석 사 학 위 논 문

GSP를 이용한 영재 프로그램 개발
- 기하평균을 중심으로 -

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

김 민 영

2010년 8월

석 사 학 위 논 문

GSP를 이용한 영재 프로그램 개발
- 기하평균을 중심으로 -

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

김 민 영

2010년 8월

GSP를 이용한 영재 프로그램 개발
- 기하평균을 중심으로 -

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

김 민 영

2010년 8월

김민영의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 김 해 규 인

심사위원 최 근 배 인

심사위원 현 종 익 인

제주대학교 교육대학원

2010년 6월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국문초록

GSP를 이용한 영재 프로그램 개발
- 기하평균을 중심으로 -

김 민 영

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 최 근 배

제7차 초등학교 교육과정에서 '확률과 통계'에 대한 지도는 초등학교 1학년부터 6학년까지 체계적으로 이루어지고 있다. 하지만 초등학교 5학년에서 처음 도입하고 있는 평균에 관한 내용은 학생들로 하여금 평균은 산술평균이라는 수학적 오개념을 낳고 있다. 이러한 수학적 오개념은 중학교, 고등학교 수학에서 수학에 대한 거부감과 불안을 낳을 수 있다. 그래서 초등학교 학생들에게는 어려울지 모르지만 수학적 오개념을 없애기 위해서 자세하게 가르치지는 않더라도 평균의 종류 및 그 내용에 대해서 약간은 설명을 해야 한다는 생각을 갖게 되었다. 하지만 프로그램을 개발하는데 있어서 초등학교 학생들에게는 아직 어려운 점이 많아 영재 학생들을 대상으로 하는 수업으로 한정을 두었다. 그래서 산술 평균과 기하 평균에 대한 수학 수업에 있어서 설명만으로 끝나는 수업이 아닌 다양한 교구와 GSP 프로그램 등을 이용해서 산술·기하평균의 차이점, 기하평균의 의미, 기하평균의 원리 발견 등 여러 가지 내용을 중심으로 프로그램을 개발하였다. 총 7개의 프로그램에서 1번부터 6번까지 프로그램은 여러 가지 교구와 컴퓨터, GSP 프로그램을 이용해서 개념과 원리를 스스로 발견하고 탐구하는 활동으로 만들었다. 마지막 7번 프로그램에서는 산술평균, 기하평균, 조화평균의 기본적인 개념과 원리를 확인하고 정리할 수 있도록 개발하였고, 이 과정을 통해서 아동들이 스스로 발견하

고 탐구한 내용을 정리하고 확인할 수 있도록 유도하였다. 총7개의 프로그램을 통해서 아동들이 스스로 탐구하고 발견하는 능력을 기를 수 있도록 하였고, 탐구 및 발견하는 과정을 통해서 수학적 사고력과 탐구력을 기를 수 있도록 하였다. 또한 단순하게 수학적 지식을 암기하는 것이 아닌 수학적 지식 및 원리가 어떻게 생겨났으며 왜 이러한 개념이 필요한지 설명할 수 있도록 구성하였다. 그리고 산술평균과 기하평균의 지식과 원리가 어떻게 생겨났으며 왜 이러한 개념이 필요한지 설명할 수 있게 될 것으로 보인다.

이러한 학습 자료들은 단순한 지식 습득이 아닌 심도 있게 수학적 지식을 이해할 수 있는 기회를 제공해 주고, 산술·기하평균 내용뿐만 아니라 다른 수학적 지식에도 적용할 수 있는 수학적 힘을 기를 수 있게 될 것이다.

주요어 : 기하평균, GSP 프로그램, 영재

Ⅰ. 서론

제7차 초등학교 교육과정에서 '확률과 통계'에 대한 지도는 초등학교 1학년에서 한 가지 기준으로 사물을 분류하는 과정에서부터 시작되고, 이는 확률과 통계라는 영역에 쉽게 접근할 수 있도록 구성되어 있다. 그리고 2학년이 되면서 간단한 내용이지만 표와 그래프를 만들고, 자료들을 정리해 나가기 시작한다. 그 후 3학년에는 자료를 정리하고, 자료의 특성에 따라 막대그래프를 그리거나 간단한 그림그래프를 그리도록 한다. 4학년 때부터는 사회 교과와 연계될 수 있도록 꺾은선 그래프를 그린다. 이처럼 1학년에서 4학년까지는 그래프와 자료를 나타내는 것에 집중을 한다. 이 과정을 통해서 아동들로 하여금 자료를 정리하고 정리된 자료를 통해서 무언가를 예상할 수 있도록 한다. 초등학교 5학년에서는 줄기와 잎 그림, 그림그래프, 평균을 도입하여 이제까지 무의식적으로 행하던 성적을 평균 내는 방법에 대해서 구체적이고 자세하게 배우는 과정을 거친다. 그리고 6학년에는 비율그래프(띠그래프, 원그래프)와 경우의 수, 확률에 대해서 배운다. 중학교 1학년에는 평균에 대하여 본격적이고 심도 있는 내용을 배우게 된다.

하지만 이 과정에서 초등학교 5학년에 평균이라는 표현이 아동들로 하여금 평균이라는 것은 오로지 산술평균만 있다는 수학적 오개념을 만들어 내고 있다. 수학적 오개념은 중학교, 고등학교 수학에서 수학에 대한 거부감과 불안을 낳을 수 있다. 그래서 초등학교 학생들에게는 어려울지 모르지만 이러한 수학적 오개념을 없애기 위해서 자세하게 가르치지는 않더라도 평균의 종류 및 그 내용에 대해서 약간은 설명을 해야 한다는 생각을 갖게 되었다. 그리고 그냥 설명만으로 끝나는 것이 아닌 여러 가지 교구를 이용해서 어렵지만 이해할 수 있는 내용을 만들고자 하였다. 특히 영재 교육에 산술평균과 기하평균에 대해서 스스로 발견하고 탐구하는 수업을 통해서 수학적 사고력과 탐구하는 능력을 기를 수 있을 것으로 보인다. 또한 단순하게 수학적 지식을 단순 암기하는 것이 아니라 수학적 지식 및 원리가 어떻게 생겨났으며 왜 이러한 개념이 필요한지 설명할 수 있게 될 것이다. 이를 위해서 프로그램 개발할 때 학생들이 GSP 프로그램을 이용해서 진행해 나가는 과정 자체에서 스스로 원리를 발견할 수 있도록 개발하였다. 하지만 초등학교 학생들에게는 아직 어려운 점이 많아 영재 학생들을 대상으로 하는 수업으로 한정을 두었다.

Ⅱ. 선행 연구 분석

1. GSP 프로그램

장민정(2006)은 GSP 프로그램과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다.

가. GSP의 의미(Geometer's Sketchpad)

GSP는 학생들로 하여금 수학의 학습동기를 유발시키고 학습의 도구로 활발히 사용되고 있는 소프트웨어 중 대표적인 프로그램이다. 이러한 Holz(1996)의 말에 의하면 GSP는 광범위한 수학적 대상을 분석하고 체험하며, 창작할 수 있는 소프트웨어이다. 이 소프트웨어들은 유클리드 원론에 규정된 자와 컴퍼스 작도를 흉내 내고 있으며 사용자에 의해 정의된 작도를 지원하는 기능을 가지고 있다. 도형을 이루는 어떤 요소들(점, 선분, 원 등)을 움직였을 때, 도형의 근간을 이루는 기하학적인 관계가 계속적으로 유지되면서 도형이 변화한다는 것이 가장 큰 특징이다.

또한 Laborde(1993)에 말에 의하면 GSP는 도형의 명시적인 서술과 그림의 가변성을 공통된 특성으로 제안 즉, 화면상에 그려진 그림은 도형의 정의를 명확하게 하는 과정의 결과로, 그리고자 하는 도형의 내재된 기하학적 관계에 대한 명확한 이해와 서술이 필요하다. 이렇게 해서 그려진 스크린 상의 도형은 도형의 사변적인 요소가 변화되었을 때, 의도한 특성들을 보존하면서 여러 가지 도형으로 변화되어진다. 그러므로 이들 소프트웨어에서의 작도는 결과 된 그림을 그리는 것이라기보다는 그림에 요구되는 기하학적 관계를 명확히 서술하는 것이라 할 수 있다.

나. GSP의 특징

1) 기본적인 도형과 수에 대한 연구

GSP는 기본적으로 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽게 명확히 구현할 수 있다. 그림은 빠르고, 엄밀하게 도형의 본질적인 관련성을

쉽고 명백히 나타낼 수 있다. 그 외각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 작도가 되는 기본적인 기능을 한 번에 수행할 수 있다.

2) 높은 동적 모델

그림 그리는 과정을 기록하고, 그에 따라 다시 재생하여 애니메이션을 쉽게 구현할 수 있다. 따라서 동적 기하 프로그램을 통하여 도형의 자취나 궤적을 쉽게 알아볼 수 있고, 그릴 수 있다.

3) 도형의 여러 요소의 색상 처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등 표현이 쉽게 구현된다.

4) 평면 기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하학적 접근이 가능

다중좌표계 즉, 모든 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

다. 교육적 효과

가장 큰 교육적 효과는 교수자와 학습자 사이의 원활한 의사소통이 가능하다는 것이다. 그리고 학습자로 하여금 호기심과 흥미를 유발하는 수학 수업이 가능하도록 만든다는 점이다. 이러한 GSP 프로그램은 교수자와 학습자 모두에게 유의미한 환경을 조성하여 교육의 효과성과 효율성을 증진시키려는 새로운 교육 패러다임으로 볼 수 있다.

1) 수학 내에서의 내적 연결성을 강화할 수 있다.

소프트웨어의 탐구 기능과 그래프 기능은 교사와 학생들이 대수와 기하에 대한 지식을 통합하도록 돕는다. 가우스 좌표계와 극 좌표계가 둘 다 사용될 수 있고 두 좌표계에 근거하여 직선과 원의 방정식이 메뉴를 통하여 얻어질 수 있다. 스크린 상에 작도된 대수적 함수의 그래프는 기하학적으로 구성되어 졌기 때문에 평행이동, 대칭이동, 회전이동 되거나 확대되어 질 수 있다. 그리고 계산기 기능, 측정 기능, 그래프 메뉴의 기능, 작도메뉴의 자취 기능을 사용하여 임의의 대수적 표현을 그래프로 표현할 수 있다.

2) 추상적인 수학 내용의 시각화

GSP 프로그램은 동적인 성질을 가진 평면기하를 정적인 상태의 인쇄매체 또는 칠판을 사용하여 지도할 때 보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다. 그리고 Animation과 Drag를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰이 가능하다. 또한 Animation으로 만들어지는 Trace(흔적 남기기)는 도형의 자취를 생생하게 보여준다.

3) 수학내용과 학습 방법의 변화

GSP 프로그램을 이용한 작도는 정확한 결과를 제시하고 즉각적인 반성적 사고과정을 거칠 수 있다. 그리고 다양한 탐구 도구를 제공하고, 학습에 필요한 시간을 단축시킨다. 또한 개념 사이의 상호관계나 연결이 더 분명해진다.

4) 학습 욕구 유발

능률적이고 효과적인 학습 환경을 제공함으로써 학생이 직접 조작, 실험하고 탐구할 수 있다. 그리고 교사 중심의 수업에서 학생 중심의 수업이 이루어지고, 연역적인 추론에서 다양한 대상에 대한 탐구활동에서 얻는 귀납적인 추론 방법을 사용하게 된다.

5) 탐구력과 창의력 증진

수학의 아름다움을 느낄 수 있다.

라. GSP의 활용

기하학적 자료 처리를 요구하는 몇 가지 응용분야들로는 자동차, 선반, 항공기 등의 설계에 요구되는 Surface 모델링, 원격수술에 필요한 제어, 제조업에서 사용되는 miling 또는 cutting machine의 제어, 로봇의 path 계산과 동작 제어, 광고, TV, 게임, 영화 산업에서 쓰이는 이미지의 제작 등에서 많이 사용될 수 있다.

일상의 경험에서 컴퓨터 애니메이션과 기타 기술 공학적 환경과 집중적인 상효작용이 주어지는 학생들에게 시각화와 공간 추론이 촉진된다.

컴퓨터의 여러 기능 중에서 시각화 기능은 추상적인 수학적 내용을 시각화하여 지도 할 수 있을 뿐만 아니라, 학생들도 컴퓨터의 기능을 직접 통제하면서 직접적인 경험을 할 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있다. 개념 형성이나 대수적인 형식적 추론, 증명의 전 단계에서 컴퓨터를 이용한 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등과 같은 직관적인 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시켜 줄 수 있다.단순한 계산이나 절차 위주의 교육에서 논리적인 사고력을 증진시켜 줄 수 있는 교육으로 한 단계 발전할 수 있게 해 준다. 하지만 탐구형 소프트웨어를 활용한 학습활동을 흥미 위주의 동기 유발에만 초점을 맞추면 안 되고, 의미 있는 학습 동기를 제공할 수 있는 도구로 사용되어야 할 것이다.

2. 영재의 정의와 특성

가. 영재의 정의

1) 우리나라 영재 교육 진흥법에 따른 정의

우리나라 영재 교육 진흥법(2000) 제2조 제1항에 의하면 “영재”라 함은 「재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자」라고 정의하고, 제5조에 의하면 「고등학교 과정 이하의 각 급 학교에 취학한 자 중에서 일반 지능, 특수 학문 적성, 창의적 사고 능력, 예술적 재능, 신체적 재능, 기타 특별한 재능에서 뛰어나거나 잠재력이 우수한 사람 중 영재판별 기준에 의거 판별된 사람」을 영재 교육 대상자로 보고 있다. 이는 미국 문부성의 정의에 근간을 둔 것이다.

2) 미국 문부성의 정의

영재의 정의는 시대별, 연구자에 따라 조금씩 다르다. 맨 처음에 영재를 규정한 학자에 따르면 IQ만으로 영재를 정의하였고, 그 후에는 IQ 뿐만 아니라 학업 성취도에서 우수한 학생들을 영재로 정의를 내렸다. 그러나 이러한 통계적인 자료에 의한 정의가 비판을 받게 되자 1978년 미국 문부성에서는 영재성에 정의적 요소를 포함하여 다음과 같이 정의를 내렸다. “영재란 뛰어난 능력을

갖고 있어서 훌륭한 성취를 보일 가능성이 있다고 판별된 아동으로서 그 자신과 사회에 기여하기 위하여 정규 교육과정이 제공하는 것 이상의 변별적인 특별 교육 프로그램이나 도움을 필요로 하는 아동"으로 정의하고 있다. 그리고 표준화된 지능 검사로 측정하여 IQ 130이상인 학생, 특수한 학문 분야에서 표준화된 학업 성취도 검사로 측정하여 상위 5%이상인 학생, 창의성 검사도구나 행동 특성 검사지 및 교사의 관찰 기록에서 뛰어난 능력을 보이는 학생, 설득력이나 통찰력이나 지도력이 뛰어난 학생, 조각, 체육, 체조, 무용, 미술, 사진, 노래 등에서 뛰어난 능력을 가진 학생, 신체를 민첩하고 정확하게 움직이는 능력을 가진 학생처럼 위의 한 분야 또는 여러 분야에서 이미 성취를 나타내거나 성취할 잠재 능력이 있는 아동으로 전체 학생의 3 ~ 5%이내인 학생을 영재로 규정하고 있다.

3) Renzulli의 세 고리 모형(김시웅, 2004)

현재 우리나라에서 영재의 정의로 가장 널리 받아들여지는 것이 바로 렌쥴리의 세 고리 모형이다. 렌쥴리가 말하는 영재 행동이란 평균 이상의 일반 혹은 특수 능력, 높은 과제 집착력(동기), 높은 창의성과 같은 세 가지 기본적인 인간 특성의 상호작용으로 나타난다고 하였으며, 이 3가지 특성 모두에서 85% 이상이거나 어느 한 특성이 98% 이상인 학생을 영재로 규정하고 있다.

나. 영재의 특성

이 주제와 관련된 선행 연구(남승인, 1998)에 의하면, Renzulli(1976), Heid(1983), House(1987), Helson과 Crutchfield 등의 연구를 중심으로 종합하였다.

1) 일반적인 행동 특성

영재 아이들의 일반적인 행동 특성을 보면, 또래에 비해 수준 높은 어휘를 구사하며, 언어 표현이 유창하고 정교하고, 장시간동안 한 가지 일에 몰두하는 집중력, 이해력과 기억력이 우수하다. 그리고 인과관계에 대한 통찰력이 뛰어나며, 왜?, 어떻게?, 등의 질문을 많이 하며, 현상의 기저에 깔려있는 원리를 빨리

파악하고, 이를 타당·용이하게 일반화한다. 그리고 관찰력이 뛰어나며 같은 것을 보거나 듣더라도 남보다 많은 것을 알아내고, 독서량이 많으며 성인 수준의 책을 읽는다. 특히 전기류, 사전류, 지도 등을 좋아한다. 그리고 다양한 분야에 대해 관심을 갖지만 한 분야에 대해서 특히 관심을 보이면 다른 분야에는 무관심하며, 매사에 호기심이 많고, 감정이 충동적이며 예민하지만 일상적인 일에는 싫증을 낸다.

2) 정의적 특성

영재 아이들의 정의적 특성을 살펴보면, 자율적으로 의사를 결정하고 자율적으로 행동을 수행하며 자기 주도적이고, 주어진 문제를 해결을 하려는 집착력이 대단히 높다. 그리고 학문적 자아 개념이 높고, 자아 효능감을 갖고 있고, 강직하고 도덕성과 윤리적 행동이 발달해 있다. 또한 자신에 대해서 긍정적인 가치관을 갖고 있으며, 책임감이 강하고 정서적으로 안정되어 있다. 그리고 성취동기가 강하며, 지도성이 높다.

3) 학습 행동 특성

영재 아이들의 학습 행동 특성을 살펴보면, 지적활동을 즐거워하고, 의사를 효과적으로 전달하는 능력이 있다. 그리고 원인과 결과의 관계에 대한 통찰력이 있으며, 정보를 찾고 다양한 정보를 이용하는 능력이 있다. 또한 기초를 이루는 원리를 찾고 일반화할 수 있는 능력이 우수하다.

4) 창의적 활동 특성

영재 아이들의 창의적 활동 특성을 보면, 사고의 유창성, 융통성, 독창성이 있고, 때때로 충동적이며 감정적으로 예민하다. 그리고 틀에 박힌 일상적인 일에 대해 싫증을 내며, 추측하고 가설을 설정하는 능력이 뛰어난다. 또한 여러 가능성과 결과를 예측하는 능력이 있고, 어떤 사건의 근원과 그들 사이의 관계를 파악하려는 경향이 있다.

5) 수학 영재의 특성

이 논문에서 가장 중점적으로 다루고자 하는 수학 영재의 특성을 살펴보면, 학습한 내용을 새로운 상황에 적용시킬 수 있으며, 일반적 수준의 문제 해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화하고, 문제 해결 과정에서 중간 단계를 생략하는 경향이 있으며 예상치 못한 방식으로 문제를 해결하는 경향이 있다. 그리고 문제 해결을 위한 도구로써 구체적인 자료의 활용에 의존하기보다 추상적으로 다루려는 경향과 그러한 능력을 가지고 있으며, 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며 이에 대해 성공적이고 그것을 설명하려 한다. 또한 수학적인 추론 과정을 단축할 수 있고 또한 사고의 과정을 뒤바꿀 수도 있고, 자신이 흥미를 갖는 한 문제에 대해 장시간 집중할 수 있으며, 문제 해결 방법이 만족스럽지 않을 경우 그 대안을 빨리 찾는다. 그리고 일찍 양에 대한 호기심을 가지며, 수학 퍼즐과 수학적 게임에 도전 의욕이 강하고 실제로 즐겨한다.

위의 항목들 모두가 수학 영재들에게서 나타나는 특징이 아닌, 몇 가지의 특성들이 수학 영재들에게서 보인다. 과거에는 영재의 특징을 들 때 지능과 능력적인 면에서만 강조를 하였다면, 현재는 그 아동이 가지고 있는 태도나 성향 등과 같은 정의적 능력의 특성까지 강조하고 있다.

3. 평균의 정의

가. 평균의 의미(최지영, 2006)

평균의 정의와 관련된 선행 연구(최지영, 2006)에 의하면, 초등학교 교육과정에서는 평균에 대한 정확한 의미나 정의에 대한 언급 없이 산술평균을 평균 그 자체로 말을 한다. 이는 아동들로 하여금 오개념을 심어줄 수 있고, 초등학교 이후 학습에도 나쁜 영향을 미칠 수 있다. 그래서 다음에 제시하는 평균의 의미는 오개념과 오류를 줄이기 위해서 제시하고자 한다.

평균이란 어떤 집합의 구성원 값들 사이의 중간 값을 나타내는 양을 말한다. 이를 다른 단어로 평균치 또는 대표치(average, mean)라고 한다.

위에서 말하고 있는 평균 즉 대표치는 계산하는 방법에 따라서 계산적 대표치(calculated mean)와 위치적 대표치(mean of position)로 나뉜다. 여기에서 계

산적 대표치로는 변수전체를 사용하여 산출해 내는 대표치이다. 따라서 이 대표치는 변수 전체의 함수이므로 어느 하나의 변수의 변화에 의해서도 영향을 받는다. 이 계산적 대표치로서는 산술평균(arithmetic mean), 기하평균(geometric mean), 조화평균(harmonic mean), 평방평균(quadratic mean, root mean square) 등이 있다. 여기에서 위치적 대표치로는 중위수(median), 사분위수(quartile), 최빈치(mode) 등이 있다.

나. 산술평균

1) 산술평균의 의미

산술 평균은 모든 자료의 값을 더해서 자료의 수로 나눈 값을 말한다.

X(산술평균) = $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ (숫자가 n 개 일 때)

산술 평균에는 단순 산술 평균과 가중 산술 평균이 있다.

단순 산술 평균은 모든 자료의 합을 그 개수로 나누어 구하는 것이다.

가중 산술 평균은 자료에 따라서 차이가 있으며 필요에 따라 각 자료에 일정한 가중 값을 곱하여 구하는 것이다.

2) 산술평균의 특징(최지영, 2006)

최지영(2006)은 산술평균의 특징과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 각 측정치에서 산술평균을 뺀 편차의 합은 0이다.

나) 비정상적으로 크거나 작은 값(이상치)의 영향을 많이 받는다.

다) 단순평균은 추상적인 대표치이고 반드시 절대적인 뜻을 가진 대표치는 아니다.

라) 측정치와 임의의 상수와의 편차의 제곱의 합이 최소가 되는 것은 산술평균이다.

마) 가평균을 x_0라 하고 각 편차를 $d_i = x_i - x_o$라 하면, 평균은 다음과 같이 계산한다.

$$\bar{x} = x_o + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

3) 산술평균의 성질(최성규, 2004)

최성규(2004)는 산술평균의 성질과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 산술평균에 대한 편차의 합은 0이다.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x) = 0$$

나) 이상적(극단적인 값)에 영향을 많이 받는다.

다) 산술평균은 추상적인 대푯값이고 반드시 절대적인 뜻을 가진 대푯값은 아니다.

라) 편차의 제곱의 합을 최소로 하는 것은 산술평균이다.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \text{(여기서 a는 임의의 상수)}$$

마) 가평균을 A라 하고 x_i의 각 편차를 $d_i = x_i - A$, $u_i = \frac{d_i}{c}$라 하면

$x = A + (\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i f_i}{N}) \times c$이 된다.

다. 기하평균

1) 기하평균의 의미

기하 평균은 기하학에서 많이 사용되는 평균이란 의미에서 붙여진 이름이다. 기하 평균은 등비수열의 형태와 같이 공비에 해당되는 비율로 시간 경과에 따라 비율의 대표치를 말한다. 그리고 기하 평균은 곱하기에 대한 평균을 말한다. x, y에 대한 곱하기에 대한 평균을 말하며,

r(기하평균) = $\sqrt{xy}$

기하 평균이라는 용어는 고대 그리스에서부터 사용되기 시작하였다. 대부분의 경우 기하 평균은 제곱근을 구하므로 무리수가 되는데, 고대 그리스에서는 무리수를 수로 인정하지 않았기 때문에, 이와 같이 구한 평균은 기하적인 의미만을 갖는다고 하여 기하평균이라는 이름을 붙였다. 기하 평균은 인구변동률, 물가상승률, 은행복리, 이자 계산 등과 같이 변화하는 비율을 나타낼 때 주로 사용된다.

2) 기하평균의 특징(최지영, 2006)

최지영(2006)은 기하평균의 특징과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 추상적인 대푯값이다.

나) 변량 중 극단적인 값의 영향을 받으나, 산술평균보다 덜하다.

다) 시계열(time series) 자료의 변동율의 대푯값으로서 적당한 성질을 갖는다.

기하평균은 인구증가율이나 물가변동률과 같은 상승률, 증가율, 변동이율 등을 계산할 때 주로 사용되는데, 산술평균으로는 이처럼 시간에 따라 변하는 자료에 대한 평균을 구할 수 없다. 그러나 기하평균으로는 가능함을 알 수 있다.

3) 기하평균의 성질(최성규, 2004)

최성규(2004)는 기하평균의 성질과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 변량 중 극단적인 값의 영향을 받으나 산술평균보다는 덜하다.

나) 시계열(time series)자료 변동률의 대푯값으로서 적당한 성질을 갖는다.

라. 조화평균

1) 조화평균의 의미

조화 평균은 각 자료의 역수를 산술평균하여 이를 다시 역수로 표시하는 값을 말한다. 시간적으로 계속하여 변하는 변량, 속력 등에 사용되는 대표치로 역수를 갖는 변량 외에는 거의 사용하지 않는다.

$$H(\text{조화평균}) = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

2) 조화평균의 특징(최지영, 2006)

최지영(2006)은 조화평균의 특징과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 추상적인 대표치이다.

나) 변량 중의 극단적인 영향을 받으나 산술평균보다는 덜하다.

다) 역수를 갖는 변량의 평균 이외는 거의 사용하지 않는다.

라) 시간적으로 계속하여 변하는 변량의 평균 계산시 사용한다.

3) 조화평균의 성질(최성규, 2004)

최성규(2004)는 조화평균의 성질과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가) 변량 중의 극단적인 값의 영향을 받으나 산술평균보다는 덜하다.

나) 역수를 갖는 변량의 평균 외에는 거의 사용하지 않는다.

다) 시간적으로 계속하여 변하는 변량의 평균 계산시 사용한다.

라) 상품시세, 평균 속도 계산 등에 사용한다.

4. 산술 · 기하 · 조화평균의 역사적 발생과정(강형종, 2000)

강형종(2000)은 산술·기하·조화평균의 역사적 발생과정과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

가. 피타고라스

수학자 피타고라스는 다음과 같은 평균에 관한 생각을 한 것으로 알려져 있다. (단, $0<a<b<c$)

1) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{a}$

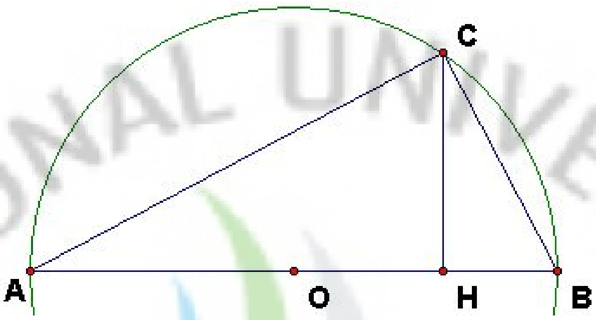
2) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{b}$

3) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{c}$

위 식에서 두 양수 a와 c에 대하여 정리하면 b는 어떤 의미에서 평균이라 할 수 있다. 1) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{a}$, 2) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{b}$, 3) $\dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{c}$ 을 b에 대하여 풀면 $b=\dfrac{a+c}{2}, b=\sqrt{ac}, b=\dfrac{2ac}{a+c}$이 되어 각각 산술, 기하, 조화평균이 된다. 일설에 의하면 위 세 가지 관계는 알큐다스(Archytas, 피타고라스학파의 한사람)에 의하여 발견되었다고 한다.

나. 유클리드

그리스 시대의 수학자로 기하학의 창시자로 불리는 유클리드는 반원을 이용하여 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 대한 증명을 완성시켰다.



[그림Ⅱ-1] 유클리드의 반원(강형종, 2000)

[정리] [그림Ⅱ-1]과 같이 중심 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양끝으로 하는 반원을 그리고 반원 위의 한 점 C를 잡자. 지름 AB의 길이를 2L, AH=x, HB=y, CH=z, AB⊥CH이라 할 때, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$가 성립한다.

[증명] △ACH에서 $(AC)^2 = x^2 + z^2$

△BCH에서 $(BC)^2 = y^2 + z^2$

또, $\angle C = 90°$ (지름에 대한 원주각)에서 $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$이 된다.

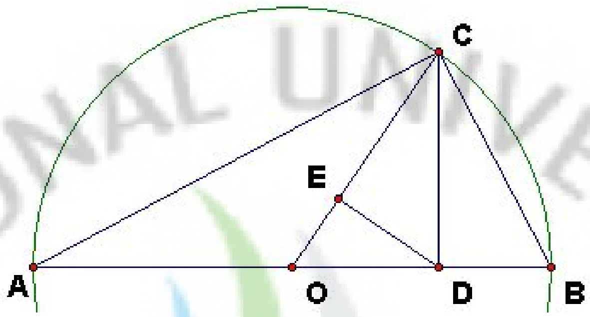
그러므로 $(x+y)^2 = x^2 + z^2 + y^2 + z^2$, 정리하면 $2xy = 2z^2$이 된다.

따라서 $z = \sqrt{xy}$ 성립한다. z가 반지름 L과 같을 때 최대가 되므로

$\frac{x+y}{2} = L \geq z = \sqrt{xy}$ 이 성립한다.

다. 파푸스

알큐다스(피타고라스학파의 한 사람)가 발견한 산술 · 기하 평균의 작도법을 더욱 발전시켜 산술 · 기하 · 조화평균 작도법을 발견해 냈다.



[그림Ⅱ-2] 파푸스의 반원(강형종, 2000)

[정리] [그림Ⅱ-2]와 같이 점 O를 중심, 두 점 A, B를 지름의 양끝으로 하는 반원에서 AB⊥CD, OC⊥DE, AD=a, DB=b라 하면,

$OC=\dfrac{a+b}{2}$, $CD=\sqrt{ab}$, $CE=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

[증명] $AB=a+b$(지름), $OC=\dfrac{a+b}{2}$(반지름) $\cdots$ ①

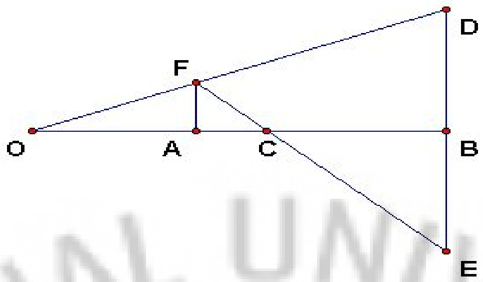
$OD=AD-AO=a-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}\cdots$ ②

△OCD는 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의하여

$CD=\sqrt{(OC)^2-(OD)^2}=\sqrt{ab}$ 이 성립한다.

또 $\triangle OCD \propto \triangle CDE$ 이므로 $OC : CD = CD : CE$ 이다.

따라서 $CE=\dfrac{(CD)^2}{OC}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.



[그림Ⅱ-3] 파푸스의 삼각형(강형종, 2000)

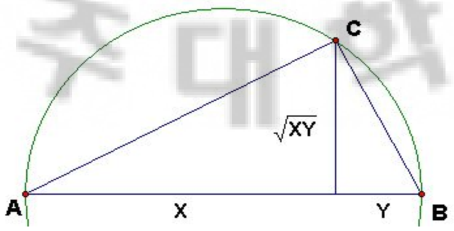
[정리] [그림Ⅱ-3]은 선분 OB의 수직선상에 BD=BE가 되게 긋고 A에서 OB의 수직선을 세워 OD와 교점을 F라하고, 선분 OB와 선분 FE와의 교점을 C라고 하면 선분 OA와 선분 OB의 조화 평균은 OC가 된다.

[증명] $OA=a$, $OB=b$라 하면 $\triangle OAF \propto \triangle OBD$이고 $\triangle AFC \propto \triangle BEC$ 이므로 $a:b=AF:BE=AC:CB$ 이다. $CB=b-OC$, $AC=OC-a$ 이므로 $a:b=(OC-a):(b-OC)$이다.

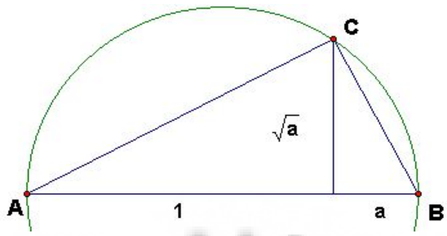
따라서 $OC=\dfrac{2ab}{a+b}$이다.

라. 데카르트

데카르트는 알큐다스의 반원을 이용한 산술 · 기하 평균의 관계를 응용하여 다음과 같이 $\sqrt{a}$를 작도하였다.



[그림Ⅱ-4] 알큐다스의 반원(강형종, 2000)



[그림Ⅱ-5] 데카르트의 $\sqrt{a}$ 작도법(강형종, 2000)

마. 음악에서 발견되는 산술평균과 조화평균

최지영(2006)은 음악에서 발견되는 산술평균과 조화평균과 관련하여 다음과 같이 밝히고 있다:

피타고라스는 음악의 음계와 숫자의 비율 사이의 밀접한 관계를 발견하였다. 그는 현악기의 현의 길이를 $\frac{3}{4}$으로 줄이면 4도 높은 음을 나타내고, $\frac{2}{3}$으로 줄이면 5도 높은 음을 나타내며, 그 길이를 절반으로 줄이면 한 옥타브 높은 음을 나타낸다고 하였습니다. 그러므로 만일 현의 길이가 12였으면 4도, 5도, 한 옥타브 높은 음을 나타내는 길이는 각각 9, 8, 6이 됩니다. 이 수들에서는 산술평균과 조화평균의 관계가 발견됩니다. 9는 6과 12의 산술평균이고, 8은 6과 12의 조화평균이 됩니다. 또 어떤 음과 5도 높은 음은 화음을 구성하므로 조화평균을 영어로 Harmonic Mean이라고 합니다. 피타고라스는 육면체의 면의 수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수가 각각 6, 8, 12임을 발견하였습니다. 이때, 8은 6과 12의 조화평균입니다. 그래서 육면체를 조화체라고 부르기도 합니다.

5. 평균을 보는 관점

가. 산술·기하평균의 대수학적 증명

a, b > 0 일 때 $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

[증명] $0 \le (a-b)^2 \to 2ab \le a^2 + b^2$

$$\to 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\to \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

여기에서 두 수의 기하평균은 $\sqrt{ab}$이 되고, 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이 되는 것이다. 즉, 기하평균은 산술평균을 초과하지 않는다는 것이다. 또한 위 부등식은 a = b일 때 등식이 성립하게 된다.

나. 산술·기하 평균의 차를 이용한 대수학적 증명

교과서에 설명된 대수적 방법으로 산술평균과 기하평균의 차를 이용하는 것이다.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$

따라서, $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

다. 산술•기하 평균의 기하학적 증명

원과 삼각형을 그리게 하여 닮음을 통해 산술 기하 평균의 관계를 이끌어 내도록 유도한다.

[증명] 길이가 $a+b(|AD|=a, |DC|=b)$인 선분을 택하자. 그리고 반지름인 AC인 반원을 그려보자.

점 D에서 AC에 곧바른 수직이 되게 하고 반원과의 교점을 B라 하자.

$\triangle ABD$와 $\triangle BCD$의 닮은 점에 비추어 보면

$$\left|\frac{AD}{BD}\right| = \left|\frac{BD}{DC}\right| \to |BD| = \sqrt{ab} \text{ 이다.}$$

선분 AC를 고정시켜 놓고 (즉, $a+b$의 합이 주어지면), 점 D를 변하게

하면 선분 BD는 D가 반원의 중심과 일치할 때, 최대길이($=\frac{a+b}{2}$)가 될 것이다.

라. 산술•기하평균의 사각형의 넓이를 이용한 증명

이 방법은 사각형의 넓이를 이용하여 시각적으로 증명한 것이다.

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0$$
$$(a+b)^2\geq 4ab$$
$$\therefore \frac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

마. 산술•기하 평균의 직각 이등변 삼각형 넓이를 이용한 증명

이미 알려진 방법들 이외에 다른 시각적 증명방법을 보면서 보다 풍부하고 다양한 관점에서 바라보는 안목을 길러주기 위해서 다양한 관점에서 증명방법을 보아야 한다.

$\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ 이고, $\frac{a}{2}=\frac{(\sqrt{a})^2}{2}$, $\frac{b}{2}=\frac{(\sqrt{b})^2}{2}$ 임에 착안하여 그림과 같이 두 변의 길이를 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 로 하는 두 개의 직각 이등변 사각형을 붙인다. 이 때, 가로의 길이가 $\sqrt{a}$, 세로의 길이가 $\sqrt{b}$ 인 직사각형을 만들어 낼 수 있고 이 때 직사각형의 넓이는 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ 이다.

이제 두 개의 직각 이등변 삼각형과의 넓이를 비교한다.

따라서, $\frac{(\sqrt{a})^2}{2}+\frac{(\sqrt{b})^2}{2}\geq \sqrt{a}\sqrt{b}$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geq \sqrt{a}\sqrt{b}$$

바. James Olsen & Dan Gustafson(2008) 논문에 제시된 기하 평균 증명 방법

James Olsen & Dan Gustafson(2008)은 기하 평균 증명 방법을 다음과 같이 밝히고 있다:

1) 곱셈의 제곱근

주어진 두 개의 숫자에서, 기하평균은 두 숫자를 곱한 값의 제곱근이다. 이것만을 보았을 때는 그리 중요해 보이지 않지만, 이 단순한 계산은 굉장히 중요하다. 즉, 기하평균은 기하학이므로 기하내의 평균을 나타내는 것이다.

2) 직사각형을 제곱하기

주어진 직사각형과 그 변 a와 b가 있을 때, a와 b의 기하평균은 같은 넓이를 갖고 있는 정사각형의 변 길이이다. 간단하게 얘기하면 중학생 수준의 문제인 직사각형의 공간에서 정사각형의 타일이 채워져 있을 때, 이 타일들을 다시 정사각형의 형태로 재배열하는 법으로 생각해 볼 수 있다.

3) 비례 중항

비례에서는 a와 b를 외항으로 놨을 때, ($\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$) a와 b의 기하평균은 비례식을 푸는 x값이다. 기하 평균이 비례식에서는 사실상 두 번 사용되는 숫자인 셈이다.

4) 직사각형에서의 제곱

만약 정사각형들이 직사각형의 연속되는 두 변에 위치하고 있다면, 이때의 직사각형의 넓이는 정사각형들의 넓이의 기하평균이 된다. 피타고라스의 원리와 비슷한 감이 없지 않지만, 정삼각형의 양쪽 다리 부분에 정사각형이 있는 대신에, 여기서는 직사각형의 연속되는 변에 정사각형이 위치하고 있는 것이다. 그러므로 정사각형들 넓이들의 기하평균은 직사각형의 넓이라고 할 수 있다.

5) 기하 평균에서의 중간수

만약 a와 b가 등비수열(기하수열)의 각각 첫째와 셋째 숫자라고 한다면, a와 b의 기하평균은 수열의 두 번째 순서가 된다.

6) 지수 함수의 값

주어진 지수함수에서의 기하평균은 m과 n의 합을 1/2로 나눈 값을 넣었을

때 나오는 함수 값이다. 이것이 지수 함수의 기하평균이다.

7) 빗변으로 그어진 높이

주어진 직각 삼각형에서, 빗변을 향해 삼각형의 높이를 이루는 선이 그어졌다면, 그 빗변에서 생기는 두 선분의 길이의 기하평균은 높이의 길이와 같다.

8) 직각삼각형의 양쪽 다리

주어진 직각삼각형에서, 삼각형의 각 다리는 각각 빗변의 기하평균이며, 해당하는 선분(다리가 빗변으로 뻗는 부분)의 기하평균이기도 하다. 이 특징의 증명은 닮은꼴 삼각형으로 할 수 있다.

9) 원의 중심, 외부의 한 점과 접선의 접점에 의해 만들어진 직각삼각형과 그 대응하는 접선

원의 외부에 한 점과, 한 접선, 한 접점 그리고 원의 중점을 향해 그어진 하나의 선분이 주어졌을 때, 접선의 길이는 원외부의 점에서 원의 중점을 이은 선분의 길이, 그리고 접점에서 원의 중점으로 그어지는 선분의 길이의 기하평균이다.

10) 동일한 외부의 점에서 나오는 할선에 대응하는 접선

원 외부에 한 점이 주어졌을 때 접선은 할선 전체와 원 밖의 할선 부분의 기하평균이다. 이러한 특징에 대한 증명은 역시 닮은꼴 삼각형을 기초로 하고 있다.

11) 두 개의 접하는 원과 그 접선의 길이

그 지름이 각각 a와 b인 두 개의 원이 주어졌을 때, 이 원들은 외부에서 서로 접하며, 두 원 모두 접순과 접하고 있다. 이때 접선 위에 있는 두 접점간의 거리는 원지름들의 기하평균이다. 한 가지 그림으로 다 나타내면, 여기서 원의 중점들 사이의 거리가 산술평균이 되며, 접점 사이의 거리는 기하평균이 되고 보다시피 기하평균은 산술평균보다 작을 수밖에 없을 것이다.

Ⅲ. 자료개발의 방향

1. 초등학교 수학과 교육과정의 확률과 통계 영역 내용 분석

<표 Ⅲ-1> 우리나라 초등학교 수학과 확률과 통계 영역 내용(교육부, 2007)

단계	내 용	단 원
1-1	· 한 가지 기준으로 사물을 분류하기	6. 50까지의 수
2-2	· 표와 그래프 만들기	6. 표와 그래프
3-나	· 자료의 정리, 자료의 특성 (막대그래프, 간단한 그림그래프)	7. 자료 정리하기
4-나	· 꺾은선그래프 · 자료를 목적에 맞는 그래프로 나타내기	7. 꺾은선그래프
5-가	· 줄기와 잎 그림, 그림그래프 · 평균	7. 자료의 표현
6-나	· 비율그래프(띠그래프, 원그래프) · 경우의 수와 확률	6. 경우의 수

2. 중학교·고등학교 수학과 교육과정의 관련 영역 내용 분석

<표 Ⅲ-2> 우리나라 중·고등학교 수학과 관련 영역 내용(교육부, 2007)

학년	내 용	단 원
중학교 1학년	· 도수분포표, 히스토그램, 도수분포 다각형 · 도수분포표에서의 평균 · 상대도수의 분포와 누적도수의 분포	Ⅴ. 통계
2학년	· 경우의 수 · 확률의 뜻과 기본 성질 · 간단한 확률의 계산	Ⅵ. 확률
3학년 (9-나)	· 중앙값, 최빈값, 평균 · 분산, 표준편차	Ⅰ. 통계
고등학교 1학년	· 합의 법칙, 곱의 법칙 · 순열 · 조합 · 확률분포 · 확률변수와 확률분포 · 이산 확률변수의 평균과 표준편차 · 이항분포	Ⅵ. 확률 Ⅶ. 통계

Ⅳ. 자료 개발의 실제

1. 개발된 프로그램 목록

<표 Ⅳ-1> GSP를 이용한 영재 프로그램 목록

영역	자료 번호	탐구 주제	활동 내용	시간
확률과 통계	1	기하평균의 의미 1	· 타일 모양의 종이를 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	2	기하평균의 의미 2	· 사각형 넓이를 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	3	기하평균의 의미 3	· 두 그래프의 교점을 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	4	기하평균의 의미 4	· 직사각형을 정사각형으로 만드는 방법을 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	5	기하평균의 의미 5	· 원을 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	6	기하평균의 의미 6	· 지수 함수를 이용한 발견 · 기하평균의 원리 발견	2
	7	평균의 정의 및 기하평균의 의미 7	· 산술, 기하, 조화평균의 정의 · 평균의 역사 이해 · 기하평균의 수식을 이용한 발견 방법	2

2. 프로그램의 실제

가. 기하평균의 의미 1 (자료 번호 1)

교사용 학습 프로그램

자료번호	1	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 1		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	타일 모양의 종이		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

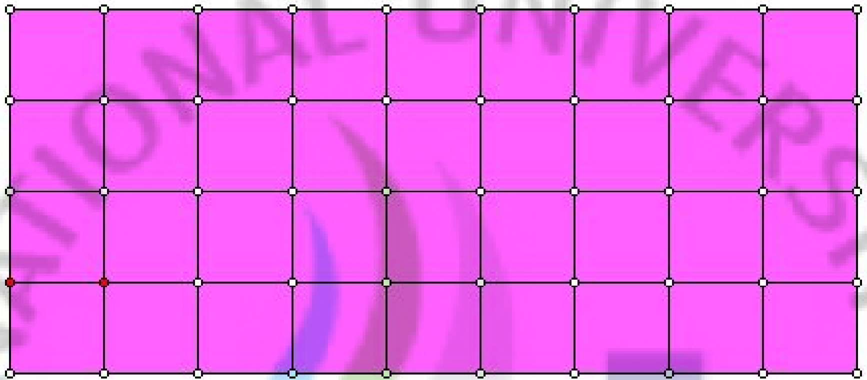
탐구문제1 타일 모양의 종이를 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<직사각형을 정사각형으로 만드는 발견 방법>>

타일 모양의 종이를 이용하여 만든 직사각형을 정사각형으로 만들어 가면서 기하평균의 의미를 찾아본다.

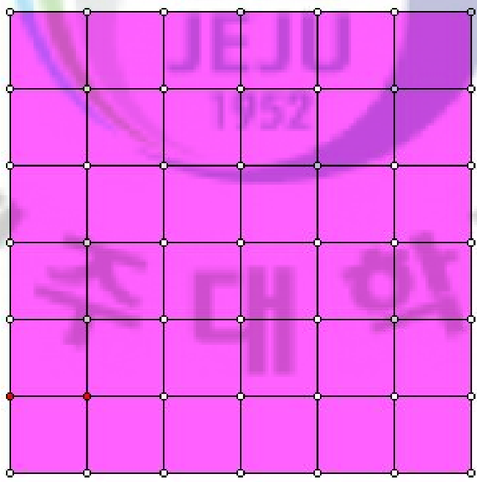
1단계) 일정한 규격의 타일 모양 종이로 직사각형 모양을 만든다.

<만드는 방법> 자신이 원하는 형태대로 타일 모양 종이를 이용해서 직사각형 모양을 만들면 된다.



2단계) 이 타일 모양의 종이를 이용해서 정사각형 모양을 만든다.

<만드는 방법> 9 × 4 형태의 직사각형을 6 × 6의 정사각형의 형태로 변형하여 정사각형 모양을 만든다.



3단계) 이 과정을 통해서 발견할 수 있는 자신만의 원리를 만드시오.

<원리 및 공식> 9 × 4 형태의 직사각형의 모양을 6 × 6의 정사각형의 형태로 바꿈으로서 알 수 있는 것은 9와 4의 기하평균이 6이라는 점이다. 그를 원리와 공식으로 적용을 해 보면,

9와 4의 기하평균 :

$9\times 4=\chi^2$, $\chi=\sqrt{(9\times 4)}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

따라서,

a 와 b의 기하평균을 나타내보면,

$ab=\chi^2$, $\sqrt{ab}=\chi$

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

타일 모양의 종이를 사용해 단계별로 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써 보시오.

(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

위의 과정을 통해서 아동들은 기하평균의 진정한 의미를 이해했을 것이다. 기하평균의 본래 의미인 기하학에서 많이 사용되는 평균이라는 본연의 의미를 이해하고, 초등학교 수준에서 하기 힘들었던 무리수에 대한 개념을 이해할 수 있었을 것이다. 그리고 기하평균을 구하는 원리 및 공식 또한 자기 스스로 이해하고, 만들어 나갔을 것이다.

즉, $9\times 4=\chi^2$, $\chi=\sqrt{(9\times 4)}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$ 과정을 통해서 기하평균을 구하는 공식인 $ab=\chi^2$, $\sqrt{ab}=\chi$를 유도해 낼 수 있었을 것이다.

학생용 학습 프로그램

자료번호	2	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 2		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	타일 모양의 종이		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

탐구문제1 타일 모양의 종이를 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<직사각형을 정사각형으로 만드는 발견 방법>>

타일 모양의 종이를 이용하여 만든 직사각형을 정사각형으로 만들어 가면서 기하평균의 의미를 찾아본다.

1단계) 일정한 규격의 타일 모양 종이로 직사각형 모양을 만든다.

2단계) 이 타일 모양의 종이를 이용해서 정사각형 모양을 만든다.

3단계) 이 과정을 통해서 발견할 수 있는 자신만의 원리를 만드시오.

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

타일 모양의 종이를 사용해 단계별로 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써 보시오.
(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

나. 기하평균의 의미 2 (자료 번호 2)

교사용 학습 프로그램

자료번호	2	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 2		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

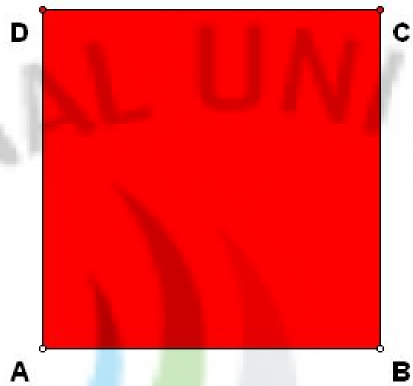
탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<사각형의 넓이를 이용한 발견 방법>>

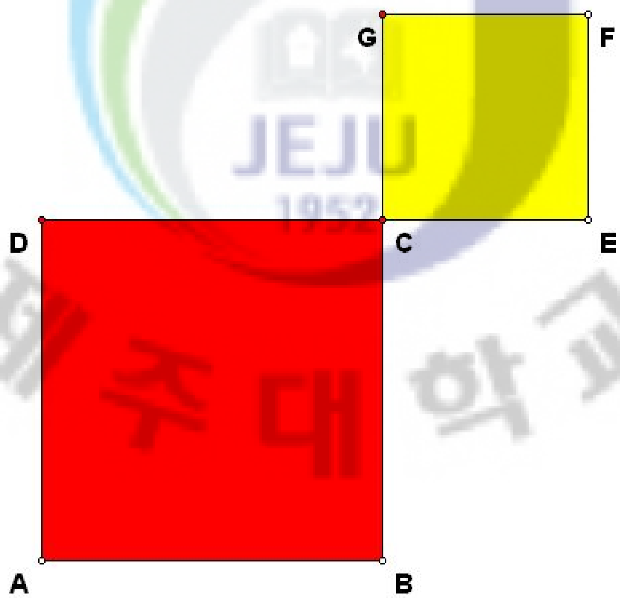
GSP 프로그램을 이용하여 사각형의 넓이를 이용하여 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

1단계) 정사각형 ABCD와 정사각형 CEFG를 만든다.

<만드는 방법> 도구 모음에서 사용자 도구 메뉴를 통해 정사각형 ABCD를 만든다.

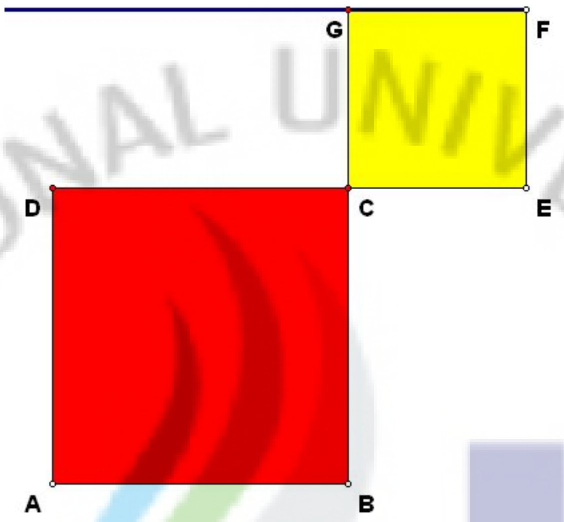


<만드는 방법> 정사각형 ABCD보다는 조금 작게 정사각형 CEFG를 만든다. 단, 점 C는 서로 만나도록 만든다.

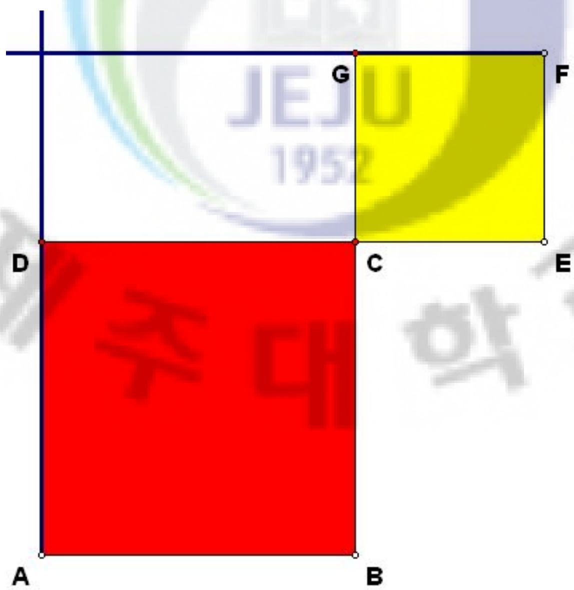


2단계) 두 정사각형 사이에 비어있는 곳에 직사각형 DCGH를 만든다.

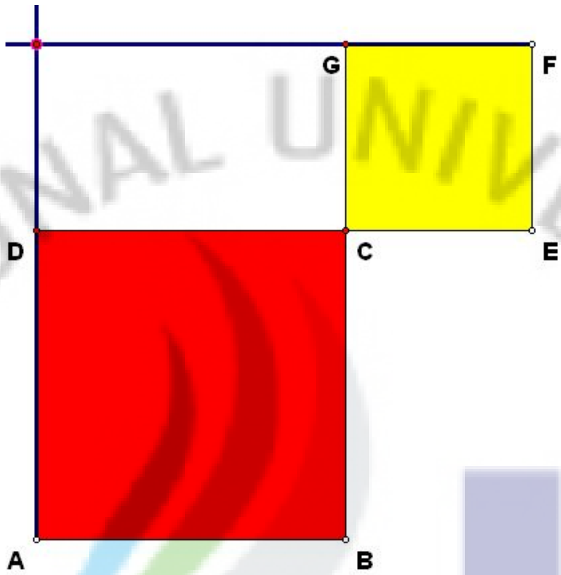
<만드는 방법> 반직선 또는 직선을 이용해 변 FG에서 연장되는 선을 긋는다.



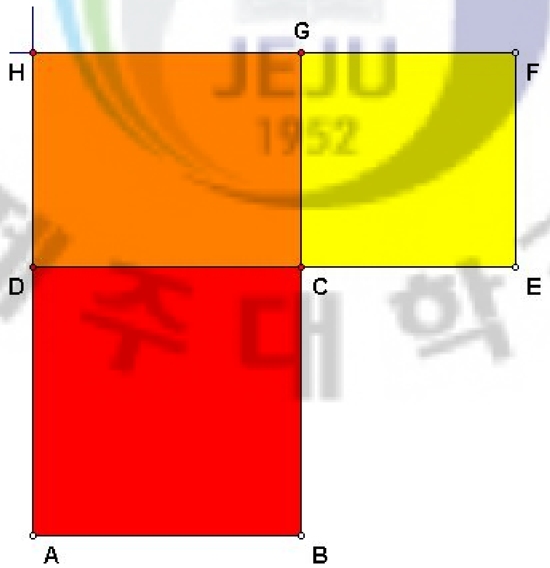
<만드는 방법> 반직선 또는 직선을 이용해 변 AD에서 연장되는 선을 긋는다.



<만드는 방법> 반직선 AD와 반직선 FG가 만나는 점에 교점(작도-교점)을 작도한다.

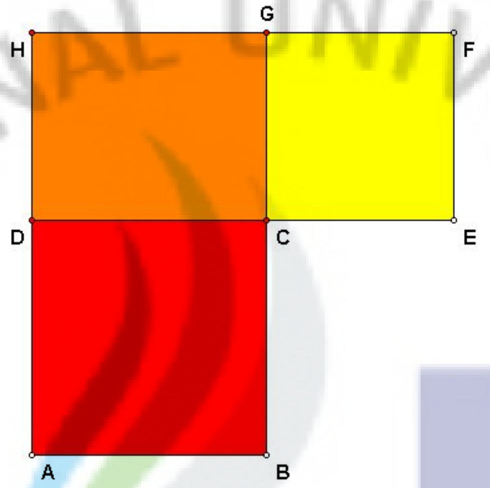


<만드는 방법> 교점에 점 H로 이름표를 지정하고, 점 D, 점 C, 점 G, 점 H를 클릭하고 사각형(작도-사각형 내부)을 작도한다.

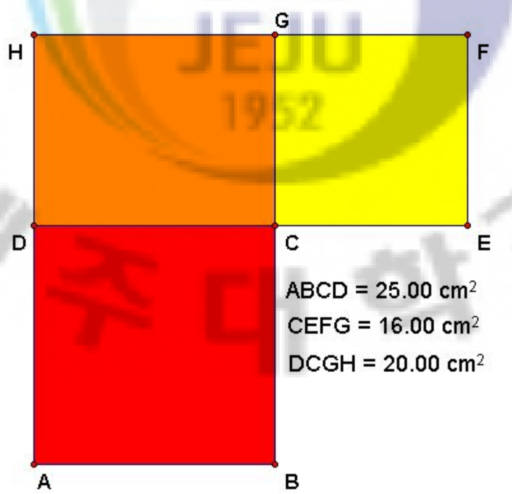


3단계) 필요 없는 반직선들은 모두 숨기고, 각각의 넓이를 표시한다.

<만드는 방법> 필요 없는 반직선들을 모두 숨기기를 통해서 보이지 않게 한다.



<만드는 방법> 각각의 넓이에 대해서 표시(측정-넓이)를 한다.



4단계) 사각형 ABCD, 사각형 CEFG, 사각형 DCGH 사이의 관계를 확인해 보고, 세 사각형의 넓이 사이의 관계를 발견하여 보시오.

<사각형 ABCD, 사각형 CEFG, 사각형 DCGH 사이의 관계>

사각형 사이의 관계를 보면 사각형 ABCD, 사각형 CEFG, 사각형 DCGH 넓이를 확인해 보면, ABCD의 넓이가 25cm^2이고, CEFG의 넓이가 16cm^2이고, DCGH의 넓이가 20cm^2일 때 각 넓이 사이의 관계를 확인할 수 있다.

$$ABCD = 25\,cm^2$$
$$CEFG = 16cm^2$$
$$DCGH = 20cm^2$$

3 사각형 넓이의 관계를 확인할 때, 위에서 GSP 프로그램을 통해서 넓이의 관계를 만들어 가면서 알게 된 점을 이용해야 한다.

$$ABCD = 25cm^2 \;\rightarrow\; \text{한변의길이} = 5cm$$
$$CEFG = 16cm^2 \;\rightarrow\; \text{한변의길이} = 4cm$$

사각형 ABCD와 사각형 CEFG는 모두 정사각형이기 때문에 한 변의 길이가 모두 같다. 하지만 사각형 DCGH는 직사각형의 모양을 하기 때문에 각 변의 길이가 다르다.

$$DCGH = 20cm^2$$
$$\text{한변의길이} = 5cm$$
$$\text{한변의길이} = 4\,cm$$

따라서 사각형 DCGH의 넓이는 사각형 ABCD, 사각형 CEFG의 한 변의 길이들로 구성되어 있다.

$$DCGH\text{의 넓이} \times DCGH\text{의 넓이} = ABCD \times CEFG$$
$$DCGH\text{의 넓이} = \sqrt{(ABCD) \times (CEFG)}$$

따라서 사각형 DCGH의 넓이는 사각형 ABCD와 사각형 CEFG의 넓이의 기하평균이 된다.

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

정사각형 넓이를 이용한 단계별 여러 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써 보시오.

(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

위의 과정을 통해서 아동들은 기하평균에 대한 의미를 사각형의 넓이를 통해서 이해할 수 있다. 두 개의 정사각형의 넓이 사이에 끼인 직사각형의 넓이는 서로 다른 정사각형의 한 변과 다른 정사각형의 한 변의 길이로 직사각형을 이루게 된다. 그 과정에서 중간에 끼인 직사각형의 넓이는 두 정사각형의 넓이의 기하평균을 이루게 된다. 이 과정을 통해서 쉽게 접할 수 있는 사각형의 넓이를 이용해서도 기하평균이라는 수학적인 부분을 증명할 수 있음을 알 수 있다. 이 과정을 수식화하면 다음과 같다.

$$ABCD = 25cm^2$$
$$CEFG = 16cm^2$$
$$DCGH = 20cm^2$$
$$\downarrow$$
$$ABCD = 25cm^2 \rightarrow \text{한 변의 길이} = 5cm$$
$$CEFG = 16cm^2 \rightarrow \text{한 변의 길이} = 4cm$$
$$\downarrow$$
$$DCGH = 20cm^2$$
$$\text{한 변의 길이} = 5cm$$
$$\text{한 변의 길이} = 4cm$$
$$\downarrow$$
$$DCGH\text{의 넓이} \times DCGH\text{의 넓이} = ABCD \times CEFG$$
$$DCGH\text{의 넓이} = \sqrt{(ABCD) \times (CEFG)}$$

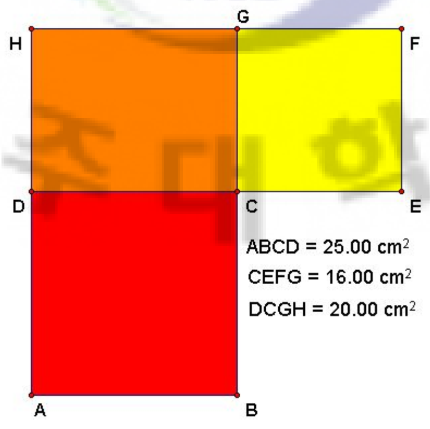
학생용 학습 프로그램

자료번호	2	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 2		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

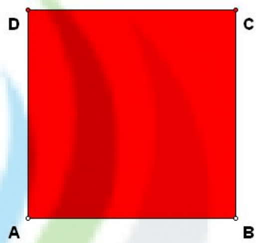
<<이번 시간에 만들 목표 도형>>



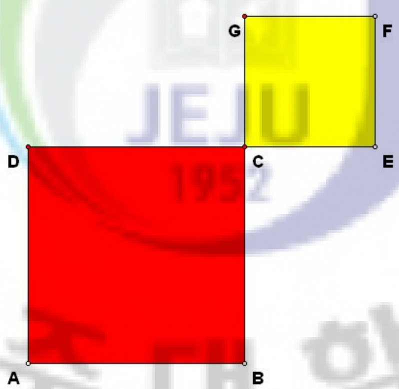
탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<사각형의 넓이를 이용한 발견 방법>>
GSP 프로그램을 이용하여 사각형의 넓이를 이용하여 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

1단계) 정사각형 ABCD와 정사각형 CEFG를 만든다.

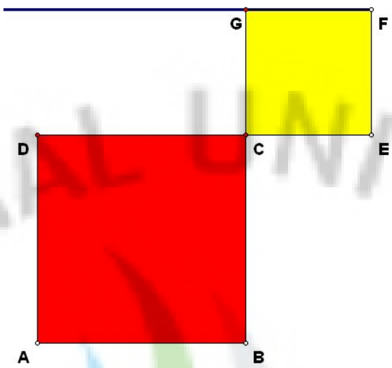


<만드는 방법>

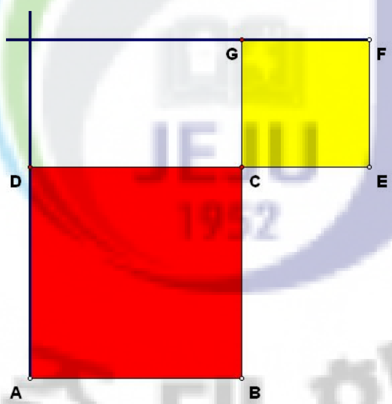


<만드는 방법>

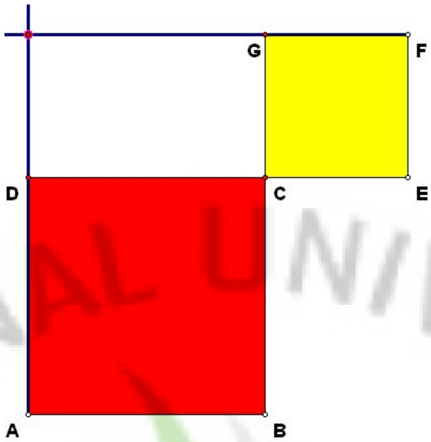
2단계) 두 정사각형 사이에 비어있는 곳에 직사각형 DCGH를 만든다.



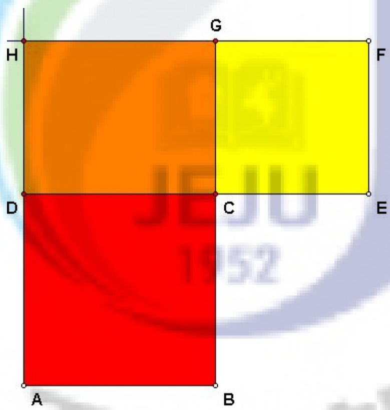
<만드는 방법>



<만드는 방법>

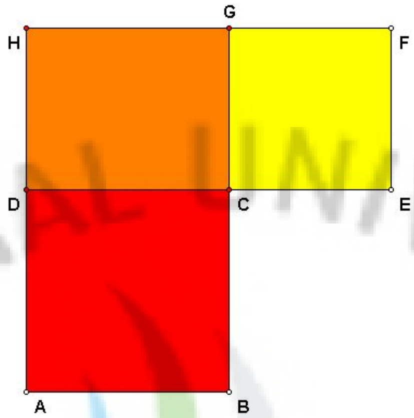


<만드는 방법>

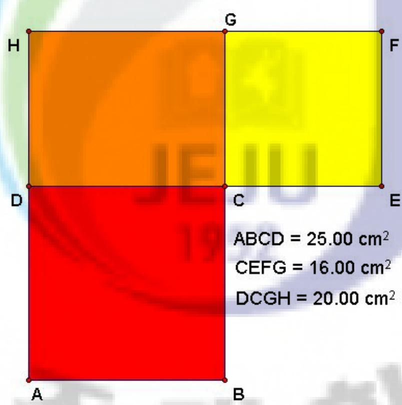


<만드는 방법>

3단계) 필요 없는 반직선들은 모두 숨기고, 각각의 넓이를 표시한다.



<만드는 방법>



<만드는 방법>

4단계) 사각형 ABCD, 사각형 CEFG, 사각형 DCGH 사이의 관계를 확인해 보고, 세 사각형의 넓이 사이의 관계를 발견하여 보시오.

<사각형 ABCD, 사각형 CEFG, 사각형 DCGH 사이의 관계>

탐구문제2	위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

정사각형 넓이를 이용한 단계별 여러 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써 보시오. (단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

다. 기하평균의 의미 3 (자료 번호 3)

교사용 학습 프로그램

자료번호	3	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 3		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

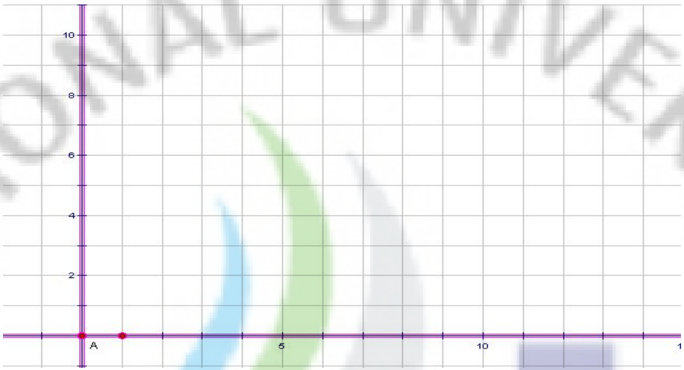
탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<그래프를 이용한 발견 방법>>

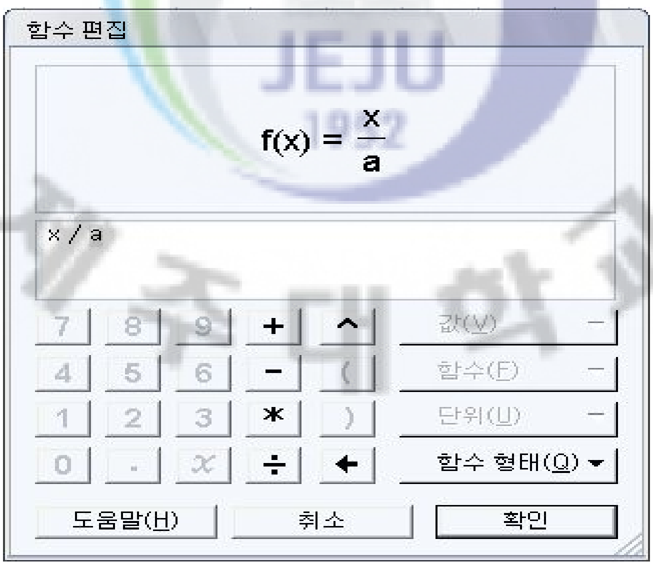
GSP 프로그램을 이용하여 그래프 2개를 그리고, 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

1단계) GSP 프로그램을 이용하여 그래프 $y = \dfrac{x}{a}$ 를 그린다.

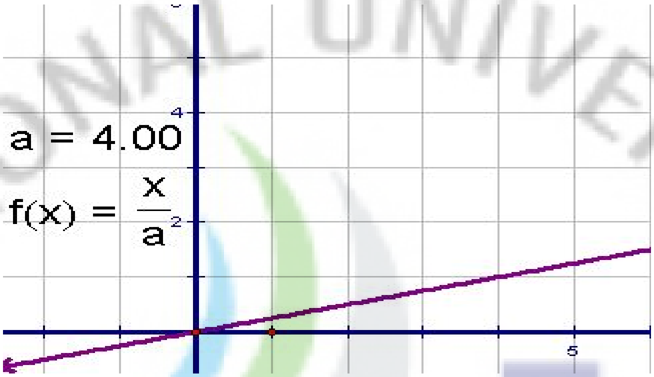
<만드는 방법> GSP 프로그램 실행한다. 메뉴에서 그래프 - 새 좌표 설정을 통해 그래프의 형태를 만든다.



<만드는 방법> 그래프 - 새함수를 클릭하고 함수의 형태를 f(x)로 만든다. 그리고 a값이 4.0인 $f(x) = \dfrac{x}{a}$로 그래프를 새로 만든다.

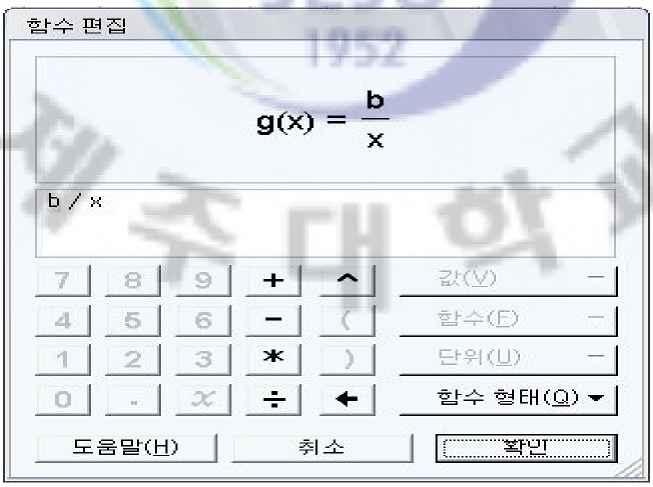


<만드는 방법> $f(x)=\frac{x}{a}$ 함수를 클릭하고, 오른쪽 마우스를 클릭하여 나오는 함수의 그래프를 눌러서 $f(x)=\frac{x}{a}$의 그래프를 그린다.

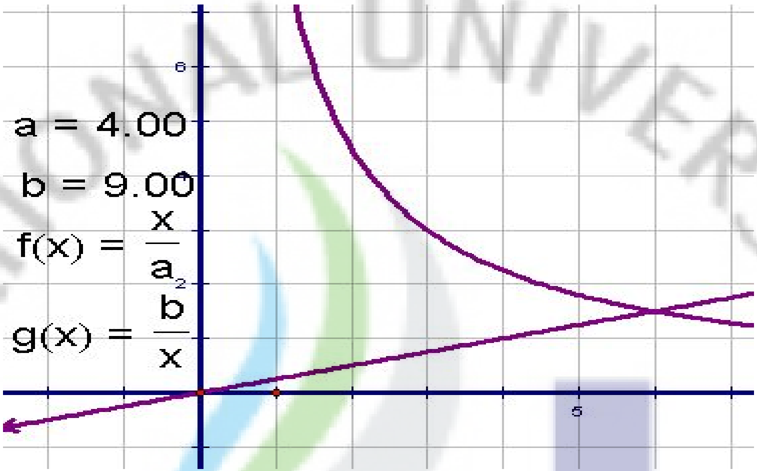


2단계) GSP 프로그램을 이용하여 그래프 $g(x)=\frac{b}{x}$를 그린다.

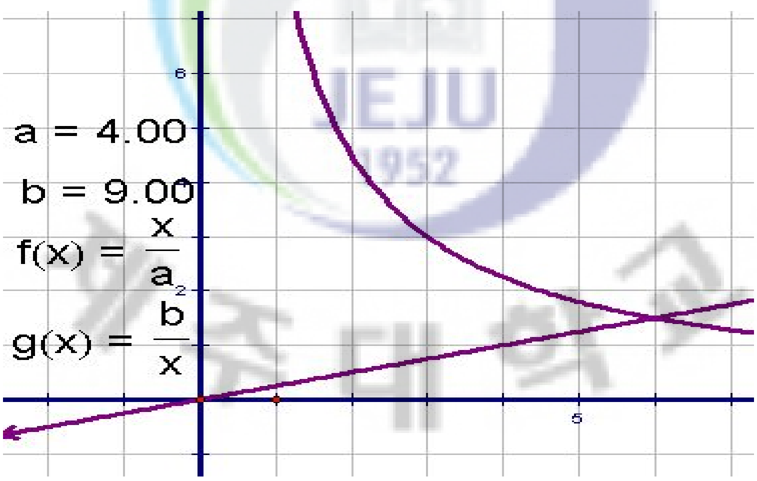
<만드는 방법> 그래프 - 새함수를 클릭하고 함수의 형태를 g(x)로 만든다. 그리고 b값이 9.0인 $g(x)=\frac{b}{x}$로 그래프를 새로 만든다.



<만드는 방법> $g(x)=\dfrac{b}{x}$ 함수를 클릭하고, 오른쪽 마우스를 클릭하여 나오는 함수의 그래프를 눌러서 $g(x)=\dfrac{b}{x}$의 그래프를 그린다.



3단계) 두 그래프가 서로 만나는 교점을 찾는다.



이 그래프를 보고, 두 그래프가 서로 만나는 교점을 찾는다.

두 그래프가 서로 만나는 교점은 (6.0, $\dfrac{3}{2}$)이다.

4단계) 두 그래프 $f(x)=\frac{x}{a}$, $g(x)=\frac{b}{x}$ 사이를 확인해 보고, 두 그래프 교점 사이에 어떠한 관계가 있는지 발견하여 보시오.

<두 그래프 $f(x)=\frac{x}{a}$, $g(x)=\frac{b}{x}$ 교점 사이의 관계>

두 그래프의 미지수를 먼저 보면, a는 4.0을 나타내고 b는 9.0을 나타낸다. 이 두 미지수를 적용한 두 그래프는 x좌표가 6인 곳에서 서로 만난다. 이를 관계식으로 확인할 수 있다.

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$$

두 그래프가 서로 만나는 점을 찾기 위해서 두 그래프를 식으로 나타내서 계산할 때, 서로 대각선으로 곱셈을 하면 어느 점에서 두 그래프가 만나게 되는지 확인할 수 있다. 이 내용을 관계식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x^2=a\times b$$
$$x=\sqrt{a\times b}$$

따라서 두 그래프를 이용하면 a 와 b 값의 기하평균을 찾을 수 있다. 기하 평균은 두 그래프의 교점 중 x 좌표의 값이 된다. 위에서 미지수 a와 b의 값을 다양하게 변화시키면 다양한 값의 기하평균을 찾을 수 있다.

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

두 그래프의 교점을 이용한 단계별 여러 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오.
(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

위의 과정을 통해서 아동들은 기하평균에 대한 의미를 두 그래프 사이의 관계식과 교점을 통해서 이해할 수 있다. 두 개의 그래프는 정비례 그래프와 반비례 그래프이다. 두 그래프의 미지수를 변화시켜 다양한 기하평균을 찾아나갈 수 있다. 이를 관계식으로 나타내보면, 다음과 같다.

$a = 4.0\,,\ b = 9.0$

$\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$

대각선끼리 곱

$x^2 = 36$

$x = 6.0$

이 과정을 통해서 두 그래프의 교점을 찾을 수 있다. 두 그래프의 교점의 x 좌표는 두 미지수의 기하평균을 의미한다. 이를 일반적인 원리로 만들어 내면 아래와 같다.

$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$

대각선끼리 곱

$x^2 = a \times b$

$x = \sqrt{a \times b}$

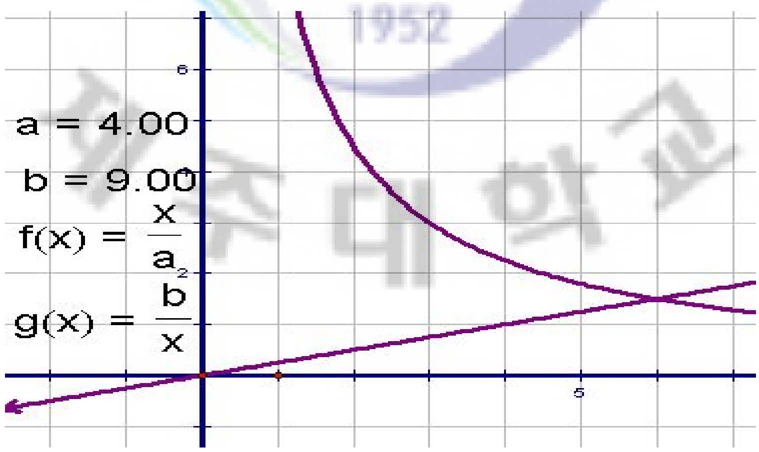
학생용 학습 프로그램

자료번호	3	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 3		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

<<이번 시간에 만들 목표 도형>>

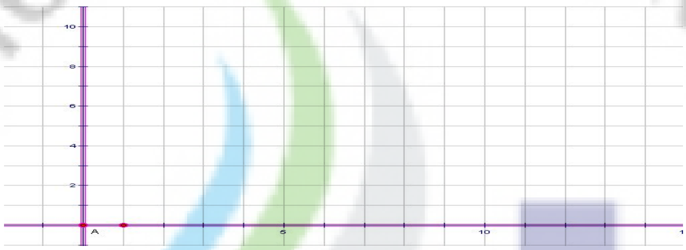


탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

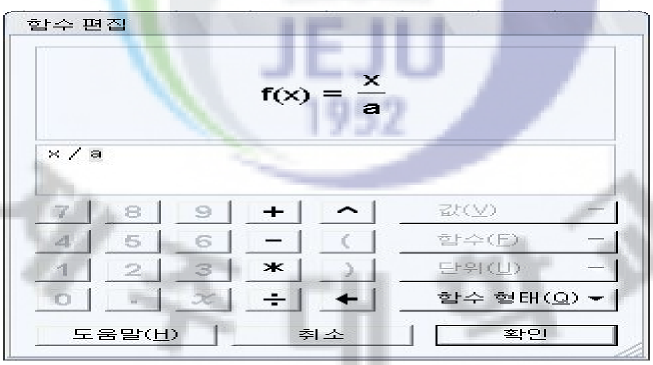
<<그래프를 이용한 발견 방법>>

GSP 프로그램을 이용하여 그래프 2개를 그리고, 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

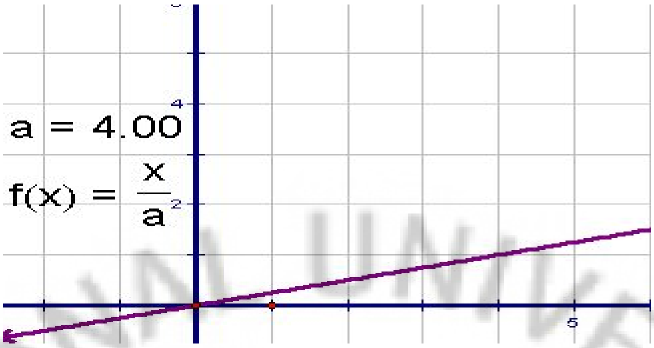
1단계) GSP 프로그램을 이용하여 그래프 $y=\dfrac{x}{a}$ 를 그린다.



<만드는 방법>

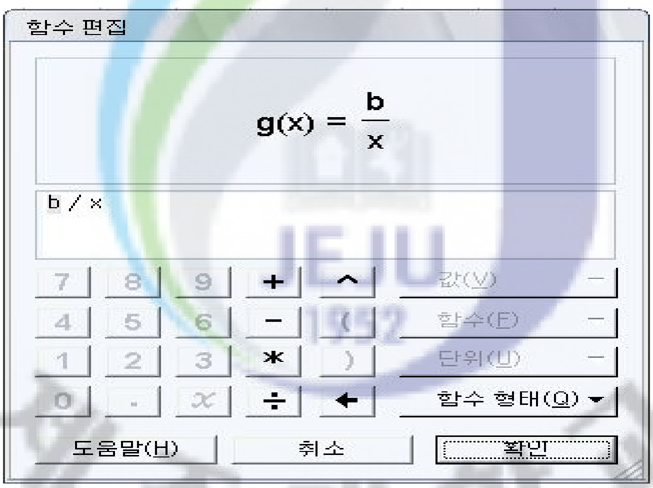


<만드는 방법>

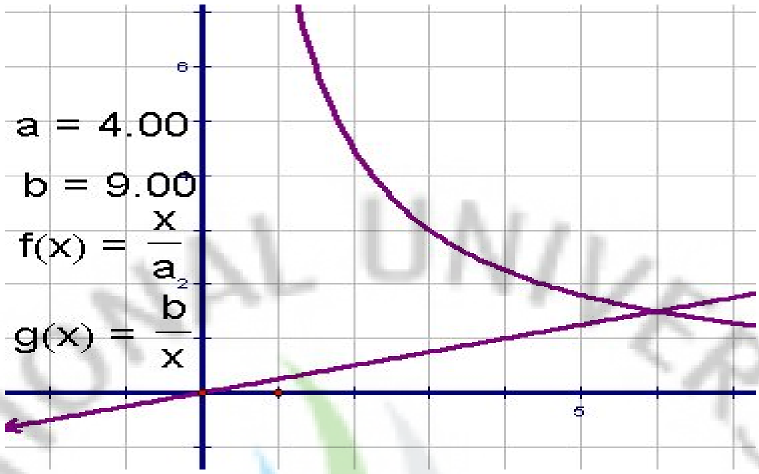


<만드는 방법>

2단계) GSP 프로그램을 이용하여 그래프 $g(x) = \dfrac{b}{x}$를 그린다.

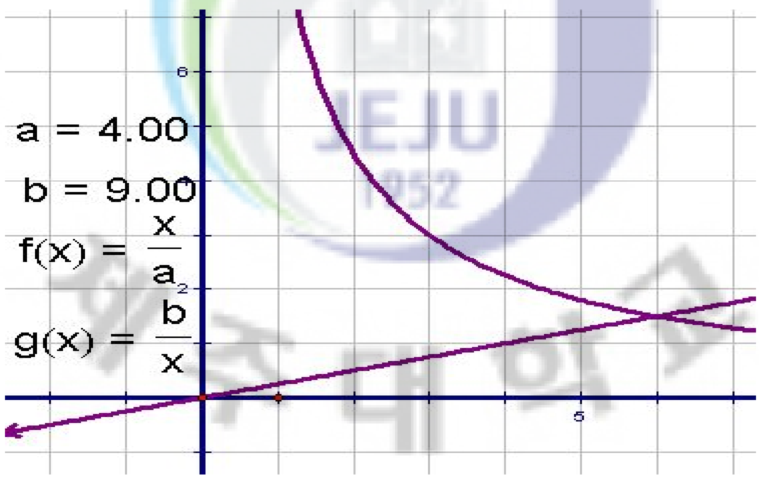


<만드는 방법>



<만드는 방법>

3단계) 두 그래프가 서로 만나는 교점을 찾는다.



4단계) 두 그래프 $f(x)=\frac{x}{a}$, $g(x)=\frac{b}{x}$ 사이를 확인해 보고, 두 그래프 교점 사이에 어떠한 관계가 있는지 발견하여 보시오.

<두 그래프 $f(x)=\frac{x}{a}$, $g(x)=\frac{b}{x}$ 교점 사이의 관계>

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

두 그래프의 교점을 이용한 단계별 여러 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오. (단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

라. 기하평균의 의미 4 (자료 번호 4)

교사용 학습 프로그램

자료번호	4	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 4		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

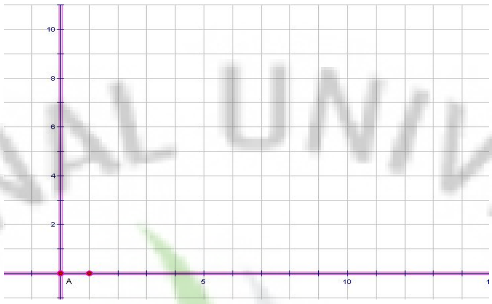
탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

<<직사각형을 정사각형으로 만드는 발견 방법>>

GSP 프로그램을 이용하여 만든 직사각형을 정사각형으로 만들어가면서 기하평균의 의미를 찾아본다.

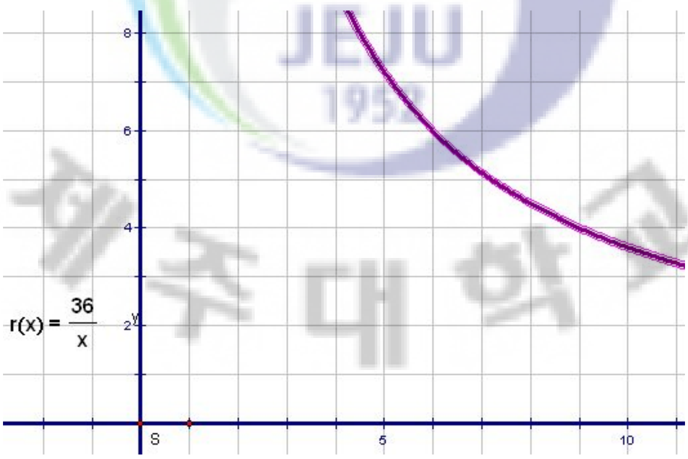
1단계) GSP 프로그램을 이용해서 그래프의 형태를 만든다.

<만드는 방법> GSP 프로그램 실행한다. 메뉴에서 그래프 - 새 좌표 설정을 통해 그래프의 형태를 만든다.

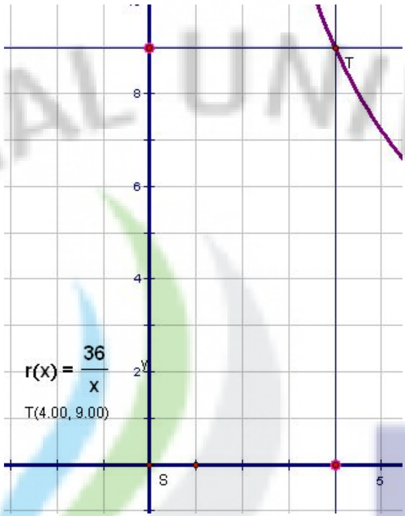


2단계) GSP 프로그램을 이용해서 $y = \frac{36}{x}$ 그래프를 이용해서 넓이가 36이 되는 사각형을 만든다.

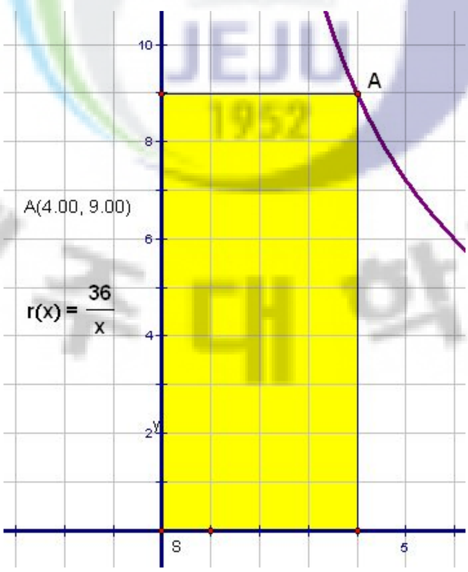
<만드는 방법> 넓이가 36이 되는 그래프를 만들기 위해서는 x축의 값이 한 변의 길이가 되고, y축의 값이 한 변의 길이가 되는 함수를 만든다. 그 함수는 $x \times y = 36$ 의해 만들어진 $y = \frac{36}{x}$ 이다. 그러므로 $y = \frac{36}{x}$ 의 그래프를 그린다.



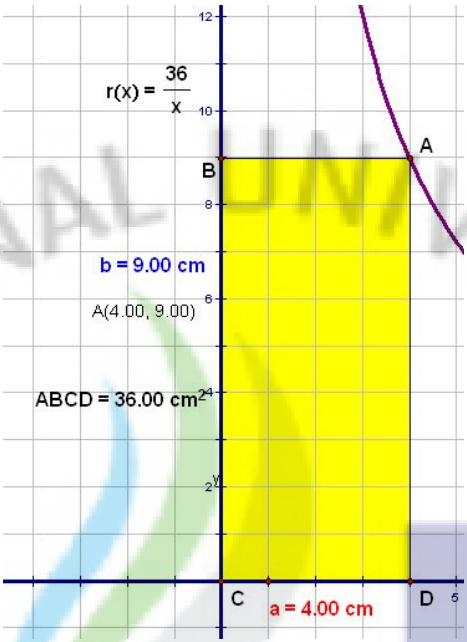
<만드는 방법> 그래프 위의 한 점(작도 - 함수 그래프 위의 점)을 찍고, 그 점과 y축과 x축과의 수선(작도 - 수선)을 그린다. 그리고 수선과 x축, y축과의 교점(작도 - 교점)을 찍는다. (좌표가 x축은 4, y축은 9가 되도록 맞춘다.)



<만드는 방법> 수선을 숨기고, 4개의 점을 찍어 선분(작도 - 선분)을 그린다. 그 후, 네 개의 점을 다시 찍고, 사각형(작도 - 사각형의 내부)을 만든다.

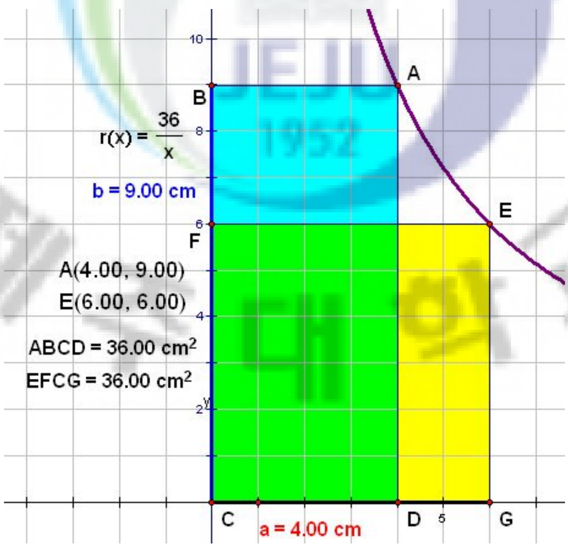


<만드는 방법> 사각형의 길이(오른쪽 마우스 클릭)와 넓이를 나타낸다.



3단계) 위의 사각형처럼 똑같은 사각형을 하나 더 그린다.

<만드는 방법> 2단계와 동일한 방법으로 하나 더 만든다.



탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

GSP 프로그램을 사용해 단계별로 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써 보시오.
(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

한 변의 길이가 4이고, 한 변의 길이가 9인 직사각형의 넓이를 통해서 4와 9의 기하평균에 대해서 확인할 수 있다. 넓이가 같은 여러 가지 좌표 중에서 정사각형을 이루는 한 점을 찾으면 그게 바로 기하평균이 되는 것이다. 즉, 4와 9의 기하평균은 그래프 상에서 x의 좌표와 y의 좌표가 같은 점인 좌표 E에서 기하평균을 이룬다고 할 수 있다. 즉, 위의 과정을 통해서 넓이가 같은 사각형을 움직이면서 쉽게 기하평균을 찾아나갈 수 있는 것이다. 위의 과정을 관계식으로 나타내 보면 다음과 같다.

$$4 \times 9 = 36$$
$$x \times x = 36$$
$$x = \sqrt{36} = 6$$

이러한 관계식과 위의 그래프를 통해서 아동들은 쉽게 위의 내용을 확인하고, 기하평균에 대한 개념을 이해할 수 있게 될 것이다.

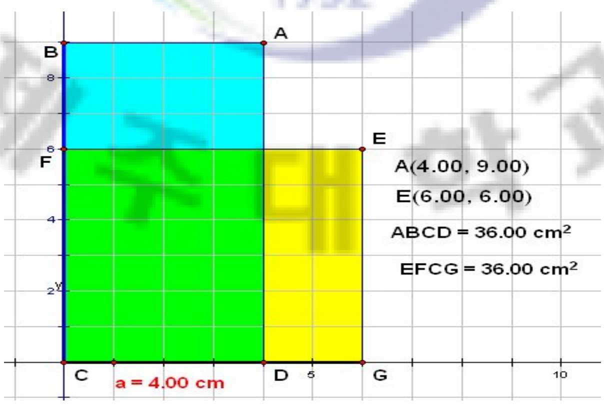
학생용 학습 프로그램

자료번호	4	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 4		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

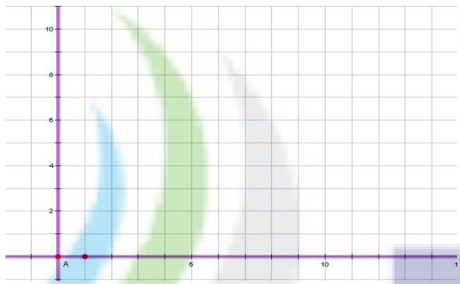
<<이번 시간에 만들 목표 도형>>



탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

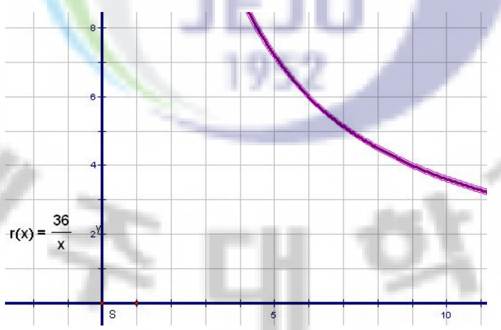
<<직사각형을 정사각형으로 만드는 발견 방법>>
GSP 프로그램을 이용하여 만든 직사각형을 정사각형으로 만들어가면서 기하평균의 의미를 찾아본다.

1단계) GSP 프로그램을 이용해서 그래프의 형태를 만든다.

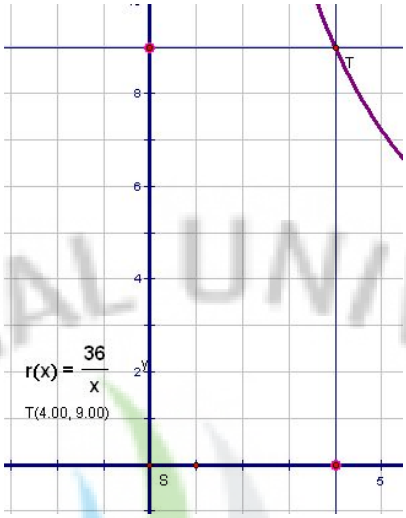


<만드는 방법>

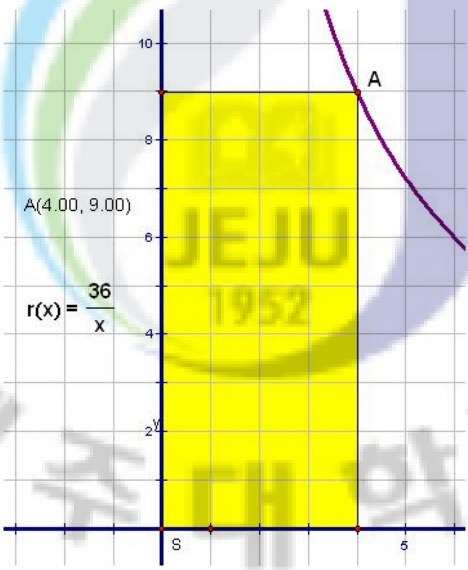
2단계) GSP 프로그램을 이용해서 $y = \dfrac{36}{x}$ 그래프를 이용해서 넓이가 36이 되는 사각형을 만든다.



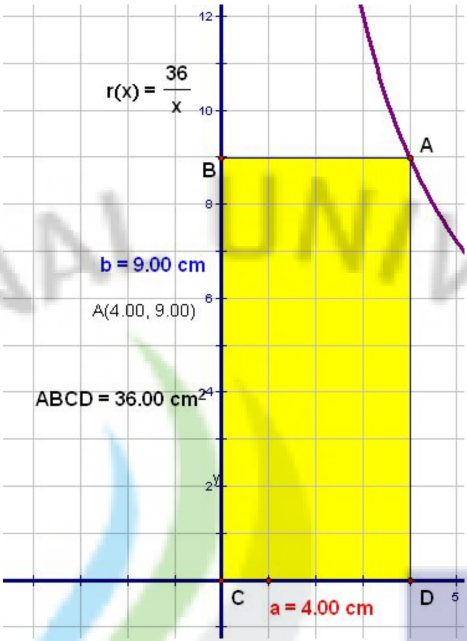
<만드는 방법>



<만드는 방법>

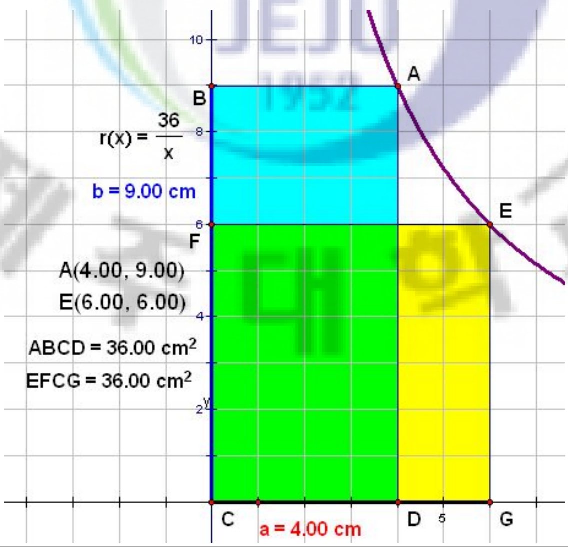


<만드는 방법>



<만드는 방법>

3단계) 위의 사각형처럼 똑같은 사각형을 하나 더 그린다.



탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

GSP 프로그램을 사용해 단계별로 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오.
(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

<점 E를 움직임을 통해서 발견하게 된 사실>

<관계식을 이용해서 발견하게 된 사실>

마. 기하평균의 의미 5 (자료 번호 5)

교사용 학습 프로그램

자료번호	5	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 5		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

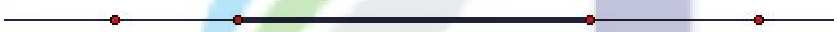
<<원을 이용한 발견 방법>>

GSP 프로그램을 이용하여 원을 그리고, 그 원의 내부 선들을 이용하여 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

1단계) 두 점을 잇는 직선을 그린다. 그리고 직선 안에 선분 a와 b를 그리고, 선분 a와 b가 만나는 점에서 직선과 직각을 이루는 수선을 그린다.

<만드는 방법> 선분 그리기인 선분, 직선, 반직선 중에서 직선을 선택하여 두 개의 점을 찍고 직선을 만든다.

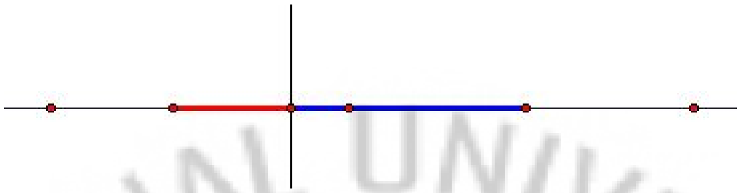
<만드는 방법> 직선 위에 선분을 하나 그린다.



<만드는 방법> 선분을 클릭하고, 중점(작도-중점)을 찾아 찍는다.

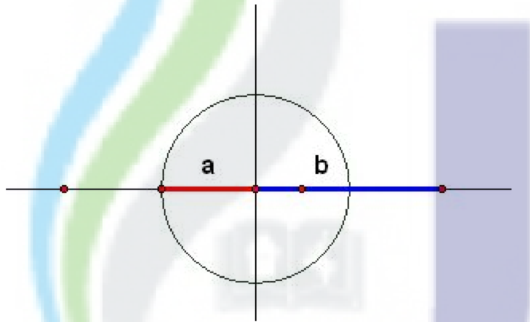
<만드는 방법> 선분 a와 b의 길이 합이 위의 선분 길이만큼 되게 선분을 2개 만든다.

<만드는 방법> 선분 a와 b가 만나는 점과 직선을 클릭하고, 수선(작도 - 수선)을 작도한다.

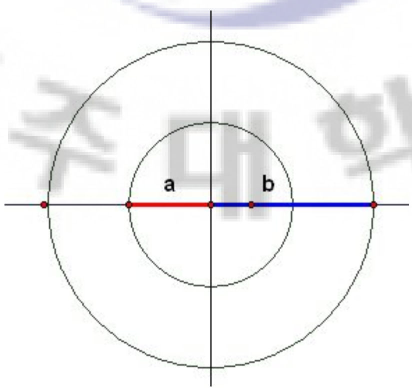


2단계) 선분 a와 b가 만나는 점에서 반지름의 길이가 선분 a 길이인 원, 선분 b 길이인 원을 그린다. 그리고 선분 a와 b길이의 합이 지름이 되는 원을 그린다.

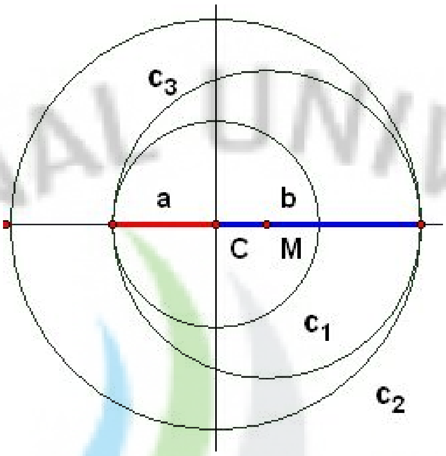
<만드는 방법> 선분 a와 b가 만나는 지점에서 반지름이 선분 a 길이로 되는 원을 그린다.



<만드는 방법> 선분 a와 b가 만나는 지점에서 반지름이 선분 b길이로 되는 원을 그린다.

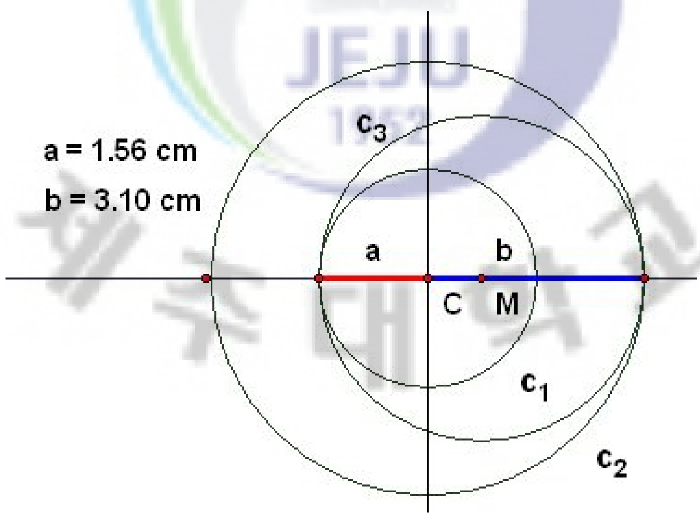


<만드는 방법> 1단계에서 만들어 놓았던 중점을 중심으로 반지름의 길이가 $\frac{a+b}{2}$인 원을 그린다.

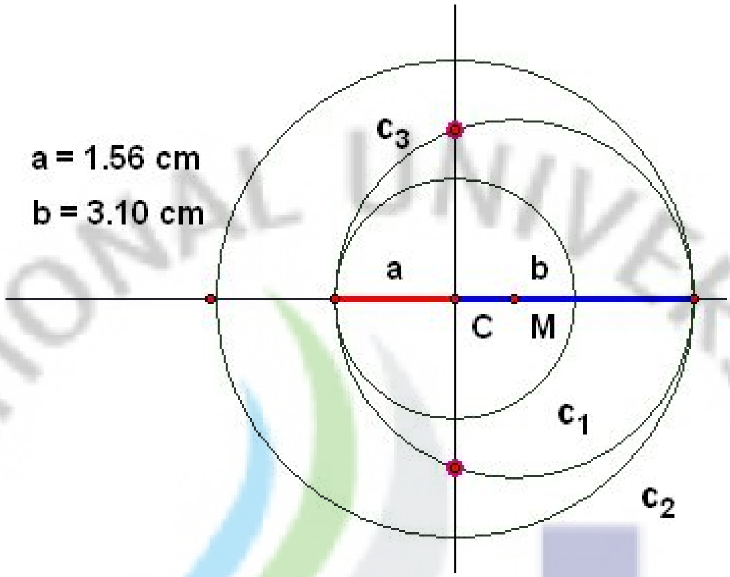


3단계) 각각의 선분의 길이를 표시하고, 선분 a와 b가 만나는 점에서 만든 수선과 가장 마지막에 만든 원과의 교점을 작도한다.

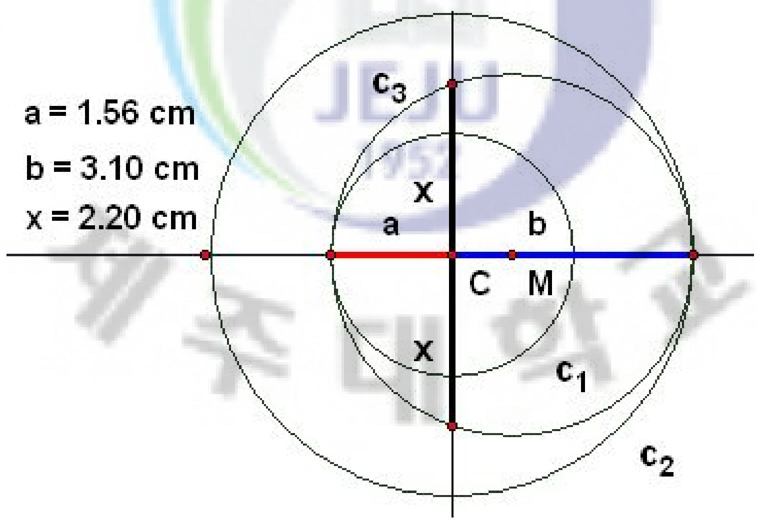
<만드는 방법> 선분 a와 선분 b를 클릭하고, 길이(측정-길이)를 측정한다.



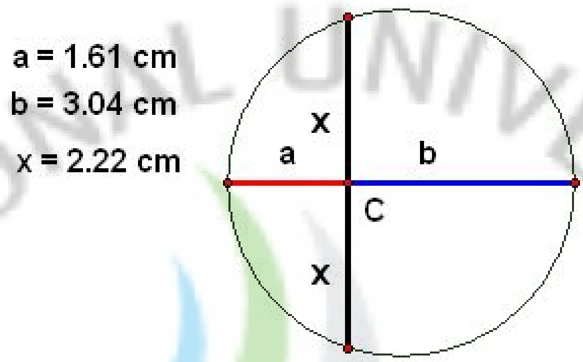
<만드는 방법> 수선과 마지막으로 만든 원을 클릭하고, 교점(작도-교점)을 작도한다.



<만드는 방법> 점 C와 원 C_3이 만나는 점 사이의 선분의 이름을 각각 x라고 지정한다.



<만드는 방법> 첫 번째로 그린 원, 두 번째로 그린 원을 모두 숨기기를 하여, 보이지 않게 만든다. 그리고 수선과 직선 등 불필요한 사항을 모두 숨기기를 통해서 보이지 않게 만든다.



4단계) 점 C를 직선 사이를 왔다 갔다 해 보고, 그 과정에서 변화되는 a, b, x의 값을 확인한다. 그리고 이 과정을 통해서 발견할 수 있는 a, b, x값 사이의 관계를 발견하여 보시오.

<측정값 a, b, x값 사이의 관계>

1) 비례식을 이용한 관계식

$$a : x = x : b$$
$$\therefore\ x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

2) 분수를 이용한 관계식

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$
$$x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

원을 이용한 단계별 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오.
(단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

위의 과정을 통해서 아동들은 산술 평균과 기하평균의 차이를 활동 과정에서 느꼈을 것이다. 선분 a 길이와 b의 길이 중간에 있는 중점과는 x의 길이는 정확하게 다르기 때문이다. 점 C를 움직이다 보면 산술 평균을 나타내는 중점 M에 이르게 되면 산술평균과 기하평균이 같아지는 지점이 생긴다. 이 지점에서는 a, b, x의 값이 모두 같아진다. 하지만 이 점을 제외한 모든 점에서는 산술 평균과 기하평균의 값이 달라진다. 그리고 이 활동을 하는 과정에서 아동들은 측정값인 a, b, x 값 사이의 관계를 파악할 수 있게 될 것이다. 파악하는 방법은 매우 다양하겠지만, 그 중에서 비례식을 이용하거나 분수를 이용하여 관계식을 형성할 수 있을 것이다. 관계식이 만들어지는 과정을 살펴보면, 다음과 같다.

$a : x = x : b$ (비례식 이용)

$\therefore\ x^2 = ab$

$x = \sqrt{ab}$

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$ (분수식 이용)

$x^2 = ab$

$x = \sqrt{ab}$

이 과정을 통해서 아동들은 기하평균의 공식을 발견하고 이러한 공식이 어떻게 만들어졌는지 이해할 수 있게 될 것이다.

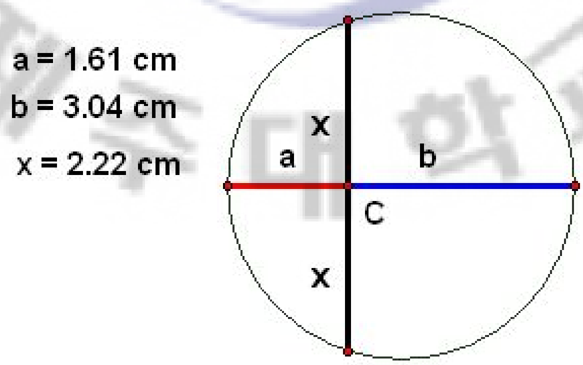
학생용 학습 프로그램

자료번호	5	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 5		
학습목표	기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해할 수 있다. 교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.
2. 수학교구를 이용하여 기하평균의 의미를 파악하고 스스로 원리를 발견해봅시다.

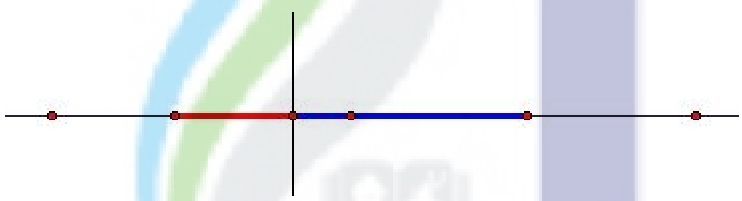
<<이번 시간에 만들 목표 도형>>



탐구문제1 GSP 프로그램을 이용하여 기하평균의 의미를 알아봅시다.

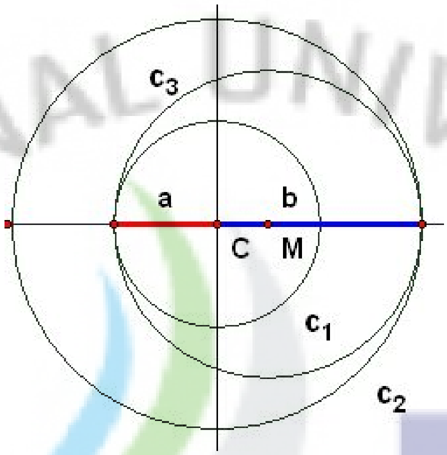
<<원을 이용한 발견 방법>>
GSP 프로그램을 이용하여 원을 그리고, 그 원의 내부 선들을 이용하여 기하평균의 의미를 찾아본다. 그 과정에서 자신만의 원리와 규칙을 발견한다.

1단계) 두 점을 잇는 직선을 그린다. 그리고 직선 안에 선분 a와 b를 그리고, 선분 a와 b가 만나는 점에서 직선과 직각을 이루는 수선을 그린다.



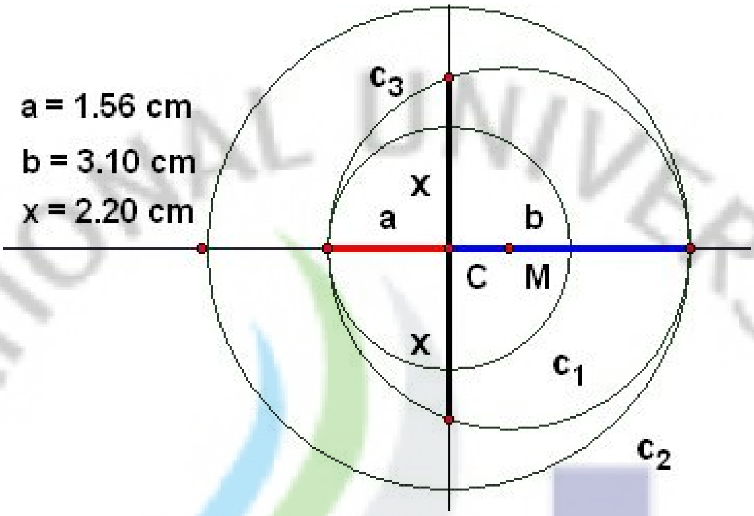
<만드는 방법>

2단계) 선분 a와 b가 만나는 점에서 반지름의 길이가 선분 a 길이인 원, 선분 b 길이인 원을 그린다. 그리고 선분 a와 b길이의 합이 지름이 되는 원을 그린다.

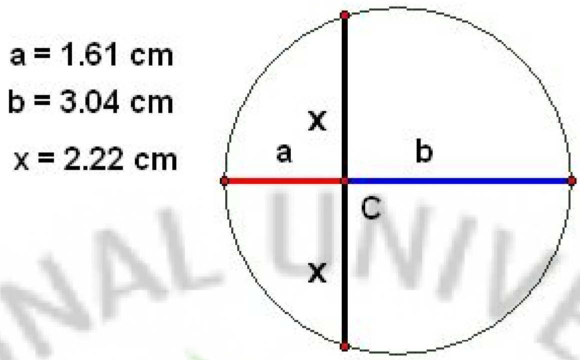


<만드는 방법>

3단계) 각각의 선분의 길이를 표시하고, 선분 a와 b가 만나는 점에서 만든 수선과 가장 마지막에 만든 원과의 교점을 작도한다.



<만드는 방법>



<만드는 방법>

4단계) 점 C를 직선 사이를 왔다 갔다 해 보고, 그 과정에서 변화되는 a, b, x의 값을 확인한다. 그리고 이 과정을 통해서 발견할 수 있는 a, b, x값 사이의 관계를 발견하여 보시오.

<측정값 a, b, x값 사이의 관계>

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

원을 이용한 단계별 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오. (단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

바. 기하평균의 의미 6 (자료 번호 6)

교사용 학습 프로그램

자료번호	6	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 6		
학습목표	기하평균의 다양한 의미를 이해할 수 있다. 교구를 이용한 기하평균 발견 방법을 확인하고, 기하평균에 대한 깊은 이해를 한 후 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미를 이해할 수 있다.
2. 수학교구를 이용한 기하평균 발견 방법을 확인하고, 기하평균에 대한 깊은 이해를 한 후 원리를 발견할 수 있다.

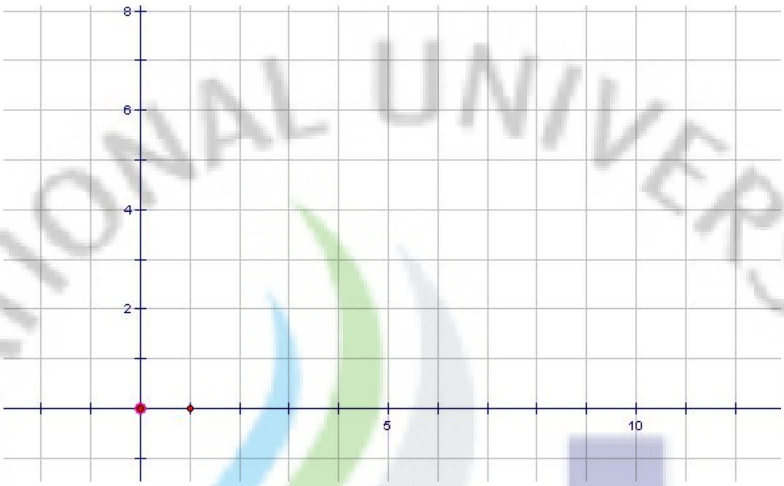
탐구문제1 지수 함수를 이용한 기하평균의 의미를 확인해 봅시다.

<<지수 함수를 이용한 기하평균의 발견 방법>>

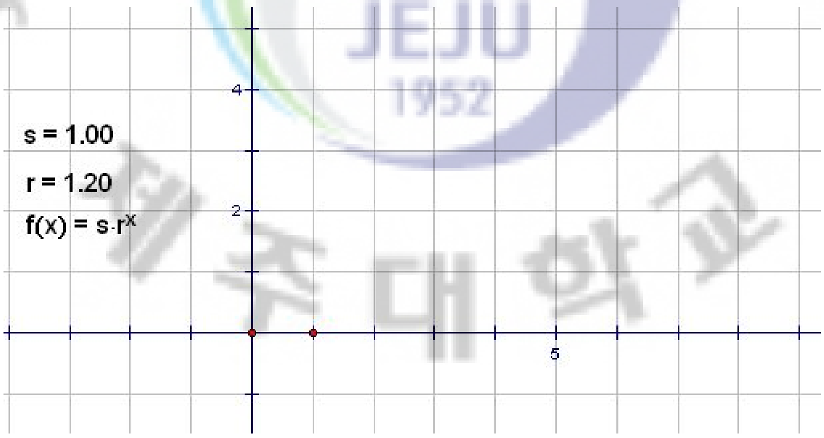
GSP 프로그램을 이용하여 지수 함수를 그리고, 지수 함수의 각 좌표를 통해서 기하평균이 어떻게 형성되는지 확인한다. 그 과정에서 기하평균의 원리를 발견한다.

1단계) 지수 함수 $f(x) = s \cdot r^x$ 를 GSP 프로그램을 이용해서 그린다.

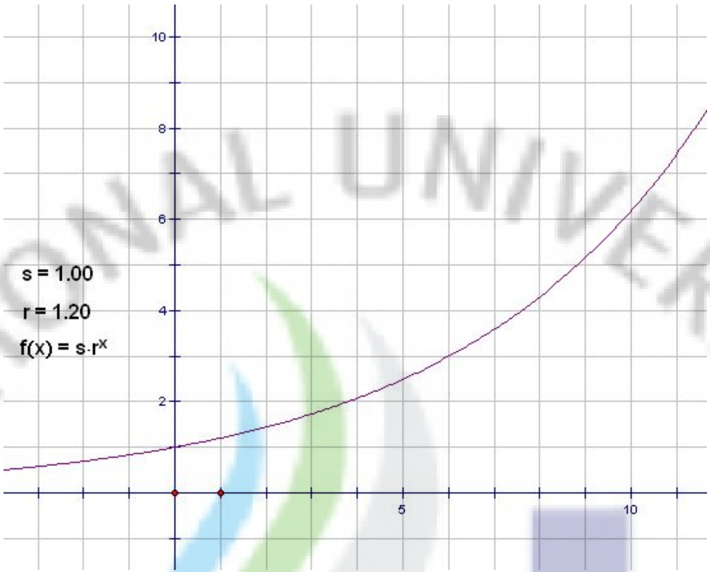
<만드는 방법> 격자 문양(그래프 - 격자형태 - 정사각좌표 격자)을 만든다.



<만드는 방법> 새 함수(그래프 - 새 함수) 메뉴를 이용해서 새 매개변수(그래프 - 새 매개변수) r, s를 만들고 지수 함수 $f(x) = s \cdot r^x$ 를 만든다. (함수를 만들 때는, s × r ∧ x의 과정으로 함수를 만들면 된다.)

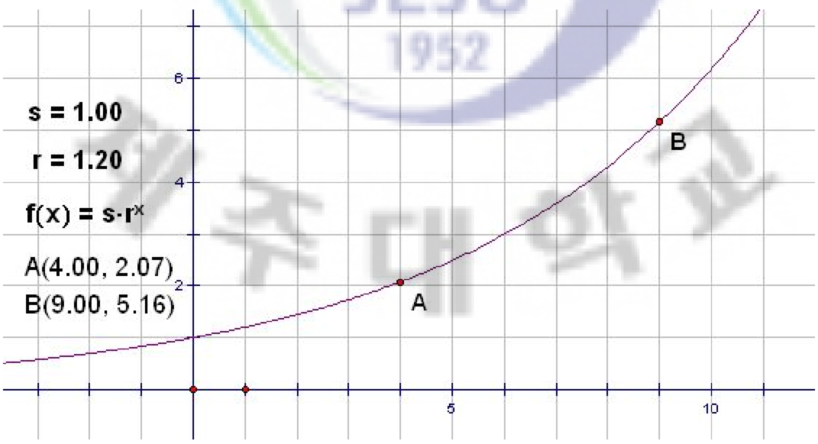


<만드는 방법> 지수 함수를 클릭하고, 함수의 그래프(그래프 - 함수의 그래프)를 만든다.

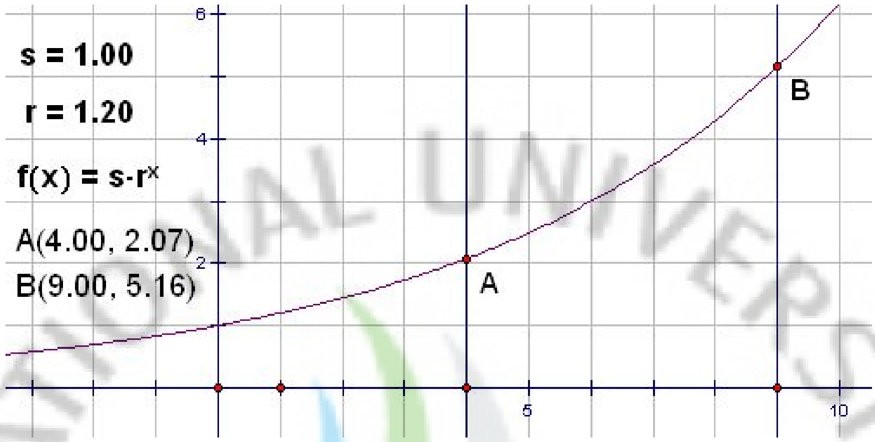


2단계) 지수 함수에서 좌표 A와 좌표 B를 선정하고, x축에 좌표 A와 좌표 B의 x 좌표의 산술 평균을 찾고, 그 점에 연결된 y 좌표를 확인한다.

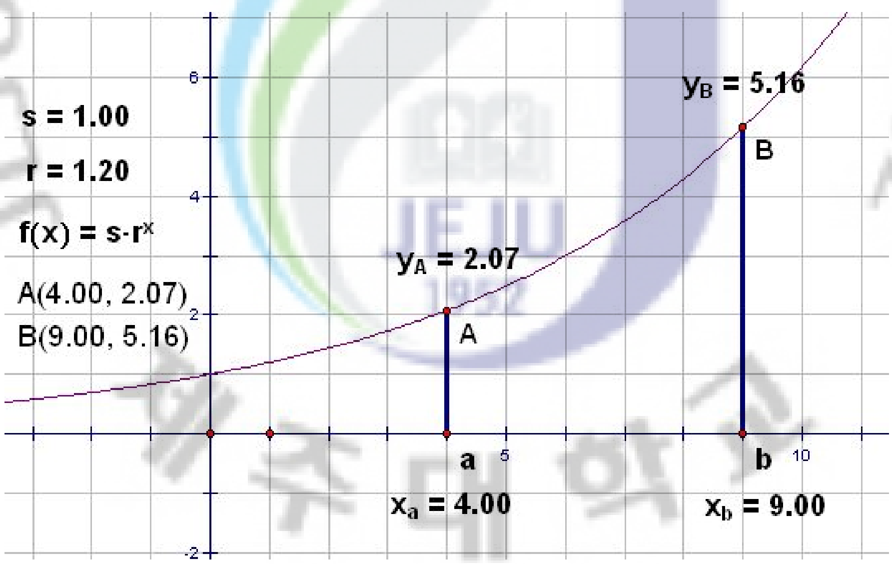
<만드는 방법> 좌표 A와 좌표 B를 찾아 점을 찍는다.



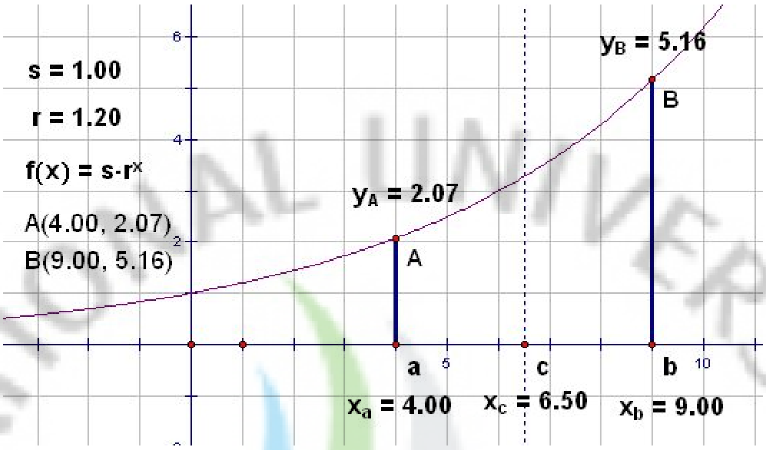
<만드는 방법> 좌표 A, 좌표 B에서 수선(작도- 수선)을 내리고, 수선과 x축과의 교점(작도 - 교점)을 찍는다.



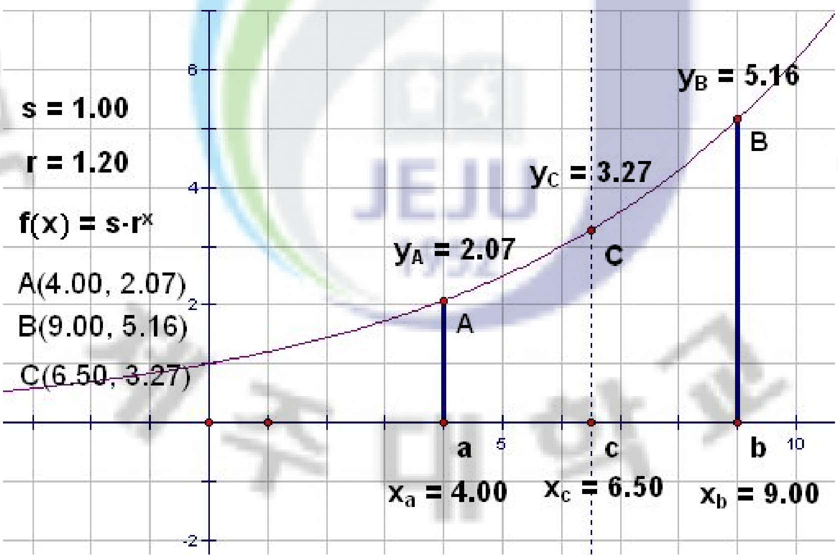
<만드는 방법> 수선을 숨기고, 각 교점에 좌표 이름과 x축 좌표를 표시해 준다. 그리고 그래프와 만나는 점에는 각각 y축의 좌표를 표시해 준다.



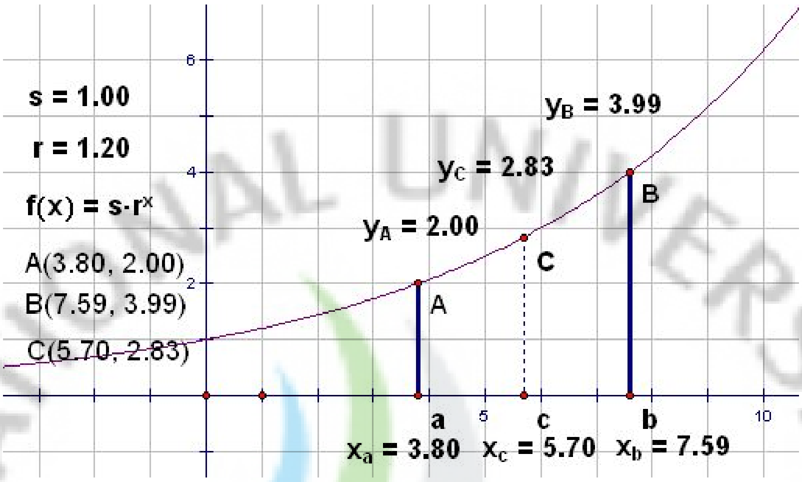
<만드는 방법> 좌표 a와 좌표 b 사이의 중점을 지정한다. 그리고 그 중점에서 수선을 작도한다.



<만드는 방법> 수선과 함수 $f(x) = s \cdot r^x$ 사이의 교점을 찍는다. 교점은 작도 – 함수 그래프 위의 점을 클릭하여 함수 그래프 위의 점을 만들고, 좌표를 확인하여 옮긴다.



3단계) 점들을 옮겨가면서 x축 위의 점과 그래프 $f(x)=s \cdot r^x$위의 y축 점들 사이의 관계를 확인하고, 어떻게 변하는지 확인하시오.



<x축 위의 점들 사이의 관계>

Xa와 Xb와 Xc 사이의 관계를 확인해 보면, 처음부터 점 c를 만들 때 점 a와 점 b 사이의 중점을 이용해서 만들었다. 이 과정을 통해서 알 수 있듯이 점 c는 점 a와 점 b의 중점, 즉, 산술평균을 이룬다고 할 수 있다.

즉, $Xc=\dfrac{Xa+Xb}{2}$라고 할 수 있다.

<$f(x)=s \cdot r^x$그래프 위 점들 사이의 관계>

$f(x)=s \cdot r^x$그래프 위 점들 사이의 관계를 확인해 보면, Ya, Yb, Yc 사이의 관계를 알아보면 된다. 이 관계는 여러 번 이동을 통해서 확인할 수 있다. 여러 번 이동을 통해서 여러 가지 수를 인식할 수 있다. 예를 들면, Ya가 4.00이고, Yb가 9.00일 때 Yc는 6.00이 된다는 사실을 볼 수 있다. 그리고 Ya값이 4.00이고, Yb값이 16.00일 때는 Yc의 값이 8.00이 된다는 사실을 발견할 수 있다. 그러므로 Ya와 Yb, 그리고 Yc 사이에는 기하평균이라는 관계가 성립하게 된다.

이를 관계식으로 나타내면,

$Yc\times Yc= Ya\times Yb$ 로 나타낼 수 있다.

$Yc=\sqrt{Ya\times Yb}$

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

지수 함수를 이용한 단계별 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오. (단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

위의 과정을 통해서 아동들은 산술 평균과 기하평균의 차이를 활동 과정에서 느꼈을 것이다. x축의 값으로 이루어진 산술평균은 찾기가 쉽다. 산술평균은 어떠한 관계함수에 의해서 이루어진 것이 아닌 x축의 2점을 이용해서 중점을 찾아나가는 과정이다. 하지만 기하평균은 아동들이 찾기 어렵다. 관계 함수의 2점들 사이의 한 부분을 나타낸 것인데, 지수함수라는 일반적인 비례에 의해서 만들어진 함수가 아니다. 이 과정을 통해서 이전에 배운 기하평균의 내용을 확인하고, 그를 통해서 심화할 수 있는 내용이다. 지수함수라는 들어보지 못한 내용에서도 기하평균이 나타날 수 있음을 이해하고, 산술 평균과 기하평균의 차이점을 정확하게 인식할 수 있게 된다.

산술 평균과 기하평균의 차이에 대해서 관계식으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$c=\dfrac{a+b}{2}$(산술평균) 이러한 관계식이 형성될 수 있다.

$C\times C=A\times B$

$C=\sqrt{A\times B}$ (기하평균)

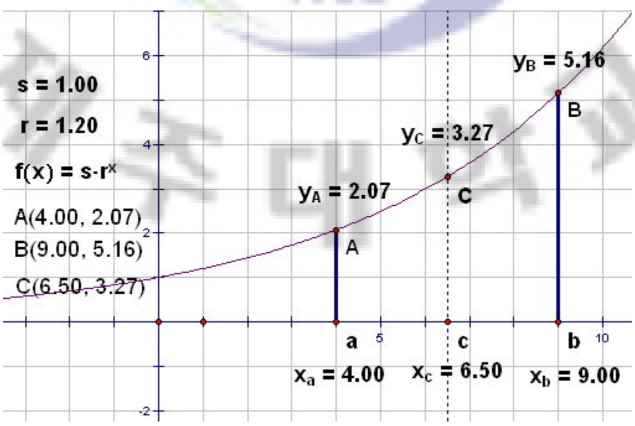
학생용 학습 프로그램

자료번호	6	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	기하평균의 의미 6		
학습목표	기하평균의 다양한 의미를 이해할 수 있다. 교구를 이용한 기하평균 발견 방법을 확인하고, 기하평균에 대한 깊은 이해를 한 후 원리를 발견할 수 있다.		
학습교구	컴퓨터, GSP 프로그램		

<<이번 시간 목표>>

1. 기하평균의 다양한 의미를 이해할 수 있다.
2. 수학교구를 이용한 기하평균 발견 방법을 확인하고, 기하평균에 대한 깊은 이해를 한 후 원리를 발견할 수 있다.

<<이번 시간에 만들 목표 도형>>

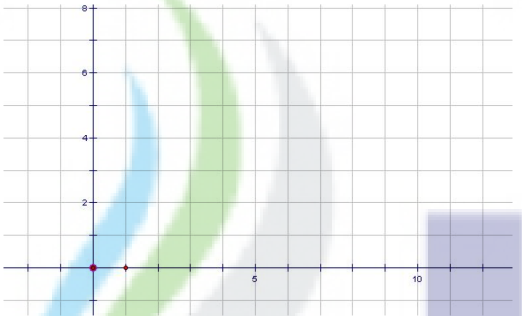


탐구문제1 지수 함수를 이용한 기하평균의 의미를 확인해 봅시다.

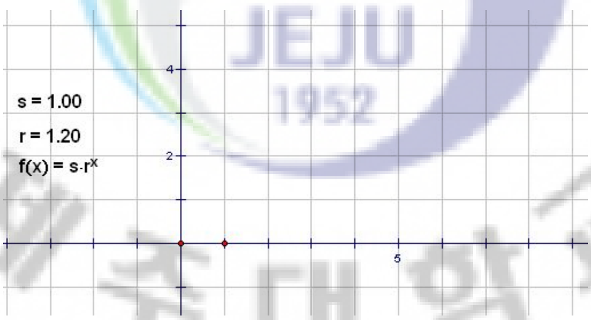
<<지수 함수를 이용한 기하평균의 발견 방법>>

GSP 프로그램을 이용하여 지수 함수를 그리고, 지수 함수의 각 좌표를 통해서 기하평균이 어떻게 형성되는지 확인한다. 그 과정에서 기하평균의 원리를 발견한다.

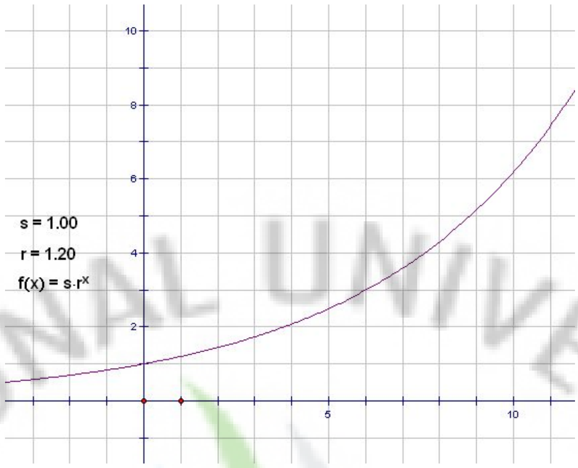
1단계) 지수 함수 $f(x) = s \cdot r^x$ 를 GSP 프로그램을 이용해서 그린다.



<만드는 방법>

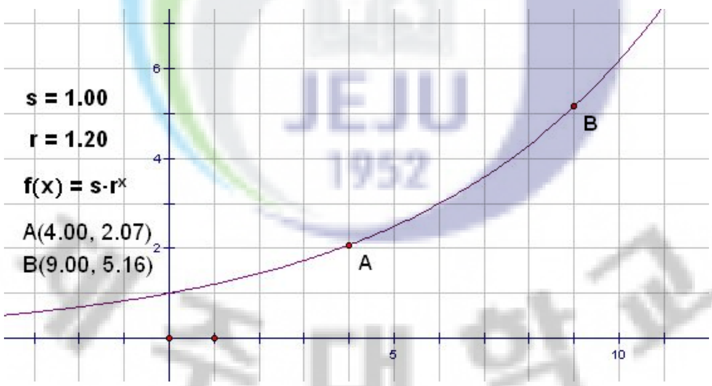


<만드는 방법>

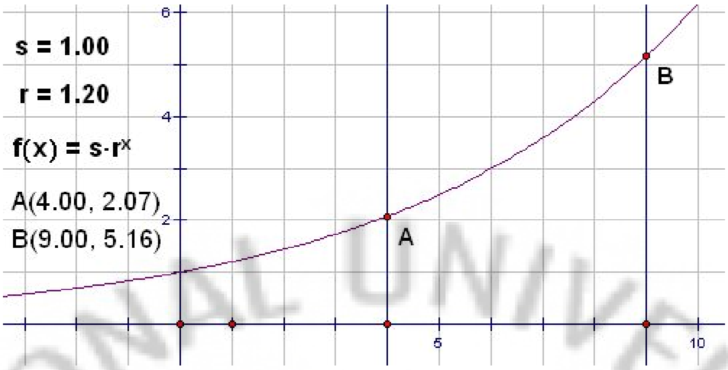


<만드는 방법>

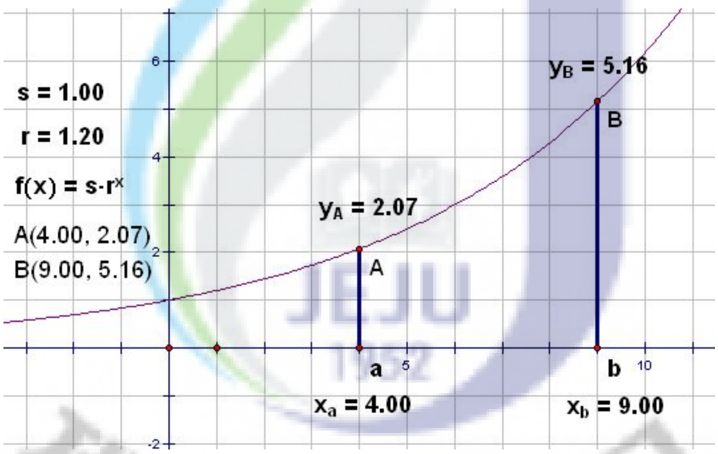
2단계) 지수 함수에서 좌표 A와 좌표 B를 선정하고, x축에 좌표 A와 좌표 B의 x 좌표의 산술 평균을 찾고, 그 점에 연결된 y 좌표를 확인한다.



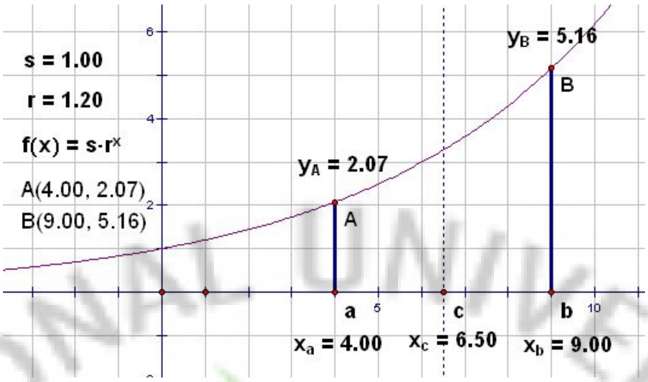
<만드는 방법>


s = 1.00
r = 1.20
f(x) = s·r^x
A(4.00, 2.07)
B(9.00, 5.16)
A
B

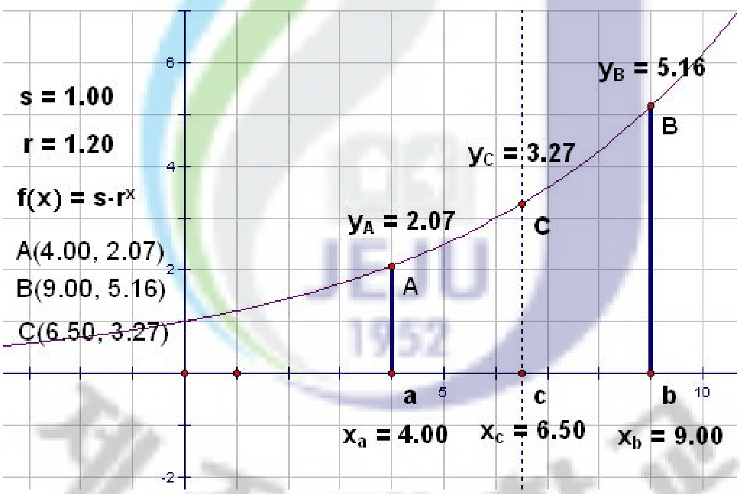
<만드는 방법>


s = 1.00
r = 1.20
f(x) = s·r^x
A(4.00, 2.07)
B(9.00, 5.16)
yA = 2.07
yB = 5.16
A
B
a
b
xa = 4.00
xb = 9.00

<만드는 방법>

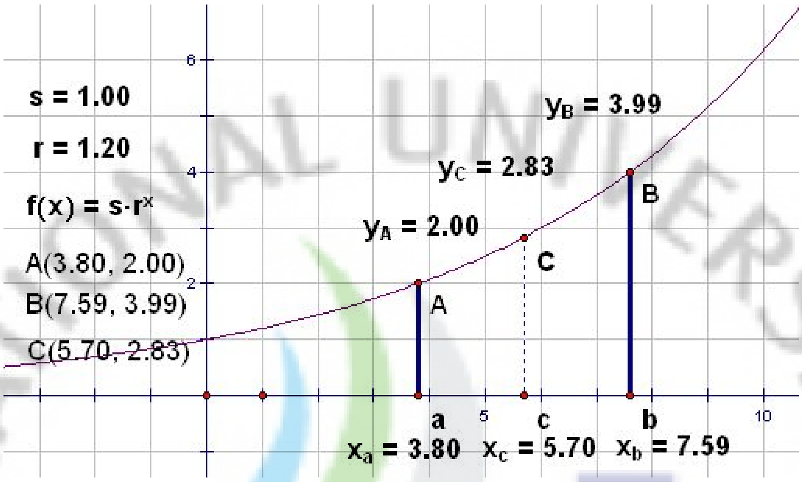

s = 1.00
r = 1.20
f(x) = s·r^x
A(4.00, 2.07)
B(9.00, 5.16)
y_A = 2.07
y_B = 5.16
A
B
a
c
b
x_a = 4.00
x_c = 6.50
x_b = 9.00

<만드는 방법>


s = 1.00
r = 1.20
f(x) = s·r^x
A(4.00, 2.07)
B(9.00, 5.16)
C(6.50, 3.27)
y_A = 2.07
y_B = 5.16
y_C = 3.27
A
B
C
a
c
b
x_a = 4.00
x_c = 6.50
x_b = 9.00

<만드는 방법>

3단계) 점들을 옮겨가면서 x축 위의 점과 그래프 $f(x)=s\cdot r^x$위의 y축 점들 사이의 관계를 확인하고, 어떻게 변하는지 확인하시오.



<x축 위의 점들 사이의 관계>

<$f(x)=s\cdot r^x$그래프 위 점들 사이의 관계>

탐구문제2 위의 활동을 통해서 기하평균에 관한 내용을 발견해 봅시다.

지수 함수를 이용한 단계별 과정을 거쳐 기하평균의 내용을 알아보았습니다. 이 과정을 통해서 알게 된 기하평균에 관한 내용을 써보시오. (단, 자신의 아이디어와 단계별 과정을 연결해서 쓰시오.)

사. 평균의 정의 및 기하평균의 의미 7 (자료 번호 7)

교사용 학습 프로그램

자료번호	7	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	평균의 정의 및 기하평균의 의미 8		
학습목표	산술평균, 기하평균, 조화평균의 의미를 이해할 수 있다. 기하평균의 다양한 발견 방법 중 한 가지를 이해할 수 있다.		
학습교구			

<<이번 시간 목표>>

1. 산술평균, 기하평균, 조화평균의 의미를 설명해봅시다.
2. 기하평균의 다양한 발견 방법 중 한 가지를 이해하고 발견해 봅시다.

탐구문제1 평균의 의미를 말해봅시다.

평균이란 어떤 집합의 구성원 값들 사이의 중간 값을 나타내는 양을 말한다. 이를 다른 단어로 평균치 또는 대표치(average, mean)라고 한다.

위에서 말하고 있는 평균 즉 대표치는 계산하는 방법에 따라서 계산적 대표치(calculated mean)와 위치적 대표치(mean of position)로 나뉜다. 여기에서 계산적 대표치로는 변수전체를 사용하여 산출해 내는 대표치이다. 따라서 이 대표치는 변수 전체의 함수이므로 어느 하나의 변수의 변화에 의해

서도 영향을 받는다. 이 계산적 대표치로서는 산술평균(arithmetic mean), 기하평균(geometric mean), 조화평균(harmonic mean), 평방평균(quadratic mean, root mean square) 등이 있다. 여기에서 위치적 대표치로는 중위수(median), 사분위수(quartile), 최빈치(mode) 등이 있다.

탐구문제2 산술평균의 의미를 말해봅시다.

산술 평균은 모든 자료의 값을 더해서 자료의 수로 나눈 값을 말한다.

X(산술평균) = $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ (숫자가 n 개 일 때)

산술 평균에는 단순 산술 평균과 가중 산술 평균이 있다.

단순 산술 평균은 모든 자료의 합을 그 개수로 나누어 구하는 것이다.

가중 산술 평균은 자료에 따라서 차이가 있으며 필요에 따라 각 자료에 일정한 가중 값을 곱하여 구하는 것이다.

탐구문제3 기하평균의 의미를 말해봅시다.

기하평균은 기하학에서 많이 사용되는 평균이란 의미에서 붙여진 이름이다. 기하평균은 등비수열의 형태와 같이 공비에 해당되는 비율로 시간 경과에 따라 비율의 대표치를 말한다. 그리고 기하평균은 곱하기에 대한 평균을 말한다.

x, y에 대한 곱하기에 대한 평균을 말하며,

r(기하평균) = $\sqrt{xy}$

기하평균이라는 용어는 고대 그리스에서부터 사용되기 시작하였다. 대부분의 경우 기하평균은 제곱근을 구하므로 무리수가 되는데, 고대 그리스에서는 무리수를 수로 인정하지 않았기 때문에, 이와 같이 구한 평균은 기하적인 의미만을 갖는다고 하여 기하평균이라는 이름을 붙였다. 기하평균은 인

구변동률, 물가상승률, 은행복리, 이자 계산 등과 같이 변화하는 비율을 나타낼 때 주로 사용된다.

탐구문제4 조화평균의 의미를 말해봅시다.

조화 평균은 각 자료의 역수를 산술평균하여 이를 다시 역수로 표시하는 값을 말한다. 시간적으로 계속하여 변하는 변량, 속력 등에 사용되는 대표치로 역수를 갖는 변량 외에는 거의 사용하지 않는다.

$$H(\text{조화평균}) = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

<<관련자료>>

• 산술 · 기하 · 조화평균의 역사적 발생과정

1) 피타고라스

수학자 피타고라스는 다음과 같은 평균에 관한 생각을 한 것으로 알려져 있다.

(단, 0<a<b<c)

① $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$

② $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$

③ $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$

위 식에서 두 양수 a와 c에 대하여 정리하면 b는 어떤 의미에서 평균이라 할 수 있다. ① $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}$, ② $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}$, ③ $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$ 을 b에 대하여 풀면 $b=\frac{a+c}{2}, b=\sqrt{ac}, b=\frac{2ac}{a+c}$이 되어 각각 산술, 기하, 조화평균이 된다. 일설에 의하면 위 세 가지 관계는 알큐다스(Archytas, 피타고라스학파의 한사람)에 의하여 발견되었다고 한다.

2) 유클리드

그리스 시대의 수학자로 기하학의 창시자로 불리는 유클리드는 반원을 이용하여 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 대한 증명을 완성시켰다.

[정리] 그림과 같이 중심 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양끝으로 하는 반원을 그리고 반원 위의 한 점 C를 잡자. 지름 AB의 길이를 2L, AH=x, HB=y, CH=z, AB⊥CH이라 할 때, $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$가 성립한다.

[증명] △ACH에서 $(AC)^2=x^2+z^2$

△BCH에서 $(BC)^2=y^2+z^2$

또, $\angle C=90°$ (지름에 대한 원주각)에서 $(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$이 된다.

그러므로 $(x+y)^2=x^2+z^2+y^2+z^2$, 정리하면 $2xy=2z^2$이 된다.

따라서 $z=\sqrt{xy}$ 성립한다. z가 반지름 L과 같을 때 최대가 되므로 $\frac{x+y}{2}=L\geq z=\sqrt{xy}$ 이 성립한다.

3) 파푸스

알큐다스(피타고라스학파의 한 사람)가 발견한 산술 · 기하평균의 작도법을 더욱 발전시켜 산술 · 기하 · 조화평균 작도법을 발견해 냈다.

[정리] 그림과 같이 점 O를 중심, 두 점 A, B를 지름의 양끝으로 하는 반원에서 AB⊥CD, OC⊥DE, AD=a, DB=b라 하면,

$OC=\dfrac{a+b}{2}$, $CD=\sqrt{ab}$, $CE=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

[증명] $AB=a+b$(지름), $OC=\dfrac{a+b}{2}$(반지름) ⋯ ①

$OD=AD-AO=a-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}$ ⋯ ②

△OCD는 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의하여

$CD=\sqrt{(OC)^2-(OD)^2}=\sqrt{ab}$ 이 성립한다.

또 $\triangle OCD \propto \triangle CDE$ 이므로 $OC:CD=CD:CE$ 이다.

따라서 $CE=\dfrac{(CD)^2}{OC}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

[정리] 그림은 선분 OB의 수직선상에 BD=BE가 되게 긋고 A에서 OB의 수직선을 세워 OD와 교점을 F라하고, 선분 OB와 선분 FE와의 교점을 C라고 하면 선분 OA

와 선분 OB의 조화 평균은 OC가 된다.

[증명] $OA=a$, $OB=b$라 하면 $\triangle OAF \propto \triangle OBD$이고 $\triangle OFC \propto \triangle BEC$ 이므로 $a:b=AF:BE=AC:CB$ 이다.

$CB=b-OC$, $AC=OC-a$ 이므로 $a:b=(OC-a):(b-OC)$이다.

따라서 $OC=\dfrac{2ab}{a+b}$ 이다.

4) 데카르트

데카르트는 알큐다스의 반원을 이용한 산술·기하평균의 관계를 응용하여 다음과 같이 $\sqrt{a}$를 작도하였다.

5) 음악에서 발견되는 산술평균과 조화평균

피타고라스는 음악의 음계와 숫자의 비율 사이의 밀접한 관계를 발견하였다. 그는 현악기의 현의 길이를 $\frac{3}{4}$으로 줄이면 4도 높은 음을 나타내고, $\frac{2}{3}$으로 줄ㄹ이면 5도 높은 음을 나타내며, 그 길이를 절반으로 줄이면 한 옥타브 높은음을 나타낸다고 하였습니다. 그러므로 만일 현의 길이가 12였으면 4도, 5도, 한 옥타브 높은 음을 나타내는 길이는 각각 9, 8, 6이 됩니다. 이 수들에서는 산술평균과 조화평균의 관계가 발견됩니다. 9는 6과 12의 산술평균이고, 8은 6과 12의 조화평균이 됩니다. 또 어떤 음과 5도 높은 음은 화음을 구성하므로 조화평균을 영어로 Harmonic Mean이라고 합니다. 피타고라스는 육면체의 면의 수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수가 각각 6, 8, 12임을 발견하였습니다. 이때, 8은 6과 12의 조화평균입니다. 그래서 육면체를 조화체라고 부르기도 합니다.

탐구문제5 기하평균의 증명 방법을 알아봅시다.

<<제곱근을 이용한 증명 방법>>

두 개의 자연수를 주어, 수의 곱을 이용한 제곱근을 기하평균이라고 한다.

1단계) a = 4, b = 9 일 때, a와 b 두 수의 산술평균을 찾아보시오.

$$\frac{a+b}{2}=\frac{4+9}{2}=\frac{13}{2}=6.5$$

2단계) a = 4, b = 9 일 때, $a\times b=36$이 된다. 이러한 경우에 $\square\times\square=36$이 되는 □를 찾아보시오.

$a\times b=36$, $\square\times\square=36$,
$6\times 6=36$이므로 $\square=6$이다.

이 □가 a 와 b 두 수의 기하평균이 된다.

3단계) a = 4, b = 25일 때, 두 수가 만드는 기하평균을 찾아보시오.

$a\times b=4\times 25=100$,
$\square\times\square=100$,
$10\times 10=100$이므로 $\square=10$이다.

학생용 학습 프로그램

자료번호	7	관련교육과정	<5-나> 7. 자료의 표현
탐구주제	평균의 정의 및 기하평균의 의미 7		
학습목표	산술평균, 기하평균, 조화평균의 의미를 이해할 수 있다. 기하평균의 다양한 발견 방법 중 한 가지를 이해할 수 있다.		
학습교구			

<<이번 시간 목표>>

1. 산술평균, 기하평균, 조화평균의 의미를 설명해봅시다.
2. 기하평균의 다양한 발견 방법 중 한 가지를 이해하고 발견해봅시다.

탐구문제1 평균의 의미를 말해봅시다.

평균이란 어떤 집합의 구성원 값들 사이의 중간값을 나타내는 양을 말한다. 이를 다른 단어로 평균치 또는 대표치(average, mean)라고 한다.

탐구문제2 산술평균의 의미를 말해봅시다.

산술 평균은 모든 자료의 값을 더해서 자료의 수로 나눈 값을 말한다.

X(산술평균) = $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ (숫자가 n 개 일 때)

탐구문제3 기하평균의 의미를 말해봅시다.

기하평균은 기하학에서 많이 사용되는 평균이란 의미에서 붙여진 이름이다. 기하평균은 등비수열의 형태와 같이 공비에 해당되는 비율로 시간 경과에 따라 비율의 대표치를 말한다. 그리고 기하평균은 곱하기에 대한 평균을 말한다.

x, y에 대한 곱하기에 대한 평균을 말하며,

$$r(\text{기하평균}) = \sqrt{xy}$$

탐구문제4 조화평균의 의미를 말해봅시다.

조화 평균은 각 자료의 역수를 산술평균하여 이를 다시 역수로 표시하는 값을 말한다. 시간적으로 계속하여 변하는 변량, 속력 등에 사용되는 대표치로 역수를 갖는 변량 외에는 거의 사용하지 않는다.

$$H(\text{조화평균}) = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

탐구문제5 기하평균의 증명 방법을 알아봅시다.

<<제곱근을 이용한 증명 방법>>

두 개의 자연수를 주어, 수의 곱을 이용한 제곱근을 기하평균이라고 한다.

1단계) a = 4, b = 9 일 때, a와 b 두 수의 산술평균을 찾아보시오.

2단계) a = 4, b = 9 일 때, $a \times b = 36$이 된다. 이러한 경우에 $\square \times \square = 36$이 되는 □를 찾아보시오.

이 □가 a 와 b 두 수의 기하평균이 된다.

3단계) a = 4, b = 25일 때, 두 수가 만드는 기하평균을 찾아보시오.

Ⅳ. 결론 및 제언

제7차 교육과정 초등학교 수학에서는 5학년에 평균에 대한 내용을 학습하고 있다. 이 과정에서 평균은 산술평균이라는 수학적 오개념이 발생하고 있다. 그리하여 수학적 오개념을 없애기 위하여 자세하게 가르치지는 않더라도 평균의 종류 및 그 내용에 대해서 약간은 설명을 해야 한다는 생각을 갖게 되었다. 하지만 초등학교 학생들에게는 아직 어려운 점이 많아 영재 학생들을 대상으로 하는 수업으로 한정을 두었다. 그래서 개발하게 된 프로그램은 GSP 프로그램을 이용해서 산술 기하평균을 중심으로 직접 만들고, 원리와 개념을 발견할 수 있도록 하였다. 개발 프로그램 1번부터 6번까지는 여러 가지 교구와 컴퓨터, GSP 프로그램을 이용해서 산술평균과 기하평균의 차이, 기하평균의 의미, 기하평균의 원리 발견 등 여러 가지 내용을 하고 있다. 마지막 프로그램 7번에서는 산술평균, 기하평균, 조화평균의 기본적인 개념과 원리를 확인하고 정리할 수 있도록 개발하였다. 이 과정을 통해서 아동들이 스스로 발견하고 탐구한 내용을 정리하고 확인할 수 있도록 유도하였다. 개발된 프로그램을 통해서 스스로 발견하고 탐구하도록 하여, 수학 수업의 다양성을 보여주고자 하였다. 그리고 이 과정을 통해서 학생들에게 수학적 사고력과 탐구하는 능력을 기를 수 있을 것이다. 또한 단순하게 수학적 지식을 암기하는 것이 아니라 수학적 지식 및 원리가 어떻게 생겨났으며 왜 이러한 개념이 필요한지 설명할 수 있게 될 것이다. 그 외에도 어려운 수학 지식이라도 쉽게 아이들에게 이해시킬 수 있음을 보여줄 수 있을 것으로 보인다. 마지막으로 우리나라에서 교육되고 있는 산술·기하·조화평균에 대한 내용은 아동들로 하여금 공식 암기와 문제 풀이를 위한 공부만 행해지고 있는 전형적인 주입식 교육의 모습을 나타내고 있다. 그래서 다양한 수학 교구를 이용해서 산술평균과 기하평균에 대해서 알아보고, 차이점과 개념에 대해서 심도 있게 공부할 수 있는 프로그램을 통해서 수학 수업에 대한 흥미를 높일 수 있을 것으로 보인다.

하지만 이 프로그램을 아이들에게 적용해 보지 않았다는 점에서 아쉬움이 많이 남는다. 앞으로 이 프로그램을 적용해 보고, 부족한 점과 바꿔야 할 점 등에 대해서 연구를 더 해야 한다고 생각한다. 그리고 개발자뿐만 아니라 다른 교사들이 수업에 활용함에 있어서 활용할 수 있는 능력이 요구된다. 있는 프로그램을 활용한다는 생

각보다는 이 프로그램을 가지고 수업을 진행함에 있어서 필요한 지식에 대한 관심을 갖고 수업을 진행해 나간다면 산술·기하평균에 대한 개념과 원리를 쉽게 이해할 수 있게 가르칠 수 있을 것으로 보인다.

그리고 프로그램 개발을 통해서 어린 아동들이라서 못할 거라는 생각보다는 얕은 지식만 많이 전달하는 것보다는 작은 내용이라도 깊게 이해하고 스스로 알아갈 수 있는 기회를 제공해 주었으면 좋겠다.

앞으로 이러한 프로그램뿐만 아니라 다양한 프로그램을 만들어 아동들이 가지고 있는 지식에 대한 목마름을 해소시켜 주고 싶은 생각이 든다. 기하평균과 산술평균뿐만 아니라 다양한 수학 지식에 대해서 심도 있는 수업이 이루어질 수 있는 연구가 필요하겠다.

V. 참고문헌

강옥기, 이환철, 정순영(2009). 중학교 수학 9-나. 서울: (주)두산

고현주 외 9인(2009). 중학교 수학 2. 서울: (주)두산

교육인적자원부(1997). 제7차 초등학교 수학과 교육과정. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(1997). 제7차 중학교 수학과 교육과정. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2006). 제7차 수정・고시 초등학교 수학과 교육과정. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2006). 제7차 수정・고시 중학교 수학과 교육과정. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 1-1. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 2-2. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 3-나. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 4-나. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 5-가. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 수학 6-나. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 1-1. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 2-2. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 3-나. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 4-나. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 5-가. 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2009). 초등학교 교사용 지도서 수학 6-나. 서울: 교육인적자원부.

김남희 외 9인(2009). 중학교 수학 1. 서울: (주)두산
김진호 외 9인(2009). 고등학교 수학 1. 서울: (주)두산
강형종(2000). 산술·기하·조화평균의 관계에 관한 연구. 미출판 석사학위 논문. 한양대학교 교육대학원. 서울.
김시웅(2004). 초등 수학 영재의 판별 방법 및 절차에 관한 연구. 미출판 석사학위 논문. 대구교육대학교 교육대학원. 대구.
남승인(1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 세미나> 제2집. pp. 35-37
장민정(2006). GSP를 활용한 학습이 아동의 수학과 학업성취에 미치는 효과. 미출판 석사학위 논문. 국민대학교 교육대학원. 서울.
최성규(2004). 여러 가지 평균에 관하여. 미출판 석사학위 논문. 충남대학교 교육대학원. 충남.
최지영(2006). 산술·기하·조화평균에 관한 연구. 미출판 석사학위 논문. 성균관대학교 교육대학원. 서울.
Dan Gustafson, James Olsen(2008). Using internet applets, GSP, And other representations to increase student understanding of the geometric mean. Western Illinois University.

ABSTRACT

A Development Program of Gifted Education Through GSP
- Focus on geometric means -

Kim, Min Young

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Keunbae Choi, Ph. D

The 7th elementary school curriculum contains systematic educational guide for the teaching of probability and statistics for the 1st graders through 6th graders. But the concept of average first introduced in the 5th year of elementary school creates misconception among learners that average refers to arithmetic average return. The misconception may cause the students to internally harbor unnecessary resistance to or anxiety about the subject "mathematics." This is the reason that the study is intended to provide explanation about types and details of average, even though it may not be detailed. Despite that, there were lots of difficulties in developing programs for elementary schoolers. This is why the program is limited to class for gifted and talented students. As far as classes for arithmetic average return and geometric means return are concerned, a variety of educational tools and

GSP programs were employed to explain difference between the two as well as the meaning and principle of geometric means return. Among the seven programs, No. 1 to 6 involve a variety of educational tools, computer and GSP program to give students better understanding of concept and principles. NO. 7 program is developed to summarize basic concept and principles of arithmetic average return, geometric means return and harmonic average. These programs are all designed to induce students to find and discover principles and meanings for themselves. The programs are developed to promote students′ capability to find answers for themselves, allowing them to be accustomed to thinking over and discovering mathematic concept and principles for themselves. These are all designed not for cramming their heads with facts but for providing genuine understanding of the origin of mathematic concept and principles. These materials not just provide an opportunity to give students in-depth look at mathematics but motivate students to apply these concept and principles to different mathematic knowledge.

※ key words: Geometric mean(기하평균), Gifted(Talented) person(영재),
GSP Program(GSP 프로그램)