 회전하여 이루어진 것으로 볼 수 있다. 이때, 그 회전량을 Θ를 ∠XOP의 크기로 정의한다. 이때 반직선 XO를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다.



[그림 1]

그리고 동경 OP가 회전할 때, 시계 바늘이 도는 방향과 반대 방향을 양의 방향, 시계 바늘이 도는 방향과 같은 방향을 음의 방향이라고 한다.

동경 OP의 위치가 주어지면, 이는 시초선 OX로부터 출발하여 양의 방향이나 음의 방향으로 몇 번 회전한 다음 그 위치에 멈춘 것으로 볼 수 있다. 예를 들어 위의 [그림 1]에서 동경 OP가 가지키는 각의 크기는 다음과 같이 여러 가지로 나타 낼 수 있다.

$$60°,\ 360°+60°,\ 360°\times 2+60°,\ 360°\times 3+60°,\ \cdots$$

$$-360°+60°,\ -360°\times 2+60°,\ -360°\times 3+60°,\ \cdots$$

일반적으로, ∠XOP의 크기의 하나를 $\alpha°$라고 할 때,

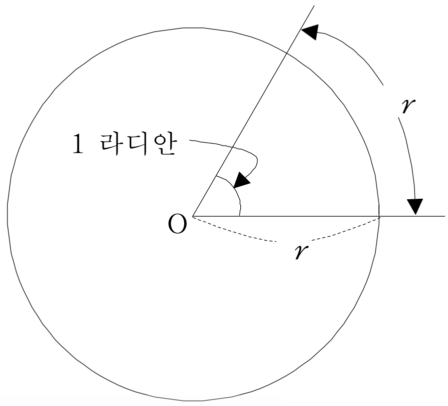
$$\Theta = 360°\times n + \alpha° \quad (\text{단, } n\text{은 정수})$$

로 나타내어지는 각을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

2) 호도법

직각의 90분의 1인 1°, 1°의 60분의 1인 1′, 1′의 60분의 1인 1″를 단위로 하는 육십분법을 사용하여 각의 크기를 나타내었다.

여기서는 각의 크기를 나타내는 새로운 방법에 대하여 알아보자.



[그림 2]

반지름의 길이가 r인 원에서 r과 같은 길이의 호에 대한 중심각의 크기를 α°라고 하면, 중심각의 크기와 호의 길이는 비례하므로

$r : 2\pi r = \alpha° : 360°$

따라서 $\alpha° = \frac{180°}{\pi}$

즉, α의 값은 원의 크기에 관계없이 항상 일정하다.

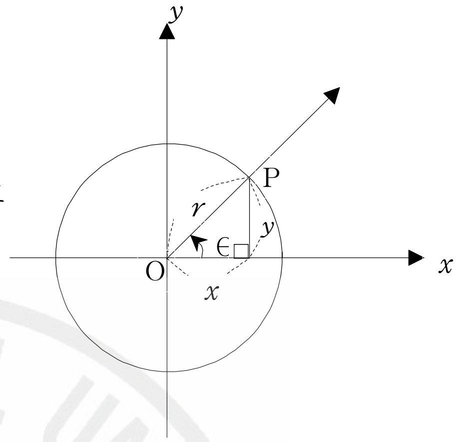
이 일정한 각의 크기가 $\frac{180°}{\pi}$를 1라디안이라고 하고, 이를 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다. 호도법을 사용할 때에는 라디안이라는 단위명은 흔히 생략한다.

육십분법과 호도법 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$1\text{라디안} = \frac{180°}{\pi}, \quad 1° = \frac{\pi}{180}$$

3. 일반각과 삼각함수

좌표평면에서 x축의 양의 부분을 시초선으로, 동경 OP가 나타내는 일반각 θ라디안이라 하고, 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면



[그림 3]

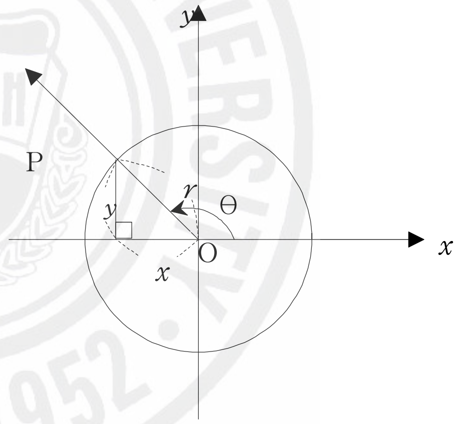
$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}$$

의 값은 θ의 크기에 따라 각각 한 가지로 결정된다. 즉,

$$\theta \rightarrow \frac{y}{r},\quad \theta \rightarrow \frac{x}{r},\quad \theta \rightarrow \frac{y}{x}$$

와 같은 대응은 각각 함수이다.

이와 같은 함수를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 하며, 이것을 기호로 각각



[그림 4]

$$\sin\theta \rightarrow \frac{y}{r},\quad \cos\theta \rightarrow \frac{x}{r},\quad \tan\theta \rightarrow \frac{y}{x}$$

와 같이 나타낸다. 또,

$$\theta \rightarrow \frac{r}{y},\quad \theta \rightarrow \frac{r}{x},\quad \theta \rightarrow \frac{x}{y}$$

와 같은 대응도 함수가 된다.

이와 같은 함수를 각각 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 하며, 이것을 기호로 각각

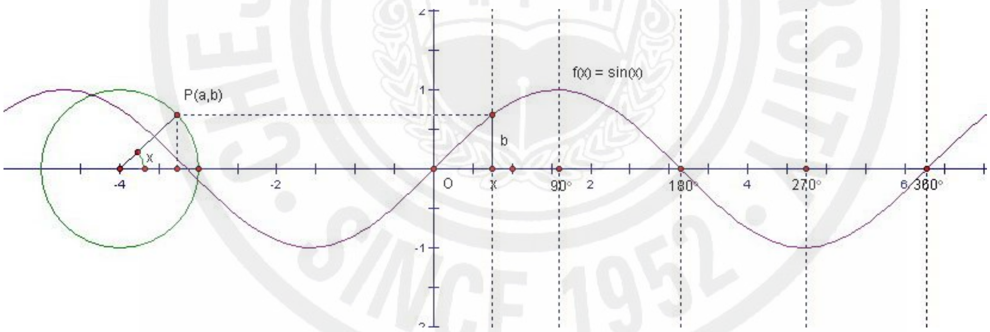
$$\operatorname{cosec}\Theta \rightarrow \frac{r}{y}, \quad \sec\Theta \rightarrow \frac{r}{x}, \quad \cot\Theta \rightarrow \frac{x}{y}$$

와 같이 나타낸다.

위에서 정의한 함수를 통틀어 삼각함수라고 한다.

4. $y = \sin x$ 그래프

좌표평면 위에서 각 x를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(a, b)$라면 $\sin x = \frac{b}{1} = b$가 된다. 따라서 $\sin x$의 값은 점 P의 b좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x) = \sin x$의 그래프를 그리면 다음의 [그림 5]과 같다.

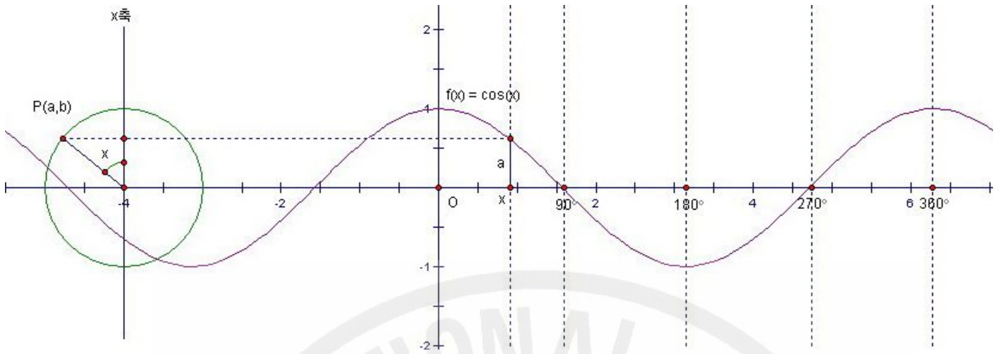


[그림 5]

5. $y = \cos x$ 그래프

좌표평면 위에서 각 x를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인

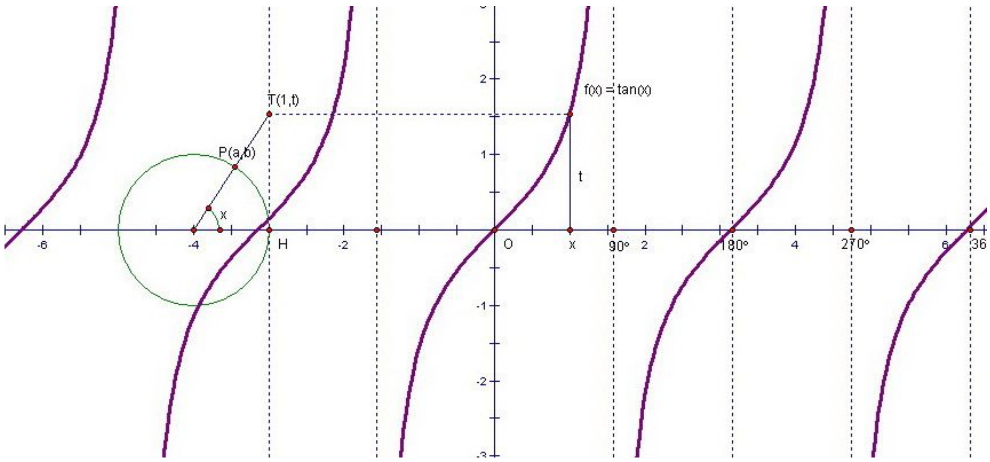
원과의 교점을 $P(a, b)$라면 $\cos x = \frac{a}{1} = a$가 된다. 따라서 $\cos x$의 값은 점 P의 a좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x) = \cos x$의 그래프를 그리면 다음의 [그림 6]과 같다.



[그림 6]

6. $y = \tan x$ 그래프

좌표평면 위에서 각 x를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(a, b)$라 하고, 점 H에서의 단위원의 접선과 동경 OP와의 교점을 $T(1, t)$라고 하면 $\tan x = \frac{b}{a} = \frac{t}{1} = t$가 된다. 따라서 $\tan x$의 값은 점 T의 T좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x) = \tan x$의 그래프를 그리면 다음의 [그림 7]과 같다.



[그림 7]

7. 그래프를 통한 삼각함수의 성질

1) 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$ 으로 표현되는 도형을

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a, y-b)=0$

2) 도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$ 으로 나타내어지는 도형을

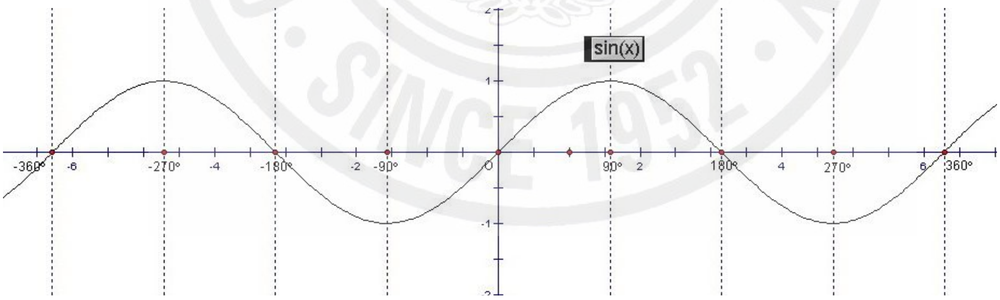
(1) x축에 대한 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

(2) y축에 대한 대칭이동도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

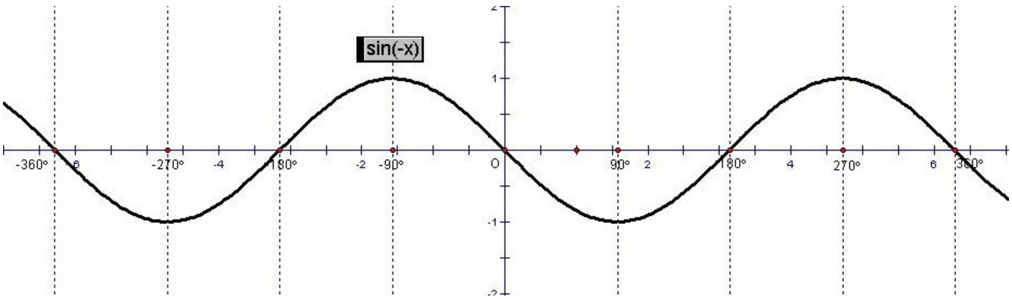
(3) 원점에 대한 대칭이동도형의 방정식은 $f(-x, -y)=0$

3) $-x$의 삼각함수

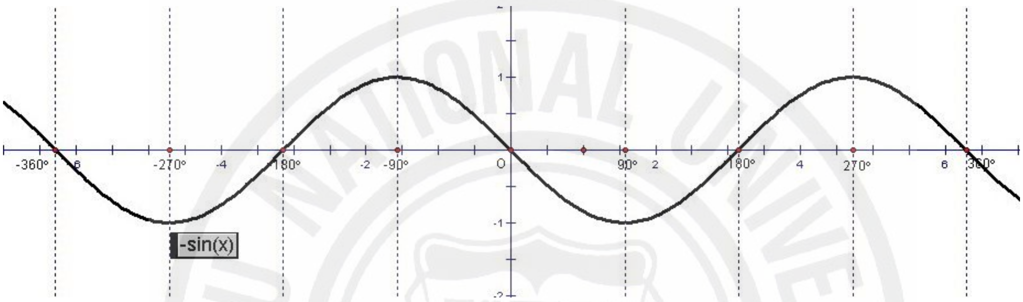
(1) $\sin(-x) = -\sin(x)$



$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



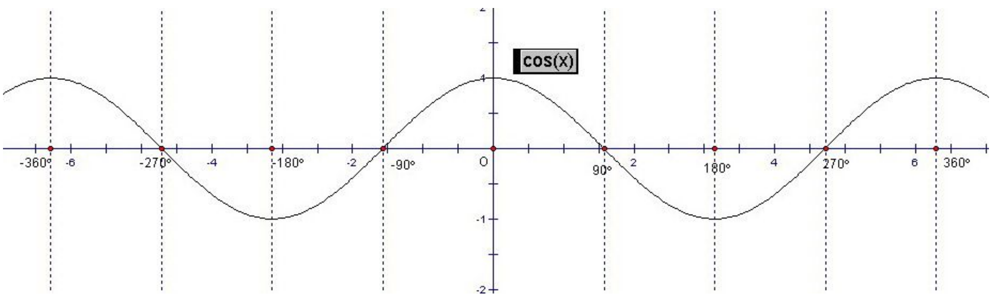
$y = \sin(-x)$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



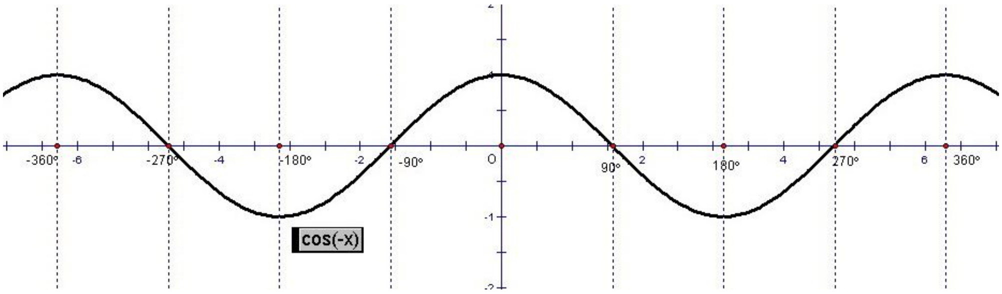
$y = -\sin x$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프로서 $y = \sin(-x)$와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(2) $\cos(-x) = \cos(x)$



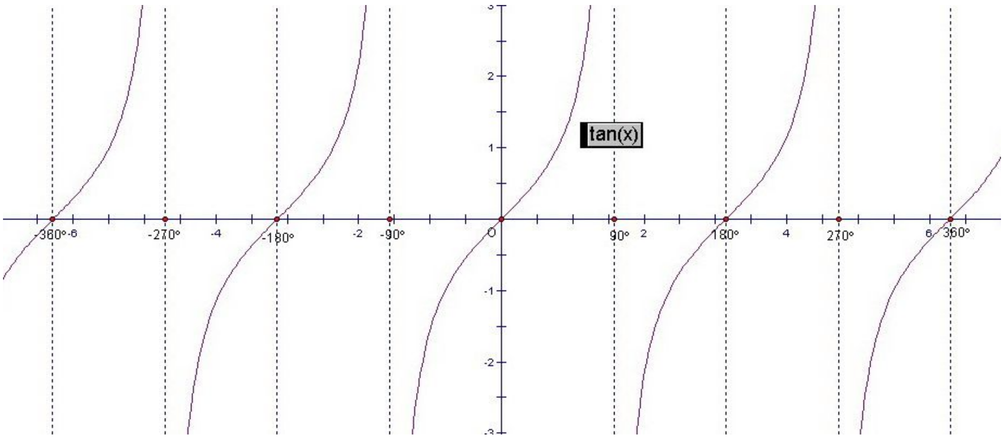
$y=\cos x$의 그래프를 제시한다.



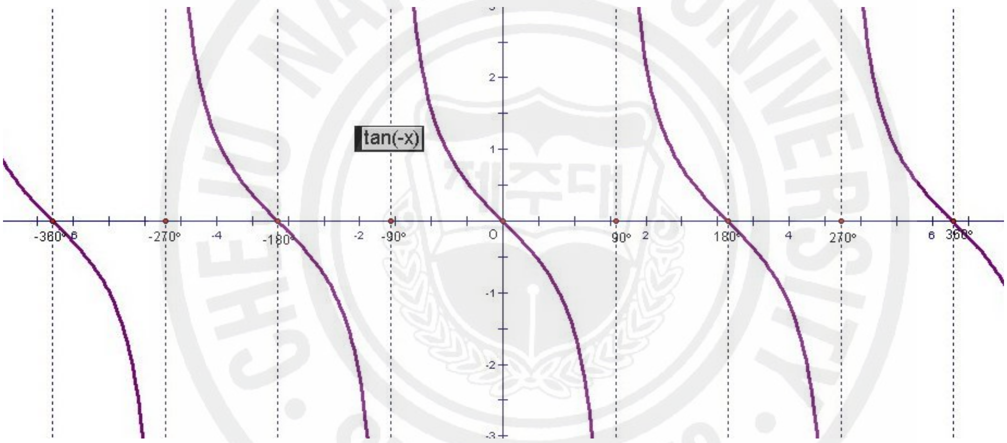
$y=\cos(-x)$의 그래프는 $y=\cos x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이면서 $y=\cos x$의 그래프와 일치한다.

따라서 $\cos(-x)=\cos(x)$.

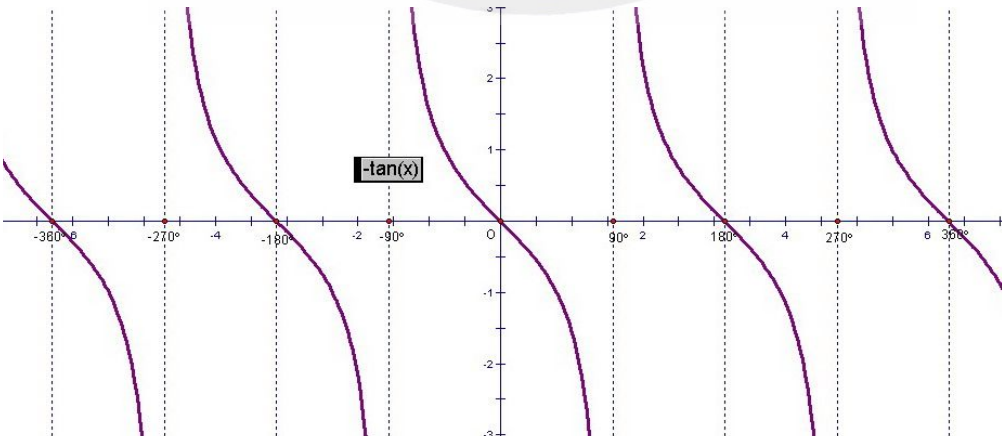
(3) $\tan(-x) = -\tan(x)$



$y = \tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \tan(-x)$의 그래프는 $y = \tan x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.

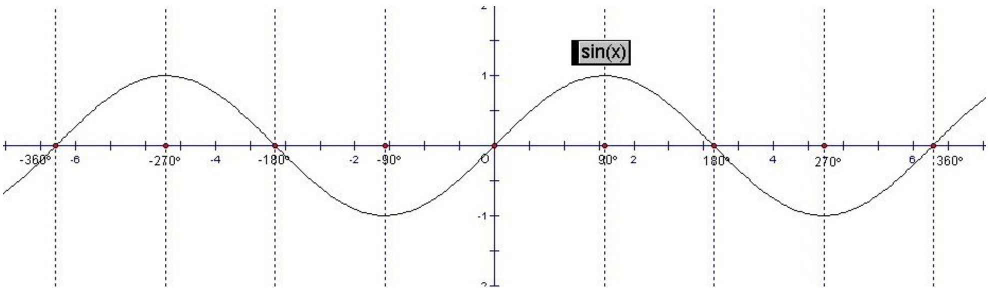


$y=-\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프로서 $y=\tan(-x)$와 일치함을 알 수 있다.

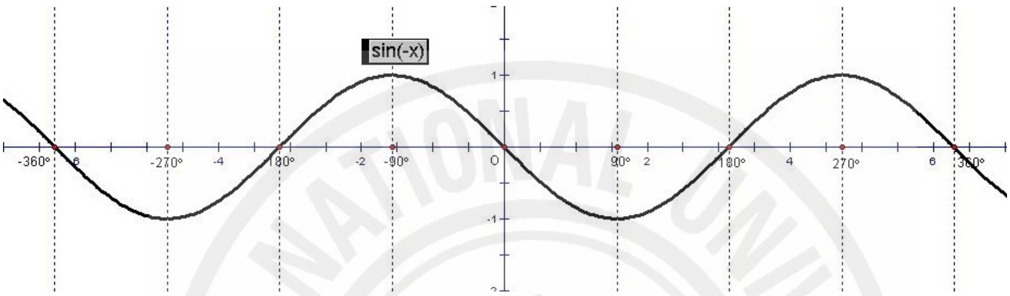
따라서 $\tan(-x) = -\tan(x)$.

4) $\frac{\pi}{2} \pm x$의 삼각함수

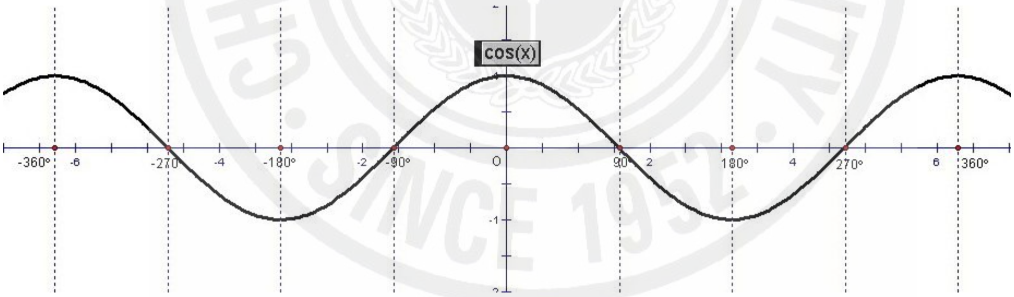
(1) $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$



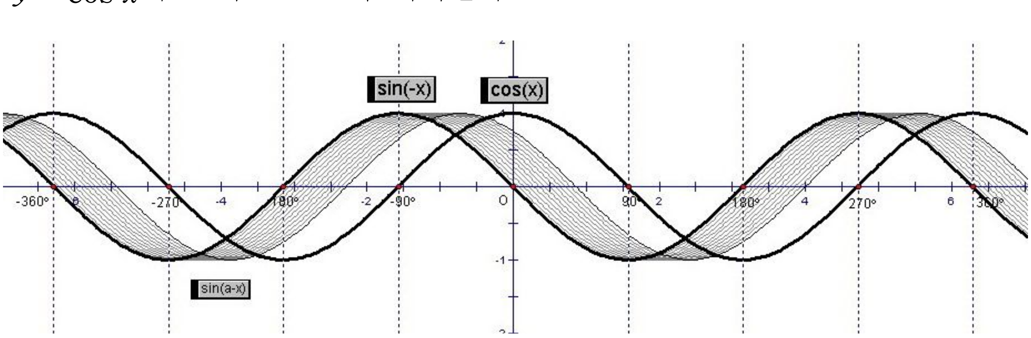
$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \sin(-x)$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



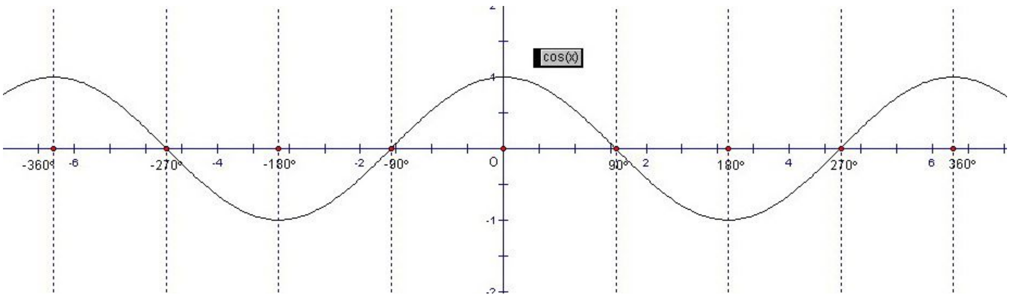
$y = \cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



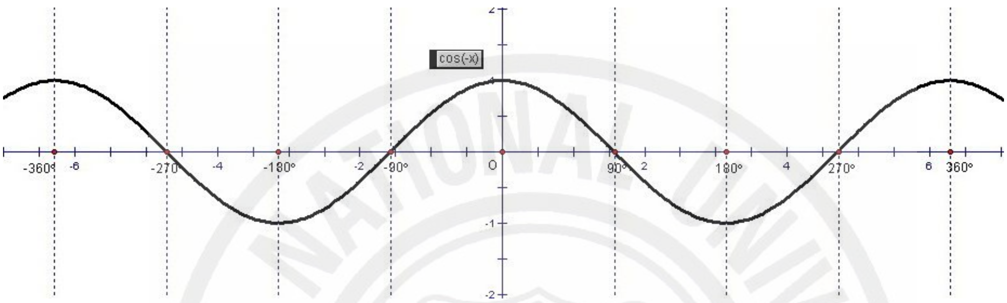
$y = \sin(90° - x) = \sin\{-(x - 90°)\}$의 그래프는 $y = \sin(-x)$ 그래프를 x축의 양의방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y = \cos x$와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(90° - x) = \cos x$.

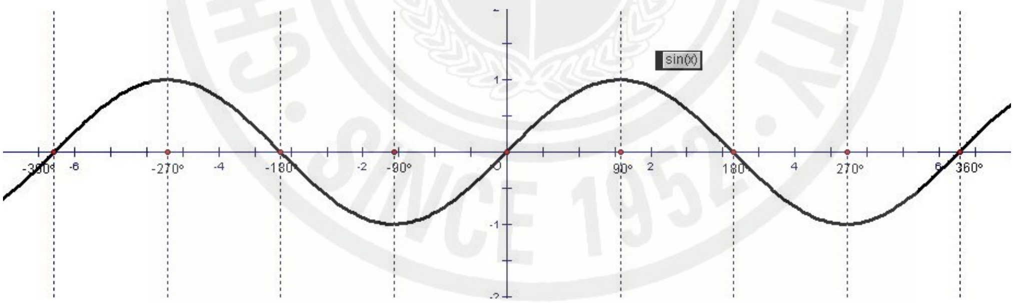
(2) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$



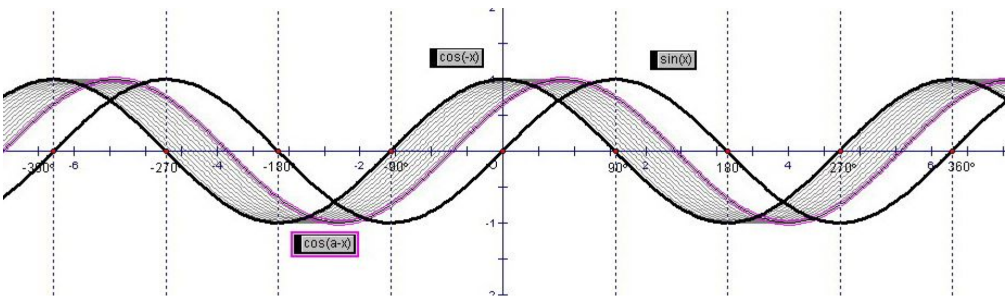
$y=\cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\cos(-x)$의 그래프는 $y=\cos x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



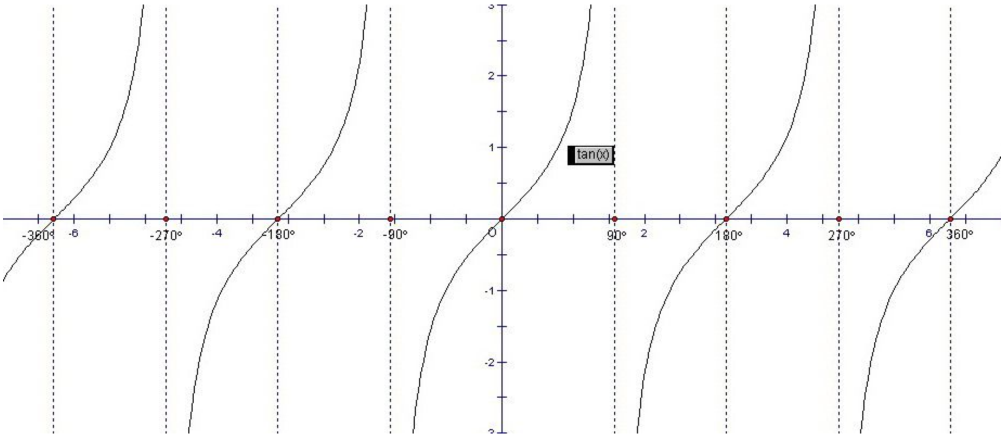
$y=\sin x$의 그래프를 제시한다.



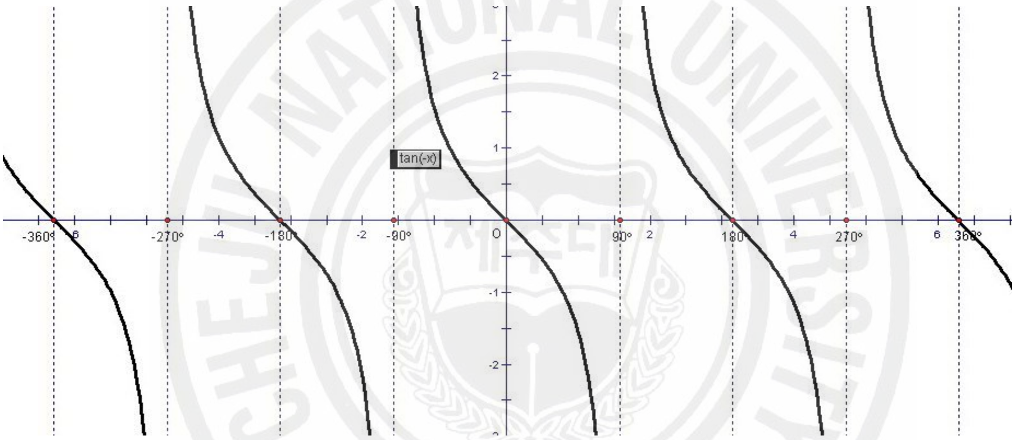
$y=\cos(90° - x)$의 그래프는 $y=\cos(-x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 90° 만큼 평행이동하면 $y=\sin(-x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(90° - x) = \sin(x)$.

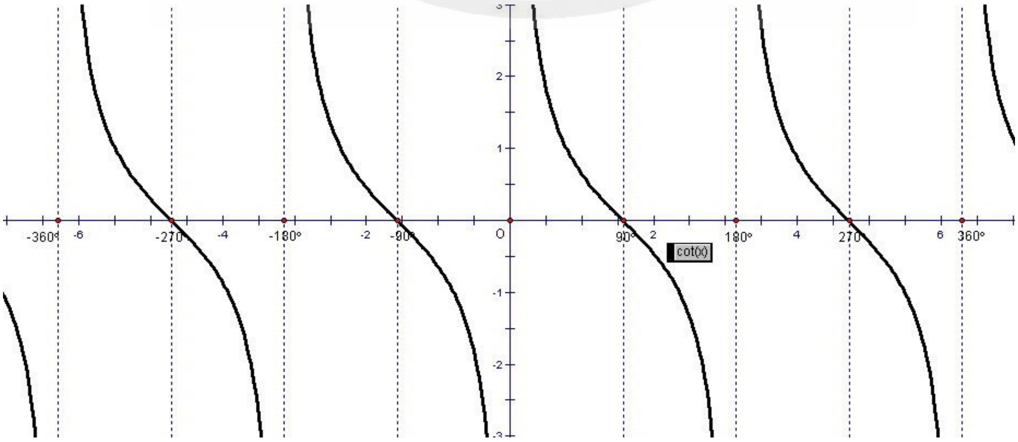
(3) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$



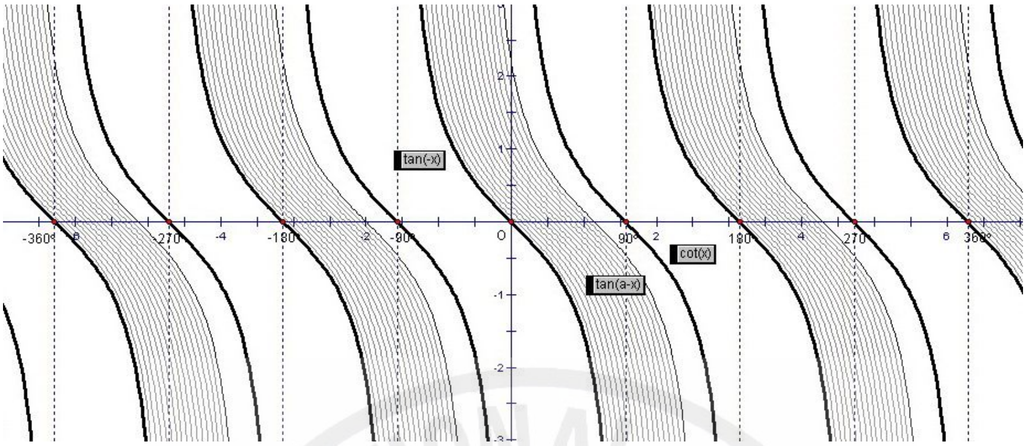
$y = \tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \tan(-x)$의 그래프는 $y = \tan x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



$y = \cot x$의 그래프를 제시한다.



$y = \tan(90° - x)$의 그래프는 $y = \tan(-x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 90° 만큼 평행이동하면 $y = \cot(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

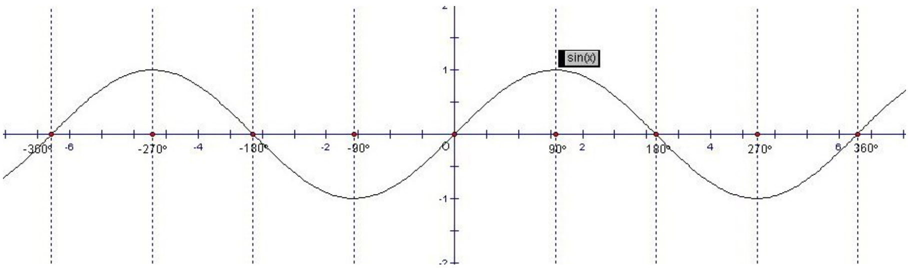
따라서 $\tan(90° - x) = \cot(x)$.

7차 교육과정 '10-가'에서는 코탄젠트 그래프가 제시되어 있지 않고 있다. 따라서,

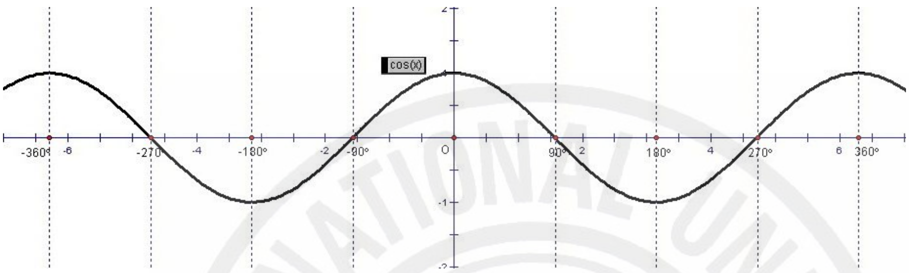
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

로 설명이 가능하다.

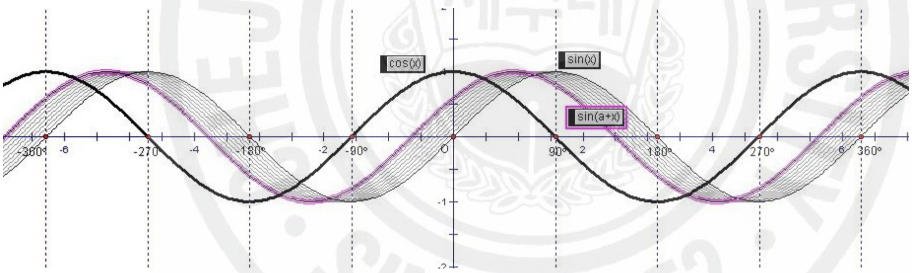
(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



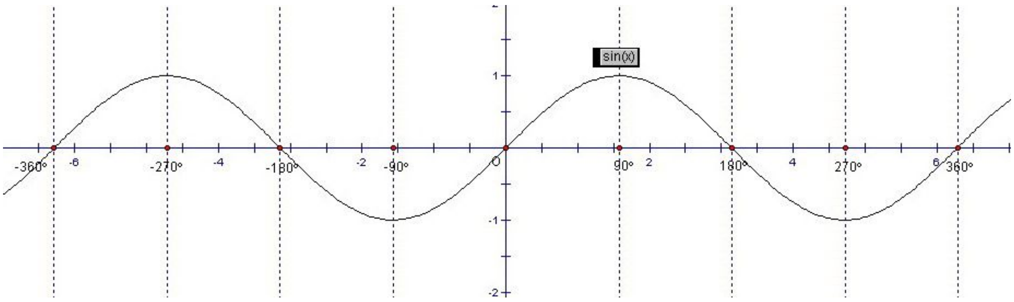
$y = \cos x$의 그래프를 제시한다.



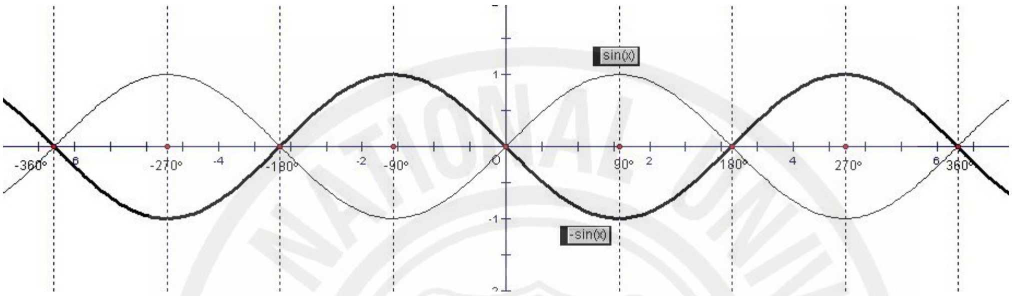
$y = \sin(90° + x)$의 그래프는 $y = \sin(x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y = \cos\,(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(90° + x) = \cos(x)$.

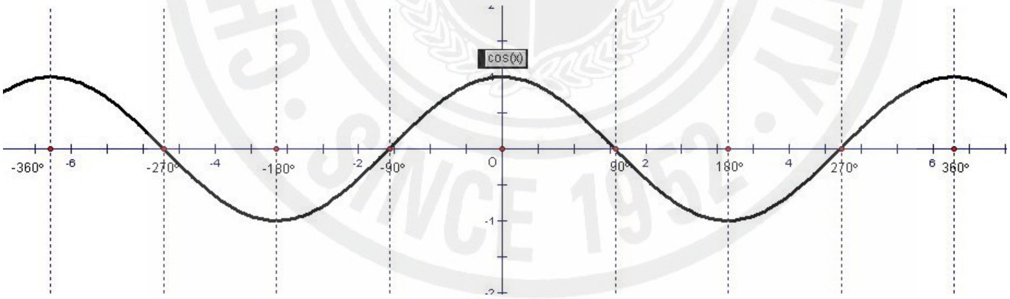
(5) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$



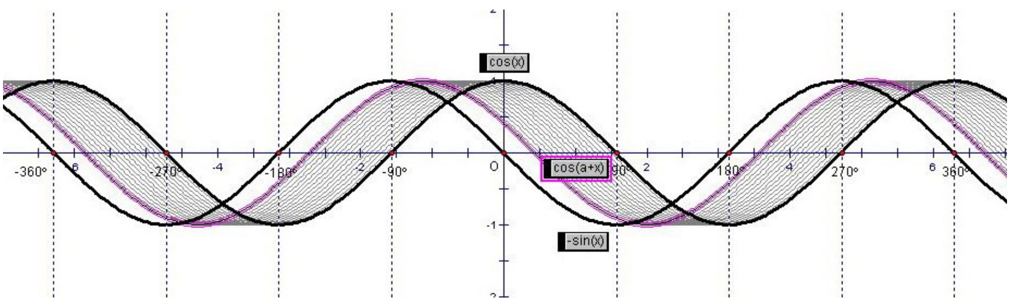
$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \sin(-x)$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



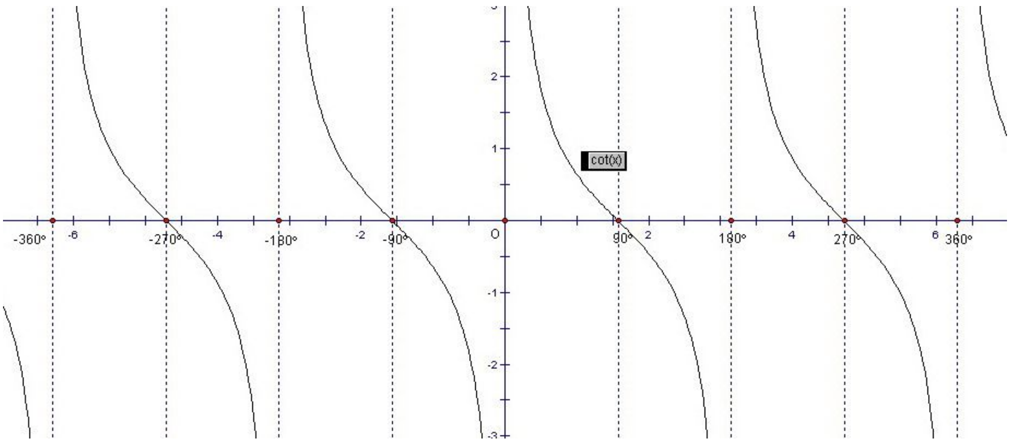
$y = \cos x$의 그래프를 제시한다.



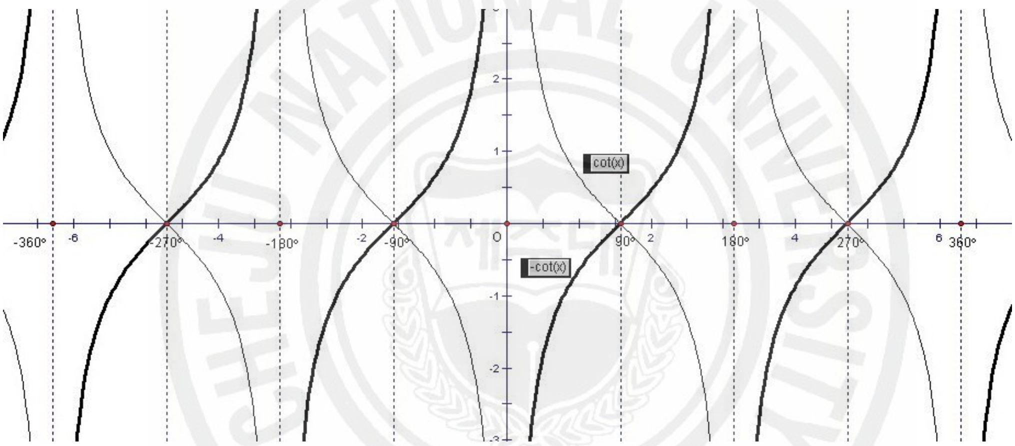
$y = \cos(90° + x)$의 그래프는 $y = \cos(x)$ 그래프를 x축에 음의방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y = -\sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(90° + x) = -\sin(x)$.

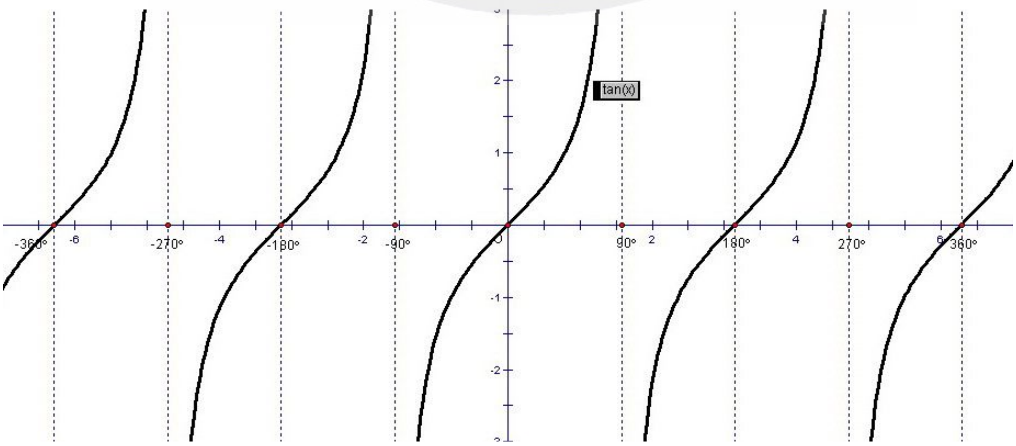
(6) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$



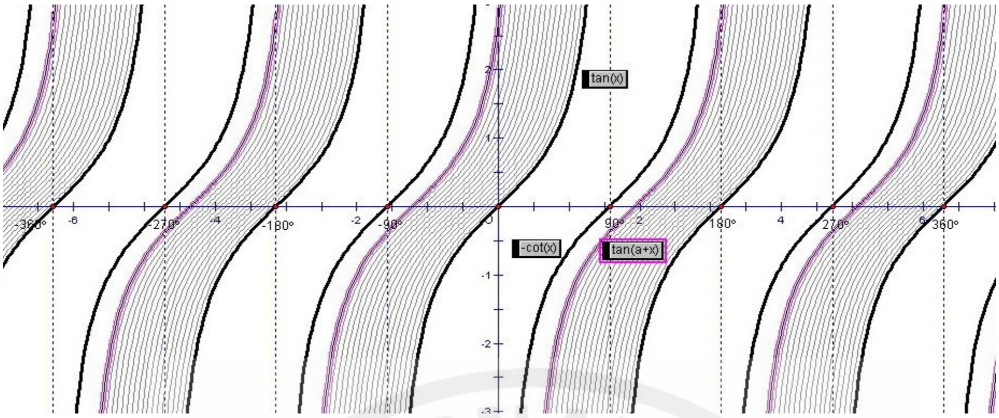
$y = \cot x$의 그래프를 제시한다.



$y = -\cot(x)$의 그래프는 $y = \cot x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



$y = \tan x$의 그래프를 제시한다.



$y = \tan(90° + x)$의 그래프는 $y = \tan(x)$ 그래프를 x축에 음의방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y = -\cot(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(90° + x) = -\cot(x)$.

7차 교육과정 '10-가'에서는 코탄젠트 그래프가 제시되어 있지 않고 있다.

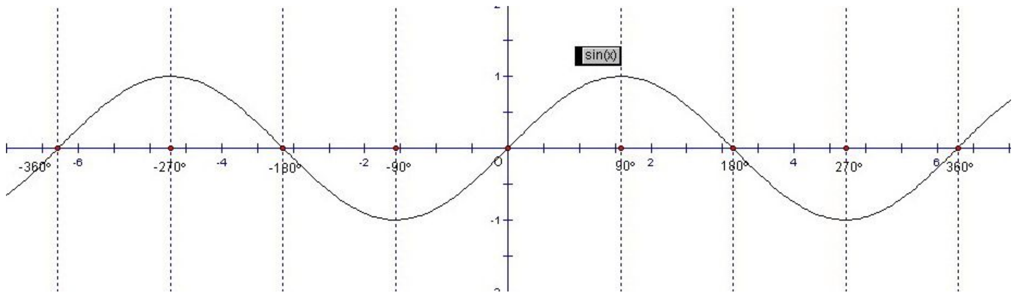
따라서,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$$

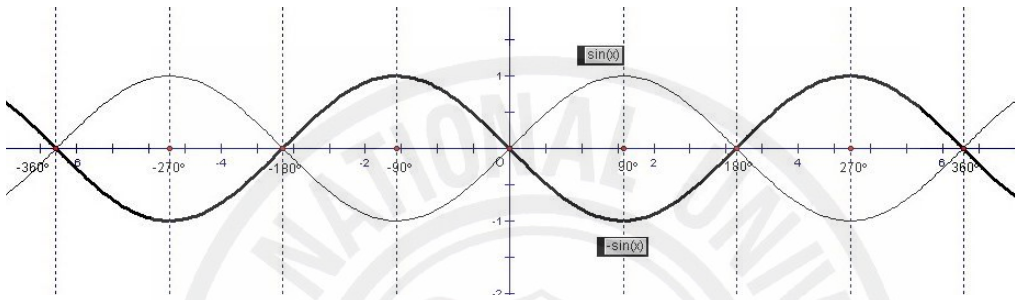
로 설명이 가능하다.

5) π±Θ의 삼각함수

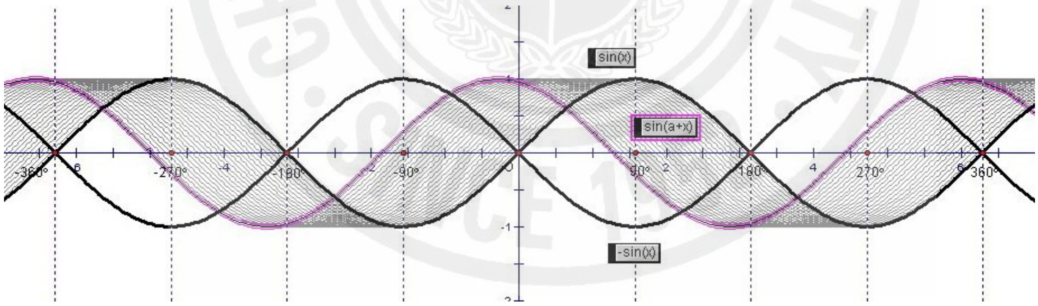
(1) $\sin(\pi + x) = -\sin x$



$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



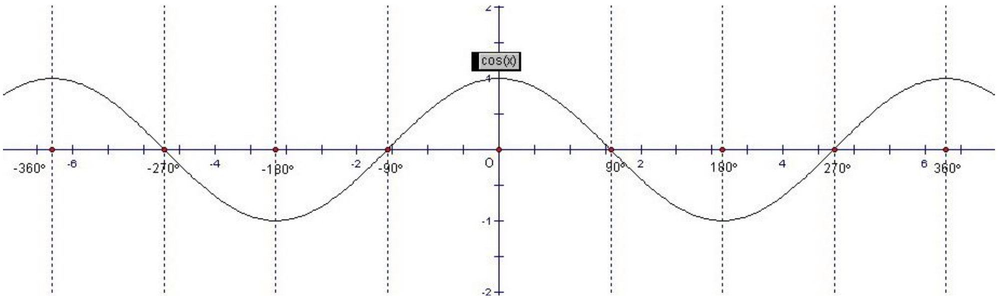
$y = -\sin(x)$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



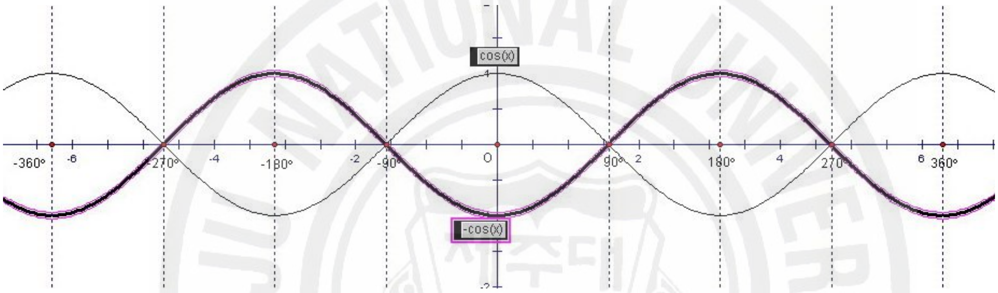
$y = \sin(180° + x)$의 그래프는 $y = \sin(x)$ 그래프를 x축에 음의방향으로 $180°$만큼 평행이동하면 $y = -\sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(180° + x) = -\sin(x)$.

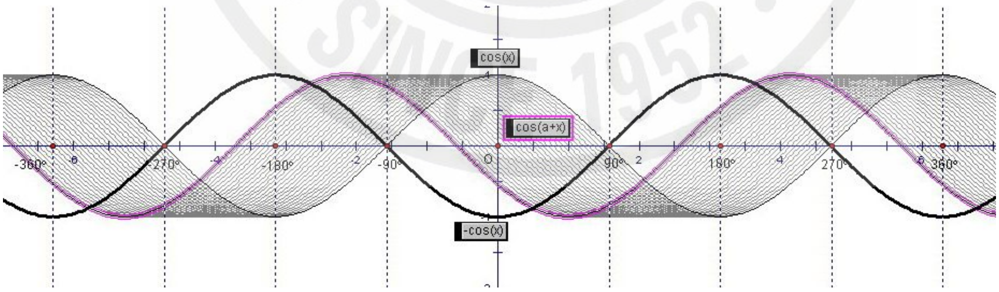
(2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$



$y = \cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



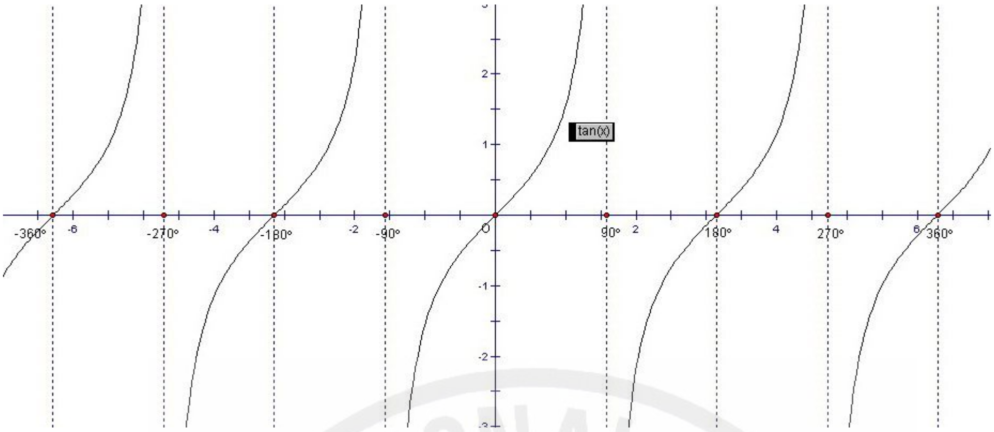
$y = -\cos(x)$의 그래프는 $y = \cos x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



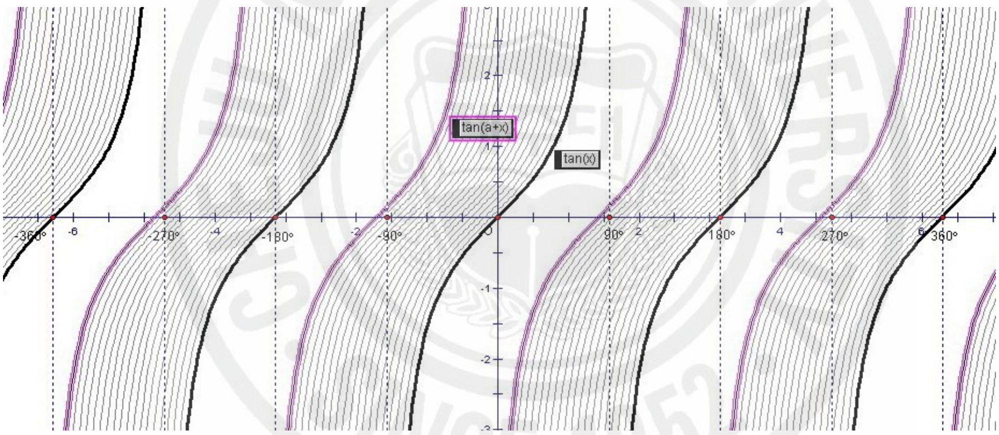
$y = \cos(180° + x)$의 그래프는 $y = \cos(x)$ 그래프를 x축에 음의방향으로 180° 만큼 평행이동하면 $y = -\cos(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(180° + x) = -\cos(x)$.

(3) $\tan(\pi + x) = \tan x$



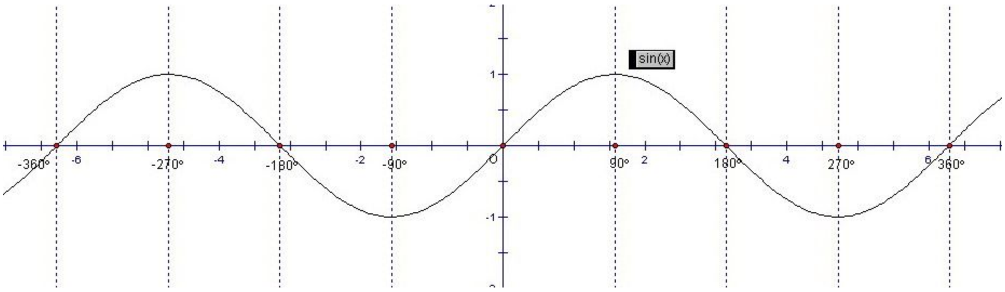
$y = \tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



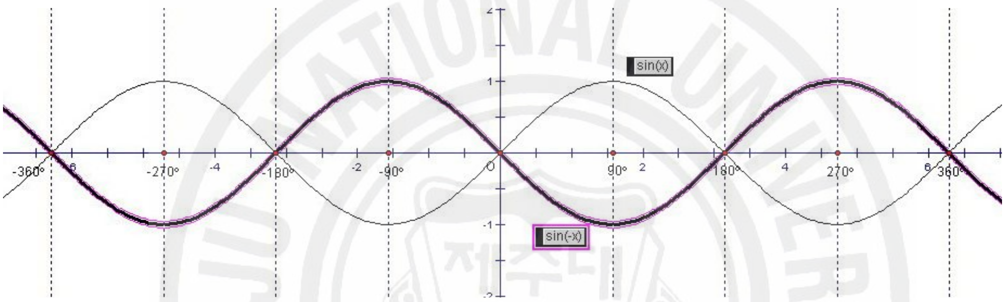
$y = \tan(180° + x)$의 그래프는 $y = \tan(x)$ 그래프를 x축에 음의방향으로 180° 만큼 평행이동하면 $y = \tan(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(180° + x) = \tan(x)$.

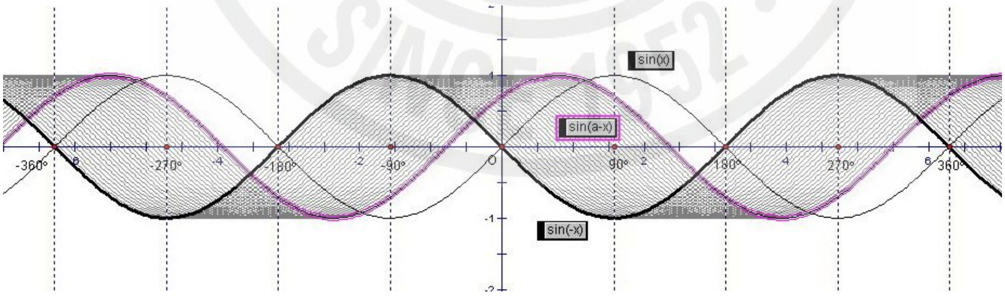
(4) $\sin(\pi - x) = \sin x$



$y = \sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



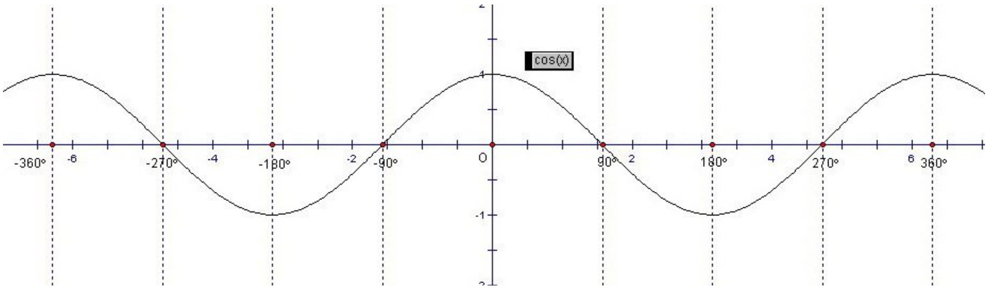
$y = \sin(-x)$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



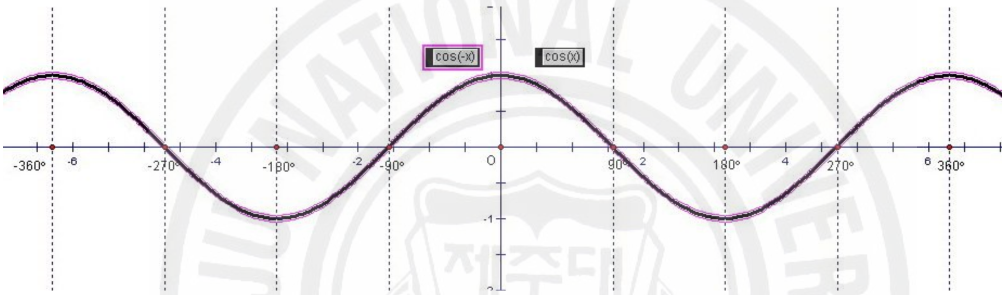
$y = \sin(180° - x)$의 그래프는 $y = \sin(-x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y = \sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(180° - x) = \sin(x)$.

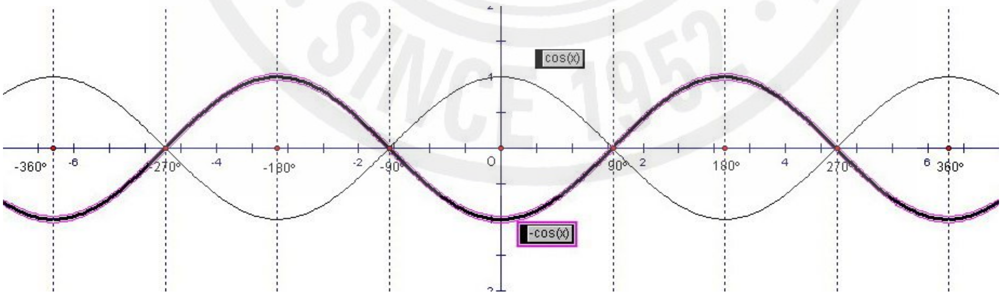
(5) $\cos(\pi - x) = -\cos x$



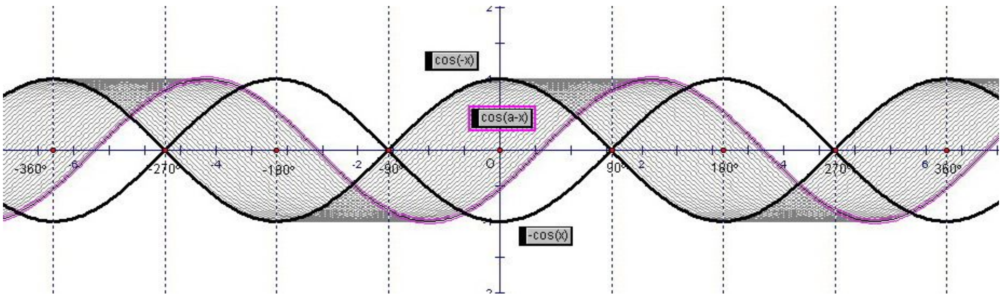
$y = \cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \cos(-x)$의 그래프는 $y = \cos x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



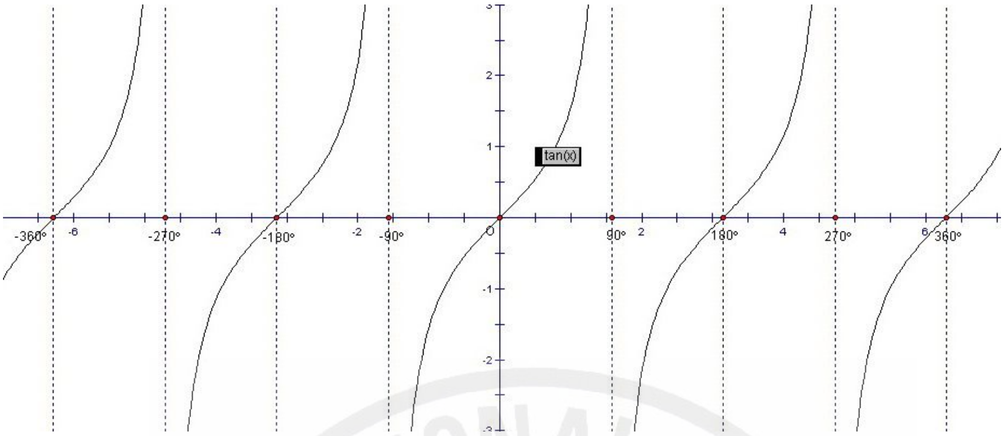
$y = -\cos(x)$의 그래프는 $y = \cos x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



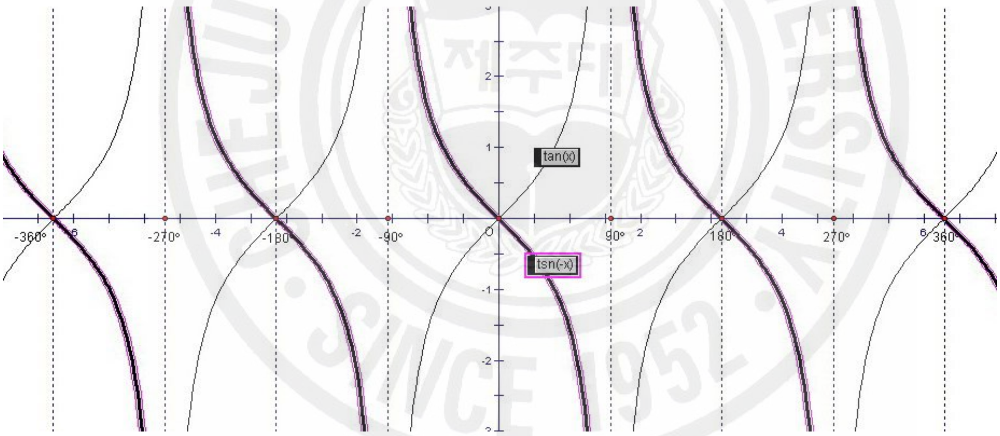
$y = -\cos(x)$의 그래프는 $y = \cos(-x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y = -\cos(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(180° - x) = -\cos(x)$.

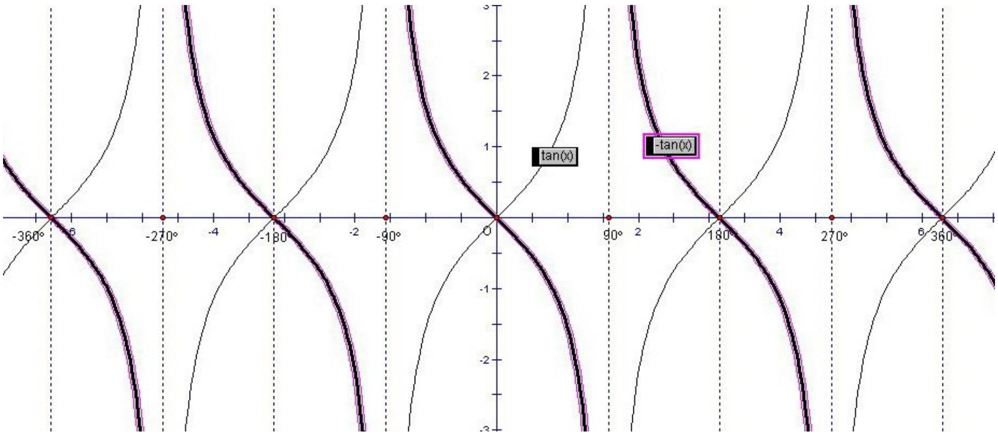
(6) $\tan(\pi - x) = -\tan x$



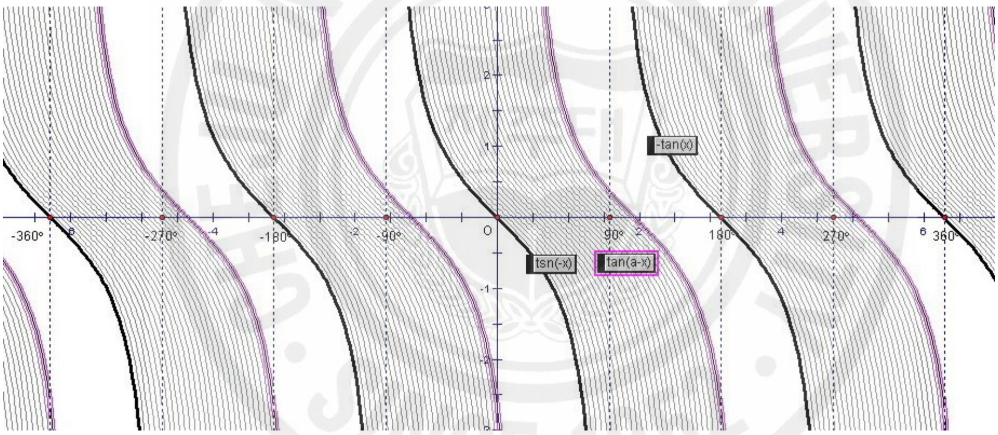
$y = \tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y = \tan(-x)$의 그래프는 $y = \tan x$ 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



$y=-\tan(x)$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



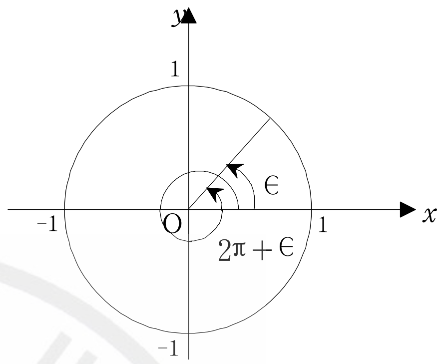
$y=-\tan(x)$의 그래프는 $y=\tan(-x)$ 그래프를 x축에 양의방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=-\tan(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(180°-x)=-\tan(x)$.

8. 삼각함수 성질의 대수적 해석

1) $2n\pi+\theta$ 의 삼각함수

n이 정수일때, 각 θ의 동경과 각 $2n\pi+\theta$의 동경은 일치하므로, 이들 각의 삼각함수의 값은 같다.



따라서 다음 공식이 성립한다.

n이 정수일때

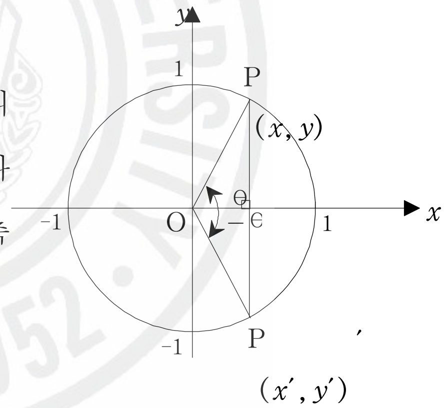
$$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta,$$

$$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$$

2) $-\theta$ 의 삼각함수

오른쪽 그림과 같이 각 θ의 동경과 각 $-\theta$의 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $P(x,y)$와 $P'(x',y')$이라고 하면, 점 P와 점 P'은 x축에 대하여 대칭이므로 $x'=x,\ y'=y$



$$\therefore\ \sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$$

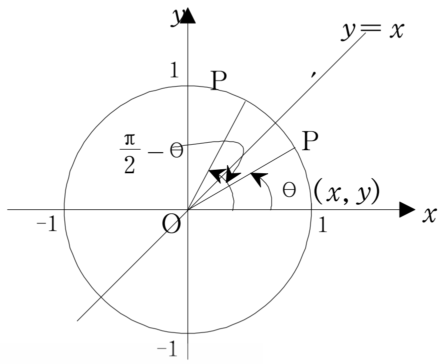
$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

따라서 다음 공식을 얻을 수 있다.

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \ \cos(-\theta)=\cos\theta,\ \ \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

3) $\frac{\pi}{2} \pm \Theta$ 의 삼각함수

오른쪽 그림과 같이 각 와 $\frac{\pi}{2}-\Theta$를 나타내는 두 동경과 단위원과의 교점을 각각 $P(x, y)$와 $P'(x', y')$이라고 하면, 점 P와 점 P'은 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $x' = y$, $y' = x$



그러므로

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) = y' = x = \cos\Theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) = x' = y = \sin\Theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\Theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot\Theta$$

또 이들 등식의 Θ에 $-\Theta$를 대입하면

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\Theta) = \cos(-\Theta) = \cos\Theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\Theta) = \sin(-\Theta) = -\sin\Theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\Theta) = \cot(-\Theta) = -\cot\Theta$$

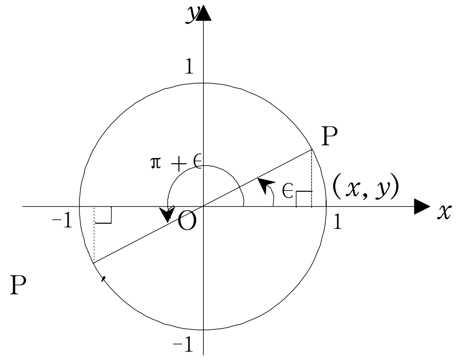
따라서 다음 공식을 얻을 수 있다.

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\Theta) = \cos\Theta \ , \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\Theta) = \cos\Theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\Theta) = \sin\Theta \ , \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\Theta) = -\sin\Theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\Theta) = \cot\Theta \ , \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\Theta) = -\cot\Theta$$

4) $\pi \pm \theta$ 의 삼각함수



오른쪽 그림과 같이 각 θ의 동격과 $\pi+\theta$를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $P(x, y)$와 $P'(x', y')$이라고 하면,

$x' = -x$, $y' = -y$

그러므로

$$\sin(\pi+\theta) = y' = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = x' = -x = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

또 이들 등식의 θ에 $-\theta$를 대입하고, $-\theta$의 삼각함수에 대한 공식을 이용하면

$$\sin(\pi-\theta) = -\sin(-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

III. 결론 및 제언

7차 교육과정 수학10-나 도형의 이동에서 배운 평행이동과 대칭이동을 통해 삼각함수의 성질을 그래프를 이용하여 시각화 하는데 중점을 두었다. 현재 컴퓨터를 활용한 수업이 많이 적용되고 있고 본 연구를 하면서 앞으로도 이러한 컴퓨터 활용이 현재까지의 이론 수업진행 방법에 보조하는 역할을 더욱더 많이 제공할 것이라고 본다.

그래프 그리기와 해석하기는 함수에 대한 기본적인 이해가 시작되는 곳으로 처음에는 질적 접근을 통해서 그림을 그려보는 것으로 시작하여 학생들에게 그래프가 어떤 상황을 얼마나 효율적으로 기술하는가를 알게 하는 기회를 제공한다. 그래서 기하소프트웨어인 GSP프로그램을 이용해 삼각함수에 대한 내용을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 본 연구의 자료를 정리하였다.

7차 교육과정의 교과서의 다수는 '삼각함수의 성질' 뒤에 '삼각함수의 그래프'가 제시되는 순서로 전개되고 있다. 삼각함수의 그래프를 학습하지 않고 삼각함수의 성질을 먼저 접하게 되면 학생들은 삼각함수의 성질을 삼각함수의 중요한 공식으로 암기한다. 그러므로 '삼각함수의 그래프'를 학습한 후, 그래프를 통하여 '삼각함수의 성질'을 생각해 보도록 전개하는데 초점을 두고 본 연구를 정리하였다.

Ⅳ. 참 고 문 헌

[1] 임종호, “GSP를 활용한 함수지도에 관한 연구 : 삼각함수를 중심으로”, 국민대 교육대학원 석사학위 논문.

[2] 남철원, “삼각함수에서 G.S.P 활용을 통한 자기주도적 학습능력 증진에 관한 연구”, 울산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[3] 이혜원, “그래프를 중심으로 한 함수개념 지도에 관한 연구 : 고등학교 삼각함수 단원을 중심으로”, 경희대 교육대학원 석사학위 논문.

[4] 최상기 외3, “고등학교 수학 10-나”, (주)고려출판사.

[5] 박두일 외8, “고등학교 수학 10-나”, (주)교학사

[6} 우정호 외3, “고등학교 수학 10-나”, 대한교과서(주)

[7] 박세희 외3, “고등학교 수학 10-나”, 동아서적(주)

[8} 이방수 외1, “고등학교 수학 10-나”, (주)천재교육

[9] 김수환 외6, “고등학교 수학 10-나”, (주) 지학사

[10] 박윤범 외5, “고등학교 수학 10-나”, 대학교과서(주)

[11] 김향숙 외8, “GSP를 이용한 기하의 이해”, 경문사, 2006.

<Abstract>

An Understanding on the Properties of Trigonometric Functions Using GSP

Kim, Jae-Hwan

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea
Supervised by Professor Yang, Sung-Ho

The aim of this thesis is to understand the properties of trigonometric functions using GSP(Geometer's Sketchpad). First, we present the graphs of trigonometric functions to understand their properties. Next, the processes of transforming trigonometric functions are visualized in stages using parallel translation and symmetric transposition.

If the method of a visual approach for the understanding of trigonometric functions is presented through parallel translation and symmetric transposition, then students can access them with more interest. Moreover it is expected that it can help students to understand trigonometric function's properties by algebraic method.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2007.