

碩士學位論文

Hopfield 신경회로망에서 뉴론의 입력단 저항에 관한 연구



濟州大學校 大學院
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY
電氣電子工學科

金 容 完

110.499

2000 年 12 月

Hopfield 신경회로망에서 뉴론의 입력단 저항에 관한 연구

指導教授 康 珉 濟

金 容 完



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함.

2000 年 12 月

金容完의 工學 碩士學位 論文을 認准함.

審査委員長

許 良 會



委 員

康 珉 濟



委 員

金 慶 淵



濟州大學校 大學院

2000 年 12 月

**A Study on Neuron's Input Resistance
in Hopfield Neural Networks**

Yong-Wan Kim

(Supervised by professor Min-Je Kang)



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING

DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

2000. 12.

목 차

SUMMARY	1
I. 서 론	2
II. Hopfield 신경회로망의 구성 및 동작	4
III. 시스템의 안정성 및 평형점 분석	8
1. 뉴론의 입력단에서의 안정성 분석	8
2. 시스템의 평형점 위치	15
3. 시스템의 평형점 판별	21
IV. 억제성 시냅스가 포함된 시스템의 구현	31
1. 억제성 시냅스	31
2. 인버팅 뉴론을 이용한 시스템의 구현	32
3. 최적화된 음저항의 구현	38
1) 증폭기를 이용한 음의 임피던스	38
2) 입력 컨덕턴스의 스케일링	40

V. 입력단에 연결된 캐패시터의 영향	43
1. 2-bit A/D 컨버터의 과도해석	43
2. 평형점의 안정성 분석	44
VI. 결 론	51
참 고 문 헌	52



SUMMARY

The parasitic resistor and capacitor are attached to the input node of neurons, and these components have been known to contribute to the system's stability. However, what effect these components have on the system's stability has yet to be published. Therefore, we wish to examine the effects of the conductance and capacitance on the stability and the equilibrium points of the system.

In this paper, the stability of the input space has been analyzed according to the different value of conductance. In addition, the characteristics of output space have been studied by using computational energy function. It is known that the location and characteristics of the equilibrium points of energy functions are changed according to the different value of conductance. And we introduce the inhibitory synapses and present how to implement the system with negative weights using inverting neurons and positive weights. And we will consider the problems caused by using inverting neurons and positive weights instead of using negative weights. And it is shown that the capacitance in the input space of neurons affect not only the speed of the convergence to the equilibrium points but also the direction of the convergence and that it can cause the output of neurons to go to the different convergence point.

I. 서론

신경회로망은 1943년 McCulloch와 Pitts의 논문에서 시작되어 발전해 오다가 한때 침체기를 걸었다. 그러다가 1984년 Hopfield가 귀환성을 갖는 단층신경회로망을 소개한 이래로 신경회로망에 대한 관심이 다시 부활되었다. 이러한 신경회로망의 구현에 관해서는 여러 분야에서 활발히 진행되고 있는데, 생물학 분야에서는 DNA 순서에 있어서 겹쳐져 있는 부분을 알아내는데 이용하고 있고(Ogura 등 1997), 컴퓨터 분야에서는 알고리즘상으로 구현하고 있고(Almulhem 등 1998), 전기·전자 분야에서는 전자소자를 사용해서 하드웨어로 구현하고 있다(Aberbour 등 1997).

신경회로망을 이루는 주된 요소로는 신경세포인 뉴론, 뉴론과 다른 뉴론을 연결하는 시냅스, 그리고 외부 바이어스 입력이 있다. 이러한 신경회로망을 하드웨어로 구현할 때 전자소자를 이용하는데 뉴론은 증폭기를 사용하고, 외부 바이어스 입력은 전류를, 그리고 뉴론과 뉴론을 연결하는 시냅스는 저항을 사용하여 그 역수값을 취한다. 신경회로망에 관한 책이나 논문들을 보면 연결강도가 음수인 경우를 종종 볼 수 있는데, 이 음의 연결강도는 음의 저항을 이용해서 구현해야 한다. 하지만 음의 저항을 구현하는 것은 조금 어렵고 복잡하다. 따라서 뉴론의 출력을 반전시켜 음의 연결강도를 양의 연결강도로 만들어서 사용하는 데, 단순히 출력을 반전시킨 것만으로는 같은 결과가 나오지 않는 경우가 많다. 따라서 음의 연결강도를 양의 연결강도로 변환하는 과정에서 야기되는 문제점을 고려해야 한다. 신경회로망을 하드웨어로 구현할 때 고려해야 할 또 다른 문제점은 다음과 같은데, 시스템의 안정성을 위해서 뉴론으로 쓰이는 증폭기의 입력단에 저항과 캐패시터를 달아준다. 하지만 이것들은 시스템의 안정도와 시정수에 부분적으로 기여한다고는 알려져 있으나, 부수적으로 첨가하는 정도로만 알려져 있을 뿐 이들 소자들이 시스템에 미치는 영향에 대해서는 별로 알려져 있지 않다. 이 점은 하드웨어로 구성하기까지는 별로 느끼지 못하는 부분이다. 회로를 하드웨어로 구성할 때 알고리즘상으로는 아무런 오류가 없는데도 가끔 기

대했던 결과와는 다른 값이 나오곤 하는데, 이것은 뉴론의 입력단에 달아준 저항과 캐패시터에서 기인하는 것이다. 따라서 이 소자들이 시스템의 안정성과 평형점에 미치는 영향에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 음의 연결강도를 양의 연결강도로 변환하는 과정에서 발생하는 문제점에 대해서 고찰하고 그 해결책을 제시한다. 뉴론의 출력을 반전시켜 양의 연결강도로 만들어 준 회로와 원래의 회로는 뉴론의 입력단에서 본 등가회로에 있어서 조금 차이가 나는데, 뉴론의 입력단으로 들어오는 전류는 같지만 뉴론의 입력단에서 본 전체 등가 저항은 다르다. 따라서 이 값을 같게 만들어 주기 위해 뉴론의 입력단에 부수적으로 첨가하는 저항의 값을 적절히 조정한다. 그리고 이 과정에서 이 저항의 값이 음수가 나오는 경우가 있는데 이를 위해 기존에 알려진 음저항 회로를 소개하고 이것을 신경회로망 회로에 적절히 적용하는 방법에 대해 논의한다. 뉴론의 입력단에 부수적으로 연결된 저항과 뉴론과 뉴론을 이어주는 연결강도의 합, 즉 전체 컨덕턴스는 뉴론의 입력단에서의 안정성에 영향을 끼치는데, 그 값이 양, 영, 음 일때로 구분하여 분석하였다. 그리고 연속형 Hopfield 신경회로망에서 뉴론의 입력단에 부수적으로 연결된 저항 값이 출력단에서의 평형점에 미치는 영향을 분석하였다. 평형점의 위치와 특성들이 이 저항 값에 따라서 변하며, 그리하여 신경회로망의 수렴점들이 변하게 된다. 또한 뉴론의 입력단에 회로의 안정성을 위해 부수적으로 첨가된 캐패시터는 회로의 수렴 속도와 밀접한 관계가 있다는 것은 잘 알려져 있다. 하지만 이 캐패시터가 뉴론의 출력의 수렴방향에 영향을 미쳐 시스템의 수렴점을 다르게 하는데 이 논문에서 이에 관해 논의한다.

II. Hopfield 신경회로망의 구성 및 동작

그림 1은 궤환성을 갖는 단층신경회로망의 전기적 모델을 보여준다. 이런 형태의 신경망은 궤환성을 가지며 뉴런의 출력들이 다시 다른 뉴런의 입력에 연결 강도(w_{ij})들을 통하여 연결된다. j 번째 뉴런의 출력(v_j)과 i 번째 뉴런의 입력(u_i)을 연결하는 연결강도(w_{ij})들은 전기적 모델에서는 컨덕턴스를 사용하며, 뉴런의 출력값은 입력단에 매핑되는 함수로써 주로 시그모이드 함수가 쓰인다(Hopfield and Tank, 1985).

신경회로망의 전기적 모델에서 뉴런의 입력단에서 세운 KCL(Kirchhoff's Current Law)을 이용하여 다음의 공식이 유도된다.

$$C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right) = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} v_j - u_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} + g_i \right) \quad (1)$$

식 (1)의 우변은 캐패시터 C_i 로 유입되는 전류의 총량을 나타내며, i 번째 뉴런의 입력에 연결된 전체 컨덕턴스를 G_i 로 다음과 같이 나타내면

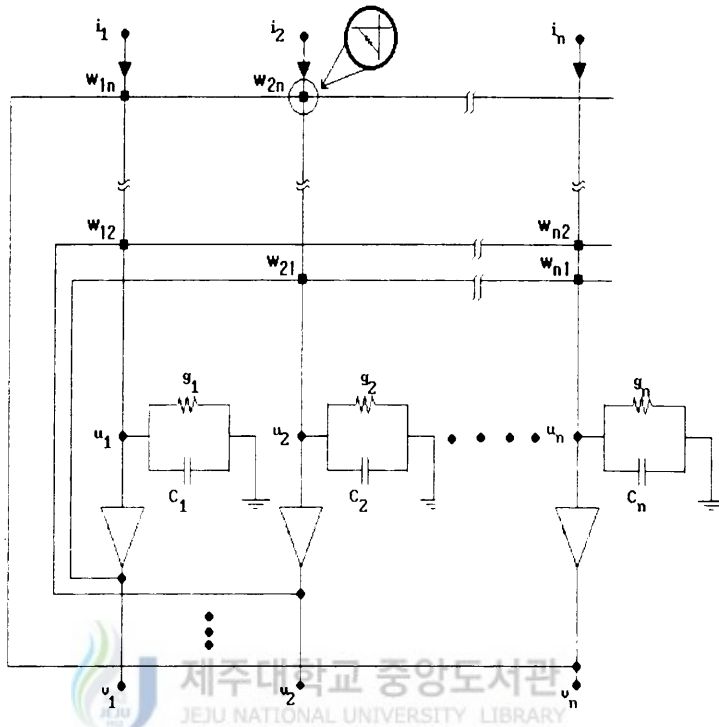
$$G_i \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} + g_i$$

식 (1)은 다음과 같이 간략히 나타내어진다.

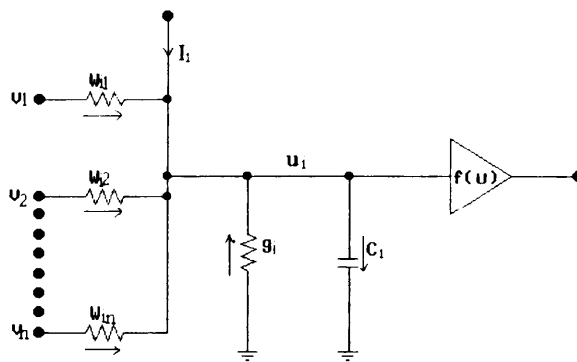
$$C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right) = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} v_j - u_i G_i \quad (2)$$

벡터형식으로 상태방정식과 출력방정식을 다음과 같이 표현 가능하다.

$$C \left(\frac{du}{dt} \right) = Wv(t) - Gu(t) + i(t) \quad (3)$$



(a)



(b)

Fig. 1. Hopfield neural network: (a) Electrical model; (b) input node of i th neuron.

여기서,

$$v(t) = f(u(t)) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda u(t)}} \quad (4)$$

이다.

n차원의 상태방정식으로 표현되는 시스템의 어떤 계산에너지함수의 값을 따라 점근적으로 안정되게 수렴하여 간다면 그 어떤 계산에너지함수를 그 시스템의 Lyapunov함수라 한다. 그림 1에서 신경회로망의 Lyapunov함수는 다음과 같이 알려져 있다(Hopfield, 1984).

$$E(v) = -\frac{1}{2} v^T W v - i^T v + \sum_{i=1}^n G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \quad (5)$$

그림 1의 시스템에서 뉴론의 출력 v는 이 계산에너지함수가 감소하는 방향으로 변하면서 안정되게 수렴해 간다. 식 (5)의 세 번째 항은 뉴론 매핑함수의 역함수를 적분한 것으로 이것을 미분하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{d}{dv_i} \left(G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \right) = G_i u_i \quad (6)$$

연결강도 행렬이 대칭인 점을 고려하여 식 (5)를 연쇄 법칙(chain rule)을 이용하여 시간에 관해 미분해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dt} \\ &= (-Wv - i + Gu)^T \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (3)을 이용하여 식 (7)을 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dt} = -\left(C \frac{du}{dt}\right) \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

그런데, 뉴런의 출력 v 는 입력 u 의 함수이므로 연쇄 법칙을 사용하면 식 (8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -C \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} f'(u) \\ &= -C \left(\frac{du}{dt}\right)^2 f'(u) \end{aligned} \quad (9)$$

$f(u)$ 는 시그모이드 함수이므로 항상 증가 함수이고 미분 값은 양이다. 따라서, 식 (9)의 우변은 항상 음이므로 이 시스템은 시간의 흐름에 따라 에너지가 감소하는 방향으로 수렴하는 시스템임을 알 수 있다.



III. 시스템의 안정성 및 평형점 분석

뉴론의 입력단에 부수적으로 연결하는 컨덕턴스는 시스템의 안정도에 부분적으로 기여한다고 알려져 있으나, 부수적으로 참가하는 정도로 알려져 있을 뿐 이들 소자들이 시스템에 미치는 영향에 대해서는 많이 알려져 있지 않다. 특히, 이 점은 하드웨어로 구성하기 전까지는 별로 느끼지 못하는 부분이다. 연속형 신경회로망의 계산에너지함수의 평형점 및 안정성은 뉴론의 입력단에 부수적으로 연결된 컨덕턴스에 의해 많은 영향을 받는 데, 이 장에서는 이에 대해 설명하고자 한다.

1. 뉴론의 입력단에서의 안정성 분석



이 절에서는 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스가 뉴론의 입력단의 안정성에 얼마나 영향을 끼치는지를 분석한다. 그림 2에서는 i 번째 뉴론의 입력단에서의 회로를 간략히 보여주고 있다. 뉴론의 입력단으로 들어오는 전체 전류를 표시하면

$$I_i = i_i + \sum_{j=1}^n w_{ij}v_j \quad (10)$$

이다. 여기서 i_i 는 외부 입력 전류이다.

식 (2)는 다음과 같이 상태 방정식으로 간략히 표현된다.

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -G_i u_i + I_i \quad (11)$$

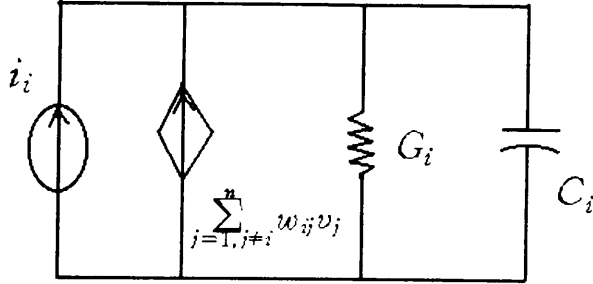


Fig. 2. Equivalent circuit of i th neuron in input space.

이전 장에서 보았듯이 시스템의 출력은 시간이 지남에 따라 에너지 함수를 감소시키면서 점근적으로 안정되게 수렴해간다. 따라서 일정한 시간이 지난 후 출력은 안정되고, 귀환되어 오는 전류 $\sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} v_j$ 는 상수로 취급할 수 있다. 따라서 출력이 안정된 후 전체 전류 I_i 는 상수로 취급할 수 있다. 식 (11)은 다음과 같이 행렬 형태로 표시될 수 있는데,

$$C \frac{du}{dt} = -Gu + I \quad (12)$$

이 방정식의 해는 Laplace변환을 취해서 구할 수 있는데,

$$U(s) = [sI + \frac{G}{C}]^{-1} u(0) + [sI + \frac{G}{C}]^{-1} \frac{I}{Cs} \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} s + \frac{G_1}{c_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + \frac{G_2}{c_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s + \frac{G_n}{c_n} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{c_1 S} \\ \frac{I_2}{c_2 S} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{c_n S} \end{bmatrix} \right\}$$

여기에서 $u(0)$ 는 출력이 안정되었다고 여겨지는 시간에서의 입력 전압이다.

지금부터 출력이 안정된 후에 입력단에서의 안정성에 대해 논의해 보겠다. 서로 다른 입력 컨덕턴스의 값, 즉 양, 영, 음인 경우 세가지 각각에 대해 입력단의 안정성을 조사해보면 다음과 같다.

i) $G_i < 0$ ($g_i < -\sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij}$)

식 (13)을 다시 정리해보면

$$U_i(s) = (u_i(0) - \frac{I_i}{G_i}) \frac{1}{(s + \frac{G_i}{c_i})} + \frac{I_i}{G_i} \frac{1}{s} \quad (14)$$

이고, 식 (14)를 역 Laplace 변환을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_i(t) = (u_i(0) - \frac{I_i}{G_i}) e^{-\frac{G_i t}{c_i}} + \frac{I_i}{G_i} \quad (15)$$

$G_i < 0$ 이므로, u_i 는 지수함수적으로 변한다. 따라서 이 경우의 입력단은 불안정하다.

$$\text{ii) } G_i = 0 \quad (g_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij})$$

앞에 언급된 바와 같이 출력이 안정된 후에 I_i 는 상수로 간주할 수 있으므로 식 (12)는 다음과 같이 풀 수 있다. 식 (13)을 다시 정리해보면

$$U_i(s) = u_i(0) \frac{1}{s} + \frac{I_i}{c_i} \frac{1}{s^2} \quad (16)$$

이고, 식 (16)을 역 Laplace 변환을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_i(t) = u_i(0) + \frac{I_i}{c_i} t \quad (17)$$

식 (17)에서 알 수 있듯이 u_i 는 시간에 대해서 선형적으로 변한다. 따라서 이 경우도 입력단은 불안정하다.

$$\text{iii) } G_i > 0 \quad (g_i > - \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij})$$

이 경우는 식 (15)에서 보듯이 자연 응답의 해가 시간에 따라 지수함수적으로 감소하므로 식 (18)과 같이 된다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = \frac{I_i}{G_i} \quad (18)$$

따라서 이 경우 입력단은 시간이 일정 시간이 지나면 어떤 특정한 값으로 수렴한다. 따라서 이 시스템의 입력단은 안정적이다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

입력단에서의 안정성 해석을 위해 2-bit A/D 컨버터가 선택되었는데, 그림 3에 나타내었다. 2-bit A/D 컨버터의 상태 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있는데, $x = 1.6$, $C_1 = C_2 = 0.1 \mu\text{F}$ 인 식 (12)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^7 & 0 \\ 0 & 10^7 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2-g_1 & 0 \\ 0 & 2-g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

Transient 시뮬레이션은 시그모이드 이득률 $\lambda = 2$, 그리고 서로 다른 입력 컨

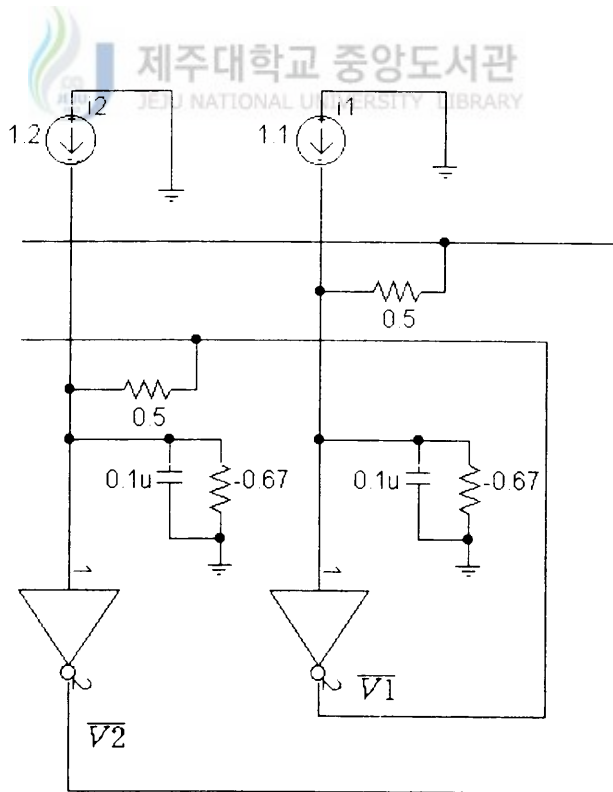
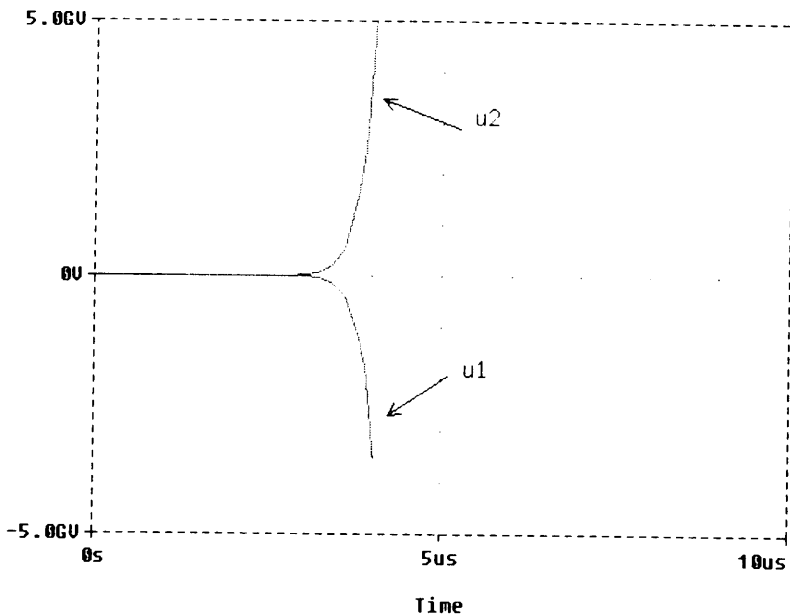


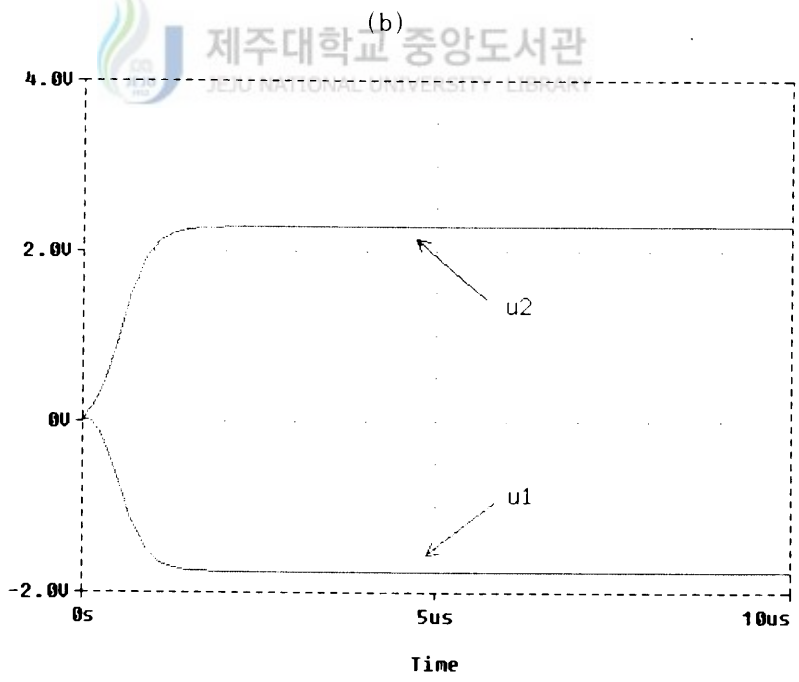
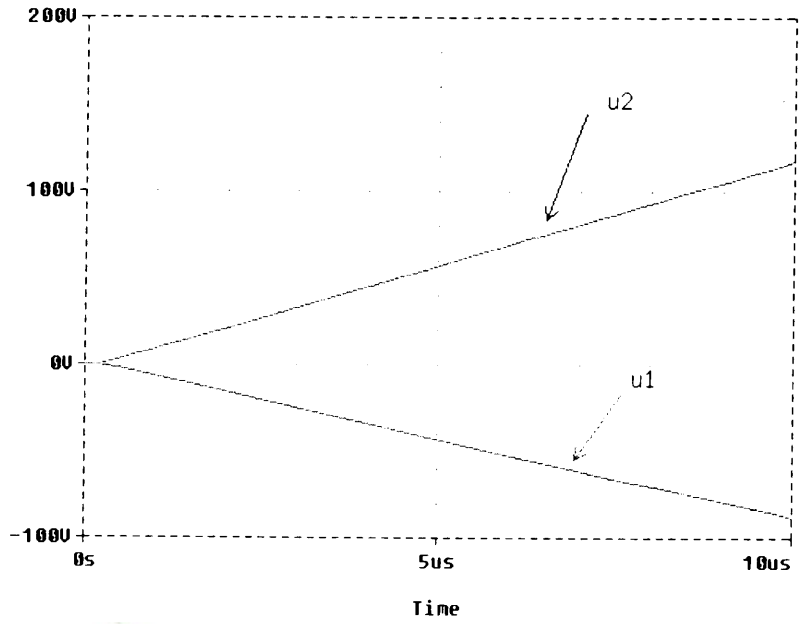
Fig. 3. Two-bit A/D converter.

덕턴스 값을 가지고 행해졌다. 그림 4a에서는 $g_1 = g_2 = 1.5 (G = -0.5)$ 일 때 입력이 지수함수적으로 증가함을 보였고, 그림 4b에서는 $g_1 = g_2 = 2 (G = 0)$ 일 때 입력이 시간에 대해 선형적으로 증가함을 보였다. 그리고 그림 4c에서는 $g_1 = g_2 = 2.5 (G = 0.5)$ 일 때 입력이 어떤 특정한 값으로 수렴하면서 안정함을 보였는데, 처음 두 경우에는는 $-\sum_{j=1}^n w_{ij}$ 보다 크지 않은 입력 컨덕턴스의 값이 시스템의 입력을 불안정하게 만들었다.

여기에서 한 가지 주지할 사항은 처음 두 경우처럼 어떤 조건하에서는 입력단이 불안정할 수 있다. 하지만, 출력단에서는 어떤 경우이든 항상 안정된 값으로 점근적으로 수렴해 간다. 그림 4에서 보듯이 뉴런의 입력단이 전체 컨덕턴스의 값에 따라 달라지는 것을 볼 수 있다. 처음 두 경우가 전체 컨덕턴스의 값이 영이거나 음인 경우인데 이 경우에는 회로가 입력단에서 안정하지 못하고 있다. 세 번째 경우, 즉 전체 컨덕턴스의 값이 양인 경우만이 어떤 특정한 값으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이 경우는 뉴런의 입력단에서 안정하다고 할 수 있다.



(a)



(c)

Fig. 4. Input space of neuron: (a) where $G_i = -0.5$;
 (b) where $G_i = 0$; (c) where $G_i = 0.5$.

2. 시스템의 평형점의 위치

이전 절에서는 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스가 뉴론의 입력단의 안정성에 끼치는 영향에 대해 분석하였다. 이 절에서는 뉴론의 출력단에서의 시스템의 평형점이 뉴론의 입력단에 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 값에 따라 평형점의 위치가 달라짐을 논의하고자 한다.

[정리]

뉴론의 이득률이 유한 값인 연속형 신경회로망에서는 평형점의 위치에 관한 다음의 항들은 사실이다.

(1) i 번째 뉴론의 입력단에 연결된 총 컨덕턴스 $G_i = g_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} = 0$ 이면 평형

점 v^{eq} 는 오직 하나만 존재하며, $(-\infty, \infty)^n$ 에 속한다.

(2) $G_i \neq 0$ 이면 평형점 v^{eq} 는 $(0, 1)^n$ 에 속한다.

◆ 증명 (1)

제시된 에너지함수 식 (5)의 평형점은 다음의 행렬 형태로 표현된 방정식을 풀어서 찾을 수 있다.

$$\nabla E(v) = Wv + I - Gu = 0 \quad (20)$$

여기서,

$$u_i = f^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{v_i}{1 - v_i} \right), \quad (21)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & 0 & W_{23} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & W_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$v(t) = [v_1, v_2, \dots, v_n]^t,$$

$$I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^t,$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^t,$$

$$G = \text{diag} \left[\sum_{j=1}^n w_{1j} + g_1, \sum_{j=1}^n w_{2j} + g_2, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj} + g_n \right]$$

이다. 식 (21)을 이용하여 식 (20)의 제 3항에 관하여 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{G}{\lambda} \ln\left(\frac{v}{1-v}\right) = Wv + I \quad (22)$$

그런데 i 번째 뉴런의 입력단에 연결된 총 컨덕턴스 $G_i = 0$ 인 경우는 식 (22)에서 좌변항은 사라지게 되며, 다음과 같이 재정리 할 수 있다.

$$Wv = -I \quad (23)$$

그리고 W 는 대칭행렬이며, $w_{ii} = 0$ 이면 W 의 역행렬이 존재한다. 고로, 평형점은 다음과 같다.

$$v^{eq} = -W^{-1}I \quad (24)$$

따라서, 평형점 v^{eq} 는 유일하며, $(-\infty, \infty)^n$ 에 속한다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

시뮬레이션을 위해 2-bit A/D 컨버터를 선택하였다. 연결강도와 바이어스 전류를 포함한 에너지 함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E = -\frac{1}{2}[v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \int_{\frac{1}{2}}^{v_1} f^{-1}(z) dz \\ G_2 \int_{\frac{1}{2}}^{v_2} f^{-1}(z) dz \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서 x 는 아날로그 입력 값이다. 식 (20)을 이용하여 에너지함수의 평형점을 찾기 위하여 다음과 같이 쓸 수가 있다.

$$\nabla E(v) = - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G_1}{\lambda} \ln\left(\frac{v_1}{1-v_1}\right) \\ \frac{G_2}{\lambda} \ln\left(\frac{v_2}{1-v_2}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

$G_1 = G_2 = 0$ 이면 식 (26)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla E(v) = - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

식 (27)을 만족하는 평형점은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

그림 5는 식 (28)을 이용하여 평형점의 궤적을 구한 결과를 보여주고 있다. 평형점들은 입력 x 에 따라 선형적으로 변하고 있음을 보여 주고 있으며, 평형점은 전공간 $(-\infty, \infty)^2$ 에 존재함을 보여 주고 있다.

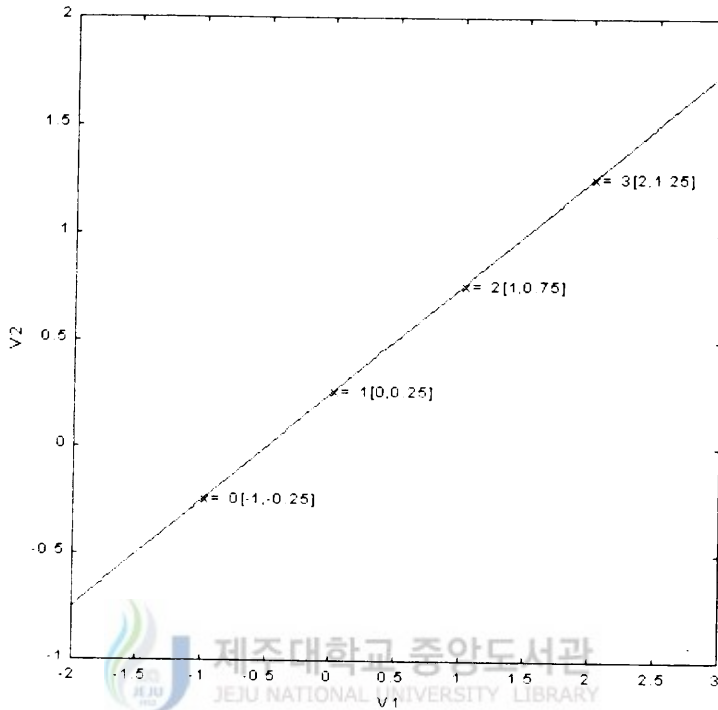


Fig. 5. Trajectory of equilibrium point
where $G_1 = G_2 = 0$.

◆ 증명 (2)

식 (22)의 좌변항을 다음과 같이 정의 하자.

$$S(v_i) \equiv \frac{G_i}{\lambda} \ln\left(\frac{v_i}{1-v_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

$G_i \neq 0$ 이면 식 (29)는 존재하며, $\lambda > 0$, $v_i \in (0, 1)$, $S: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 는 연속적으로 미분가능한 함수이다. $G_i > 0$ 이면 함수 S 는 증가함수이다. 즉,

$$\forall v_i^{x_1}, v_i^{x_2} \in (0, 1), \quad v_i^{x_1} > v_i^{x_2} \Rightarrow S(v_i^{x_1}) \geq S(v_i^{x_2}) \text{ 이고, } \lim_{v_i \rightarrow 0^+} S(v_i) = -\infty,$$

$\lim_{v_i \rightarrow 1^-} S(v_i) = \infty$ 이다. 다시 설명하면 $\forall v_i \in (0, 1) \Rightarrow S(v_i) \in (-\infty, \infty)$ 인데, \mathbb{W} 와

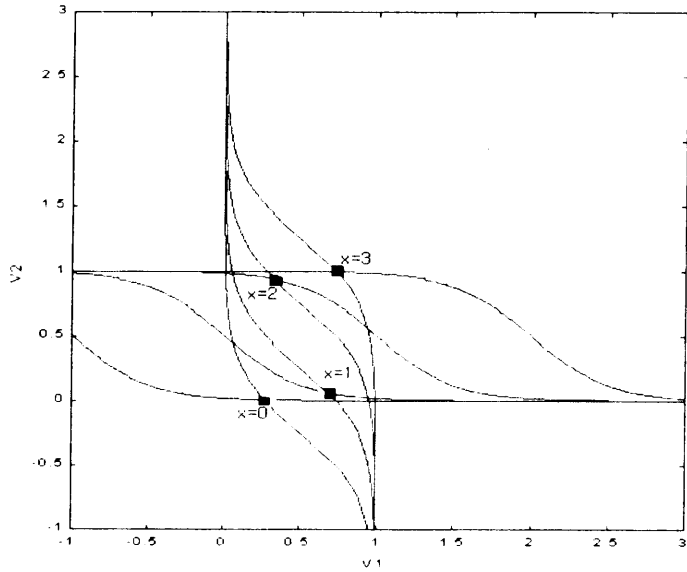
1는 응용회로에 따라 결정되는 상수이므로 식 (22)의 우변은 $\forall v_i \in (0, 1)$ 에서 유한 값이 된다. 따라서 식 (20)을 만족하는 평형점 v^{eq} 는 $(0, 1)^n$ 에 속한다. $G_i < 0$ 인 경우는 함수 S 는 감소함수이다. 다시 말하면 $\forall v_i^{x_1}, v_i^{x_2} \in (0, 1), v_i^{x_1} > v_i^{x_2} \Rightarrow S(v_i^{x_1}) \leq S(v_i^{x_2})$ 이며, $\lim_{v_i \rightarrow 0^+} S(v_i) = \infty, \lim_{v_i \rightarrow 1^-} S(v_i) = -\infty$ 이다. 즉, $\forall v_i \in (0, 1) \Rightarrow S(v_i) \in (\infty, -\infty)$ 인데, 위에서 설명했듯이 식 (22)의 우변은 $\forall v_i \in (0, 1)$ 에서 유한 값이 되므로, 식 (20)을 만족하는 평형점 v^{eq} 는 $G_i > 0$ 인 경우와 마찬가지로 $(0, 1)^n$ 에 속한다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

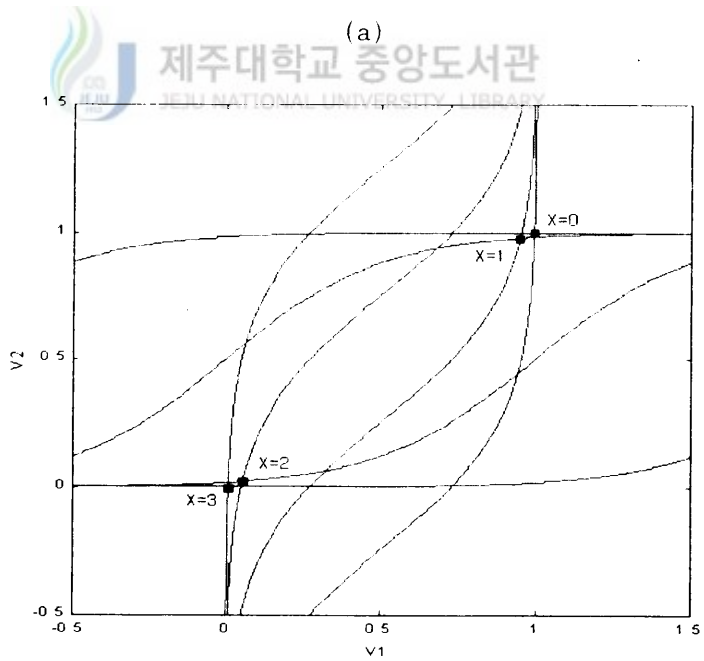
시뮬레이션을 위해 위에서 사용했던 2-bit A/D 컨버터를 다시 선택했으며, 에너지함수의 평형점을 찾기 위하여 식 (22)를 다음과 같이 쓸 수 있다. 위에서 설명했듯이 x 는 아날로그 입력이다.

$$\begin{bmatrix} \frac{G_1}{\lambda} \ln\left(\frac{v_1}{1-v_1}\right) \\ \frac{G_2}{\lambda} \ln\left(\frac{v_2}{1-v_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

그림 6a, 6b는 각각 $G_1 = G_2 = 0.5, G_1 = G_2 = -0.5$ 인 경우에 $x = 0, 1, 2, 3$ 에 대해서 평형점들을 보여준다. 이 그림들은 $x = 0, 1, 2, 3$ 각각의 경우에 식 (30)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 평형점들은 그림 5에서와는 달리 모든 경우에 공간 $(0, 1)^2$ 에 속함을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 6. Equilibrium point: (a) where $G_1 = G_2 = 0.5$, $\lambda = 2$ and $x = 0, 1, 2, 3$; (b) where $G_1 = G_2 = -0.5$, $\lambda = 2$ and $x = 0, 1, 2, 3$.

3. 시스템의 평형점의 판별

이전 절에서 연속형 신경회로망의 계산에너지함수의 평형점은 뉴론의 입력 단계에 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 값에 따라 위치가 달라짐을 밝혔다. 이 절에서는 그 평형점의 극성이 이들 값에 따라 극대, 극소, 또는 변곡점으로 변함을 논의하고자 한다.

[정리]

연속형 신경회로망에서는 평형점의 극성들에 관한 다음의 항들은 사실이다.

- (1) 총 컨덕턴스 $G > 0$ 이면 hypercube의 모서리부근에 위치한 평형점은 극소점이다.
- (2) 총 컨덕턴스 $G = 0$ 이면 평형점의 위치에 상관없이 변곡점이다.
- (3) 총 컨덕턴스 $G < 0$ 이면 hypercube의 모서리부근에 위치한 평형점은 극대점이다.

◆ 증명 (1)

평형점의 극소, 극대, 또는 변곡점인가를 판별하기 위하여 Hessian행렬을 이용하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = -W + G \frac{\partial u}{\partial v} \quad (31)$$

식 (4)에서 뉴론의 활성화함수를 입력 u 에 대해 미분하여, 뉴론의 출력 v 의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{du} &= \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{(1+e^{-\lambda u})^2} \\
&= \lambda \frac{1}{1+e^{-\lambda u}} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\lambda u}}\right) \\
&= \lambda v(1-v)
\end{aligned} \tag{32}$$

식 (32)를 이용하여 식 (31)을 재정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
H = \nabla^2 E(v) &= -W + G \frac{1}{\lambda(v-v^2)} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{G_1}{\lambda(v_1-v_1^2)} & -w_{12} & \cdots & -w_{1n} \\ -w_{21} & \frac{G_1}{\lambda(v_2-v_2^2)} & \cdots & -w_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & \cdots & \frac{G_1}{\lambda(v_n-v_n^2)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{33}$$

Gerchgorin의 Circle이론에 의하면(Stephen, 1986), $\exists \mu_i$ (고유치) s. t

$$\begin{aligned}
\frac{G_i}{\lambda(v_i-v_i^2)} - \sum_{j=1, j \neq i}^n |w_{ij}| \leq \mu_i \leq \frac{G_i}{\lambda(v_i-v_i^2)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |w_{ij}| \\
i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{34}$$

이다. 고유치들을 좀 더 자세히 알아보기 위하여 대각행렬요소를 다음과 같이 정의하자

$$D(v_i) \equiv \frac{G_i}{\lambda(v_i-v_i^2)} \tag{35}$$

총 컨덕턴스 $G_i > 0$ 이면 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$ 는 양의 무한대 값으

로 변하므로 즉, $\forall v_i, \lim_{v_i \rightarrow 0^+} D(v_i) = \infty, \lim_{v_i \rightarrow 1^-} D(v_i) = \infty$ 이며, $\sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij}$ 는 유한한 값이므로, hypercube의 모서리부근($v_i \rightarrow 0^+, v_i \rightarrow 1^-$)에서는 식 (34)에서 알 수 있듯이 Hessian행렬의 모든 고유치들은 양의 값을 갖게 된다. 즉, Hypercube의 모서리부근에서 H는 positive definite이다. 고로 모서리부근에 위치한 평형점은 극소점이 된다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

2-bit A/D 변환기의 경우, 식 (33)을 이용하여 Hessian 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{vmatrix} \frac{G_1}{\lambda(v_1 - v_1^2)} & 2 \\ 2 & \frac{G_2}{\lambda(v_2 - v_2^2)} \end{vmatrix} \quad (36)$$

그림 7은 $x = 1.6, \lambda = 2, G_1 = G_2 = 0.5$ 인 경우, 식 (30)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이며, 이 연립방정식을 만족하는 평형점은 다음과 같이 $v^{eq_1} = (0.0288, 0.9897), v^{eq_2} = (0.6005, 0.4990), v^{eq_3} = (0.9827, 0.0447)$ 3곳이었다. 그리고, 모든 평형점들은 항상 hypercube $(0, 1)^2$ 안에 존재하고 있음을 알 수 있다. 평형점에서 특성들을 알아보기 위해 hessian 행렬의 고유치 값들을 조사해 보면, hypercube의 중심부근의 평형점 v^{eq_2} 에서의 고유치들은 각각 3.0212, -0.9781로 평형점 v^{eq_2} 는 변곡점임을 알 수 있었다. 그러나, 예측한대로 모서리부근의 평형점들, 즉 v^{eq_1} 에서 고유치들은 8.6854와 24.777 그리고, v^{eq_3} 에서 고유치들은 15.1362와 5.4236으로 모두 양의 값들이었다. 고로 모서리부근의 평형점들은 극소점임을 알 수 있다. 그림 8a는 $x = 1.6, \lambda = 2, G_1 = G_2 = 0.5$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주며, 그림 8b와 그림 8c는 모서리 부근에 극소점이 존재함을 보여준다.

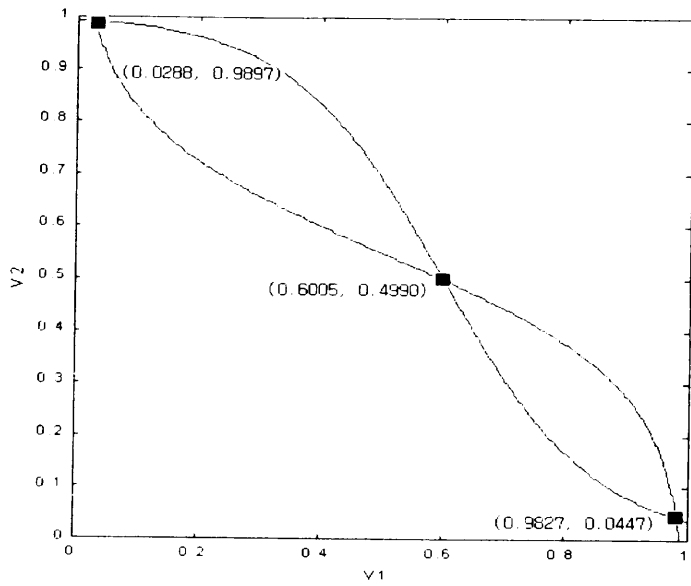
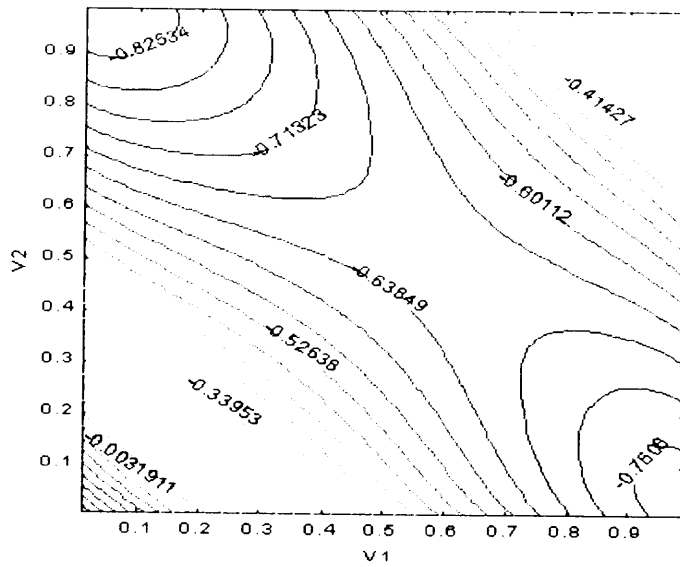
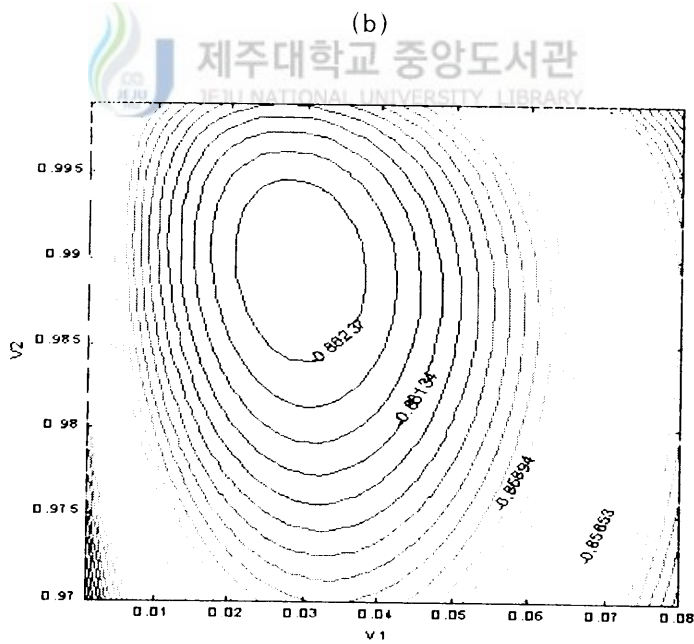
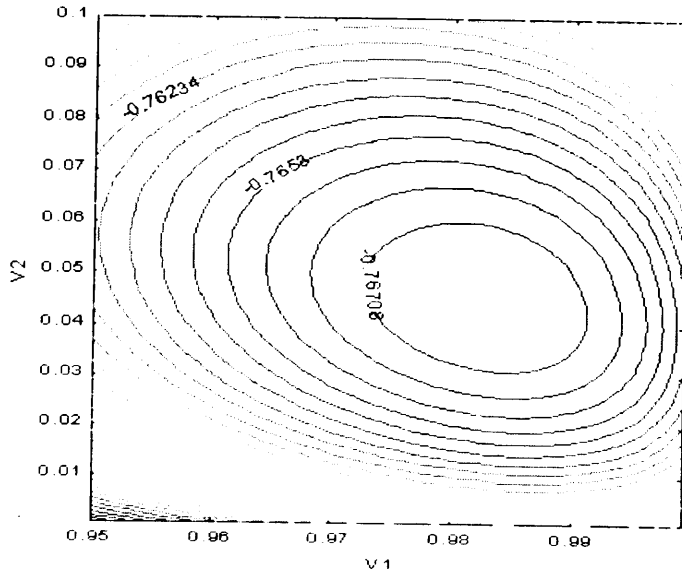


Fig. 7. Equilibrium point where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $G_1 = G_2 = 0.5$.



(a)



(c)

Fig. 8. Energy map: (a) where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $G_1=G_2=0.5$; (b) the down-right corner of Fig. 8a; (c) the upper-left corner of Fig. 8a.

◆ 증명 (2)

$G_i = 0$ 인 경우는 식 (31)에서 우변의 둘째 항이 없으므로 H 는 다음과 같이 되고,

$$H = \nabla^2 E(v) = -W \quad (37)$$

여기서 $W = W^T$, $W_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 이다. 임의 행렬의 trace는 그 행렬의 모든 고유치들의 합과 같으므로 H 의 trace는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$T_r(H) = - \sum_{i=1}^n W_{ii} = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (38)$$

여기서 μ_i 는 H 의 고유치들이다. 그런데, H 의 대각행렬 요소들은 0이므로 ($W_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$), 식 (38)을 재정리하면 다음과 같다.

$$T_r(H) = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0 \quad (39)$$

식 (39)의 뜻은 모든 고유치들이 0이거나, 고유치들의 합이 0임을 뜻한다. 그런데, 모든 고유치들이 0이면, 0행렬을 뜻하므로 이 경우는 의미가 없다. 고로, H 의 고유치들은 양수와 음수들이 섞여있음을 뜻하며, H 는 항상 indefinite이다. 즉, 이 경우의 평형점은 항상 변곡점이다. 그리고 앞에서 보였듯이 이 경우의 평형점은 전 공간에 오직 하나 존재한다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

$G_1 = G_2 = 0$ 인 경우의 Hessian행렬은 식 (36)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

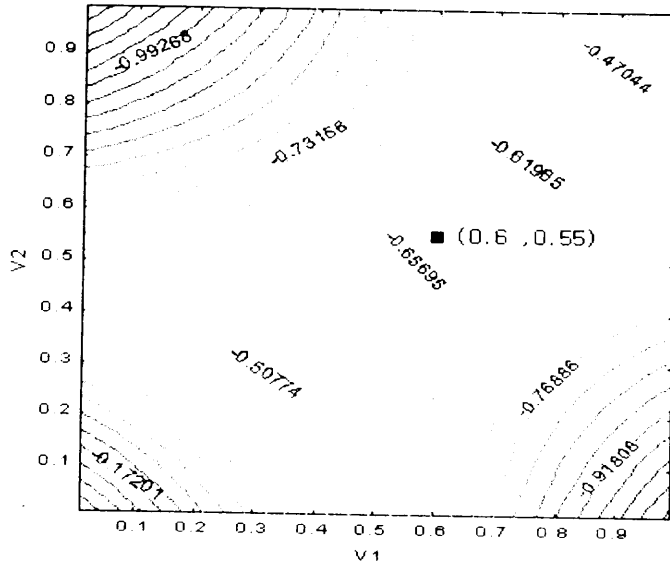


Fig. 9. Energy map where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $G_1 = G_2 = 0$.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

이 경우는 평형점의 위치에 상관없이 H의 고유치들은 항상 2, -2로 평형점은 변곡점이 됨을 알 수 있다. $G_1 = G_2 = 0$ 인 경우, 식 (28)을 만족하는 평형점은 그 식에서 알 수 있듯이 전 공간에서 1개만이 존재하며, $x = 1.6$ 인 경우, 그 점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.6, 0.55)$ 이다. 그리고 그림 9는 $x = 1.6$, $\lambda = 2$, $G_1 = G_2 = 0$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주는데, 그림에서 평형점은 변곡점임을 알 수 있다.

◆ 증명 (3)

$G_i < 0$ 인 경우는 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$ 는 음의 무한대 값으로 변하므로 즉, $\forall v_i, \lim_{v_i \rightarrow 0^+} D(v_i) = -\infty, \lim_{v_i \rightarrow 1^-} D(v_i) = -\infty$ 하고, $\sum_{j=1, j \neq i}^n w_j$ 는 유한한 값이므로, 모서리부근($v_i \rightarrow 0^+, v_i \rightarrow 1^-$)에서 H의 모든 고유치들은 음의 값을 갖게

된다. 즉, 모서리 부근에서 H 는 항상 negative definite이며, 꼭지점 부근에서의 평형점은 극대점이다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

그림 10은 식 (30)의 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 구한 결과이며, 연립방정식을 만족하는 평형점은 다음과 같이 $v^{eq_1} = (0.0130, 0.0091)$, $v^{eq_2} = (0.6716, 0.6394)$, $v^{eq_3} = (0.9599, 0.9468)$ 3곳이었다. 그리고, 역시 모든 평형점들은 항상 hypercube $(0,1)^2$ 안에 존재하고 있다. 그리고 모서리부근의 평형점들, 즉 v^{eq_1} 에서 고유치들은 -19.0412, -28.1855, 그리고 v^{eq_2} 에서 고유치들은 -7.8707, -3.5875으로 예측한대로 모두 음의 값이다. 고로, 모서리부근의 평형점들은 극대점임을 알 수 있다. 그림 11a는 $x = 1.6$, $\lambda = 2$, $G_1 = G_2 = -0.5$ 인 경우의 에너지 맵을 보여주며, 그림 11b와 그림 11c는 모서리 부근에 극대점이 존재함을 보여준다.

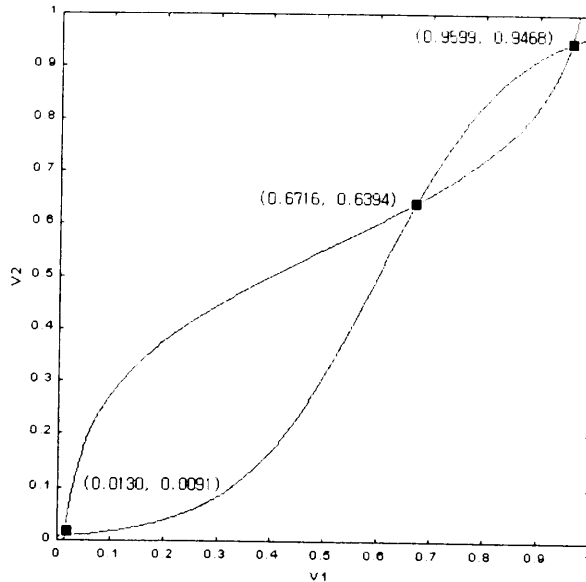
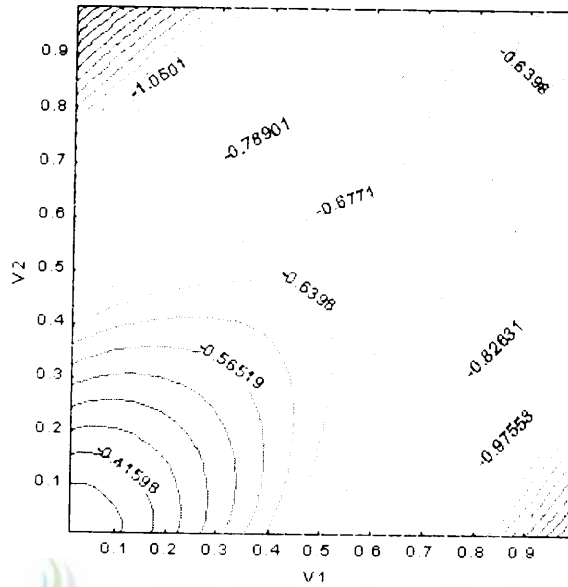
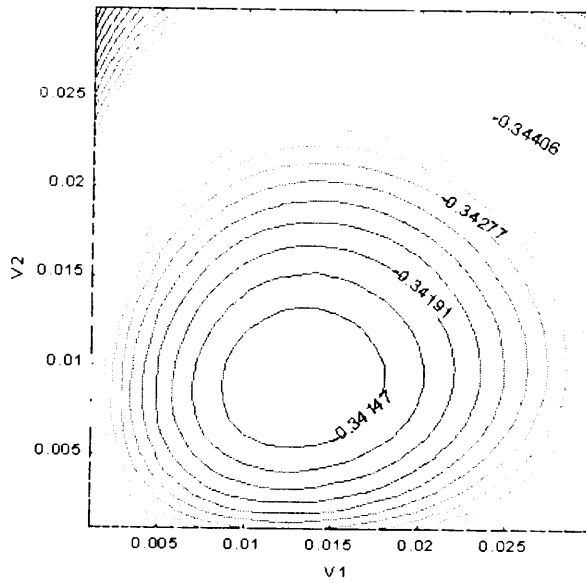


Fig. 10. Equilibrium point where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $G_1 = G_2 = -0.5$



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

(a)



(b)

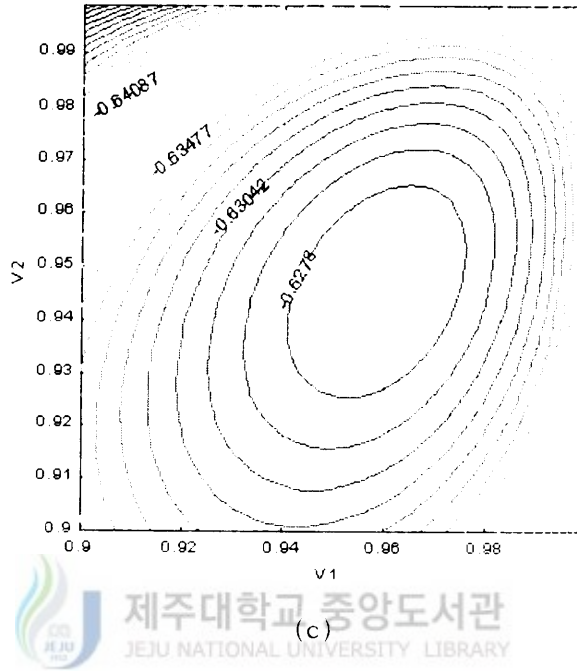


Fig. 11. Energy map: (a) Where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $G_1 = G_2 = -0.5$; (b) the down-left corner of Fig. 9b; (c) the upper-right corner of Fig. 9b.

IV. 억제성 시냅스가 포함된 시스템의 구현

1. 억제성 시냅스

뉴론은 중추신경계의 기본 단위이고, 몸체의 여러 부분으로부터 들어오는 정보를 처리하고 전달한다. 여기서 정보처리의 관점에서 보면 개개의 뉴론은 특별하고 정교한 기능을 가진 세 부분, 본체인 세포체(soma), 복잡하게 갈라진 수상돌기(dendrite), 본체에서 한 줄만 뻗어나왔다가 말단에서 다수로 갈라진 축삭(axon)으로 구성되어 있다. 축삭은 세포체 본체로부터의 신호를 다른 뉴론에 전달하는 섬유(nerve fibers)이다. 수상돌기는 다른 뉴론으로부터의 신호를 받아들이는 부분이다. 즉 다른 뉴론의 축삭의 말단이 여기에 연결되어 있고, 이 연결 부분을 시냅스(synapse)라 부른다. 하나의 뉴론은 평균해서 수 천개, 또는 수 만개의 축삭으로부터 신호를 받는다. 따라서 다수의 축삭을 결합하기 위해서는 수상돌기를 그림 12와 같이 복잡하게 만들어 축삭과 결합하는 장소를 넓힌다. 세포 본체는 많은 입력신호를 가지고 계산을 실행하고, 그 답은 축삭을 통해 다른 뉴론에 전달된다.

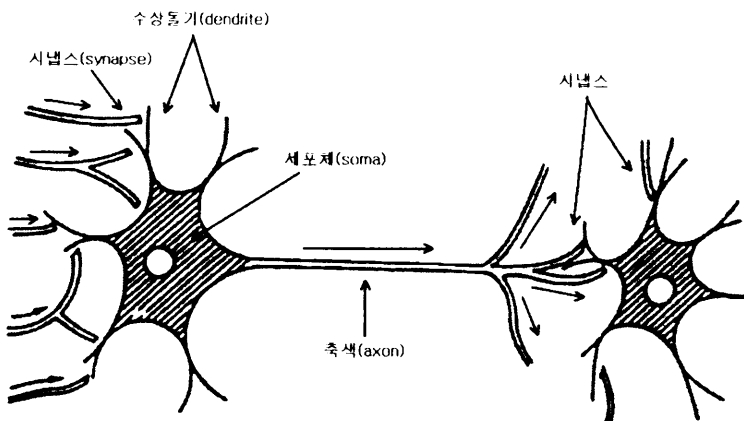


Fig. 12. Structure of neuron.

전기 생리학을 통해 축색을 통과하는 뉴런의 신호를 알아보면, 뉴런 내부의 전위는 외부에 비하여 보통 때는 낮다. 그러나 외부로부터의 입력신호가 도달하면 어떤 조건하에서 뉴런이 흥분하고 내부 전위가 갑자기 높아진다. 시간적으로 보면 1ms정도 밖에 되지 않지만, 이 때 뉴런은 발화했다고 하고 시간폭으로 해서 1ms, 전압으로 해서 0.1V 정도의 펄스가 축색을 통해 나가서 다른 뉴런에 신호로서 전달된다.

뉴런이 발화하게 되는 경우를 살펴보면, 수상돌기에 다른 뉴런으로부터의 전기 펄스가 도달하면 이 곳의 전위가 약간 바뀌는데, 이 변동값이 본체까지 도달하여 여기서 더해진다. 합계가 어떤 임계치(threshold)를 넘을 때 이것이 계기가 되어 뉴런은 발화하고, 임계치를 넘지 못할 경우 아무 반응도 일어나지 않는다. 그런데 펄스가 들어오면 전압이 바뀌는데 이 변동에는 양과 음이 있다. 양이나 음이냐는 원래 뉴런의 종류에 달려 있다. 양인 뉴런을 흥분성 뉴런이라고 하고, 여기를 떠나는 펄스는 다른 뉴런의 수상돌기의 전압을 약간 상승시키고, 그 뉴런을 흥분시키려고 한다. 한편 음의 효과를 갖는 뉴런을 억제성 뉴런이라고 하고, 여기를 떠나는 펄스는 다른 뉴런의 수상돌기의 전압을 약간 저하시켜, 그 뉴런의 흥분을 억제하려고 한다(임도영 등, 1999).

2. 인버팅 뉴런을 이용한 시스템의 구현

신경회로망에 관한 책이나 논문들을 보면 연결강도가 종종 음수인 경우를 볼 수 있는데, 이 경우가 자극 전달을 억제하는 경우이다. 이 억제성 뉴런을 회로로 구현할 때 이 연결강도가 음수인 것 때문에 음의 저항을 써야 할 경우가 많다. 하지만 음의 저항을 구현하는 것이 조금 어렵고 복잡하므로 다른 방법을 생각해본다. Hopfield 신경회로망을 디자인할 때, j번째 뉴런의 출력과 i번째 뉴런의 입력을 연결하는 연결강도 w_{ij} 는 저항 $R_{ij} = \frac{1}{w_{ij}}$ 로 나타낸다. 전통적인 전자 소자를 이용하면서 뉴런과 뉴런간의 흥분성과 억제성 시냅스의 연결을 제공하기 위해서 각 뉴런의 출력단에 두 개의 출력을 단다. 그것은 각기 부호는 반

대이면서 크기가 같은 정상적인 출력과 인버팅된 출력이다. 만일 시냅스가 흥분성 ($W_{ij} > 0$)이면 이 저항 ($R_{ij} = \frac{1}{|W_{ij}|}$)은 j번째 뉴런의 정상적인 출력단자에 연결시키고, 시냅스가 억제성 ($W_{ij} < 0$)이면 저항 ($R_{ij} = \frac{1}{|W_{ij}|}$)은 j번째 뉴런의 인버팅된 출력단자에 연결시킨다. 연결강도는 다른 뉴런의 출력이 또 다른 뉴런의 입력으로 궤환되어 들어오는 신호를 연결할 때의 강도를 말하므로 뉴런의 출력을 인버팅시켜서 다른 뉴런의 입력으로 연결하면 양의 연결강도로도 충분히 음의 연결강도의 효과를 낼 수 있다. 하지만 이때 과연 단순히 뉴런의 출력을 인버팅시켜준 것 만으로도 같은 결과가 나오는가에 대해서 생각해 봐야 되는데, 그림 14에서 음의 연결강도를 사용할 때와 인버팅시켜서 양의 연결강도를 사용할 때를 비교해 보겠다. 그림 11은 뉴런의 출력단에 인버터를 사용한 뉴런을 추가한 것인데, 만일 궤환되는 연결강도가 음이면 \bar{V}_i 로 연결시키고 궤환되는 연결강도가 양이면 V_i 로 연결시킨다.

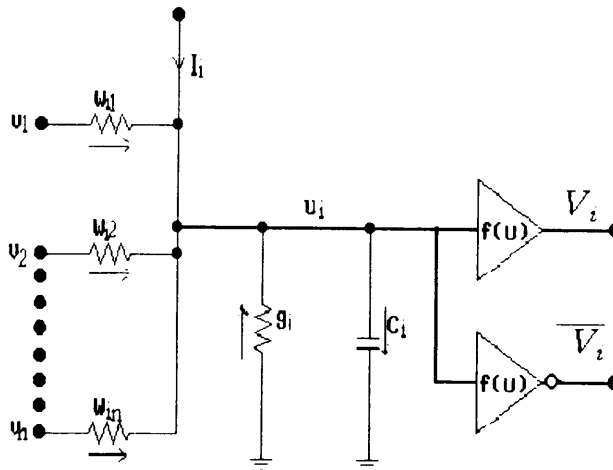
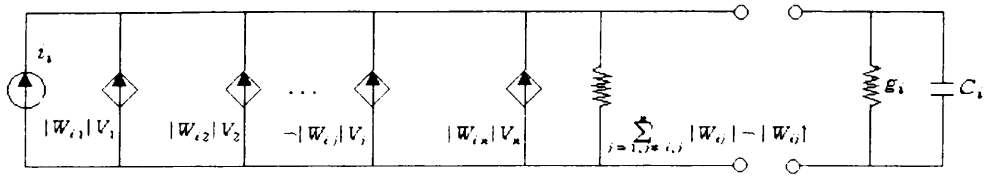
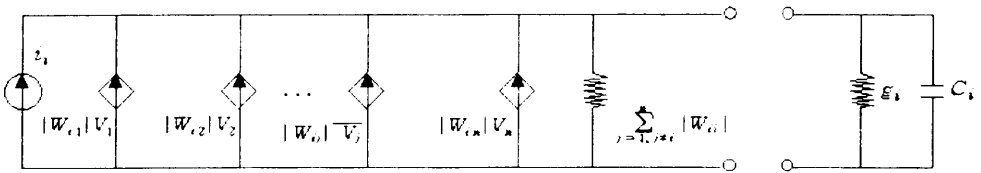


Fig. 13. Neuron using inverter in outspace.



(a)



(b)

Fig. 14. Equivalent circuit: (a) for Fig. 1b; (b) for Fig. 11.

그림 14에서와 같이 뉴론의 출력이 다른 뉴론의 입력으로 귀환되어 들어가는 것은 일종의 종속 전류원이라고 볼 수 있다. 그림 14a와 그림 14b는 각각 음의 저항을 사용했을 때와 인버팅시켜 양의 저항을 사용했을 때의 등가회로를 나타낸 것이다. 여기서 두 그림이 똑같이 되기 위해서는 i 번째 뉴론의 입력단으로 들어오는 전류와 전체 컨덕턴스가 같아야 한다. 음의 컨덕턴스를 사용했을 때 i 번째 뉴론으로 들어오는 전체 전류는 다음과 같다.

$$I_{i\text{neg}} = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n |W_{ij}| V_j - |W_{ij}| V_j \quad (41)$$

그리고, j 번째 뉴론의 출력을 인버팅시킨 후 양의 컨덕턴스를 사용했을 때 i 번째 뉴론으로 들어오는 전체 전류는 다음과 같다.

$$I_{inv} = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n |W_{ij}| V_j + |W_{ij}| \overline{V}_j \quad (42)$$

따라서, 두 회로에서 귀환되어 들어가는 전류는 같다. 하지만 뉴런의 입력단에서 들여다 본 등가저항은 다르다는 것을 알 수 있다. 음의 컨덕턴스를 사용했을 때 i 번째 뉴런의 입력단에서의 전체 컨덕턴스는 다음과 같다.

$$G_{in\bar{e}g} = \sum_{j=1, j \neq i, j}^n |W_{ij}| - |W_{ij}| + g_i \quad (43)$$

그리고, j 번째 뉴런의 출력을 인버팅시킨 후 양의 컨덕턴스를 사용했을 때 i 번째 뉴런의 입력단에서의 전체 컨덕턴스는 다음과 같다.

$$G_{im} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |W_{ij}| + g_i \quad (44)$$

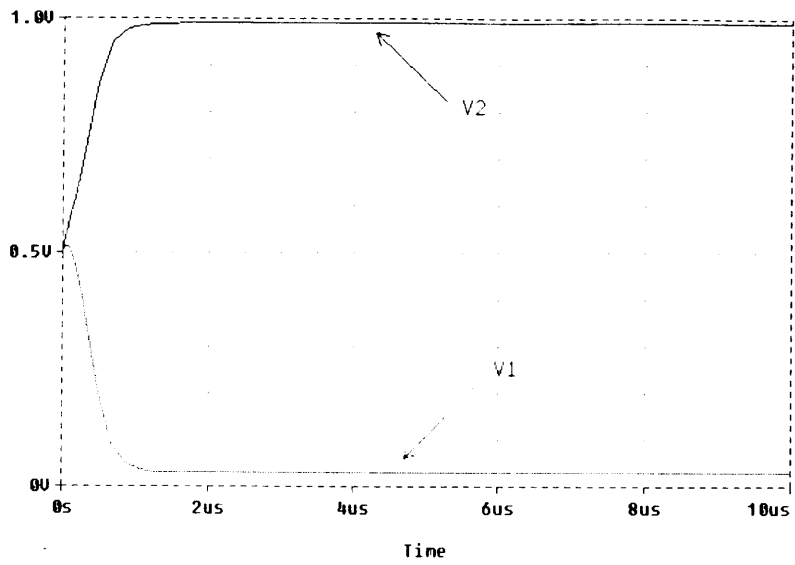
디지털 신경회로망의 경우 뉴런의 시그모이드 함수의 이득률을 크게함으로써 에너지 함수의 제 3항을 제거하므로 G_i 의 값이 아무런 영향을 끼치지 않지만, 뉴런의 시그모이드 함수의 인수 값을 작게하는 아날로그 신경회로망의 경우는 G_i 의 값이 전체 에너지가 수렴해 나가는데, 그리고 회로의 안정성에 크게 영향을 미치게 된다. 따라서 뉴런의 출력단에 인버터를 달아서 연결강도를 양으로 변환시킬 때는 뉴런에 연결된 전체 컨덕턴스 G_i 의 값이 바뀌지 않도록 뉴런의 입력단에 연결된 g_i 의 값을 적절히 변경해 주어야만 한다.

< 시뮬레이션 및 결과 >

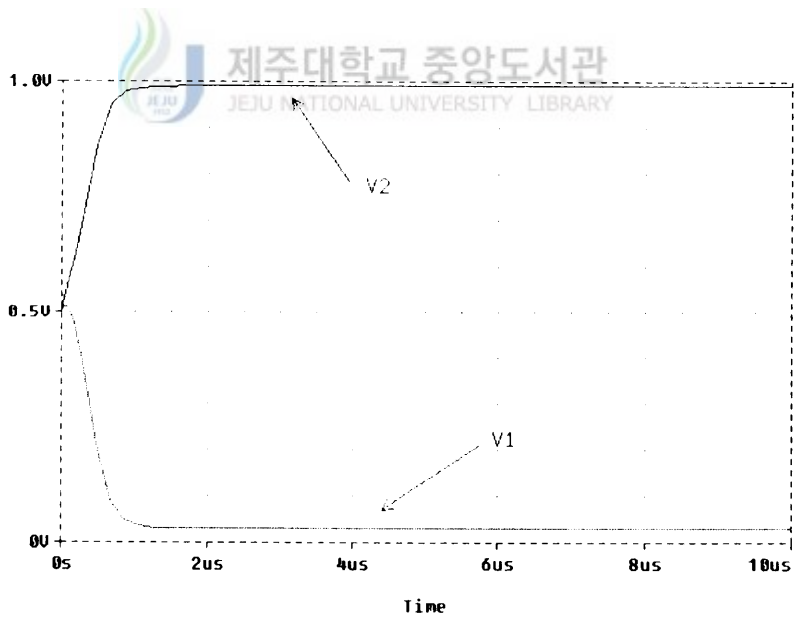
시뮬레이션을 위해 역시 2-bit A/D 컨버터가 사용되었다. 회로는 그림 3에 나타내었고, 시뮬레이션은 Microsim's Pspice 버전 8.0으로 수행되었다. 여기서 x 는 아날로그 입력이며, 연결강도와 바이어스 전류는 다음과 같다.

$$w = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix}$$

처음에는 연결강도가 음인 뉴론의 출력과 뉴론의 출력에 인버터를 사용한 연결강도가 양인 뉴론의 출력을 비교하였다. 그 과정에서 연결강도의 등가저항의 변화를 비교하여 그 차이만큼 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스의 값을 조정하여 주었다. 그림 15에서 보는 바와 같이 연결강도가 음인 경우 이것을 뉴론의 출력단에 인버터를 연결하여 연결강도를 양으로 만들어도 상호 변환하는데 문제가 없다. 단, 여기서 주의할 점은 뉴론의 출력단에 단지 인버터만 달아주고 연결강도의 부호만 바꿔준다고 끝나는 게 아니다. 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스의 값을 적절히 조절해 주어야만 한다. 그렇지 않으면 수렴점이 다르게 나타난다. 이것은 음의 저항을 만드는 것이 용이하지 않으므로 모든 연결강도를 양으로 만들어 주고 단지 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스만 음의 저항을 사용하는 것을 가능하게 한다. 위 그림 15는 전체 컨덕턴스 G값이 양($G = 0.5$)인 경우만 하였는데, G값이 영인 경우와 음인 경우도 결과가 같게 나왔다.



(a)



(b)

Fig. 15. Output of circuit: (a) using non-inverting neuron;
(b) using inverting neuron.

3. 최적화된 음저항의 구현

이전 절에서 뉴론의 출력을 인버팅시켜서 음의 연결강도를 양의 연결강도로 만들어 주는 방법에 대해서 논의하였다. 하지만 이 두 경우에 있어서 전체 컨덕턴스 G_i 값을 같게 만들어 주기 위해 뉴론의 입력단에 연결된 g_i 의 값을 적절한 값으로 바꿔주는 과정에서 음의 값이 나오는 경우가 있다. 따라서 이 절에서는 기존에 알려진 음저항 회로를 소개하고 이것을 신경회로망 회로에 적절히 적용하는 방법에 대해서 논의하고자 한다.

1) 증폭기를 이용한 음의 임피던스

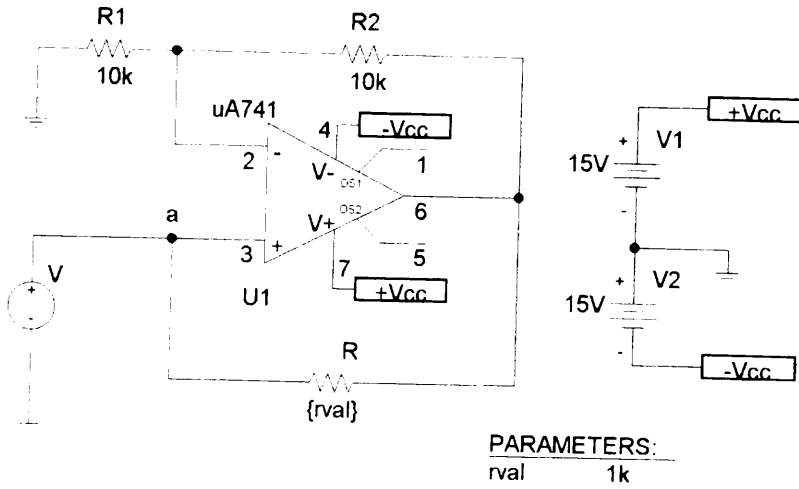
그림 16a는 증폭기를 사용하여 음의 임피던스를 구현하는 잘 알려진 회로이다. 노드 a에서 본 등가저항은 다음과 같다.

$$R_{eq} = \frac{V_s}{i_s} = -\frac{R_1}{R_2} R \quad (45)$$

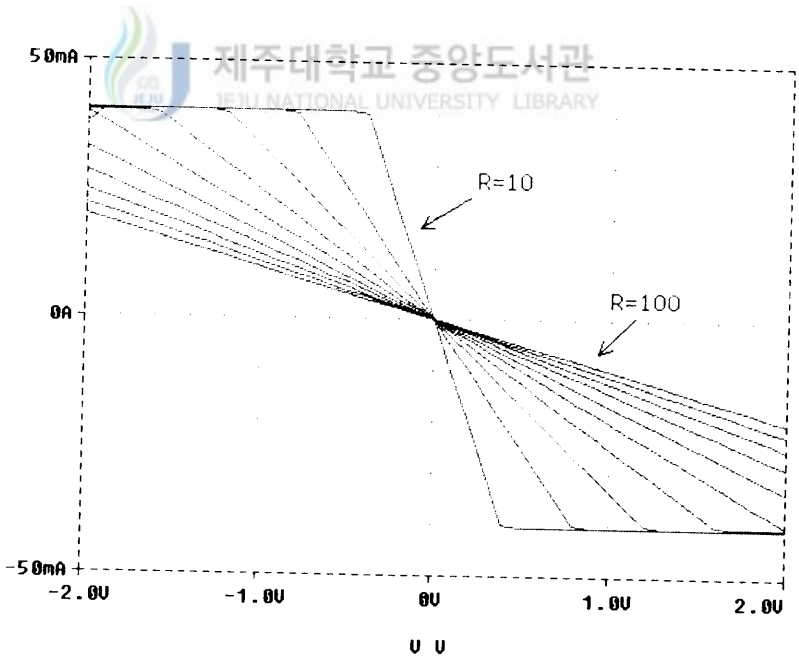
따라서 $R_1 = R_2$ 이라고 놓으면, 등가 저항은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$R_{eq} = -R \quad (46)$$

그림 16b에는 저항 R 을 10에서 100사이의 10간격으로 해서 회로에 적용시킨 후의 결과를 나타내었다. 이 시뮬레이션에서 볼 수 있듯이 우리가 원하는 만족할 만한 결과는 입력 전압이 -2V에서 2V사이일 때 저항이 50Ω 이상인 경우 얻을 수 있다. 이것은 uA741 Opamp의 최대 출력 전류가 약 40mA이기 때문이다. 그러므로 이 회로는 큰 값을 갖는 저항을 사용할 때만 적용할 수 있다. 그래서 이것은 연결강도가 큰, 즉 작은 저항을 사용해야 하는 Hopfield 신경회로망에서는 적용하기가 힘들다. 따라서 지금부터는 입력 컨덕턴스를 스케일링해서 이 회로를 사용할 수 있는 방법에 대해서 논의해 보겠다.



(a)



(b)

Fig. 16. Negative resistance circuit: (a) Schematic diagram for Pspice; (b) Simulation for different values of resistor R.

2) 입력 컨덕턴스의 스케일링

Hopfield 신경회로망의 에너지 함수 $E(v)$ 는 에너지 맵의 형태를 바꾸지 않고 단지 전체적인 에너지 레벨만 변화시키면서 스케일링 할 수 있다. 스케일된 에너지 함수는 다음과 같다. 여기서 K 는 스케일시키는 비율이다.

$$E(v)_{scaled} = K \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^n i_i v_i + \sum_{i=1}^n G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f^{-1}(z) dz \right] \quad (47)$$

스케일 인자 K 는 에너지 함수의 형태는 바꾸지 않고 단지 전체 에너지 함수의 맵을 똑같은 비율로 축소시킨다. 그러므로, 스케일시킨 에너지 함수나 스케일시키지 않은 에너지 함수나 둘다 모두 똑같은 최소점을 갖는다. 따라서, 스케일된 Hopfield 신경회로망은 스케일하지 않은 것과 마찬가지로 똑같은 점으로 수렴해 나간다. 스케일된 Hopfield 신경회로망에서 연결강도, 외부 입력 전류, 그리고 전체 컨덕턴스는 식 (47)을 재배열함으로써 구할 수 있다.

$$E(v)_{scaled} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (Kw_{ij}) v_i v_j - \sum_{i=1}^n (Ki_i) v_i + \sum_{i=1}^n (KG_i) \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f^{-1}(z) dz \quad (48)$$

스케일된 Hopfield 신경회로망에서 연결강도, 외부 입력 전류, 그리고 전체 컨덕턴스는 다음과 같다.

$$w_{scaled} = Kw, \quad i_{scaled} = Ki, \quad G_{scaled} = KG \quad (49)$$

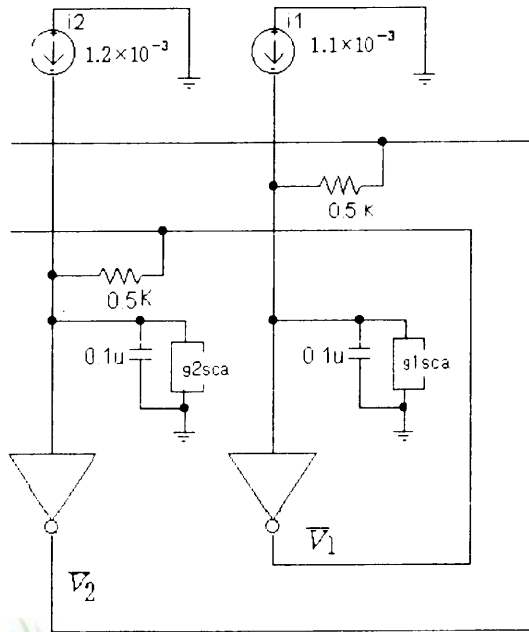
< 시뮬레이션 및 결과 >

시뮬레이션을 위해 다시 2-bit A/D 컨버터를 사용하였는데, 시뮬레이션은 Microsim's Pspice 버전 8.0으로 수행하였다. 스케일된 연결강도, 외부 입력 전


류, 그리고 입력 컨덕턴스는 다음과 같다. 여기서 스케일 인자 K는 10^{-3} 이다.

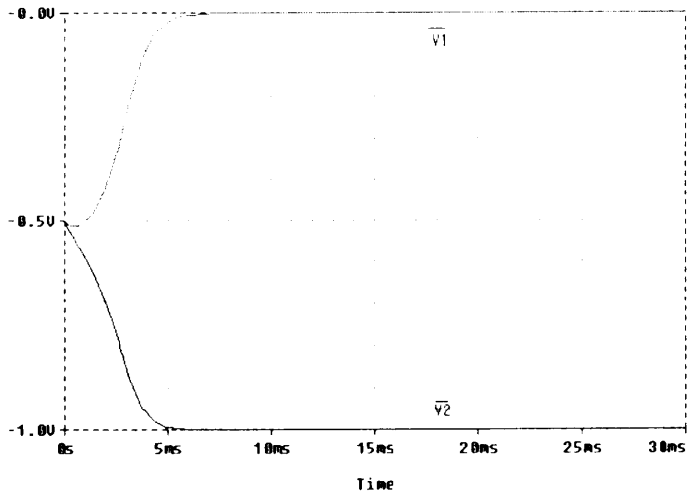
$$w_{sca} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad i_{sca} = 10^{-3} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix}, \quad g_{sca} = 10^{-3} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

그림 17a에는 $x = 1.6$, $\lambda = 2$, $G_{1sca} = G_{2sca} = 0.1 \times 10^{-3} \Omega$ 일 때의 회로를 나타내었다. 스케일된 회로에서는 $\frac{1}{|w_{12sca}|}$ 와 $\frac{1}{|w_{21sca}|}$ 대신에 500Ω 을 사용하였다. 그림 16a에서의 회로는 그림 17a의 회로에서 g_{1sca} 와 g_{2sca} 를 구현할 때 사용되었다. $g_{1sca} = g_{2sca} = -1.9 \times 10^{-3} \Omega$ 를 구현하기 위해, 음저항 회로에서 R 대신에 $\frac{1}{1.9} k\Omega$ 이 쓰였다. 그림 17b에서 보는 바와 같이 스케일하지 않은 경우의 시스템에서와 마찬가지로 똑같은 점으로 수렴해 나가고 있다. 그림 17b는 인버팅된 출력 단자에서 나타낸 것이다.



(a)


 제주대학교 중앙도서관
 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY



(b)

Fig. 15. The scaled circuit for 2-bit A/D converter:
 (a) Using negative resistance circuit for g_{isca} ;
 (b) Simulation for $g_{1sca} = g_{2sca} = -1.9 \times 10^{-3} \text{ S}$.

V. 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터의 영향

1. 2-bit A/D 컨버터의 과도해석

제 2장에서 궤환성을 갖는 단층신경회로망의 전기적 모델의 i 번째 뉴론을 보여주는 그림 1b에서 뉴론의 입력단에서 KCL을 이용해 식 (1)을 유도하였다. 이 식 (1)을 이용하면 이 신경망의 시간에 대한 출력의 변화는 $\frac{dv_i}{dt}$ 로 나타낼 수 있고, 연쇄 법칙을 써서 i 번째 뉴론의 출력의 변화는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_i}{du_i} * \frac{du_i}{dt} \quad (51)$$

식 (1), (32)와 (51)에서 2-bit A/D 컨버터의 시간에 대한 뉴론의 출력의 변화는 다음과 같다.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\lambda}{C_1} (v_1 - v_1^2) (-2v_2 + 2u_1 + x - \frac{1}{2} - g_1 u_1) \quad (52)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\lambda}{C_2} (v_2 - v_2^2) (-2v_1 + 2u_2 + 2x - 2 - g_2 u_2) \quad (53)$$

여기서, x 는 외부 입력, λ 는 시그모이드 함수의 이득률이다. 이 신경망의 시간에 대한 출력의 변화는 식 (52)와 (53)에서 구해지는 $\frac{dv_i}{dt}$ 로 나타내어지는데, 뉴론의 출력 v_i 의 함수로서의 $\frac{dv_i}{dt}$ 는 서로 다른 λ 값과 입력단의 연결된 커패시터의 비율 $C_1 : C_2$ 에 따라 달라질 수 있는데 그림 18에 나타내었다.

Tank and Hopfield에 따르면 입력 x 의 값에 따라서 그림 3의 신경망은 다음의

한 점 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)로 수렴해 나간다. 그림 19에서 $x = 1.2$, $C_1 = 0.1 * 10^{-6}$, $C_2 = 1 * 10^{-6}$ 즉, $C_1 : C_2 = 1 : 10$ 일 때 출력 v_i 의 궤적을 나타내었다. 입력값에 대한 출력값은 입력값 u_i 의 초기 상태에 따라 다르게 나타날 수 있다. 또한 출력 v_i 가 평형점으로 수렴하는 동안 v_i 의 방향을 결정하는 $C_1 : C_2$ 의 비율에 따라 다르게 나타날 수 있다.

2. 평형점의 안정성 분석

평형점은 다음과 같이 구할 수 있다. 즉, 시간에 대해서 뉴런의 출력 v_i 가 변하지 않을 때를 구한다. 평형점을 \hat{v} 라고 하면,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad (54)$$

이다. 식 (52)과 (53)에서 볼 수 있듯이(그리고 식 (21)으로부터 $v_i \rightarrow 0, 1 \equiv u_i \rightarrow -\infty, +\infty$) 식 (54)는 $v_0 v_1$ 공간에서 $v_i = 0, 1$ 을 만족한다. 또한 식 (54)는 다음을 만족시킨다.

$$-2v_2 + 2u_1 + x - \frac{1}{2} - g_1 u_1 = 0 \quad (55)$$

$$-2v_1 + 2u_2 + 2x - 2 - g_2 u_2 = 0 \quad (56)$$

x 의 값을 1.6이라 놓고 λ 의 값을 0.5, 1, 2로 가정했을 때 식 (55)와 (56)으로부터 다음의 해 (v_1, v_2)를 얻을 수 있다.

$$\lambda = 0.5 : (0.4827, 0.5341)$$

$$\lambda = 1 : (0.2814, 0.7907)$$

$$\lambda = 2 : (0.0228, 0.9897), (0.6005, 0.4990), (0.9827, 0.0447)$$

식 (54)의 해의 안정성은 신경회로망의 평형점의 안정성을 결정한다. 그러므로 식 (54)의 해에 가까이 있는 상태가 평형점을 향하여 들어가는지(안정), 그 주위를 맴도는지(중립의 안정) 아니면 그 곳을 떠나는지(불안정)를 말할 수 있다. Strang에 따르면 이것은 중립인 경우를 제외하고 평형점 주위에서 식 (54)를 선형화시켜서 구할 수 있다(Strang, 1980). 그리고 행렬 A의 고유치 $\mu_{1,2}$ 의 합과 곱에 따라 안정성과 불안정성을 결정할 수 있는데, 여기서 행렬의 고유치의 합과 곱은 각각 trace와 determinant와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\text{trace}(A) = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \quad (58)$$

$$\det(A) = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} * \frac{\partial F_2}{\partial v_2} - \frac{\partial F_1}{\partial v_2} * \frac{\partial F_2}{\partial v_1} \quad (59)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{trace}(A) \pm \sqrt{ \text{trace}^2(A) - 4 \det(A) }) \quad (60)$$

이때 F_1, F_2 은 각각 $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}$ 이다. 그리고 $u_i = f^{-1}(v_i)$ 와 식 (55), (56)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1} = \frac{(2-g_1)}{C_1} + \frac{\lambda}{C_1} (1-2v_1)(-2v_2 + \frac{1}{\lambda}(2-g_1) \log(\frac{v_1}{1-v_1}) + x - \frac{1}{2}) \quad (61)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_2} = -2 \frac{\lambda}{C_1} (v_1 - v_1^2) \quad (62)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_1} = -2 \frac{\lambda}{C_2} (v_2 - v_2^2) \quad (63)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_2} = \frac{(2-g_2)}{C_2} + \frac{\lambda}{C_2} (1-2v_2) (-2v_1 + \frac{1}{\lambda} (2-g_2) \log(\frac{v_2}{1-v_2}) + 2x - 2) \quad (64)$$

식 (62), (63)으로부터 다음을 구할 수 있다.

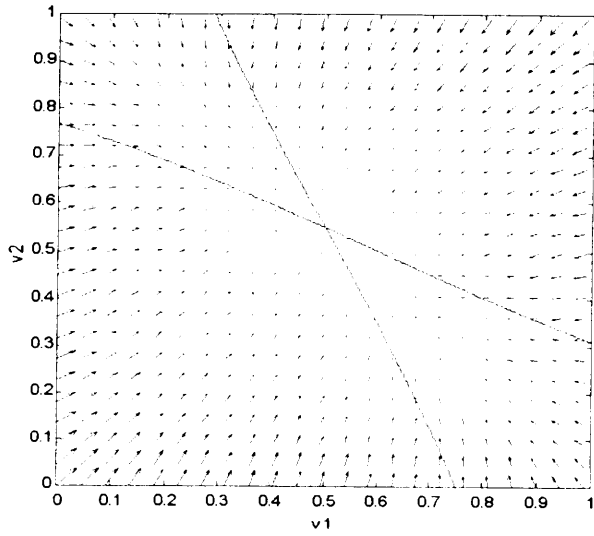
$$\forall \lambda, C_i \quad \partial F_1 / \partial v_2 * \partial F_2 / \partial v_1 > 0 \quad (65)$$

이것은 행렬 A의 고유치가 실수임을 의미한다. 따라서 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

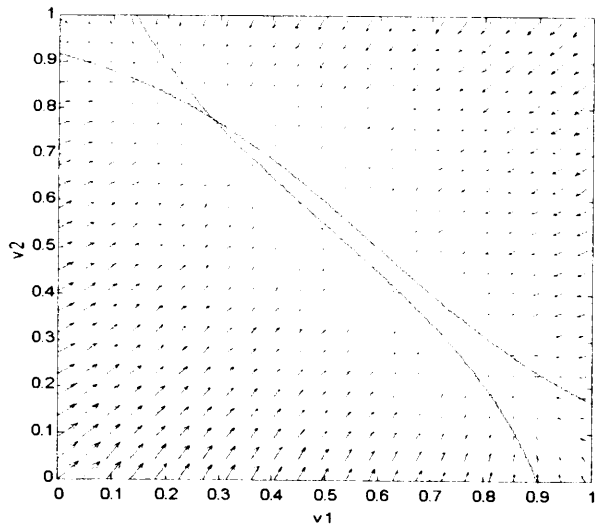
1. 안정한 평형점 : $\text{trace}(A) < 0, \text{det}(A) > 0$.
2. 불안정한 평형점 : $\text{trace}(A) > 0, \text{det}(A) > 0$.
3. 불안정한 변곡점 : $\text{det}(A) < 0$.

< 시뮬레이션 및 결과 >

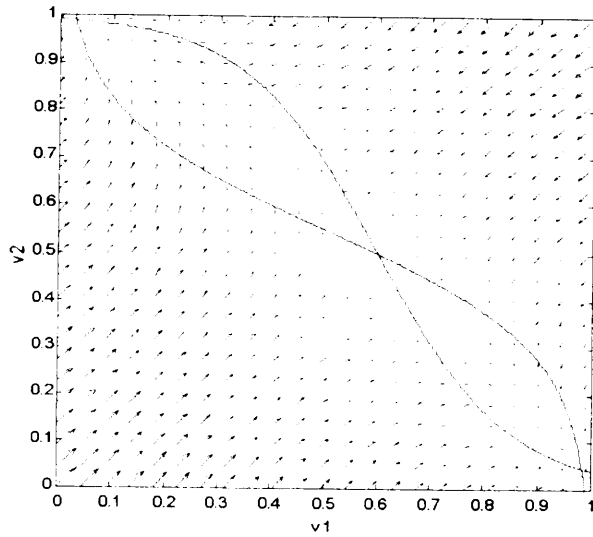
시뮬레이션은 Matlab 5.2를 가지고 행하였다. 그리고 여기서 사용된 인자들은 $g_1 = g_2 = 2.5$, $w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, 외부 입력 $x = 1.6$ 을 사용하였다. 그림 18에서 볼 수 있듯이 λ 값에 따라 에너지함수의 벡터 필드와 출력 v 의 수렴점이 달라지는 것을 알 수 있다. 그리고 그림 18c, 18d에서 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터 또한 뉴론의 출력의 수렴방향에 영향을 주는 것을 알 수 있다.



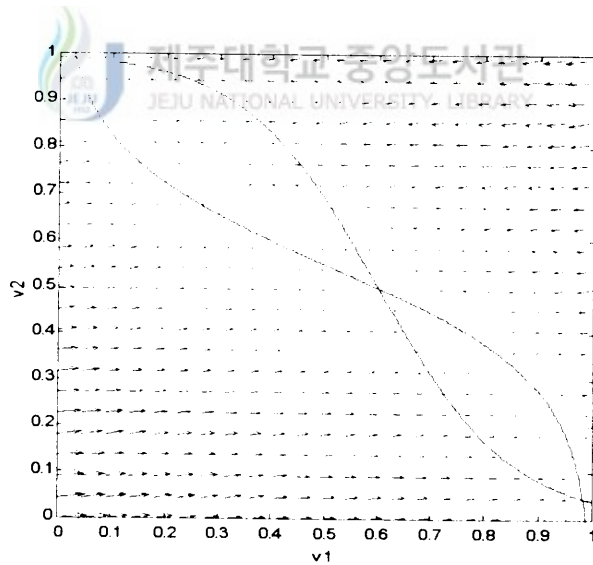
(a)



(b)

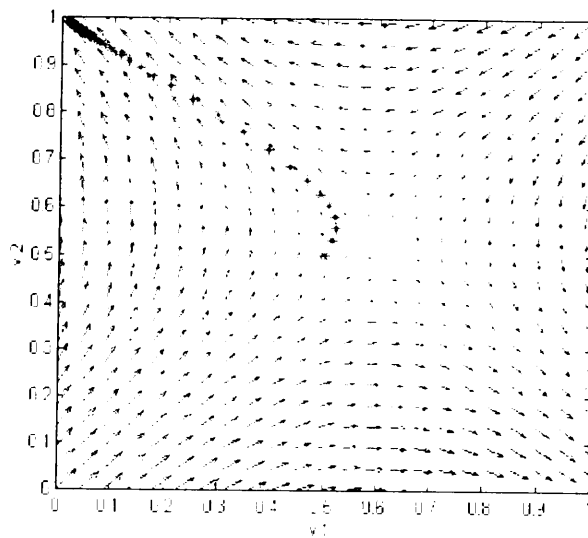


(c)

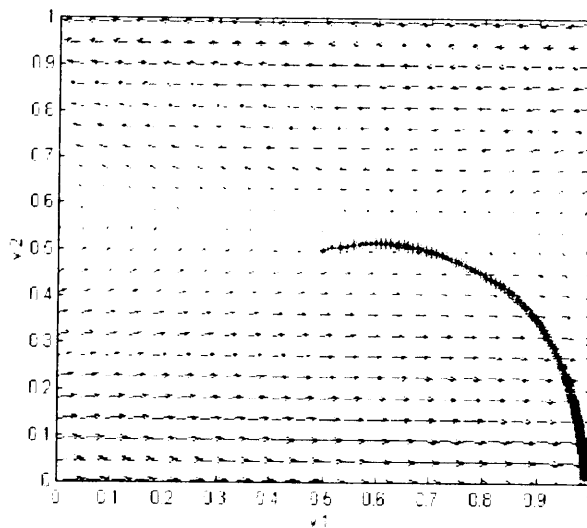


(d)

Fig. 18. Vector field of energy and convergence point of output v : (a) where $x=1.6$, $\lambda=0.5$ and $c1:c2=1:1$; (b) where $x=1.6$, $\lambda=1$ and $c1:c2=1:1$; (c) where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $c1:c2=1:1V$; (d) where $x=1.6$, $\lambda=2$ and $c1:c2=1:10$.



(a)



(b)

Fig. 19. Trajectory of output v with time: (a) where $c_1:c_2=1:1$; (b) where $c_1:c_2=1:10$.

그림 19a에서 보면 각 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터의 비율이 1 : 1 즉, $C_1 : C_2 = 1 : 1$ 인 경우에는 시간이 지남에 따라 뉴론의 출력 v 가 벡터 필드에 표시된 경로를 따라 $(v_1, v_2) = (0, 1)$ 로 수렴하였다. 그러나 그림 19b에서는 각 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터의 비율이 1 : 10인 경우에는 시간이 지남에 따라 $(v_1, v_2) = (1, 0)$ 으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이것은 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터가 단지 수렴의 속도만을 결정하는 것이 아니라 에너지 맵에서의 수렴 방향도 함께 결정하여 수렴하는 값도 달라질 수 있다는 것을 보여주고 있다.



VI. 결 론

본 논문에서는 Hopfield 신경회로망에서 뉴론의 입력단에 연결된 저항과 커패시터가 회로의 전체 에너지 맵, 즉 수렴점 및 수렴방향에 미치는 영향을 살펴보았고, 또한 hopfield 신경회로망을 회로로 구현할 때의 문제점인 음저항에 관해서도 다루었다.

뉴론의 입력단에 연결된 저항과 다른 뉴론의 출력이 귀환되어 연결되는 연결강도와와 합, 즉 전체 컨덕턴스 G_i 가 양, 음, 영인 경우 살펴보았는데, 양인 경우 최소점이 0과 1의 경계내에 있기 때문에 안정하다고 할 수 있겠으나 영과 음인 경우에는 입력단의 값이 어느 한 점으로 수렴하지 않고 선형적으로 또는 지수함수적으로 계속 증가하거나 감소하여 불안정하다고 할 수 있겠다. 그리고 전체 컨덕턴스의 크기에 의해 에너지 함수의 평형점의 위치가 변하는 것을 볼 수 있었으며 또한 뉴론의 입력단에서의 전체 컨덕턴스의 합이 양, 영, 음에 따라 평형점이 극소점, 극대점, 그리고 변곡점이 되는 것을 살펴보았다. 그리고 Hopfield 신경회로망을 회로로 구현할 때 음의 연결강도를 양의 연결강도로 바꾸어준 후에 그에 따른 문제점들을 해결하는 방안을 제시하였다. 그 결과 음의 연결강도와 양의 연결강도의 상호 변환에 아무런 문제점이 없게 되었다. 그리고 음의 저항을 구현했을 때 문제점이 발생하였는데 이것을 최적화시켜서 신경회로망에 응용할 수 있도록 하였다. 그 결과 음의 연결강도가 있는 신경회로망의 회로 제작이 훨씬 용이하게 되었다. 또한 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터는 그 비율에 따라 수렴방향이 달라지는 것을 볼 수 있었는데, 이 사실에서 커패시터는 시스템의 수렴의 속도만을 결정하는 게 아니라 수렴 방향까지 결정하므로 수렴점에 영향을 미치는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod, 1989, Qualitative Analysis of Neural Networks, IEEE Trans. Circuits Syst., vol 36, pp. 229-243, February 1989.

Bernard C. Levy 1987 "Global optimization with Stochastic Neural Network", IEEE, Int. Conf. on NN, Sandiego, CA, USA.

Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Matrix Computations, Third Edition, John Hopkins Univ. Press, 1996.



Hopfield, J. J. 1984. "Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two State Neurons. " Proc. National Academy of Sciences 81: 3088-3092.

Hopfield, J. J., and D. W. Tank, 1985. "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems," Biolog. Cybern. 52: 141-154.

Hopfield, J. J., and D. W. Tank, 1986. "Computing with Neural Circuits: A model," Science 233: 625-633.

강민제, 1998 "Numerical Modeling of Hopfield Neural Networks" 한국통신학회 논문집 제 23권 제 3호.

Mengkang Peng, Narebdra K. Gupta and Alistair F. Armitage, " An investigation

into the Improvement of Local Minima of the Hopfield Network" Neural Networks ,Vol. 9, pp. 1241-1253, 1996.

Naoki Kurita and Ken-ichi Funahashi, "On the Hopfield Neural Networks and Mean Field Theory" Neural Networks, Vol. 9, pp. 1531-1540, 1996.

Park, S. 1989. "Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit," IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-33(5): 533-541.

Silviotti, M. A., Emering, M. R., and Mead, C. A., 1986, "VLSI architectures for implementation of neural network." Proceeding of the Conference on Neural Networks in Computing, pp408-411.

Stephen Friedberg, Arnold Insel, Linear Algebra with Application, Prentice-Hall, 1986.

Strang G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge, pp. 496-504, 1980.

임도영, 이상부. 1999. 퍼지 · 신경망 · 유전진화. 인솔미디어. pp.108~109.

감사의 글

어느덧 2년이란 세월이 흘러 이 정들었던 학교, 연구실을 떠나게 되었습니다. 뒤돌아 보면 한없이 빠르고 힘들기만 하였던 시간이었지만 막상 떠난다는 생각을 하니 서운한 느낌이 듭니다.

지난 대학원 생활동안 저에게 많은 가르침을 주시고 앞으로의 진로와 나아갈 길에 대해 많은 조언을 해주신 지도교수님이신 강민제 교수님께 깊은 감사를 드립니다. 그리고 저의 논문이 보다 잘 만들어질수 있도록 논문 심사를 맡아주신 도양희 교수님, 김경연 교수님께 감사드리고, 대학원 생활내내 좋은 가르침을 주신 고성택 교수님, 김경식 교수님, 이광만 교수님께도 깊은 감사를 드립니다.

힘든 일이 있을 때마다 곁에서 조언을 아끼지 않았던 경희 선생님과 송신숙 선생님께 감사드리고, 연구실에서 같이 생활하며 도움을 주었던 후배 성운, 경탁, 동훈, 현식에게 고맙다는 말을 이 지면을 빌어 전합니다. 그리고 대학원 생활동안 같이 학교에서 생활하며 서로 도움을 주었던 대학원 동기생 철규, 봉석, 종수, 상철, 영균에게 고맙다는 말을 전하고, 논문 교정에 도움을 주신 Andrew 선생님과 주연, 민정, 그리고 그외 스터디 멤버들에게 감사를 드립니다.

지금까지 저를 있게 해주시고 옆에서 물심양면으로 뒷바라지 하시느라 고생하신 저의 부모님께 깊은 감사를 드립니다. 그리고 끝까지 저를 지켜봐 주신 육지에 계신 형님들과 여기서 같이 사는 누나, 그리고 조카 경전, 경숙, 경은에게 감사하다는 말을 전하면서 이 작은 결실을 드립니다.