碩士學位論文

高等學校 數學敎室에서 Fractals 圖形의 活用

指導敎授 高 鳳 秀

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 忠 勳

2001年 8月

高等學校 數學教室에서 Fractals 圖形의 活用

指導敎授 高 鳳 秀

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2001年 4月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 金 忠 勳

金忠勳의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

2001年 7月 日

審査委員長 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

<抄錄>

高等學校 數學敎室에서 Fractals 圖形의 活用

金 忠 勳

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 高 鳳 秀

본 논문은 고등학교 수학교육에 적절한 프랙탈 학습 내용을 알아보고, 프랙탈 학습 자료를 개발하여 제시함으로써 프랙탈의 고등학교 교실에의 활용 가능성을 모색한다.

이를 위하여 프랙탈의 기본 개념들을 고찰하고, 프랙탈 도형과 프랙탈 도형의 특징 중 자기 유사성과 프랙탈 차원에 대하여 소개하며, 고등학교 수학교육에서 프랙탈의 필요성에 대하여 제7차 교육과정과 관련하여 고찰한다.

그리고 프랙탈을 수업의 한 부분으로 이용할 수 있는 활동 중심의 학습지를 만들어 제시된 문제들을 풀어가면서 스스로 프랙탈의 개념과 특징을 이해할 수 있도록 구성한다.

*본 논문은 2001학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

구불구불한 해안선, 불규칙적인 산등성, 뭉게뭉게 피어오르는 구름 같은 자연의 모습은 직선과 원만을 고집하는 유클리드 기하학만으로는 충분히 설명할 수 없다. 유클리드 기하학에서 다루는 도형은 선분, 평면, 원, 구, 삼각형 그리고 원추 등이다. 이들 도형은 2000여년 동안 많은 분야에서 모델의 역할을 해왔다. 예술가들은 이들 도형에서 이상적인 미를 발견했고, 천문학자들은 이들 도형을 이용하여 우주론을 정립했다.

그러나 유클리드 기하학은 해안선의 구조, 산맥의 형상, 구름의 현상 같은 자연 현상을 모델링하는 데는 부족함이 많다.

프랙탈 기하학(Fractal Geometry)의 창시자 Mandelbrot(1975)는 다음과 같이 말했다. "구름은 구가 아니고, 산은 원추가 아니며, 번개는 직선으로 내려치지 않는다. 새로운 기하학은 둥글둥글하지 않고 우툴두툴한, 또 매끄럽지 않고 움푹 파이고 자리고 꼬이고 서로 엉켜 있는 기하학이다." 그는 자연 현상을 묘사하고 설명할 수 있는 새로운 수학의 필요성을 역설했다. 이에 대한 해결 방안으로 등장한 이론이 바로 프랙탈 이론이다. 이 이론은 우주를 전체로 파악하려는 것이 아니라, 부분에서 전체의 구조를 파악해 나가는 기하학이다.

금세기에 와서 컴퓨터의 출현으로 이러한 자연 속에 널리 퍼져있는 불규칙한 사물들을 나타내기 위한 수많은 시도들이 있었다. 그 결과 컴퓨터를 사용하여 자연의 미세한 부분에 내포되어 있는 부분까지 샅샅이 그려내어 추상적인 형태들을 소개해 주고, 수학자와 자연과학자들에게 자연을 측량하고 탐구할 수 있는 새로운 방법의 학문으로 프랙탈이 제시되었다.

이와 같이 20세기에 들어와서 컴퓨터의 출현으로 인하여 수학 분야(현대 수학)에 프랙탈과 같은 새로운 학문들이 시도되고 있음에도 불구하고 오늘날 우리들의 중등수학에서 기하교육의 내용은 삼각형, 사각형, 원과 같은 단편적인 것을 강조하는 유클리드 기하의 바탕에서 그 고정된 틀을 벗어나지 못하고 있다.[1)]

단순한 도형에서 시작하여 반복 연산을 수행하는 과정은 고등학교 수학교육 과정

중 확률, 극한, 수열의 개념으로 쉽게 접근할 수 있을 것이다. 여러 가지 형태로 나타나는 프랙탈 도형은 학생들에게 수학의 아름다움을 느낄 수 있게 해준다. 또한 무한히 계속된다는 그 특성은 무한 세계로의 호기심과 흥미를 불러일으킨다.

이와 같은 프랙탈을 수학교육에 도입하려는 시도는 국내외에서 활발히 일어나고 있다. 예를 들어, 캐나다의 온타리오교육부는 1993년에 고등학교 이수과목으로서 프랙탈과 카오스를 승인하여 온타리오주에 있는 고등학교 grade12(우리 나라 교육과정의 고등학교 3학년에 해당됨)에서 'Fractals In Your Future'란 교재로 가르치고 있다. 또한 미국 수학 교사협의회(NCTM)는 수학자들과 협력하여 'Fractals for the classroom'(1992)이란 교재와 연습책을 펴내어 프랙탈을 수학교육의 현장에 소개할 수 있는 자료를 제공하였다. 우리 나라에서도 '수학교사를 위한 프랙탈 기하' 등 프랙탈에 관한 서적들이 출간되고 있으며, 수학 동아리를 중심으로 연구가 활발하게 이루어지고 있다.

프랙탈 기하를 중등 수학교육에 도입하면 첫째, 학생들에게 프랙탈과 그 배경이 되는 수학적 원리에 접근하기 쉽게 하여 활동적인 경험을 제공하게 되고, 둘째, 프랙탈이 수학의 다른 측면과 어떻게 연결되며 프랙탈 학습이 이들 아이디어를 어떻게 모을 수 있는지 보여 주고, 셋째, 시각과 상상력을 통하여 프랙탈의 구조와 형상의 아름다움을 느낄 수 있을 것이다.(Peitgen et al. 1992) 또한 학생들이 직접 프랙탈 도형을 구성하고, 프랙탈 차원을 계산하며 컴퓨터를 통해 프랙탈 도형을 시각화하는 등 전략적인 활동을 통해 수학에 색다른 즐거움과 주위 환경에 대한 새로운 인식을 가질 수 있다. 그리고 프랙탈에 대한 호기심과 상상력, 흥미를 가지고 수학이 우리 생활과 얼마나 밀접한가를 체험할 수 있다. 그러므로 우리 나라 수학교육에서의 프랙탈에 관한 구체적인 연구가 필요하다.

따라서 본 연구는 고등학교 수학교육에 적절한 프랙탈 학습 내용을 알아보고, 프랙탈 학습자료를 개발하여 제시함으로써 프랙탈의 고등학교 교실에의 활용 가능성을 모색하는 데 그 목적을 두고 있다.

1) 유병옥(1999), "중등수학교육 과정에 프랙탈의 소개", 석사학위논문, 울산대학교 교육대학원, P.1.

2. 연구 내용

본 연구를 수행하는 데 있어서, 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

가. 고등학교 수학교육에 적절한 프랙탈 학습 내용을 제시한다.

나. 고등학교 수학과 교육과정에 제시한 학습 내용 중에서 프랙탈이 활용될 수 있는 학습 내용을 선정한다.

다. 선정한 학습 내용에 적절한 프랙탈을 활용한 학습지를 제시한다.

II. 프랙탈의 기초 개념

1. 프랙탈의 정의 및 특징

프랙탈(fractal)이란 말은 '부서지다'라는 라틴어 동사 'frangere'에서 파생한 '부서진 상태'를 뜻하는 형용사 'fractus'에서 유래되었는데, 1975년 만델르로트(Mandelbrot)가 수학 및 자연계의 비정규적인 패턴에 대한 체계적 고찰을 담은 자신의 에세이에 표제를 주기 위해서 만들었다.[2] 그러나 실제로 프랙탈이 출현한 것은 1800년대로 거슬러 올라간다. 1872년에 Cantor가 Cantor set, 1875년에 Weierstrass가 모든 점에서 연속이면서 미분 불가능한 곡선을 발견하고 1906년에 von Koch가 코흐눈송이를 발견했을 당시에는 이러한 것들을 병적인 대상으로 취급하였다. Poincaré는 '괴물들의 전시회'라 불렀고, 수학이나 과학에서는 중요한 것으로 여기지 않았었다. 그러나 오늘날에는 프랙탈이 물리, 화학, 수학 등에서 활발히 연구되고 있다.

프랙탈은 자연에서 흔히 볼 수 있는 불규칙한 조각난 모양들이며, 그 예로 고사리 잎의 가지치기 모양, 구름의 무정형 패턴, 번개의 불규칙한 궤적, 해안선의 드나드는 모양 등을 들 수 있다. 프랙탈의 다른 예로서는 눈의 결정이 성장하는 모습, 전기의 방

2) 제임스 글리크(1993), 「카오스:현대과학의 대혁명」, 박배서 · 성운하 역, 동문사, p.122

전패턴, 허파·실핏줄·신경의 가지 구조, 불규칙적인 주가의 등락 패턴, 분자들의 무질서한 운동, 은하계의 비정규적 분포 등 분자부터 천문학적 단위까지 모든 척도의 자연 현상들에서 나타난다.[3)]

프랙탈 도형을 정의하기 위하여 연속적인 도형에 미분 가능성의 의미를 우선 부여한다. 어떤 연속 도형을 임의로 아주 미세한 부분들로 분할하면 할수록 그 작은 부분들은 평면 또는 직선의 형태로 변해 갈 경우 그 도형은 미분가능하다고 말한다. 내부가 있는 도형인 경우는 경계가 미분가능하면 미분가능한 도형이라고 부른다.

예를 들면, 직선, 평면, 구 등은 미분가능한 도형이다. 삼각형은 세 꼭지점에서는 미분불가능하고 나머지 점에서는 미분가능하다. 정육면체는 6개의 꼭지점과 각 모서리에서 미분불가능하고 나머지는 미분가능하다. 연속적인 도형이 모든 점에서 미분불가능하면 그 도형을 프랙탈 모양을 갖는다고 말한다.

프랙탈 이론이란 지금까지 과학자가 사용해온 곡선이나 곡면으로는 충분하지 않은 자연 속에 있는 복잡한 모양과 현상들, 이 울퉁불퉁한 상태를 밝히는 수단이라 할 수 있으며 전체와 부분에 내재하는 유사성을 만들어 내는 객관적 방법을 연구하는 것이다.

프랙탈 모양은 다음과 같이 대략적으로 요약될 수 있다.

첫째, 무한하게 세분된다.

둘째, 무한한 길이를 가진다.

셋째, 대부분 정수가 아닌 차원(프랙탈 차원)을 가진다.

넷째, 규모가 작아지는 방향으로 스스로 닮아간다.

다섯째, 간단한 반복 작업을 계속하여 만들 수 있다.

프랙탈 기학학은 무한과 카오스를 표현하는 새로운 기하학이며 우주의 본질을 완전히 새로운 접근 방법으로 이해하는 정성적 수단이다.[4)] 우리가 만드는 프랙탈은 자기유사성과 정수가 아닌 차원을 가지는 도형이 된다. 자기 유사성은 아무리 규모를 확대하거나 작게 하여도 여전히 같은 형태를 지님을 의미하며 불규칙한 형상을 작도하는 방법이다. 프랙탈 차원은 비정수로서 물체의 거칠거칠한 정도, 불규칙한 정도를 측정하는 방법이며 공간을 채우는 능력에 대한 척도로서 도형의 불규칙한 상태를 특징 짓

3) 김승환(1993), 「정보사회와 문화예술:프랙탈」, 공간, p.53.
4) 이승준(1994), 「새로운 과학으로 부상하는 혼돈과학」, Softworld, p.267.

는 양으로서 이용되고 있다. 프랙탈은 무한의 반복이므로 특정한 길이를 갖지 않으며 접선, 접평면을 정의할 수 없다.

프랙탈은 전체집합이 그 집합의 일부분에 비선형적 반복 대응되어 얻어지는, 즉 자신의 모양을 몇 단계에 걸쳐 축소시키고 회전시켜 만든 결정형(deterministic) 프랙탈과 무작위 변이의 크기를 통계적으로 자기 유사적으로 배열시킬 수 있는데 작은 부분들을 계속 확대하면 전체집합과 같은 통계적 분포를 갖는 비결정형(undeterministic) 프랙탈로 분류할 수 있다. 결정형 프랙탈의 예로는 시어핀스키 삼각형, 코흐 눈송이, 페아노 곡선 등을 들 수 있으며, 비결정형 프랙탈의 예로는 자연 속의 형상(구름, 산맥, 고사리 잎사귀 등)을 들 수 있다.

결정형 프랙탈 도형은 다음과 같은 특성을 가진다.

첫째, 프랙탈은 자연의 모습과 비슷한 형태를 보여준다. 자연의 불규칙하고 복잡한 모습처럼 프랙탈 형상들은 복잡하게 서로 엉켜있고, 때론 부서져 있는 것처럼 보인다. 유클리드 기하학이 자와 컴퍼스로 그리는 단순하고 매끈한 인공의 기하학이라면, 프랙탈 기하학은 자연스러운 자연의 모습을 그대로 묘사하고 해석하는 자연의 기하학인 것이다.

둘째, 자기유사성(self-similarity)을 들 수 있다. 즉, 전체의 모습이나 구조가 부분의 구조와 같다는 것이다. 프랙탈은 전체에서 볼 수 있는 것과 그 전체의 부분에서 볼 수 있는 것과의 관계를 보여준다.

셋째, 프랙탈 형상들은 1차원, 2차원이 아닌 소수 차원에서 나타난다는 것이다. 예를 들어 유한한 면적에 무한한 길이를 가지고 있는 코흐 곡선은 공간을 채운다. 이것은 선 이상의 것이지만 평면 이하의 것이다. 코흐 곡선의 차원은 약 1.26이며 칸토르 집합의 차원은 약 0.63이다. 이에 대해서는 다음 장에서 자세히 다루도록 한다.

프랙탈은 수학뿐만 아니라 물리학, 경제학, 컴퓨터 과학, 그리고 예술 분야에까지 영향을 미치고 있으며, 프랙탈의 색, 아름다움, 기하학적 구조들에서 이제까지 수학에서 경험하지 못했던 색다른 시각적 감각을 제공한다. 프랙탈에 많은 사람들이 관심을 쏟는 이유는 프랙탈은 아직 해결하지 못한 문제들을 해결할 수 있는 도구를 제공하기 때문이다. 또한 프랙탈의 많은 부분들이 접근하기 쉽고 컴퓨터 그래픽 이미지로 아름답게 표현될 수 있는 심미성 때문이다.[5)]

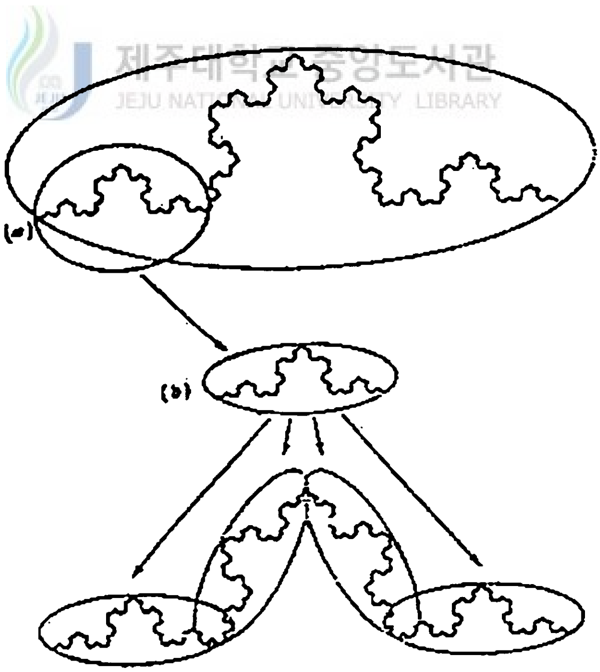
5) 유병옥(1999), 전게서, p.4.

2. 자기유사성(self-similarity)

자기유사성이란 도형의 일부분을 확대했을 때 다시 전체의 모습이 되는 성질을 말한다. 즉, 똑같은 모양의 부분이 계속 결합되어 같은 모습의 전체가 되는 것을 말한다. 이러한 자기유사성이 프랙탈을 결정짓기는 하지만 구조가 자기유사성을 가진다고 해서 반드시 프랙탈이 되는 것은 아니다. 선분, 사각형, 직육면체 등은 자기유사성을 가지고 있으나 프랙탈은 아니다. 자기유사성의 종류를 2가지로 분류해 보면 다음과 같다.

1) 자기 동형(self-affinity)

<그림Ⅱ-1>에서와 같이 코흐 곡선의 $\frac{1}{4}$을 3배로 확대하면 전체의 코흐 곡선이 된다. 이와 같이 일부분을 확대하면 완전히 일치하는 것을 자기 동형(self-affinity)라고 한다.



<그림Ⅱ-1> 코흐 곡선의 자기유사성
(출처 : 김선화(1994), 교실밖 수학여행, p.317.)

2) 통계적 자기유사성(statistical self-similarity)

<그림Ⅱ-2>는 우리 나라 남해안의 해남반도와 화원반도 사이에 있는 일부 해안선을 약 45° 정도 좌로 회전시켜 놓은 것이다. 이 해안선을 코흐 곡선과 마찬가지로 한 변을 3등분하면 구불구불한 정도가 거의 닮은 작은 해안선이 4개 생긴다.[6] 그러나, 각각의 해안선들을 3배로 확대해서 보았을 때 전체의 해안선과 완전히 일치하지 않는 것을 통계적 자기유사성이라고 한다.

<그림Ⅱ-2> 해안선의 자기유사성

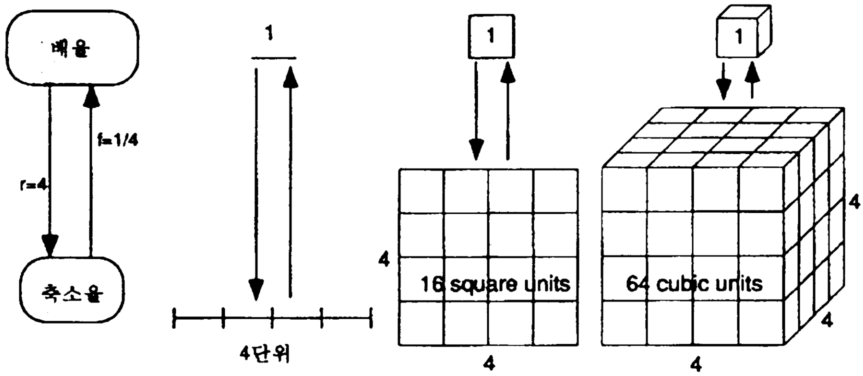
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.70.)

3. 프랙탈 차원

<그림Ⅱ-3>에서 보듯이 차원이 다른 도형을 확대할 때 그 척도가 달라진다. 가령 일정한 길이의 1차원 도형인 선분을 4배 확대하면 자기닮음인 조각이 수가 4개가 된다. 그러나, 2차원 도형인 정사각형을 4배로 확대하면 자기닮음인 조각의 수가 16개가 되며 3차원 도형인 경우 4배로 확대하면 조각의 수는 64개로 늘어난다.

---

6) 김용운 · 김용국(1998), 「프랙탈과 카오스의 세계」, 도서출판 우성, p.69.



<그림Ⅱ-3> 차원이 다른 각각의 도형을 4배로 확대할 때의 크기의 변화

(출처 : 파이트겐 외 5명(1999), 수학교사를 위한 프랙탈 기하, 신인선 · 류희찬 역, p.118.)

확대율과 각 도형의 조각의 수를 관계지으면,

$$4^1 = 4\ (1\text{차원}),\ 4^2 = 16\ (2\text{차원}),\ 4^3 = 64\ (3\text{차원}),$$

즉, $(\text{확대율})^{\text{차원}}$ = 조각의 수이다. 여기서 log를 취하면,

$$\frac{\log 4}{\log 4} = 1\text{차원}\ ,\quad \frac{\log 16}{\log 4} = 2\text{차원}\ ,\quad \frac{\log 64}{\log 4} = 3\text{차원}$$

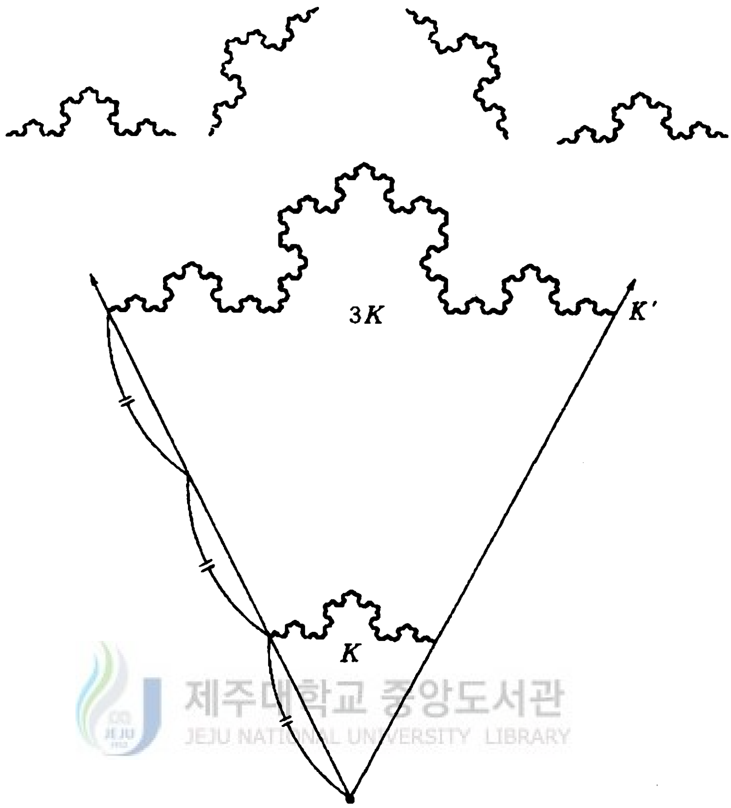
으로 계산된다.[7] 이것을 일반화하면

$$\text{차원} = \frac{\log(\text{조각의 수})}{\log(\text{확대율})}$$

이제 위에서 정의한 차원을 '코흐 곡선'에 적용해 보면, <그림Ⅱ-4>와 같이 코흐 곡선 K을 3배 확대된 코흐 곡선 K'에는 원래의 코흐 곡선이 4개 있다. 따라서, 조각의 수=4, 확대율=3이므로

$$\text{차원} = \frac{\log(\text{조각의 수})}{\log(\text{확대율})} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261\cdots$$

7) 파이드겐외 5명(1999), 『수학교사를 위한 프랙탈 기하』, 신인선 · 류희찬 역, 경문사, p.118.



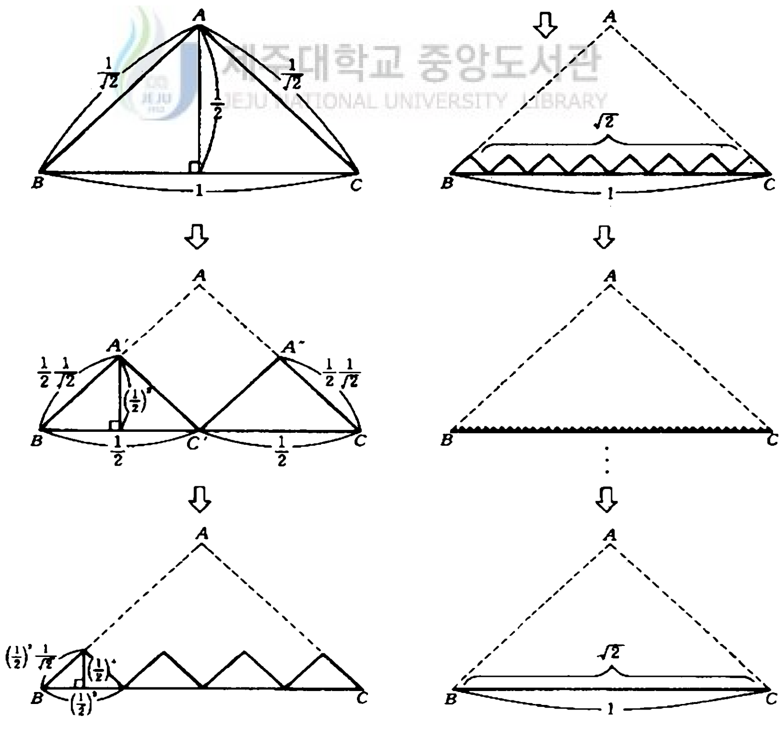
<그림Ⅱ-4>코흐 곡선 차원

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.61.)

코흐 곡선의 차원, 즉 복잡도는 1차원인 직선보다는 복잡하고 2차원인 평면보다는 단순한 것이다. 그러나 1에 좀더 가깝기 때문에 직선에 가깝다고 볼 수 있다. 코흐 곡선은 무한한 길이를 가지고 있지만 공간을 가득 채우지 못하기 때문에 그것은 직선 이상의 것이지만 평면 이하의 것이다. 즉, 1차원 이상이지만 2차원 이하이다.

4. 유클리드 도형과 프랙탈 도형의 비교

유클리드 도형을 계속적으로 꺾어 프랙탈 도형을 만든다. 이러한 과정에서 얻어지는 프랙탈 도형의 가장 큰 특징은 '소수 차원을 갖는다'는 것과 '자기닮음'이다. 계속적으로 꺾어서 만든 도형이 어떤 경우에는 프랙탈적인 형태를 갖지 않는다. 앞의 과정에서는 단순한 극한 개념만 포함하지만, 뒤의 과정에는 극한 개념이 중복되어 있다. <그림Ⅱ-5>와 같이 먼저 직각이등변삼각형의 두 변을 이등분한다. 그리하여 나눈 변의 위쪽 반을 각각 밑변을 향해 꺾어 내린다. 이때 작은 두 개의 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 새로 생긴 이등변삼각형에 대해서도 똑같이 실시한다. 그러면 4개의 보다 작은 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 무한히 반복한다. 그 결과, 극한의 상태에서는 밑변 위의 모든 점에서 꺾이기 때문에 미분불가능인 연속곡선이 생긴다.



<그림Ⅱ-5> 프랙탈 도형이 아닌 예
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.75.)

처음의 삼각형에서 두 변의 길이의 합은 $\sqrt{2}$이고, 밑면의 길이는 1이었다. 하지만 한없이 꺾어가다 보면 두 변의 길의 합은 마침내 밑변과 같아지는 것처럼 보인다. 그러나 다음 식에서 보는 것처럼 두 변의 길이의 합은 여전히 $\sqrt{2}$이다. 작은 삼각형의 길이가 같은 두 변의 합을 L_n이라고 하면,

$$L_0=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$L_1=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$L_2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

이기 때문이다. 즉, 이등변삼각형의 두 변을 무한히 꺾어서 만든 이 곡선의 길이는 밑변의 길이인 1이 되지 않고, 항상 $\sqrt{2}$로 변함이 없는 것이다. 그리고 그 차원도 1차원이다.

그러나 <그림Ⅱ-6>과 같이 먼저 꼭지각이 120^o인 이등변삼각형의 밑변을 3등분한다. 그리하여 나눈 밑변의 가운데 부분을 버리고 꼭지점과 잇는다. 이때 작은 두 개의 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 새로 생긴 이등변삼각형에 대해서도 똑같이 실시한다. 그러면 4개의 보다 작은 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 무한히 반복한다. 작은 삼각형의 길이가 같은 두 변의 합을 KL_n이라고 하면,

$$KL_0=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^1\times 2\right\}\times 2^0=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^1$$

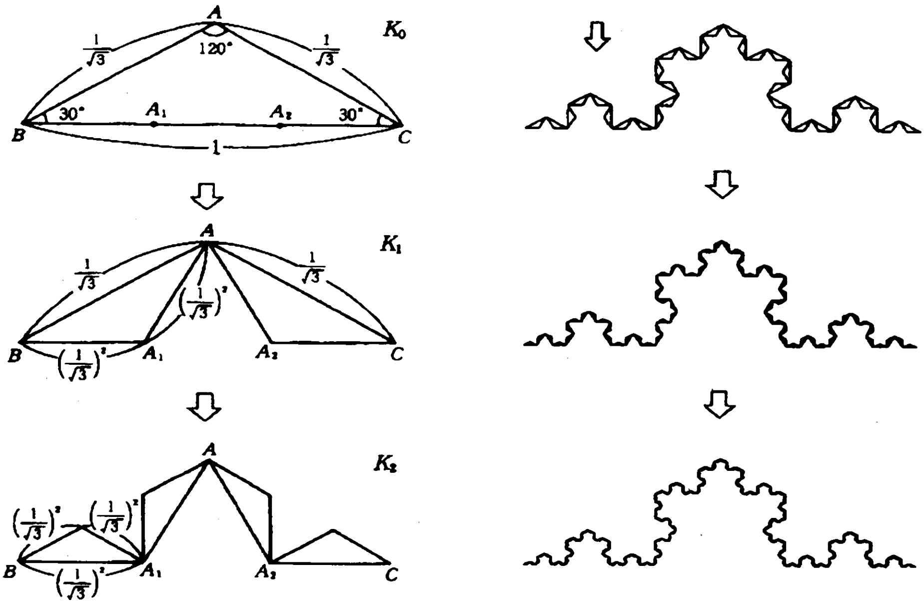
$$KL_1=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\times 2\right\}\times 2^1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$KL_2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\times 2\right\}\times 2^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$KL_n=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\times 2\right\}\times 2^n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



<그림Ⅱ-6> 길이가 무한대인 코흐 곡선

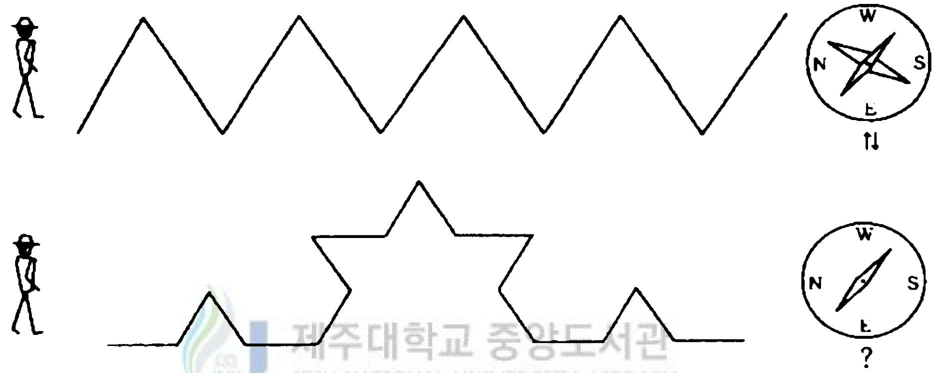
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.76.)

그 결과, 극한의 상태에서는 작은 이등변삼각형들이 길이가 같은 두 변의 길이의 합은 무한대로 접근한다. 즉 코흐 곡선은 그 길이가 무한대가 되고, 차원은 프랙탈 차원이다. 여기에 프랙탈 도형과 유클리드적인 도형과의 기본적인 차이가 있는 것이다. 이등변삼각형의 두 변을 단순히 꺾어가며 만든 도형에는 길이의 변화가 일어나지 않는다. 프랙탈 도형을 만드는 과정에서 최초의 도형을 '창시자'(initiator)라고 부른다. 여기에 프랙탈 도형을 만드는 규칙이 주어졌을 때 생기는 도형을 '생성자'(generator)라고 부른다. 이 생성자를 어떻게 반복하느냐에 따라서 조금씩 다른 프랙탈 도형이 얻어진다. 코흐 곡선은 생성자의 조작을 반복해 나갈수록 길이가 늘어나고, 결국에는 길이가 무한대로 발산되어 간다. 즉, 코흐 곡선의 양 끝점을 잡고 늘이면 끝없이 늘어나는 직선이 된다.

이 차이는 단순히 2등분해서 반복적으로 꺾어 가는 것과, 생성자를 복잡하게 방향을 바꾸어 가면서 반복하는 차이에서 나온다. 이 사실은 곧, 단순함과 복잡함의 차이를 말하는 것이다. 이등변삼각형은 단순하게 위 아래로만 선분이 교대로 나타나지만, 코

호 곡선은 매우 복잡하게 배열되어 있다는 점이다. 뿐만 아니라, 반복 회수가 거듭될수록 이등변삼각형과 코흐 곡선의 늘어나는 선분의 개수는 크게 차이가 난다.

이들의 질적인 차이를 알아보기 위해 <그림Ⅱ-7>에서와 같이 이 두 곡선을 따라 여행하는 사람이 있다고 가정하자. 이 사람은 나침반을 들고 여행하고 있다. 먼저 이등변삼각형의 중점을 한없이 되풀이하여 꺾어서 만든 곡선을 따라 여행할 때의 나침반을 보면, 바늘은 두 방향 사이를 왔다 갔다할 뿐이다. 이번에는 코흐 곡선 위를 여행한다고 하자.



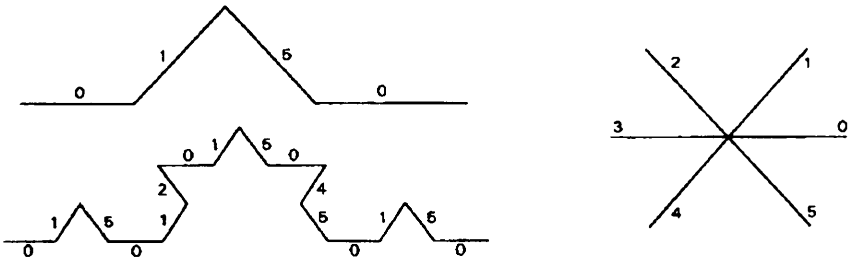
<그림Ⅱ-7> 유클리드 도형과 코흐 곡선의 방향성

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.77.)

이 때의 나침반의 바늘은 <그림Ⅱ-8>에서 처럼 1단계의 코흐 곡선을 가지고 생각해 보면, 나침반은 다음과 같은 순서로 움직인다. 0→1→5→0, 그 다음 2단계의 코흐 곡선에서는 0→1→5→0→1→2→0→1→5→0→4→5→0→1→5→0의 순서로 나침반이 돌아간다.

이와 같이 코흐 곡선에서는 나침반이 360° 어느 방향으로나 돌아간다. 방향이라는 측면에서 생각하면, 코흐 곡선은 어디를 향하고 있는지 전혀 알 수 없는 카오스 그 차체이다. 이러한 사실에서 우리는 복잡성, 프랙탈, 카오스가 서로 밀접한 관계에 있음을 알 수 있다. 코흐 곡선은 반복 회수를 늘려감에 따라 선분의 수가 폭발적으로 늘어나며, 그 방향도 종잡을 수 없이 변한다. 즉, 정보가 폭발적으로 증가하는 것이다. 코흐 곡선을 아무리 보고 있어도 싫증나지 않는 이유는 파도치는 해변에서 바다를 보는 것처럼 순간마다 조금씩 변하는 그 모양에 수없이 많은 정보가 숨어있기 때문이다. 복잡

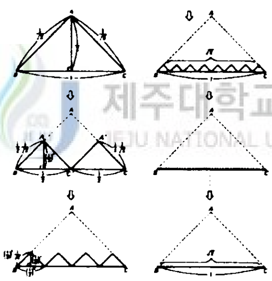
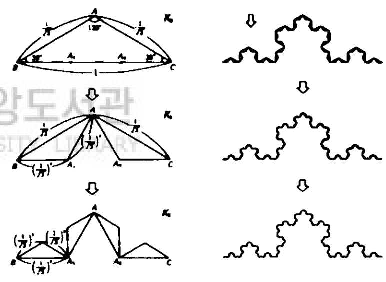
성과 단순함에는 이처럼 많은 질적 차이가 있다.[8)]



<그림Ⅱ-8> 코흐 곡선의 방향성

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.77.)

이상에서 유클리드 도형과 프랙탈 도형을 비교하면 <표-1>과 같이 요약할 수 있다

구 분	유클리드 도형	프랙탈 도형(코흐곡선)
그 림		
생성원리	이등변삼각형의 두 변을 2등분해서 무한히 꺾은 도형	선분을 3등분해서 가운데의 선분을 위로 구부려 올려 만든 도형
차 원	1차원	프랙탈 차원(약 1.26차원)
선 길이변화	길이 변화 일어나지 않음	길이가 늘어나고, 무한대로 발산, 양쪽잡고 늘이면 끝없는 직선이 됨
생성형태차이	단순히 2등분해서 반복적으로 꺾은 것(단순함)	생성자를 복잡하게 방향을 바꾸어 가면서 반복한 것(복잡함)
방 향	일정한 방향으로 진행	어느 방향을 향하고 있는지 알 수 없음. 반복 횟수를 늘려감에 따라 선분의 수가 폭발적으로 늘어나며, 그 방향도 종잡을 수없이 변함. 순간마다 조금씩 변하는 모양에 수없이 많은 정보가 있다. 확률적이다.

<표-1> 유클리드 도형과 프랙탈 도형의 비교

8) 김용운 · 김용국(1998), 전게서, pp.74～77.

III. 프랙탈의 예

1. 칸토르 집합(Cantor Set)

칸토르 집합은 수학의 많은 부분에서 중요한 역할을 하고 있다. 그리고 많은 프랙탈 속에는 칸토르 집합의 구조가 숨겨져 있으며, 프랙탈의 기본적인 모델이 되고 있다.

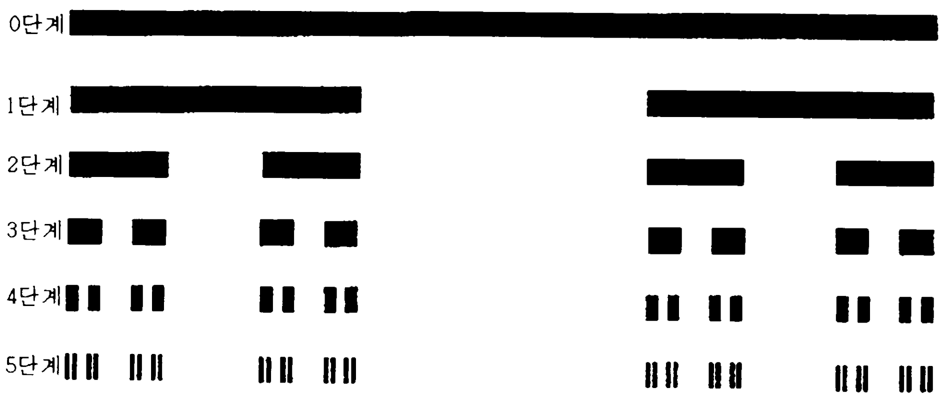
칸토르 집합의 생성 과정은 다음과 같다.

(0단계) 단위 구간 [0,1] 에서 시작한다.(창시자)

(1단계) 단위 구간 [0,1] 을 3등분하여 가운데 부분, 즉 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 를 제거한다.(생성자)

(2단계) 남은 두 폐구간 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 을 각각 다시 3등분하여 가운데 부분을 제거한다.

이와 같은 과정을 무한히 반복했을 때 남게 되는 점들의 집합이 바로 칸토르 집합이다.

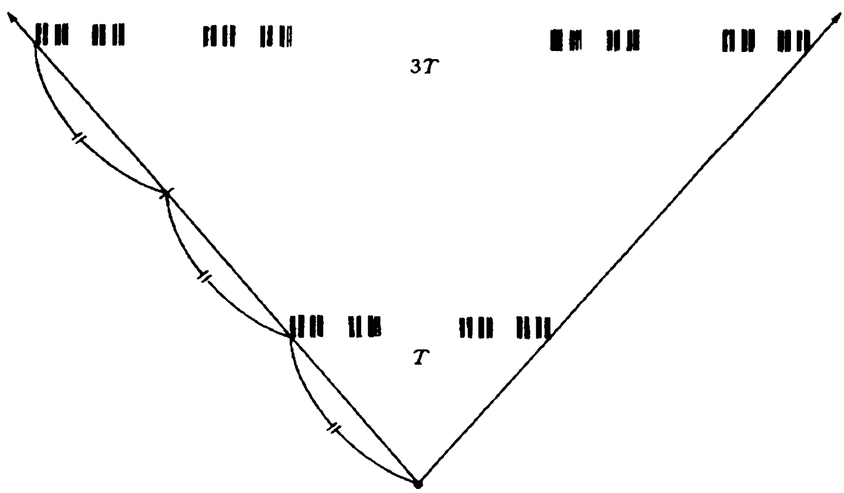


<그림Ⅲ-1> 칸토르 집합의 생성 단계

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.88.)

칸토르 집합은 제1단계에서 구간의 길이가 $\frac{1}{3}$인 폐구간이 2개이고, 제2단계에서는 길이가 $\frac{1}{9}$인 폐구간이 4개이고, 제 n단계에서는 길이가 $\frac{1}{3^n}$인 폐구간이 2^n개가 된다. 그러므로 칸토르 집합의 길이는 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} \times 2^n = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ 이다. 그러나 남겨진 폐구간의 끝점은 이 과정에서 전혀 제거되지 않은 점들이 존재하므로 칸토르 집합은 공집합이 아니라 점 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, …은 모두 칸토르 집합에 속한다. 또한 칸토르 집합은 어떤 구간도 포함하지 않음을 알 수 있다. 왜냐하면 칸토르 집합이 어떤 구간을 포함한다고 가정하면 그 다음 단계에서 이 구간의 3등분한 중앙 부분을 제거해야만 할 것이다. 이것은 칸토르 집합이 완전히 생성되지 않은 것을 뜻하므로 어떤 구간도 포함해서는 안된다. 바로 이것은 칸토르 집합이 완전분리집합임을 뜻한다.

$\left[0, \frac{1}{3}\right]$에 있는 칸토르 집합의 부분집합은 칸토르 집합 전체를 $\frac{1}{3}$로 축소시킨 과 똑같은 복사본이 된다. 기하학적인 칸토르 집합의 구성에서 임의의 부분 구간들은 전체 칸토르 집합을 $\frac{1}{3^k}$로 축소시킨 것과 똑같아진다. 즉, 칸토르 집합은 전체 칸토르 집합을 완전히 축소시킨 것과 똑같은 작은 조각들의 집합이라고 볼 수 있는데, 이처럼 칸토르 집합은 자기 유사성을 가지고 있다.



<그림Ⅲ-2> 칸토르 집합의 차원

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.89.)

칸토르 집합의 프랙탈 차원을 생각하면, <그림Ⅲ-2>와 같이 T를 3배로 확대한 3T에서는 원래의 칸토르 집합은 2개가 생긴다. 즉, 확대율=3, 조각의 수=2,

$$\text{차원} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630\cdots$$

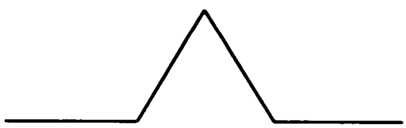
2. 코흐 곡선(Koch Curve)과 코흐 눈송이(Koch Flake)

스웨덴의 수학자인 Helge von Koch(1870~1924)는 1904년에 현재 코흐 곡선이라고 불리는 프랙탈을 소개했다.

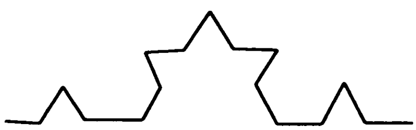
코흐 곡선의 생성 과정은 다음과 같다.

(0단계) 선분에서 시작한다.(창시자)

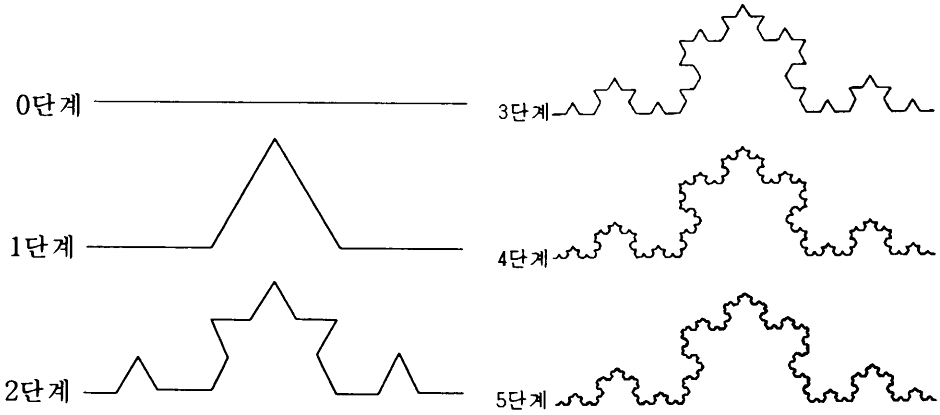
(1단계) 선분을 3등분한 후 가운데 부분을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 그 삼각형에서 밑변을 없앤다.(생성자)



(2단계) 4개의 선분에 대하여 또 한 번 같은 조작을 한다.



이와 같은 단계를 무한히 반복 실행하면 코흐 곡선이 생성된다.

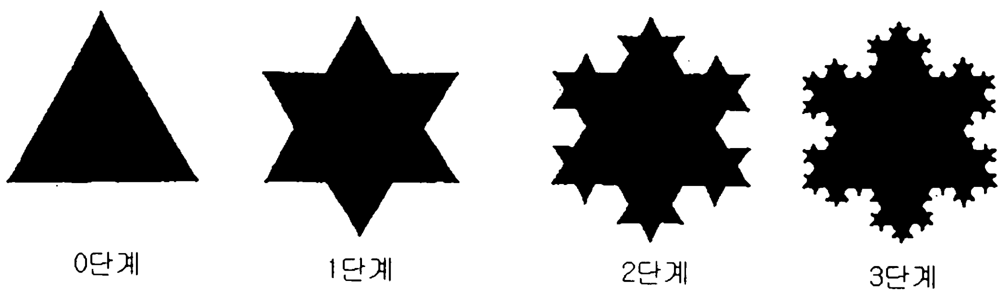


<그림Ⅲ-3> 코흐 곡선의 생성 단계

(출처 : Peitgen et al(1992), Fractals for the Classroom, part one, P.105.)

실제로 코흐는 모든 점에서 접선을 갖지 않는 곡선을 만들고자 했으며, 코흐 곡선은 모든 곳이 모퉁이처럼 생겨서 어느 점에서도 접선을 갖지 않는다. 또 코흐 곡선은 각 부분을 확대하면 전체와 일치하는 자기 닮음 구조로 일관되어 있다. 그러므로 부분의 부분, 또 그 부분을 반복해서 확대해가도 도형의 구조는 본질적으로 변하지 않는다. 즉, 자기유사성을 갖는다.

정삼각형의 세 변에 코흐 곡선을 생성하는 과정을 실행하면 <그림Ⅲ-4>와 같이 코흐 눈송이가 만들어진다.



<그림Ⅲ-4> 코흐 눈송이 생성 단계

(출처 : Peitgen et al(1992), Fractals for the Classroom, part one, p.166.)

이 코흐 눈송이는 몇 가지 흥미있는 특징을 가지고 있다. 첫째 코흐 눈송이는 서로 교차하지 않는 연속선이라는 것이다. 왜냐하면 각 변 위의 새로운 삼각형은 언제나 충분히 작아서 서로 교차하지 않기 때문이다. 둘째 코흐 눈송이에서 삼각형 주위에 외접원을 그렸을 때, 코흐 눈송이는 결코 원 밖으로 그려지지 않으므로 코흐 눈송이의 면적은 원래 삼각형의 외접원의 면적보다 클 수 없다. 다시 말해 코흐 눈송이에 무한히 삼각형을 추가한다 하더라도 코흐 눈송이 안의 전체 면적은 유한하다. 셋째로는 코흐 눈송이의 길이는 무한히 길다는 것이다. 무한한 길이의 곡선이 유한한 면적을 둘러싸게 되는 역설적인 결과가 생기는 것이다. 즉, 유한한 공간내에 있는 무한한 길이라는 결과를 낳는다.

만일 한 변의 길이가 1인 정삼각형이라고 하고, N_0, N_1. N_2, N_3, $\cdots$ 를 각 작도 단계의 코흐 눈송이의 변의 개수라고 하면,

$$N_0 = 3,\ N_1 = 4 \cdot 3,\ N_2 = 4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3,\ N_3 = 4^3 \cdot 3,\ \cdots$$

그러므로

$$N_k = 4 \cdot N_{k-1} = 4^k \cdot 3$$

L_k를 제 k단계 후의 한 모서리의 길이라 하면 $L_k = \frac{1}{3^k}$ 이고, P_k를 제 k단계 후의 모서리의 길이의 총합이라고 하면

$$P_k = N_k \cdot L_k = 4^k \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot 3$$

이 성립한다. 따라서

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot 3 = \infty$$

즉, 코흐 눈송이의 둘레의 길이는 무한히 길게 된다.

또한 S_0, S_1, S_2, S_3, $\cdots$ 을 코흐 눈송이의 각 단계의 면적이라고 하면

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ ,\quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{9}\ ,\quad S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right)\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

그러므로

$$S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} \frac{+3 \cdot 4^2}{9^3} + \cdots \frac{+3 \cdot 4^{k\ 1}}{9^k} \right)$$

따라서

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

즉, 코흐 눈송이 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 이다. 코흐 눈송이의 프랙탈 차원을 생각해 보면 확대율=3, 조각의수=4,

$$\text{차원} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261 \cdots$$

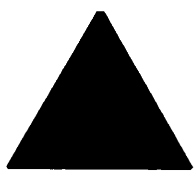
코흐 눈송이의 프랙탈 차원은 약 1.26이 되는데, 이 값은 영국 해안선의 프랙탈 차원과 가깝고, 세계의 섬들의 프랙탈 차원 평균값과 가깝다. 그러므로 코흐 눈송이는 해안선에 대한 간단한 수학적 모델이 된다. 다시 말해서 울퉁불퉁한 해안선들은 임의적으로 배열되어있는 코흐 눈송이로 볼 수 있다.

3. 시어핀스키 삼각형(Siepinski Triangle)과 시어핀스키 사면체(Siepinski tetrahedron)

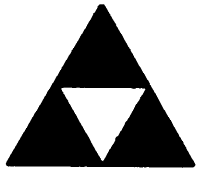
시어핀스키 삼각형은 1916년 폴란드의 유명한 수학자 Waclaw Siepinski(1882~1969)에 의해서 처음 소개되었다.

시어핀스키 삼각형의 생성 과정은 다음과 같다.

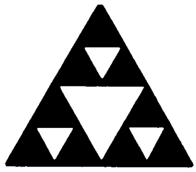
(0단계) 정삼각형을 하나 그린다.(창시자)



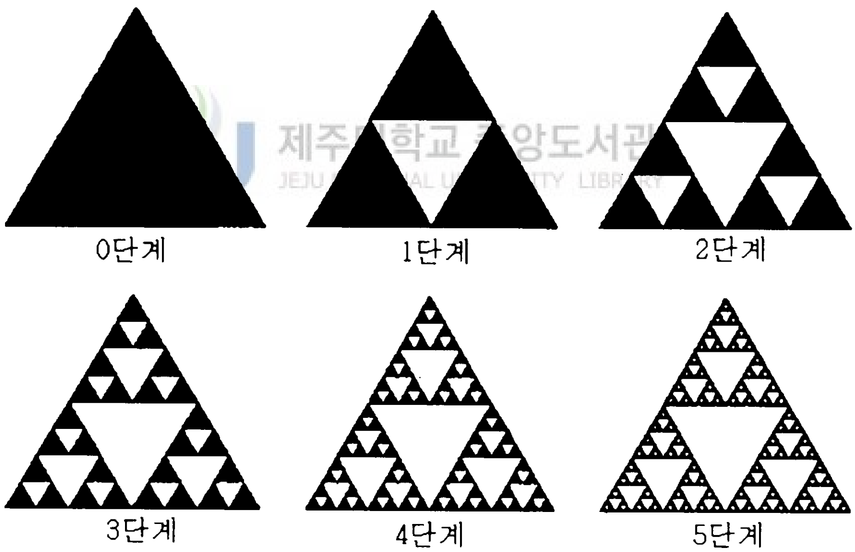
(1단계) 각 변의 중점을 연결한 후 나누어진 삼각형 중 가운데 부분을 잘라낸다.



(2단계) 남아 있는 삼각형에 대하여 같은 조작을 한다.



이 과정을 무한히 반복했을 때 나타나는 평면 위의 점들의 집합이 바로 시어핀스키 삼각형이다.



<그림Ⅲ-5> 시어핀스키 삼각형의 생성 단계

(출처 : 김용운 · 김용국, 프랙탈과 카오스의 세계, P.97.)

처음 정삼각형의 한 변의 길이를 1로 하고 시어핀스키 삼각형의 넓이를 계산하자. 1단계에서 남은 3개의 정삼각형의 집합을 S_1이라 하고 이 절차를 반복해서 n번째 단계에서 얻어진 정삼각형의 집합을 S_n이라고 하자.

여기서 시어핀스키 삼각형을 S라 하면 $S=\bigcap_{k\subset N} S_k$ 이다. S_k는 각 변의 길이 2^{k}이고 3^k개의 정삼각형을 가지므로 S_k의 총 면적은

$$3^k \cdot (2^{k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 S의 면적은

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

그러므로 시어핀스키 삼각형의 면적은 0이다. 또한 S_n의 총 길이는

$$3 \cdot 3^k \cdot 2^{-k} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

따라서

$$\lim_{k\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

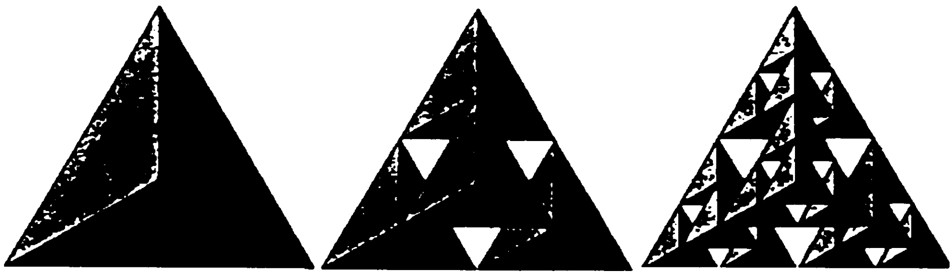
즉, 시어핀스키 삼각형의 길이는 ∞이다.

<그림Ⅲ-5>에서 첫 번째 단계 후에 남아있는 3개의 작은 삼각형 중에서 좌측 아래에 있는 삼각형의 중앙 부분은 제거하고 얻은 부분을 면밀히 관찰하면 이 삼각형의 한 변의 길이는 원래 주어진 삼각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이 된다. 이 삼각형을 2배의 비율로 확대하면 전체의 시어핀스키 삼각형을 보게 된다. 즉, 확대율=2, 조각의 수=3,

$$\text{차원} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.584\cdots$$

시어핀스키 삼각형을 3차원으로 확장한 것이 시어핀스키 사면체인데 시어핀스키 삼각형과 똑같은 조작을 행하여서 얻을 수 있다. 정사면체의 모서리의 중점을 연결하면 네 모퉁이에 생긴 4개의 작은 정사면체와 중앙부의 정팔면체가 생긴다. 정사면체로부터 정팔면체를 빼고, 네 모퉁이에 있는 작은 정사면체를 남긴다. 이 조작을 계속하면 시어핀스키 사면체가 된다. 작은 정사면체는 원래의 정사면체와 비교해서 체적은 $\frac{1}{8}$, 표면적은 $\frac{1}{4}$, 모서리의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 4개의 작은 정사면체와 원래의 정사면체를 비

교하면 체적은 $\frac{1}{2}$, 표면적은 불변, 모서리의 길이는 2배이다. 따라서 이 조작을 계속 해나가면 표면적은 불변이고, 모서리의 길이는 증가하고, 꼭지점의 수는 증가한다.



<그림Ⅲ-6> 시어핀스키 사면체의 생성 단계

(출처 : Peitgen et al(1992), Fractals for the Classroom, part one, p.17.)

프랙탈 차원을 생각하면 확대율=2, 조각의 수 =4,

$$\text{차원} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

에서 프랙탈 차원 2가 표면적의 불변의 조작으로 만든 것과 아주 잘 일치하고 있다.

표면적을 변하지 않게 프랙탈 도형을 만들면, 그것이 프랙탈 차원이 항상 정수가 될까? 수학적으로 매우 흥미있는 문제이다.

4. 시어핀스키 양탄자(Sierpinski Caput)와 Manger 스폰지(Manger Sponge)

시어핀스키 양탄자의 생성 과정은 다음과 같다.

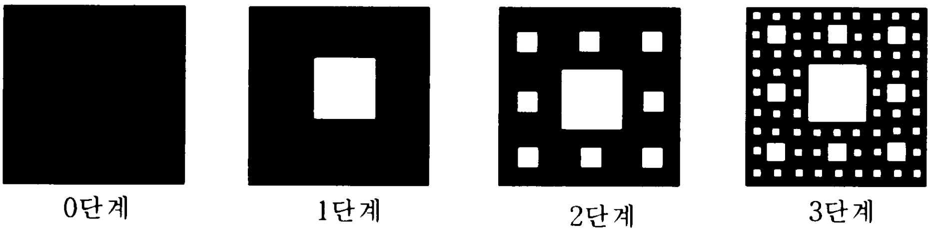
(0단계) 정사각형을 그린다(창시자)

(1단계) 정사각형의 가로와 세로를 각각 3등분하여 9개의 작은 정사각형을 얻은 다음 중앙에 있는 작은 정사각형을 제거한다.(창시자)

(2단계) 남아있는 8개의 작은 정사각형에서 1단계와 같은 방법으로 가로와 세로를

각각 3등분하고 더 작은 정사각형을 제거한다.

이 과정을 무한히 반복하면 시어핀스키 양탄자가 만들어진다.



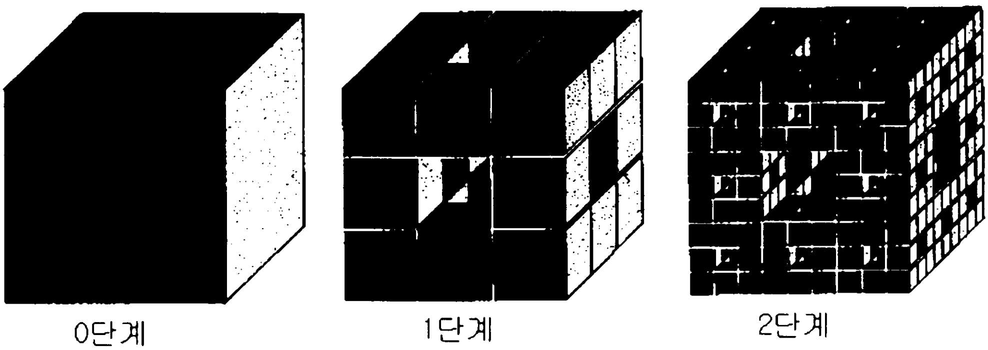
<그림Ⅲ-7> 시어핀스키 양탄자의 생성 단계

(출처 : 파이트겐외 5명, 수학교사를 위한 프랙탈 기하, p.19.)

프랙탈 차원을 생각하면 확대율=3, 조각의 수 =8,

$$\text{차원} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.892\cdots$$

시어핀스키 양탄자를 3차원으로 확장한 것이 Manger 스폰지인데 시어핀스키 양탄자와 똑같은 조작을 행하여서 얻을 수 있다. <그림Ⅲ-8>과 같이 정육면체로 시작하여 그것을 27개의 작은 정육면체로 나누고 중앙의 정육면체를 제거시키는 조작을 무한히 하면 Manger 스폰지가 된다.



<그림Ⅲ-8> Manger 스폰지의 생성 단계

(출처 : 김용운 · 김용국, 프랙탈과 카오스의 세계, P.104.)

프랙탈 차원을 생각하면 확대율=3, 조각의 수=20,

$$\text{차원} = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.726\cdots$$

2보다 3에 가깝기 때문에 매끄러운 곡선이라기 보다는 공간을 가득 채우는 입체이다. 이 Manger 스폰지는 시어핀스키 양탄자를 3차원으로 확대한 것이다. 이 사실을 직관적으로 이해하기 위한 좋은 보기가 있다. 한 장의 종이는 평면이며, 차원은 2이다. 이것을 손으로 뭉개어 보면 평면도 입체도 아닌 종이 뭉치가 생긴다. 입체라면 속이 꽉차 있어야 하는데, 틈새에 빈 공간이 있다. 그 차원은 2와 3 사이에 있는, 이를테면 구조상으로 Manger 스폰지에 가까운 것이 된다. 실제로 그 차원은 2와 3 사이에 있다.

Manger 스폰지를 만드는 방식으로 치즈를 만든다고 가정하자. 먼저 잘 다져진 정육면체의 치즈에다 Manger 스폰지를 만드는 과정대로 구멍을 파내어 간다. 구멍을 파내고 남은 조각을 모두 모아 잘 다지면 다시 원래 크기의 치즈가 나오는 것이다. Manger 치즈를 아무리 만들어내도 원래의 치즈는 그대로 있는 것이다. 그것은 Manger 치즈의 부피가 0이기 때문이다.

3차원 공간 상의 임의의 곡선은 Manger 스폰지의 부분집합과 위상적으로 같다. 즉, Manger 스폰지는 3차원에서 그릴 수 있는 모든 곡선을 정리해서 모아놓은 것이라고 할 수 있다. Manger 스폰지 속에는 무한개의 가시를 가진 밤송이 같은 도형도 들어있다. 이것은 Manger 스폰지의 어느 한 점에서도 무한히 많은 선이 뻗어나갈 수 있음을 의미한다. 빈틈 투성이에, 게다가 3차원 도형에도 미치지 못하는 프랙탈 도형인데도 마치 3차원의 속이 꽉찬 공간처럼 무한히 많은 가지를 찾아낼 수 있다.

이제까지 여러 가지 프랙탈 도형의 예를 보면서 도형의 복잡성과 차원의 관계를 보았다. 이를 정리하면, 다음과 같이 가장 간단한 도형부터 프랙탈 도형에 이르기까지 차원이 높아져 간다.

점의 차원 < 칸토르 집합의 차원 < 선분의 차원 < 코흐 곡선의 차원 < 시어핀스키 삼각형의 차원 < 시어핀스키 양탄자의 차원 < 사각형의 차원(=페아노 곡선의 차원) < 멩거 스펀지의 차원 < ⋯

이것은 우리의 직관과 일치한다. 즉, 점, 칸토르의 집합, 선분, 시어핀스키의 삼각형 등을 보면, 차원이 커질수록 복잡한 도형으로 되어 있음을 알 수 있다.[9)]

9) 김용운 · 김용국(1998), 전게서, pp.105~106.

5. 만델브로트 집합(Mandelbrot Set)

수학적 프랙탈 중 일반에게 가장 널리 알려진 것은 만델브로트의 프랙탈로 이를 처음으로 시각적으로 표현하고 연구를 시작한 만데브로트의 이름을 따라 만델브로트 집합이라 한다.

만델브로트 집합은 점의 모임이다. 복소수 평면에서 모든 점, 즉 모든 복소수는 그 집합 안에 있거나 밖에 있다. 그 집합을 정의하는 하나의 방법은 모든 점에 대해 간단한 산술을 반복하여 조사해 보는 것이다.

$$Z^2 + C = \text{어떤 수}$$

z : 변화하는 복소수

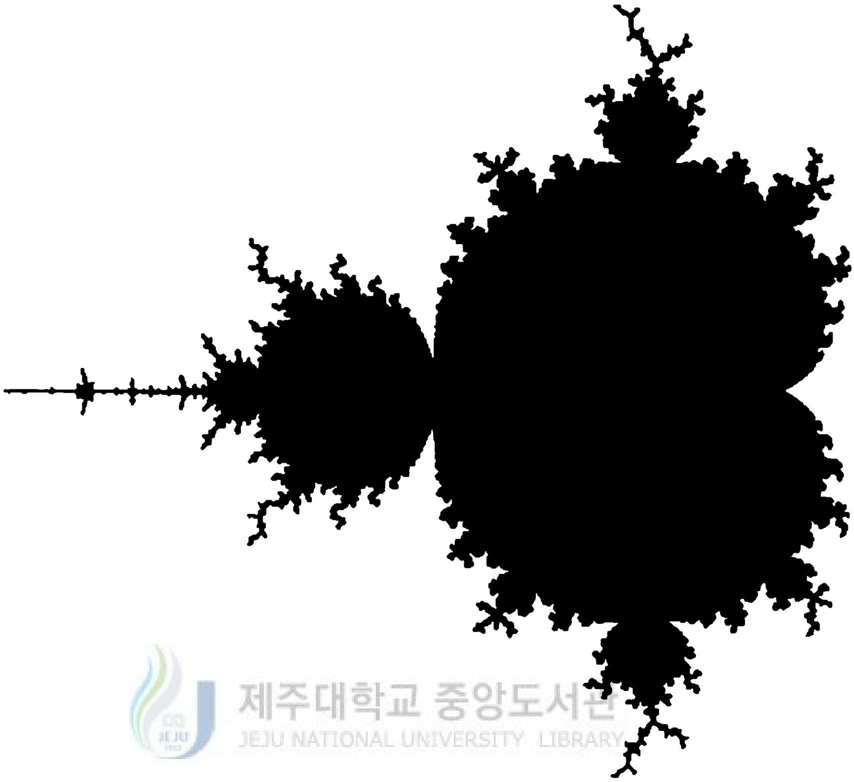
c : 상수

먼저 어떤 복소수를 취하고, 그것을 제곱한 다음 그것을 처음의 수를 더하고, 이를 반복하면 된다. 계산된 점들이 원점과의 거리가 무한대로 접근하면 그 점은 만델브로트 집합 내에 있지 않고, 유한하다면 그 점은 만델브로트 집합내에 존재한다. 하나의 과정을 무한히 되풀이하여 그 결과가 무한한지 여부를 묻는 이 작업은 일상 세계의 피드 백 과정과 비슷하다. 만델브로트 집합에 대하여 좀더 정확히 정의해 보면 다음과 같다.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

에서 초기값 $z_0 = 0$ 으로 고정해 놓고, c를 변화시켜서 $|z_n|$이 무한대가 되지 않는 c의 집합을 만델브로트 집합이라고 한다. 즉,

$$M = \left\{ c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c,\ z_0 = 0,\ \lim_{n \to \infty} |z_n| < \infty \right\}$$



<그림Ⅲ-9> 만델브로트의 집합

(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.251.)

만델브로트 집합은 어느 부분을 확대해도 다시 전체의 모습, 즉 매우 조그만 만델브로트 집합이 계속해서 나타난다. 따라서 만델브로트 집합의 경계는 그 둘레의 길이가 무한대이다. 또한 놀랍게도 그 프랙탈 차원은 2차원임이 밝혀져 있다.[10)]

10) M. Shishikura(1991), The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot Set and Julia Set, SUNY Stony Brook, Institute for Mathematics Sciences, Preprint # 1991. 7.

IV. 고등학교 수학교육과 프랙탈

1. 고등학교 수학교육에서 프랙탈의 필요성

최근 전 세계적으로 수학교육에서 강조하여야 할 사항이 변하고 있다. 수학적 지식을 생활 주변이나 다른 교과목의 여러 가지 문제 상황에 응용하는 것을 강조하고 있으며, 생소하고 익숙하지 않은 과제를 창의적으로 처리할 수 있는 능력의 개발을 요망하고 있다. 또한, 자신의 아이디어를 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 아이디어를 경청하고 절충하는 능력과, 컴퓨터와 같은 현대 수학을 반영하는 기술과 도구의 사용 능력을 주목하고 있으며, 대부분의 자연현상과 사회현상을 연속적이라고 전제하는 수학에서, 이산적인 수학으로 관심이 점차 증대하고 있다. 뿐만 아니라, 문제 해결에 대한 자신감과 인내성, 다른 대안을 찾으려는 자발성, 자신의 생각을 반성하려는 경향 등 긍정적인 수학적 성향을 길러 주는 것이 인지적인 목표 못지 않게 중요하다고 주장하고 있다. 이러한 변화는 수학의 실용적, 도야적, 문화적 힘을 체득하게 함으로써 수학의 아름다움을 관념적이 아닌 실제적인 교육적 대상으로 구체화하는 것을 의미한다. 프랙탈은 새로운 수학교육 목표를 달성하는 데 아주 적절한 내용이다. 어떤 수학 내용보다 응용성이 넓고, 탐구 활동을 통해 수학적 사고력과 수학적 의사소통 능력을 향상시킬 수 있도록 내용을 조직하기 쉬울 뿐만 아니라, 컴퓨터의 사용과 밀접히 관련되며, 최근에 각광받는 이산수학의 분야이다. 또, 프로그래밍 활동을 통해 컴퓨터 그래픽을 생성하고 조작해 봄으로써 수학의 아름다움을 생생하게 느끼게 할 수 있으며 그 결과 학생들로 하여금 바람직한 수학적 성향을 길러줄 수 있다고 한다.[11]

그리고 제7차 교육과정의 수학과 교수·학습에서는 학생들의 구체적인 경험에 근거하여 사물의 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적인 추상화 단계로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해한다. 또, 수학적 문제를 해결할 때에는 먼저 문제를 분명히 이해한 후, 문제 해결을 위

11) 파이트겐 외 5명(1999), 전게서, pp.147~148.

한 합리적이고 창의적인 해결 계획을 작성하여 실행한 다음, 반성 과정을 거치는 사고 태도를 지니도록 한다. 그리고 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 실용성 등을 인식할 수 있게 하여 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지게 한다.

수학 학습을 통하여 학생들은 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 습득하고 기능을 익혀, 자연과 사회에서 일어나는 현상이나 문제를 수학적인 방법으로 조직하고 해결할 수 있는 문제 해결 능력을 높이며, 유연하고 다양한 사고 활동을 통하여 수학적 사고력과 창의력을 배양할 수 있다고 한다. 그리고 수학과의 교과목표를 다음과 같이 기술하고 있다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다. 그리고 이를 다음과 같은 세 개의 항목으로 좀더 구체적으로 상세하게 제시하고 있다.

가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

나. 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

다. 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.[12)]

이러한 경우들에 비추어 볼 때 고등학교 수학교육에서의 프랙탈의 필요성을 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 프랙탈은 수학이 역동적이며 성장하는 학문이라는 사실을 알게 하고, 수학의 아름다움과 매력을 느끼게 된다.

둘째, 주제별 영역(대수, 해석, 기하, 통계)을 넘어서 수학 내용을 통합함으로써 수학적 아이디어를 창출할 수 있고, 새로운 내용이나 문제를 다루는 데 상호 관련된 아이디어를 이용할 수 있다.

셋째, 프랙탈은 여러 가지 실생활과 자연 현상을 수학적으로 표현하고 논리적으로 사고하여 처리할 수 있게한다.

12) 교육부(1997), 「고등학교 교육과정(1)」, 교육부, p.210.

2. Visual Basic 6.0을 이용한 프랙탈 도형 만들기[13]

프랙탈 도형은 복잡한 형태를 하고 있지만, 간단한 조작의 반복으로 얻을 수 있기 때문에 프로그램은 논리적이고 짧아도 된다. 하나의 도형을 만들어내는 기본 조작은 한 가지가 아니라, 몇 가지나 있다. 예를 들어 코흐 곡선은 점을 찍어 그리는 방법과 선을 그어서 그리는 방법이 있다. 프로그램 언어로서는 BASIC, C언어, Visual Basic과 LOGO 등 여러 가지로 짤 수 있다. 여기서는 http://www.fractal.co.kr에서 Visual Basic 6.0으로 프로그래밍한 내용을 소개하겠다.

1) 칸토르 집합

칸토르 집합은 집합론의 창시자인 G. Cantor가 고안한 도형이다.

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정
Form	Name	frmCantor
	BackColor	Light Gray
	Caption	칸토어의 먼지
	Height	5000
	Width	6800
Command Button	Name	cmdStart
	Caption	시 작
	Height	375
	Left	3480
	Top	4080
	Width	1215
Command Button	Name	cmdExit
	Caption	종 료
	Height	375
	Left	5040
	Top	4080
	Width	1215

13) http://www.fractal.co.kr

코드 작성

▶ 일반 선언부에 다음과 같이 입력한다.

```
Option Explicit
Dim x, y, d, l
```

▶ 프로시저를 추가한다.

도구 메뉴의 프로시저 추가를 선택한 후 이름 뒤에 '칸토어'라고 입력한다.

```
Public Sub 칸토어(x, y, l)
d = 80
If l > 1 Then
 Line (x, y)-(x + d, y + l), RGB(0, 0, 255), BF
 칸토어 x + d + 10, y, l / 3
 칸토어 x + d + 10, y + l * 2 / 3, l / 3
End If
End Sub
```

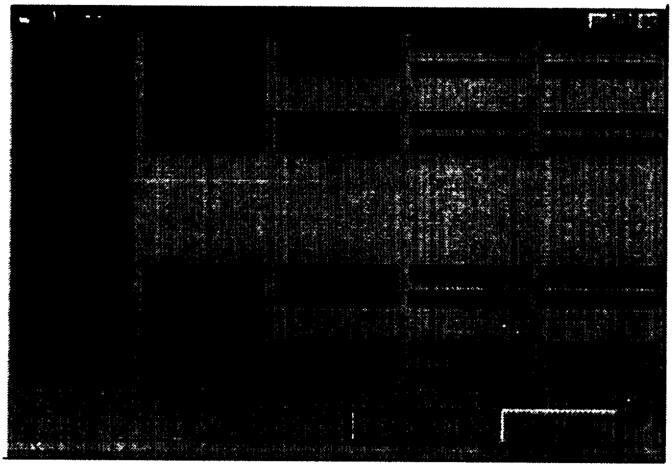

▶ 시작과 종료 커맨드 버튼에 다음과 같이 입력한다.

```
Private Sub cmdStart_Click()
  칸토어 2, 2, 250
End Sub
------------------------
Private Sub cmdExit_Click()
End
End Sub
```

칸토르 집합 프로그램 실행 결과

실행 메뉴의 시작 또는 F5 버튼을 누르면 실행이 된다.

윈도우에서 시작 커맨드 버튼을 누르면 칸토르 집합이 그려진다.

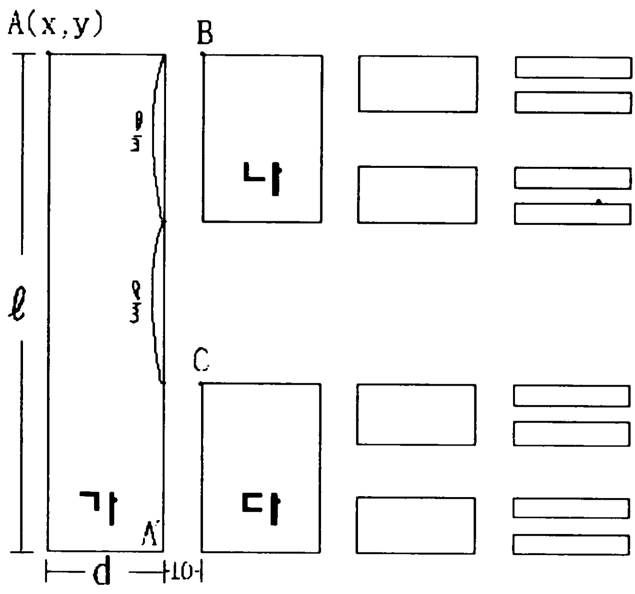


<그림Ⅳ-1> 칸토르 집합 프로그램 실행 결과

칸토르 집합 프로그램의 작동 원리

칸토르 집합의 알고리즘을 분석하기 위해 <그림Ⅳ-2>를 참조한다.

제일 왼쪽의 큰 사각형 (가)를 먼저 그린다. 그리고 사각형(가)에서 오른쪽으로 10의 거리만큼 움직인 후 ℓ을 ℓ/3로 줄여 사각형(나)와 사각형(다)를 그린다.



<그림Ⅳ-2> 칸토르 집합의 알고리즘 분석

(출처 : http://www.fractal.co.kr/fractal/vb/cantor/index.htm)

2) 코흐 곡선

코흐 곡선은 1904년 코흐에 의해 발표된 곡선이다.

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정	Object	Property	설 정
Form	Name	frmKoch	Command Button	Name	cmdStart
	Caption	코흐 곡선		Caption	시 작
	Height	5500		Height	495
	Width	6900		Left	3960
Label	Name	lblN		Top	4320
	Caption	n =		Width	1215
	Height	375	Command Button	Name	cmdExit
	Left	2280		Caption	종 료
	Top	4395		Height	495
	Width	495		Left	5400
Text Box	Name	txtN		Top	4320
	Alignment	2-가운데 맞춤		Width	1215
	Caption	3			
	Height	495			
	Left	2280			
	TapIndex	0			
	Top	4320			
	Width	855			

코드 작성

```
Option Explicit              ' 명시적으로 선언하지 않은 변수에 대한 경고
Dim x0, y0                   ' 시작 위치
Dim x, y                     ' 이동변위
Dim 각도, 이동거리, n        ' 회전각도, 이동거리, 차수
Const 원주율 = 3.14159
-------------------------------
Private Sub cmdStart_Click()
```

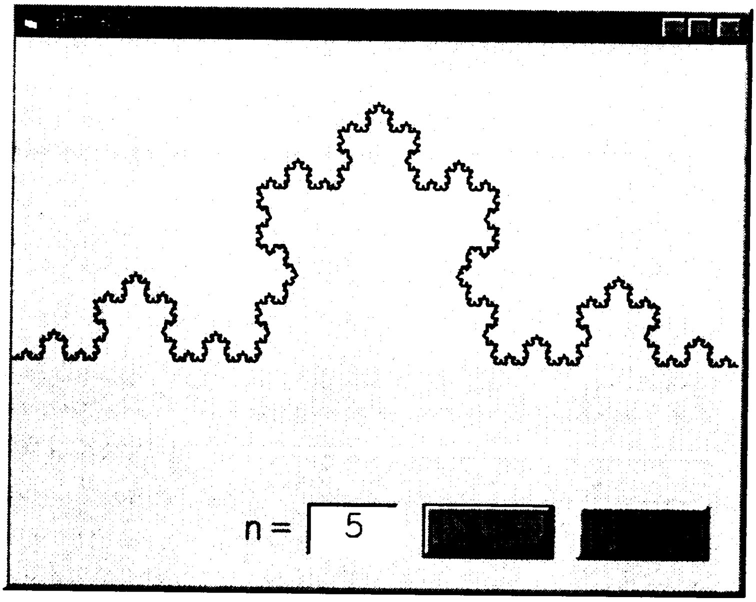
```
Cls                                  ' 화면 정리
x = 0
y = 0
x0 = 0
y0 = 200
n = 0
각도 = 0
CurrentX = x0            ' 좌표 x의 시작위치로 이동
CurrentY = y0            ' 좌표 y의 시작위치로 이동
n = txtN.Text
이동거리 = 450 * (1 / 3) ^ n     ' 전진 거리
코흐곡선 n
End Sub
------------------------------
Private Sub cmdExit_Click()
End
End Sub
------------------------------
Public Sub 회전(d)
각도 = 각도 + d
End Sub
------------------------------
Public Sub 전진()
x = x + 이동거리 * Cos(각도 * 원주율 / 180)
y = y - 이동거리 * Sin(각도 * 원주율 / 180)
Line -(x0 + x, y0 + y)
End Sub
------------------------------
```

```
Public Sub 코흐곡선(n)
If n = 0 Then
전진
Else
코흐곡선 n - 1
회전 60
코흐곡선 n - 1
회전 -120
코흐곡선 n - 1
회전 60
코흐곡선 n - 1
End If
End Sub
```


코흐 곡선 프로그램 실행 결과

실행 메뉴의 시작 또는 F5 버튼을 눌러 실행하면 초기화면이 나타난다.
차수 n에는 초기값 3이 설정되어 있다. 하지만 이 텍스트 박스에는 다른 값을 넣어 실행 결과를 관찰할 수 있다.

다음 그림은 n의 값을 5로 했을 때의 결과이다.



<그림Ⅳ-3> 코흐 곡선 프로그램 실행 결과

코흐 곡선 프로그램의 작동 원리

▶ 거북이 그래픽

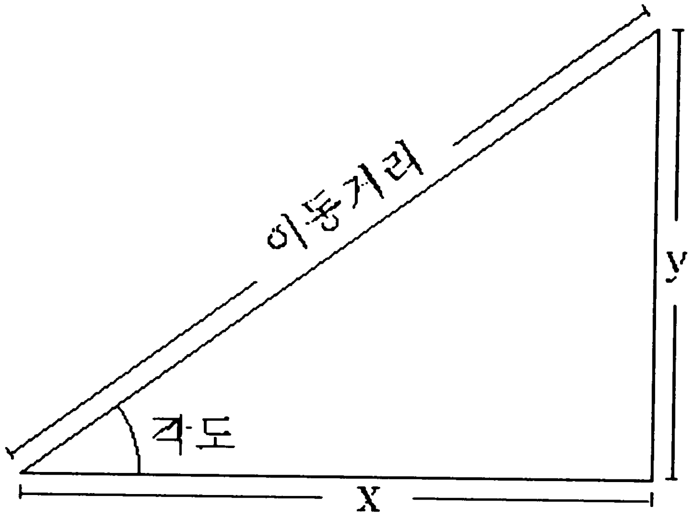
코흐 곡선은 프로그램의 기법 중 거북이 그래픽의 원리를 이용한 것이다. 거북이 그래픽은 MIT 공과대학의 S. Papert가 창안한 것인데, 이것은 '거북이가 선을 그리면서 일정한 거리를 기어간 후에 지정한 각도만큼 회전한다'는 간단한 알고리즘을 기본으로 하고 있다.

거북이 그래픽 프로그램을 작성할 땐 다음 3가지를 잘 이해하여야 한다.

① CurrentX : 현재점의 x 좌표
   CurrentY : 현재점의 y 좌표

② Line - (x, y) : 현재점에서 (x, y)까지 선을 그리고 현재점을 (x, y)로 이동

③ 회전 각도와 이동 변위는 다음과 같이 표현한다.



<그림Ⅳ-4> 회전 각도와 이동 변위

(출처:http://www.fractal.co.kr/fractal/vb/koch/index.htm.)

x = 이동거리×Cos(각도×원주율/180)

y = - 이동거리×Sin(각도×원주율/180)

▶ 전진과 회전

```
Public Sub 전진()
x = x + 이동거리 * Cos(각도 * 원주율 / 180)
y = y - 이동거리 * Sin(각도 * 원주율 / 180)
Line -(x0 + x, y0 + y)
```

전진( ) 프로시저는 '각도' 방향(거북이의 방향)으로 '이동거리'만큼 선을 그리고 현재 위치를 선의 끝부분으로 이동시킨다.

```
Public Sub 회전(d)
 각도 = 각도 + d
End Sub
```

회전(d) 프로시저는 거북이를 d 만큼 회전시킨다.

3) 코흐 눈송이

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정
Form	Name	frmSnow
	Caption	프랙탈 눈송이
	Height	6000
	Width	5500
Label	Name	lblNum
	Caption	3
	Height	25
	Left	272
	Top	312
	Width	49
수평 스크롤바	Name	hsbForm
	Height	25
	Left	24
	Max	7
	Min	3
	Top	312
	Width	225

코드 작성

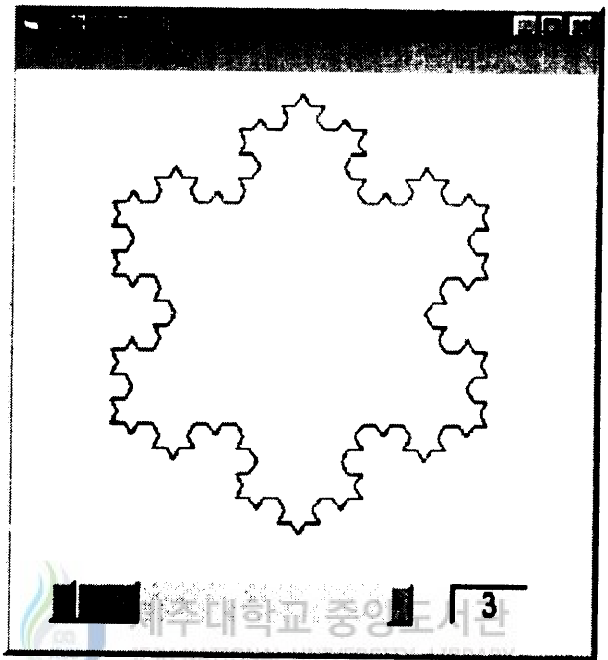
```
Option Explicit
Dim x0, y0                    ' 시작 위치
Dim x, y                      ' 이동변위
Dim 각도, 이동거리, n         ' 회전각도, 이동거리, 차수
Const 원주율 = 3.14159
----------------------------------------------
Private Sub hsbForm_Change()
lblNum.Caption = Str(hsbForm.Value) ' 스크롤 값을 레이블에 입력
Cls                           ' 화면 정리
mnuStart_Click
```

```
End Sub
------------------------------------------
Private Sub hsbForm_Scroll()
lblNum.Caption = Str(hsbForm.Value)
Cls                                 ' 화면 정리
mnuStart_Click
End Sub
------------------------------------------
Private Sub mnuStart_Click()
x = 0
y = 0
x0 = 40
y0 = 75
n = hsbForm.Value
각도 = 0
CurrentX = x0                       ' 좌표 x의 시작위치로 이동
CurrentY = y0                       ' 좌표 y의 시작위치로 이동
이동거리 = 250 * (1 / 3) ^ n      ' 전진 거리
눈송이 n
End Sub
------------------------------------------
Private Sub mnuExit_Click()
End
End Sub
------------------------------------------
Public Sub 눈송이(n)
코흐곡선 n
회전 -120
코흐곡선 n
```

```
회전 -120
코흐곡선 n
End Sub
-----------------------------------------
Public Sub 회전(d)
각도 = 각도 + d
End Sub
-----------------------------------------
Public Sub 전진()
x = x + 이동거리 * Cos(각도 * 원주율 / 180)
y = y - 이동거리 * Sin(각도 * 원주율 / 180)
Line -(x0 + x, y0 + y)
End Sub
-----------------------------------------
Public Sub 코흐곡선(n)
If n = 0 Then
 전진
Else
 코흐곡선 n - 1
 회전 60
 코흐곡선 n - 1
 회전 -120
 코흐곡선 n - 1
 회전 60
 코흐곡선 n - 1
End If
End Sub
```

코흐 눈송이 프로그램 실행 결과

실행 메뉴의 시작 또는 F5 버튼을 눌러 실행하면 초기화면에 다음과 같이 나타난다.



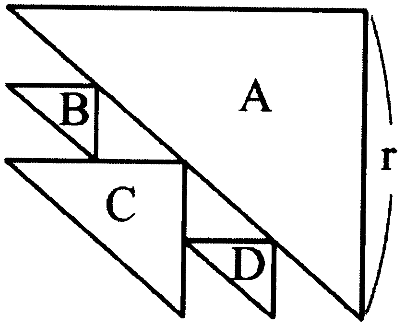
<그림Ⅳ-5> 코흐 눈송이 프로그램 실행 결과

레이블에는 초기값 3이 입력되어 있으며 스크롤 바를 마우스로 직접 움직이거나 좌우에 있는 화살표를 움직이면 폼에 있는 그림이 변화되는 값에 따라 변하게 된다.

4) Sierpinski 삼각형

시어핀스키 삼각형은 폴란드의 수학자 W. Sierpinski(1882-1969)가 만든 도형으로 칸토어 집합의 발상을 확대하여 평면차원, 즉 삼각형에 대해서 적용한 것이다.

알고리즘



<그림Ⅳ-6> 시어핀스키 삼각형의 알고리즘 분석

(출처 : http://www.fractal.co.kr/fractal/vb/gasket/index.htm)

1. A를 그린다.
2. r을 반으로 줄여 C를 그린다.
3. C의 ↑와 →에 B와 D를 그린다.
4. r 〉 4인 조건에 맞으면 위의 과정을 재귀적으로 반복한다.

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정
Form	Name	frmGasket
	Caption	Sierpinski Gasket
	Height	4500
	Width	6000
	ScaleHeight	600
	ScaleWidth	800

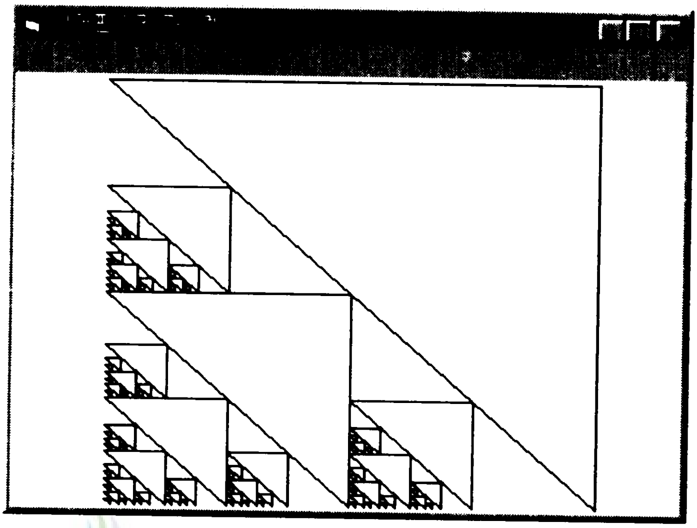
코드 작성

```
Option Explicit
------------------------------------------------
Private Sub mnuCls_Click()
Cls
```

```
End Sub
-------------------------------------------
Private Sub mnuExit_Click()
End
End Sub
-------------------------------------------
Private Sub mnuStart_Click()
가스켓 440, 300, 294
End Sub
-------------------------------------------
Public Sub 가스켓(x, y, r)
If r > 4 Then
 세모그리기 x, y, r
 가스켓 x - r / 2, y + r / 2, r / 2
 가스켓 x - r * 3 / 4, y - r / 4, r / 4
 가스켓 x + r / 4, y + r * 3 / 4, r / 4
End If
End Sub
-------------------------------------------
Public Sub 세모그리기(x, y, r)
CurrentX = x - r
CurrentY = y - r
Line -(x + r, y + r)
Line -(x + r, y - r)
Line -(x - r, y - r)
End Sub
-------------------------------------------
```

프로그램 실행 결과

프로그램을 실행한 후 시작버튼을 누르면 다음과 같은 그림이 나타난다.



<그림Ⅳ-7> 시어핀스키 삼각형 프로그램 실행 결과

5) Sierpinski 양탄자

Sierpinski 양탄자는 1910년경 시어핀스키에 의해 만들어졌다.

시어핀스키 양탄자를 만드는 방법은

정사각형을 하나 만든 후 각 변을 3등분해서 9개의 정사각형으로 분할한다.

분할한 후 가운데 사각형을 제거한다.

그런 후 제거된 사각형 둘레의 8개의 분할된 사각형에 대해 동일한 방법으로 가운데 정사각형을 제거한다.

이와 같은 방법으로 8개의 사각형에 대해 무한히 반복한다.

정리를 하면

① 중앙에 흰색의 □을 그린다.

② ↖↑↗←→↙↓↘ 방향으로 각각 r 만큼 이동하여 이전에 그린 □보다 작은 □을 그린다.

③ r 을 ½로 축소시켜 나가면서 $r > 10$가 될 때까지 재귀적으로 반복한다.

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정
Form	Name	frm시어핀스키
	Caption	시어스핀스키 카펫
	Height	6000
	ScaleMode	3-픽셀
	Width	7000

Caption	Name
시 작	mnuStart
지우기	mnuClear
종료	mnuExit

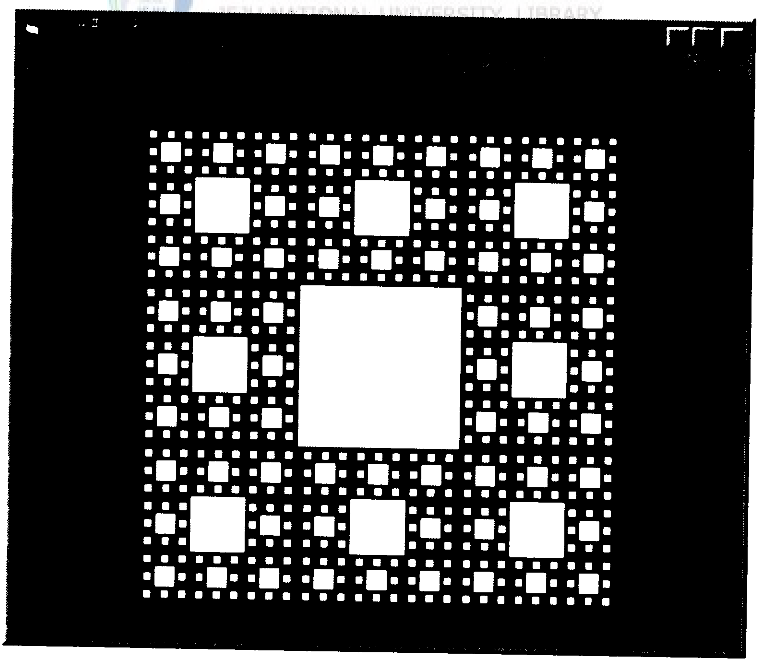
코드 작성

```
Option Explicit
-----------------------------------
Private Sub mnuClear_Click()
Cls
End Sub
-----------------------------------
Private Sub mnuExit_Click()
End
End Sub
-----------------------------------
Private Sub mnuStart_Click()
시어핀스키 230, 180, 300
End Sub
-----------------------------------
Public Sub 시어핀스키(x As Integer, y As Integer, r As Single)
If r > 10 Then
```

```
        Line (x - r / 6, y - r / 6)-(x + r / 6, y + r / 6), RGB(255, 255, 0), BF
        시어핀스키 x - r / 3, y - r / 3, r / 3
        시어핀스키 x, y - r / 3, r / 3
        시어핀스키 x + r / 3, y - r / 3, r / 3
        시어핀스키 x - r / 3, y, r / 3
        시어핀스키 x + r / 3, y, r / 3
        시어핀스키 x - r / 3, y + r / 3, r / 3
        시어핀스키 x, y + r / 3, r / 3
        시어핀스키 x + r / 3, y + r / 3, r / 3
End If
End Sub
```

시어핀스키 양탄자 프로그램 실행 결과

실행 메뉴의 시작 또는 F5 버튼을 눌러 실행하면 초기화면에 다음과 같이 나타난다.



<그림Ⅳ-8> 시어핀스키 양탄자 프로그램 실행 결과

6) 만델브로트 집합

만델브로트 집합은 수학의 복소수식인 $z=z^2+c$ 를 응용한 그래픽이다.

프로퍼티 설정

Object	Property	설 정
Form	Name	frmMandel
	Caption	만델브로트 집합
	Height	2500
	Width	4200

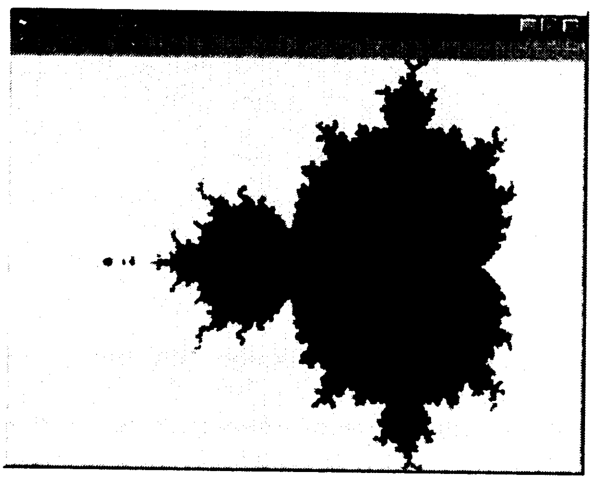
코드 작성

```
Option Explicit
Dim i, j, n                              ' i, j = 좌표상의 위치
--------------------------
Private Sub mnuExit_Click()
 End
End Sub
--------------------------
Private Sub mnuStart_Click()
Cls
만델집합
End Sub
--------------------------
Public Sub 만델집합()
Dim a, b, x, y, x1, y1 As Double
For i = 1 To 350
 For j = 1 To 500
  a = -1.5 + 1.8 * i / 500              ' 실수부의 위치
  b = -1 + 2 * j / 350                   ' 허수부의 위치
  x = 0: y = 0
  For n = 0 To 29
```

```
    x1 = x * x - y * y + a
    y1 = 2 * x * y + b
    x = x1
    y = y1
     If x * x + y * y > 10 Then          ' 발산하면 중지
      Exit For
     End If
    Next n
    If n = 30 Then                      ' 만델브로트 집합에 속하면
     PSet (i, j)
    End If
  Next j
  DoEvents                              ' 지연 프로시저 실행
Next i
Beep
End Sub
```

만델브로트 집합 프로그램 실행 결과

실행 메뉴의 시작 또는 F5 버튼을 눌러 실행하면 초기화면에 다음과 같이 나타난다.



<그림Ⅳ-9> 만델브로트 집합 프로그램 실행 결과

3. 프랙탈을 이용한 수학학습지

1) 프랙탈의 개념와 특성들을 이해하기 위한 학습지

고등학교 수학교실에 도입할 수 있는 프랙탈을 활용한 수학학습지의 구성은 Peitgen 외 5명의 저서 '수학교사를 위한 프랙탈 기하'에서 교육과정의 연계성에 근거하여 우리나라 교육과정에 알맞게 구성하였다.

학 습 지 1

주제 : 칸토르 집합(Cantor Set)

0단계 : 선분을 1개 그린다.(창시자)

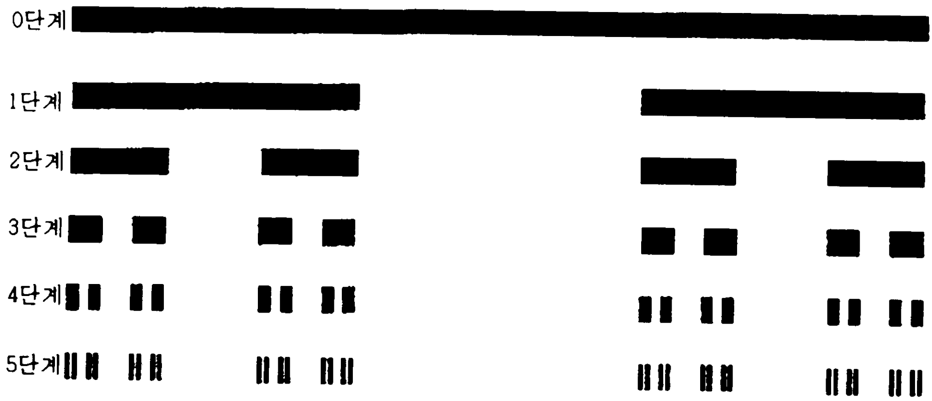
1단계 : 이 선분을 3등분한 것 중 가운데 부분을 제거한다.(생성자)

2단계 : 1단계에 남아 있는 2개의 선분 각각을 다시 3등분하여 가운데 부분을 제거한다.

3단계 : 2단계에 남아 있는 4개의 선분 각각에 대하여 위의 과정을 반복한다.

. . . .

이와 같은 과정을 무한히 반복했을 때 남게 되는 점들의 집합이 바로 칸토르 집합이다.



1. 각 단계의 구간의 개수를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	1	(2)	(4)	(8)	(16)		2^n

2. 0단계의 선분의 길이를 1이라 할 때 각 단계의 구간의 길이를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	1	($\frac{1}{3}$)	($\frac{1}{9}$)	($\frac{1}{27}$)	($\frac{1}{81}$)		$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. n단계에 남아있는 선분의 총길이를 구하여라. ($\left(\frac{2}{3}\right)^n$)

학 습 지 2

주제 : 코흐 눈송이

0단계 : 선분에서 시작한다.(창시자)

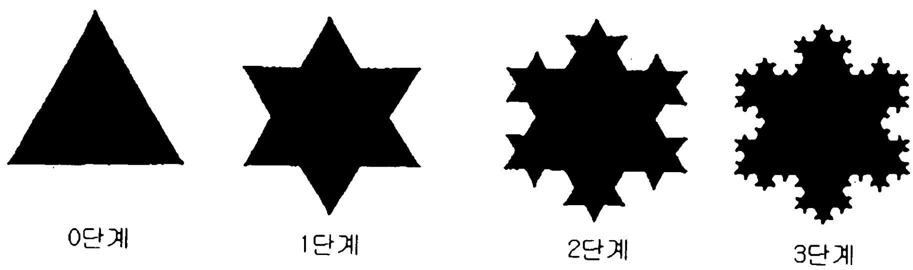
1단계 : 선분을 3등분한 후 가운데 부분을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 그 삼각형에서 밑변을 없앤다.(생성자)

2단계 : 4개의 선분에 대하여 또한 번 같은 조작을 한다.

. . . .

이와 같은 단계를 무한히 반복하였을 때 얻은 도형을 코흐 곡선이라고 한다.

정삼각형의 세 변에 대하여 위와 같은 생성 과정을 무한히 반복하여 얻은 도형을 코흐 눈송이라고 한다.



---

1. 0단계에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형이라고 하자. 각 단계에서 코흐 눈송이의 각 변의 길이를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
변의 길이	1	$(\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{9})$	$(\frac{1}{27})$	$(\frac{1}{81})$		$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2. 각 단계에서 코흐 눈송이의 변의 수를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	3	3×4	3×4^2	3×4^3	3×4^4		3×4^n

3. 각 단계에서 코흐 눈송이의 둘레의 길이를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
둘레의 길이	3						

4. 위의 과정을 무한히 반복하면 코흐 눈송이의 둘레의 길이는 어떻게 되는가?

(둘레의 길이는 무한히 증가한다.)

5. 코흐 눈송이의 면적을 구하여라.

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} \right)$$

6. 코흐 눈송이의 둘레의 길이와 면적에 관하여 특징을 설명하고 이와 같은 특징을 지닌 자연에는 어떤 것이 있는가? (둘레의 길이는 무한대, 면적은 유한, 해안선, 인체의 핏줄기 등)

학 습 지 3

주제 : 시어핀스키 삼각형

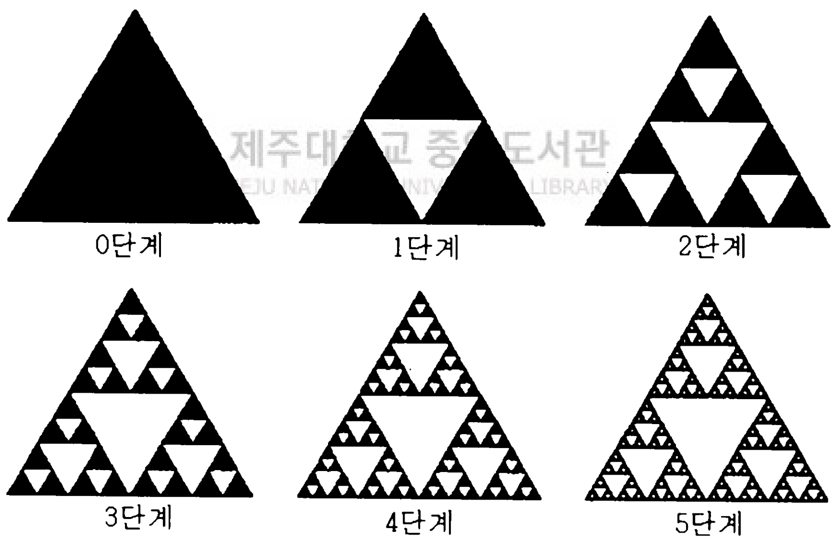
0단계 : 정삼각형을 하나 그린다.(창시자)

1단계 : 각 변의 중점을 연결한 후 나누어진 삼각형 중 가운데 부분을 잘라낸다.

2단계 : 남아 있는 삼각형에 대하여 같은 조작을 한다.

· · · · · · · · · · · · · · · · ·

이 과정을 무한히 반복하면 점들의 집합이 나타나는데 이것이 시어핀스키 삼각형이다.



1. 각 단계에 남아있는 삼각형의 수를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	1						

2. 0단계의 정삼각형의 면적을 1이라 할 때 각 단계에서 남아 있는 삼각형의 면적을 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
면적	1						

3. 위 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 삼각형의 면적은 어떻게 되는가?

(0에 가까워진다)

4. 위 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 점들의 개수는?

(무한히 많이 남아 있다)

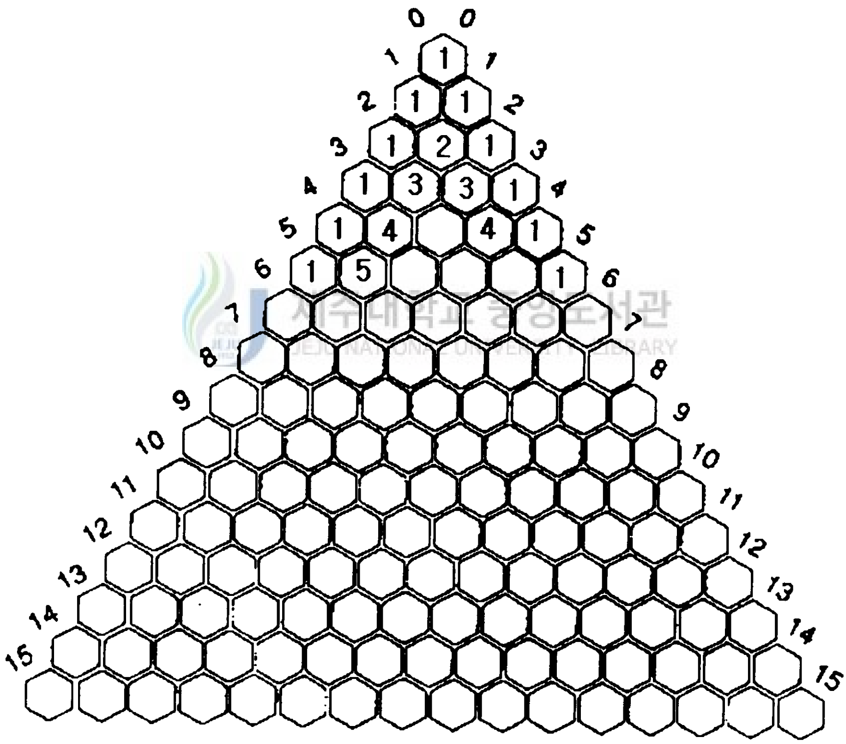
5. 시어핀스키 삼각형의 성질을 말하여라.

(무한히 많은 점들이 남아 있는데 면적은 0이다)

학 습 지 4

주제 : 시어핀스키 삼각형과 파스칼 삼각형

파스칼 삼각형에서 처음 0행의 첫 번째 수는 1이다. 이 이후의 모든 수는 바로 위의 항의 인접하는 두 수의 합이다. 만일 위 항의 인접한 수가 한 개뿐이라면 다른 수는 0으로 생각한다.



1. 위 빈칸에 수를 적어라.

2. 처음 4행까지만 홀수에 해당되는 ⬡에는 검게 칠하고, 짝수에 해당되는 ⬡에는 흰

색 그대로 둔다. 시어핀스키 삼각형 생성의 1단계와 어떻게 관련지을 수 있는가?
(시어핀스키 삼각형의 1단계와 유사하다)

3. 8행까지 색칠하고, 시어핀스키 삼각형 생성의 2단계와 어떻게 관련지을 수 있는가? (시어핀스키 삼각형의 2단계와 유사하다)

4. 각 단계의 시어핀스키 삼각형을 나타내려면 파스칼 삼각형 몇 행이 있어야 하는가?

단계	0	1	2	3	4	· · ·	*n*
행의 수	2	4					

5.파스칼 삼각형에서 시어핀스키 삼각형을 만드는 빠른 색칠 방법을 생각하여 보아라.
(바로 위에 있는 두 칸의 색이 다르면 그 칸은 검은 색을 칠하고, 색이 같으면 그 칸은 흰색으로 그대로 둔다. 각 행의 끝에 있는 칸은 검은 색을 칠한다)

학 습 지 5

주제 : 시어핀스키 양탄자

0단계 : 정사각형을 그린다(창시자)

1단계 : 정사각형의 가로와 세로를 각각 3등분하여 9개의 작은 정사각형을 얻은 다음 중앙에 있는 작은 정사각형을 제거한다.(창시자)

2단계 : 남아있는 8개의 작은 정사각형에서 1단계와 같은 방법으로 가로와 세로를 각각 3등분하고 더 작은 정사각형을 제거한다.

. . . .

이 과정을 무한히 반복하여 얻어지는 점들의 집합을 시어핀스키 양탄자라고 한다.

0단계 1단계 2단계 3단계

1. 각 단계에서 남아 있는 정사각형의 수를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	1	8					

2. 0단계의 정사각형의 면적을 1이라 할 때, 각 단계에서 남아 있는 정사각형의 면적을 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
면적	1						

3. 위 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 정사각형의 면적은 어떻게 되는가?

(0에 가까워진다)

4. 위 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 점들의 개수는?

(무한히 많이 남아 있다)

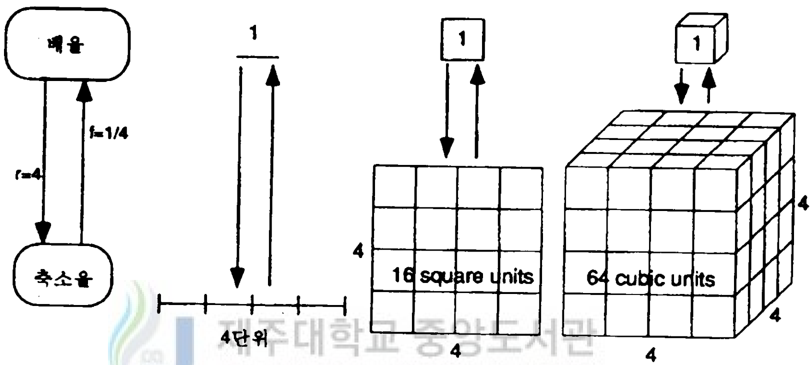
5. 시어핀스키 양탄자의 성질을 말하여라.

(무한히 많은 점들이 남아 있지만 면적은 0이다)

학 습 지 6

주제 : 프랙탈 차원

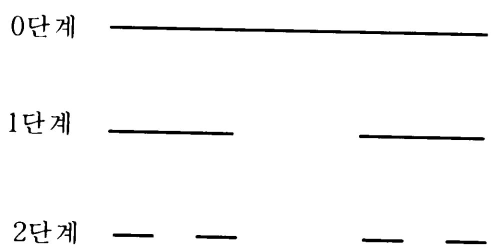
일정한 길이의 1차원 도형인 선분을 4배 확대하면 자기닮음인 조각의 수가 4개가 된다. 그러나, 2차원 도형인 정사각형을 4배로 확대하면 자기닮음인 조각의 수가 16개가 되며, 3차원 도형인 경우 4배로 확대하면 조각의 수는 64개로 늘어난다.



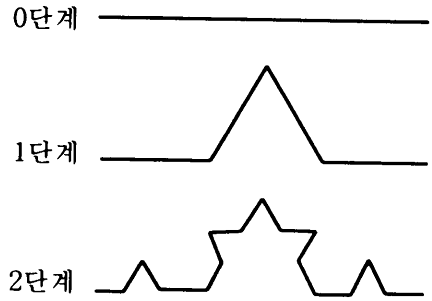
확대율과 각 도형의 조각의 수를 관계지으면, $4^1 = 4$ (1차원), $4^2 = 16$ (2차원), $4^3 = 64$ (3차원), 즉, $(\text{확대율})^{\text{차원}}$ = 조각의 수이다.

여기서 log 를 취하면, $\frac{\log 4}{\log 4} = 1\text{차원}$, $\frac{\log 16}{\log 4} = 2\text{차원}$, $\frac{\log 64}{\log 4} = 3\text{차원}$ 으로 계산된다. 이것을 일반화하면 프랙탈 차원 = $\frac{\log(\text{조각의 수})}{\log(\text{확대율})}$ 이다.

1. 다음 그림은 칸토어 집합의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.



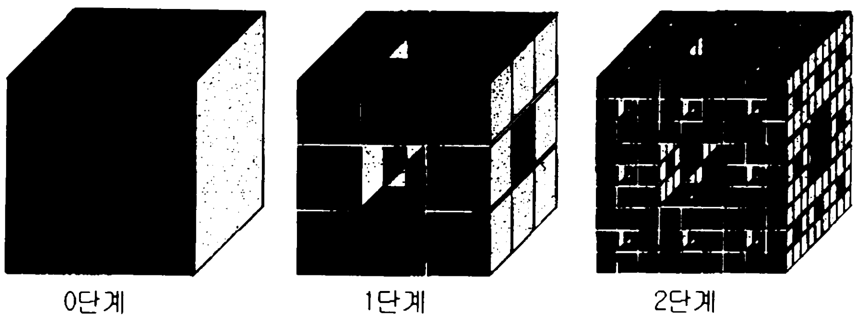
2. 다음 그림은 코흐 곡선의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.



3. 다음 그림은 코흐 눈송이의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.

4. 다음 그림은 시어핀스키 삼각형의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.

5. 다음 그림은 Manger 스폰지의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.



2) 고등학교에서 프랙탈 도형을 이용한 학습 문항

1. 파스칼의 삼각형 속의 프랙탈

파스칼의 삼각형은 아래 그림과 같이 맨 위에 1을 쓰고 그 다음부터는 위쪽의 두 수를 합해 그 바로 밑에 적을 수를 구하는 방식으로 하여 삼각형을 펼쳐가듯이 쓴 것을 말한다. 물론 좌우 양 끝에 쓸 수는 그 위쪽에 1 하나밖에 없으므로 그것을 그대로 이어받는 것이다.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

이 파스칼의 삼각형에 나타나는 수들은 서로 다른 n개의 물건 중에서 k를 고르는 방법의 수와 관련이 있고, 또

$$(n+1)^0=1$$

$$(n+1)^1=n+1$$

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

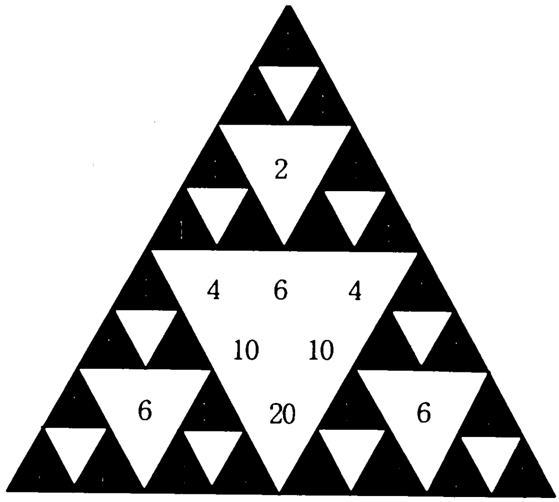
$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

. . . .

와 같이 $(n+1)^k$ 을 전개한 다항식의 계수와도 관련이 있다. 또, 이 파스칼의 삼각형 속에 프랙탈 구조가 숨어있다는 것이다. 이 삼각형에 나타나는 숫자들을 홀수냐 짝수냐에 따라 분류하면 다음과 같은 그림을 그릴 수 있다. 프랙탈 구조에만 관심을 갖

는다면 여기 나타나는 수들은 사실 일일이 계산할 필요는 없다.

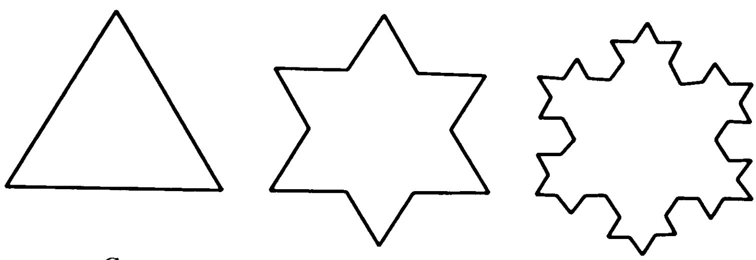


(문제) 다음 식을 전해할 때 나타나는 항 중에서 홀수인 계수를 갖는 항은 몇 개가 있을까?

(1) $(n+1)^{1999}$ (2) $(n+1)^{2000}$ (3) $(n+1)^{2001}$ (4) $(n+1)^{2002}$

2. 시어핀스키 삼각형

한 변의 길이가 1인 정삼각형 C_0가 있다. C_0의 세 변을 각각 삼등분하여 가운데 선분 위에 다시 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$인 작은 정삼각형을 덧붙여 만든 도형을 C_1이라 한다. 이와 같은 방법으로 도형 C_{n-1}의 각 변을 삼등분하여 가운데 선분 위에 다시 작은 정삼각형들을 덧붙여 만든 도형을 C_n이라고 하자. 도형 C_n의 변의 개수를 a_n, C_n의 각 변의 길이의 합을 l_n이라 할 때, 다음 물음에 답하여라.



C_0 C_1 C_2

(1) 도형 C_n의 변의 수 a_n를 구하여라.

($a_n = 3 \times 4^n$)

(2) 도형 C_n의 변의 길이의 합 l_n를 구하여라.

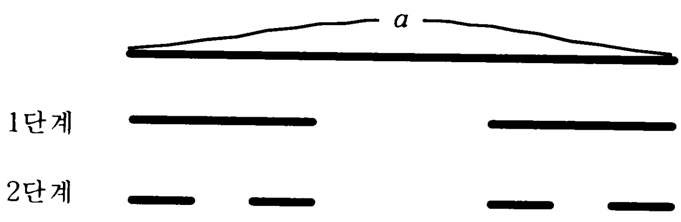
($l_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n\ 1}$)

(3) 도형 C_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$을 구하여라.

($\frac{2\sqrt{3}}{5}$)

3. 칸토르 집합

길이가 a인 선분이 있다. 1단계 시행에서 이 선분을 3등분하고 그 중간 부분을 버린다. 2단계 시행에서는 1단계 시행의 결과로 남은 두 선분을 각각 3등분하여 그 중간 부분을 버린다. 이와 같은 과정을 계속한다고 하였을 때, 10단계의 시행 후 남은 선분들의 길이의 합을 구하여라.



($\left(\frac{2}{3}\right)^{10} a$)

V. 결론

프랙탈은 새로운 수학 내용으로 관심이 집중되고 있으며, 자연 현상에서 나타나는 복잡한 현상을 묘사할 수 있는 뛰어난 새로운 한 이론으로서 프랙탈을 학습하는 기회가 주어진다면 학생들은 새로운 수학의 세계를 경험할 수 있을 것이다.

본 논문은 고등학교 수학교실에서 적절한 프랙탈 학습 내용을 알아보고, 프랙탈 학습자료를 개발하여 제시함으로써 프랙탈의 고등학교 교실에의 활용 가능성을 모색하고자 하였다.

이를 위하여 먼저 Ⅱ장에서는 프랙탈이 무엇인가를 알기 위하여, 프랙탈의 정의와 특징을 살펴보고, 프랙탈 도형의 특징 중 자기유사성과 프랙탈 차원에 대하여 알아보았다. 또, 유클리드 도형과 프랙탈 도형을 비교하였다.

Ⅲ장에서는 프랙탈의 예로 칸토르 집합, 코흐곡선과 코흐 눈송이, 시어핀스키 삼각형과 시어핀스키 사면체, 시어핀스키 양탄자와 Mange 스폰지, 만델브로트 집합 등을 살펴보았다.

Ⅳ장에서는 고등학교 수학교육에서 프랙탈의 필요성에 대하여 제7차 교육과정과 관련하여 고찰하였다. 그리고 프랙탈을 수업의 한 부분으로 이용할 수 있는 활동 중심의 학습지를 만들었다. 프랙탈은 무한개념, 수열, 등비급수, 극한, 확률, 파스칼 삼각형 등 다양한 수학 분야를 연결시켜 줄 수 있으며, 그 자체만으로도 새로운 수학적 시각과 창의적인 능력을 기르는 데 도움이 될 수 있다. 또, 학생들 스스로 분석하고 추론하는 활동 과정은 학생들에게 수학에 대한 즐거움과 흥미를 줄 것이다. 프랙탈을 가장 확실하고 쉽게 접할 수 있는 방법으로 Visual Basic을 이용한 프랙탈 도형 만들기를 소개하였다.

수학교육에 프랙탈이 도입됨으로써 학생들이 직접 프랙탈을 구성하고 프랙탈 도형을 시각화하는 등 전략적 활동을 통하여 수학에 대한 색다른 즐거움과 흥미를 느낄 수 있다. 그리고 수학에 대한 동기 유발과 긍정적인 태도를 기대할 수 있으며, 프랙탈 모델이 일상생활 속에서 쉽게 관찰될 수 있기 때문에 프랙탈을 배우면서 수학이 우리 생활과 얼마나 밀접한가를 체험할 수 있다.

참고문헌

교육부(1997), 「고등학교 교육과정(1)」, 교육부.

김선화 · 여태경(1994), 「교실밖 수학여행」, 사계절출판사.

김승환(1993), 「정보사회와 문화예술:프랙탈」, 공간.

김영익(1993), 「혼돈과 후랙털집합」, 경문사.

김용운 · 김용국(1994), 「프랙탈-혼돈의 질서」, 동아출판사.

김용운 · 김용국(1998), 「프랙탈과 카오스의 세계」, 도서출판 우성.

이승준(1994), 「새로운 과학으로 부상하는 혼돈과학」, Softworld.

제임스 글리크(1993), 「카오스:현대과학의 대혁명」, 박배서 · 성운하 역, 동문사.

파이트겐 외 5명(1999), 「수학교사를 위한 프랙탈 기하」, 신인선 · 류희찬 역, 경문사.

김순덕(1994), "중등수학교육에서 프랙탈에 대한 연구", 석사학위논문, 한국교원대학교.

김은영(1999), "프랙탈 기하학의 비선형적 특성을 적용한 공간구성에 관한 연구", 석사학위논문, 숙명여자대학교 디자인대학원.

김희수(1994), "프랙탈 기하학의 이해와 디자인에의 응용가능성에 관한 연구", 석사학위논문, 이화여자대학교 디자인대학원.

유병옥(1999), "중등수학 교육과정에 프랙탈의 소개", 석사학위논문, 울산대학교 교육대학원.

최정숙(1998), "프랙탈의 고등학교 수학교육과정에의 도입 가능성에 관한 연구", 석사학위논문, 한국교원대학교.

Bansley, M.(1998), *Fractals Everywhere*, Academic Press.

Benoit B.Mandelbrot(1983), *The Fractal Geontry of nature*, W.H.Freem&Co.

Dualy, A(1986), *Julia Sets and the Mandelbrot Set, The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag.

Peitgen, Maletsky, *Jurgens, Perciante, Sape, Yunker(1993), Fractals for the Classroom :Strategic Activites, part one*, Springer-Verlag.

Peitgen, Jurgens, Sape(1992), *Fractals for the Classroom*, NCTM & Springer-Verlag.

Shishikura,M(1991), *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot Set and Julia Set, SUNY Stony Brook, Institute for Mathematics Sciences*, Preprint # 1991/ 7.

http://www.fractal.co.kr/fractal/vb/cantor/index.htm.

<Abstract>

Applications of Fractals to Highschool Mathematics

Kim, Chung-Hoon

Mathematics Education Major
Graduate school of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by Professor Ko, Bong-Soo

In this paper we disscuss the basic concepts of Fractals and find suitable contents which can be applied to Highschool Mathematics. Furthermore, we construct several teaching and learing materials of Fractals which are for highschool students.

A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2001.