碩士學位 請求論文

高等學校 數學敎室에서 有限差分 方程式의 研究

指導敎授 高 鳳 秀

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 鍾 碩

1994 年 8 月 日

高等學校 數學教室에서
有限差分 方程式의 研究

指導教授 高 鳳 秀

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

1994 年 6 月 　日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 金 鍾 碩

金鍾碩의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1994 年 7 月 　日

審査委員長 金 容 贊

審 査 委 員 방 은 숙

審 査 委 員 고 봉 수

<초　　록>

고등학교 수학교실에서 유한차분방정식의 연구

김 종 석

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 봉 수

계수가 상수인 이계 이상의 선형동차차분방정식의 해를 구하는데 고등학교 수학교실에서 강의될 수 있도록 고유방정식의 해법을 이용하여 그 해를 구할 수 있는 방법을 논한다.

선형차분방정식이 비동차인 경우에도 영화법에 의해 동차방정식으로 전환하여 그 해를 구할 수 있는 방법을 연구한다.

계수가 상수가 아닌 선형차분방정식의 해를 구하는 것은 고등학교 수준을 넘지만 매개변수변분법으로 그 해를 구할 수 있음을 소개한다.

* 본 논문은 1994년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임

목 차

제 1 장 서 론

고등학교 수학 교과과정에서 수열과 극한이라는 단원 중 수열 $\{y(n)\}$을

i) 첫째 항의 수

ii) 이웃하는 항 사이의 관계식(등식)

으로 정할 때 이것을 수열 $\{y(n)\}$의 귀납적 정의라 하고, 그 관계식을 점화식이라 한다.

현재, 점화식은 교과서 및 대학 입시 준비서에

1-1 $\quad y(n+1) = y(n) + f(n)$의 형 ($f(n)$ 는 변수)

예 $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(n+1) - y(n) = \dfrac{1}{1+2+\cdots+n} \end{cases}$

에서 $y(n)$을 구하라.

1-1' $\quad y(n+1) = y(n) \times f(n)$의 형 ($f(n)$ 는 변수)

예 $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(n+1) = (1+\frac{1}{n})y(n) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

에서 $y(n)$을 구하라.

2-1 $\quad y(n+1) = py(n) + q$의 형 (p, q 는 상수)

예 $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(n+1) = \frac{1}{3}y(n) + 1 \end{cases} \quad (n \geq 1)$

에서 $y(n)$을 구하라.

2-1' $\quad y(n+1) = qy(n)^p$의 형 (p, q 는 상수)

예 $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(n) = \sqrt{y(n-1)} \end{cases} \quad (n \geq 2)$

에서 $y(n)$을 구하라.

3 $\quad y(n+1) = py(n) + qy(n-1)$ (단, $p+q=1$ 인 상수) 의 형

예 $\begin{cases} y(1)=1,\ y(2)=2 \\ y(n+1)+2y(n-1)=3y(n) \end{cases} \quad (n \ge 2)$

에서 $y(n)$을 구하라.

4 $\quad y(n+1)=\dfrac{y(n)}{p+qy(n)}$의 형 ($p, q$ 는 상수)

예 $\begin{cases} y(1)=2 \\ y(n+1)=\dfrac{2y(n)}{1+y(n)} \end{cases} \quad (n \ge 1)$

에서 $y(n)$을 구하라.

5 $\quad y(n+1)=py(n)+qy(n-1)$ (단, $p+q \neq 1$ 인 상수) 의 형

예 $\begin{cases} y(1)=y(2)=1 \\ y(n+1)=y(n)+y(n-1) \end{cases} \quad (n \ge 1)$

에서 $y(n)$을 구하라.

6 $\quad y(n+1)=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ 의 형 (p, q, r, s 는 상수)

예 $\begin{cases} y(1)=2 \\ y(n)=\dfrac{3y(n-1)+2}{y(n+1)+4} \end{cases} \quad (n \ge 2)$

에서 $y(n)$을 구하라.

등의 교과서 수준의 1,2,3의 형태를 포함해서 6가지 형태로 주어지고 있는데, 이러한 점화식 관계는 순서도를 작성하는 데도 응용 되고 있다. 한편, 고등학교에서는 수학적 귀납법을 이해시키기 위하여 수열의 귀납적 정의를 도입하여 학습시키고 있는데 수열의 귀납적 정의는 유한차분방정식의 한 형태이다. 이러한 유한차분방정식을 고등학교 수학 수업 과정에 도입하여 학습시키므로써 수학적 귀납법 이외에 일반적으로 정의된 수열의 일반항을 학생들이 기교적이 아닌 체계적인 방법으로 구할 수 있도록 이론을 재구성하는데 본 연구의 필요성과 목적이 있다.

유한차분방정식의 일반적인 정의는 다음과 같다.

n을 변역 D의 실변수, 그리고 y를 변역 D에 있어서의 n의 함수라 하자. Δn은 유한인 일정한 값으로 a와 $a+\Delta n$가 변역 D안에 있다고 볼 때

$$\Delta y(a) = y(a+\Delta n) - y(a)$$

를 a에 있어서의 y의 차분(difference), Δn을 n의 차분이라 한다.

이제, $\Delta n = 1$라 하고 미지 함수 $y(n)$의 차분을 포함하는 방정식

$$F(n, y(n), \Delta y(n), \cdots, \Delta^m y(n)) = 0$$

을 차분방정식(또는 계차방정식) (difference equation)이라고 하며 $y = \phi(n)$으로 놓았을 때, 이것이 어떤 변역의 모든 n에 대하여 방정식을 만족한다면 $\phi(n)$을 그 방정식의 해(solution)라고 하며 그 해를 구하는 것을 차분방정식을 푼다고 한다.

더우기, 방정식이 $y(n), y(n+1), \cdots, y(n+m)$에 대한 1차식, 즉

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(n) y(n+k) = q(n)$$

일 경우 그 방정식을 선형(linear)이라고 말한다. 또 $q(n) \equiv 0$일 때 그 선형방정식을 동차(homogeneous)라 하고, 그렇지 않을 때를 비동차(nonhomogeneous)라고 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 1 절에서는 차분연산자 및 계승함수를 정의하고, 차분연산자에 대한 덧셈, 곱셈, 나눗셈 및 지수공식을 유도하며, 계승함수에 대한 차분공식을 유도한다.

제 2 절에서는 부정합을 정의하고 부정합의 덧셈, 곱셈, 부분합 등의 공식을 유도하고 a^n 및 계승함수에 대한 부정합을 유도한다.

제 3 절에서는 일계 선형차분방정식

$$y(n+1) + p(n)y(n) = r(n) \qquad (p(n) \neq 0)$$

의 해를 구하는 방법을 유도하고, 이계 선형차분방정식

$$\sum_{k=0}^{2} p_k(n) y(n+k) = r(n) \qquad (p_2(n) \neq 0)$$

의 해를 구하는 방법도 유도한다.

일반적인 m계 선형차분방정식

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(n) y(n+k) = r(n) \qquad (p_m(n) \neq 0, p_0(n) \neq 0)$$

의 해를 구하는 방법을 유도한다. 유도하는 과정에서 중요하게 이용되는 것은 매개변수 변분법이며, 캐소라티행렬을 이용하여 해를 구한다. 또한 상수 계수인 선형동차방정식

$$\sum_{k=0}^{m} p_k y(n+k) = 0 \qquad (p_m \neq 0, p_0 \neq 0)$$

의 해법으로 고유방정식 해법을 도입하며, 특히 고유근이 복소수일 때 극형식으로 변형하여 실수해가 되도록 유도한다.

제 2 장 본 론

제 1 절 차분계산

1.1 차분연산자

<u>정의 **1.1**</u> 수들의 수열 $\{y(n)\}$에서 차분연산자 Δ는 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$$

특히 Δ 를 일계 차분연산자라고 부른다.

위와 같은 방법으로 이계 차분연산자 Δ^2은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(n) &= \Delta(\Delta y(n)) \\ &= \Delta(y(n+1) - y(n)) \\ &= (y(n+2) - y(n+1)) - (y(n+1) - y(n)) \\ &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n)\end{aligned}$$

수학적귀납법을 이용하여 r계의 차분연산자 Δ^r은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta^r y(n) &= y(n+r) - ry(n+r-1) + \frac{r(r-1)}{2!}y(n+r-2) + \\ &\quad \cdots + (-1)^r y(n) \\ &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \binom{r}{k} y(n+r-k)\end{aligned}$$

두 개 이상의 변수를 갖는 수열들에 대한 차분연산자는 아래 첨자를 사용하여 정의한다.

$$\Delta_n y(n,m) = y(n+1,m) - y(n,m)$$

$$\Delta_m y(n,m) = y(n,m+1) - y(n,m)$$

(예제)

$$\Delta_t te^n = (t+1)e^n - te^n = e^n$$

$$\Delta_n te^n = te^{n+1} - te^n = te^n(e-1)$$

1.2 추이연산자

<u>정의 **1.2**</u> 수들의 수열 $\{y(n)\}$ 에서 추이연산자 E 는 다음과 같이 정의한다.

$$Ey(n) = y(n+1)$$

항등연산자 I는 다음과 같이 정의한다.

$$Iy(n) = y(n)$$

그리고

$$E^2y(n) = E(Ey(n)) = E(y(n+1)) = y(n+2)$$

$$E^3y(n) = E(E^2y(n)) = y(n+3)$$

$$\vdots$$

$$E^ry(n) = y(n+r)$$

(참고)

$$\begin{aligned}\Delta y(n) &= y(n+1) - y(n)\\ &= Ey(n) - Iy(n)\\ &= (E-I)y(n)\end{aligned}$$

따라서

$$\Delta = E - I$$

$$\begin{aligned}\Delta^r y(n) &= (E-I)^r y(n)\\ &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}E^{r-k}y(n)\\ &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}y(n+r-k)\end{aligned}$$

결론적으로 $\Delta^r = (E - I)^r$

마찬가지 방법으로, 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} E^r y(n) &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \Delta^{r-k} y(n) \\ &= (\Delta + I)^r y(n) \\ E^r &= (\Delta + I)^r \end{aligned}$$

Δ와 E의 기본 성질은 다음 정리에서 기술된다.

정리 1.1

(1) $\Delta^p(\Delta^q y(n)) = \Delta^{p+q} y(n)$ (p, q : 자연수)

(2) $\Delta(y(n) + z(n)) = \Delta y(n) + \Delta z(n)$

(3) $\Delta(cy(n)) = c\Delta y(n)$ (c : 상수)

(4) $\Delta(y(n) \cdot z(n)) = y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n)$

(5) $\Delta\left(\dfrac{y(n)}{z(n)}\right) = \dfrac{z(n)\Delta y(n) - y(n)\Delta z(n)}{z(n)Ez(n)}$

증명 :

(1)의 증명 :

$$\Delta^p(\Delta^q y(n)) = \Delta^p \left[\sum_{j=0}^{q} (-1)^j \binom{q}{j} y(n + (q - j)) \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \binom{q}{j} \Delta^p y(n+(q-j))$$

$$= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \binom{q}{j} \cdot \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \binom{p}{i} y(n+(q-j)+(p-i))$$

$$= \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j} \binom{q}{j}\binom{p}{i} y(n+(q-j)+(p-i))$$

여기서 $i+j=k$ 라 놓으면

$$= \sum_{k=0}^{p+q}(-1)^k \binom{p+q}{k} y(n+(p+q)-k)$$

$$= \Delta^{p+q}y(n)$$

(2)의 증명 :

$$\begin{aligned} \Delta(y(n)+z(n)) &= (y(n+1)+z(n+1))-(y(n)+z(n)) \\ &= (y(n+1)-y(n))+(z(n+1)-z(n)) \\ &= \Delta y(n)+\Delta z(n) \end{aligned}$$

(3)의 증명 :

$$\begin{aligned} \Delta c(y(n)) &= cy(n+1)-cy(n) \\ &= c(y(n+1)-y(n)) \\ &= c\Delta y(n) \end{aligned}$$

(4)의 증명 :

$$\begin{aligned} \Delta(y(n)z(n)) &= y(n+1)z(n+1)-y(n)z(n) \\ &= y(n+1)z(n+1)-y(n)z(n+1)+y(n)z(n+1)-y(n)z(n) \\ &= z(n+1)(y(n+1)-y(n))+y(n)(z(n+1)-z(n)) \\ &= z(n+1)\Delta y(n)+y(n)\Delta z(n) \\ &= Ez(n)\Delta y(n)+y(n)\Delta z(n) \end{aligned}$$

(5)의 증명 :

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{y(n)}{z(n)}\right) &= \frac{y(n+1)}{z(n+1)} - \frac{y(n)}{z(n)} \\
&= \frac{z(n)y(n+1) - y(n)z(n+1)}{z(n+1)z(n)} \\
&= \frac{z(n)y(n+1) - z(n)y(n) + z(n)y(n) - y(n)z(n+1)}{z(n+1)z(n)} \\
&= \frac{z(n)(y(n+1) - y(n)) - y(n)(z(n+1) - z(n))}{z(n+1)z(n)} \\
&= \frac{z(n)\Delta y(n) - y(n)\Delta z(n)}{z(n)Ez(n)}.
\end{aligned}$$

정리 1.2 임의의 상수 a에 대하여

(1) $\Delta a^n = (a-1)a^n$

(2) $\Delta \sin an = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(n+\frac{1}{2})$

(3) $\Delta \cos an = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(n+\frac{1}{2})$

(4) $\Delta \log an = \log(1+\frac{1}{n})$ $(a>0)$

증명 :

(1)의 증명 :

$$\Delta a^n = a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n$$

(2)의 증명 :

$$\Delta \sin an = \sin a(n+1) - \sin an$$

$$= 2\sin a\frac{(n+1)-n}{2}\cos a\frac{(n+1)+n}{2}$$
$$= 2\sin\frac{a}{2}\cos a(n+\frac{1}{2})$$

(3)의 증명 :

$$\Delta\cos an = \cos a(n+1) - \cos an$$
$$= -2\sin a\frac{(n+1)-n}{2}\sin a\frac{(n+1)+n}{2}$$
$$= -2\sin\frac{a}{2}\sin a(n+\frac{1}{2})$$

(4)의 증명 :

$$\Delta\log an = \log a(n+1) - \log an$$
$$= \log\left(\frac{a(n+1)}{an}\right)$$
$$= \log(1+\frac{1}{n})$$

(참고) 미분연산자 $\frac{d}{dt}$와 차분연산자 Δ는 매우 비슷한 성질들을 가지고 있음을 정리 1.1 에서 알 수 있다.

그러나

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$$

인 반면

$$\Delta_t t^n = (t+1)^n - t^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k - t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k$$

가 되어 복잡하다.

1.3 계승함수

정의 1.3 계승함수 $n^{(r)}$은 다음과 같이 정의된다.

(1) 만약 $r = 1, 2, 3, \cdots$ 자연수이면

$$n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

(2) 만약 $r = 0$이면, $n^{(r)} = 1$

(3) 만약 $r = -1, -2, -3, \cdots$ 음의 정수이면

$$n^{(r)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n-r)}$$

정리 1.3

(1) $\Delta_n n^{(r)} = rn^{(r-1)}$

(2) $\Delta_n \binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}$

증명 :

(1)의 증명 :

(i) r 이 양의 정수인 경우

$$\begin{aligned}
\Delta_n n^{(r)} &= (n+1)^{(r)} - n^{(r)} \\
&= (n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2) - n(n-1)\cdots(n-r+1) \\
&= n(n-1)\cdots(n-r+2)[(n+1)-(n-r+1)] \\
&= rn(n-1)\cdots(n-r+2) \\
&= rn^{(r-1)}
\end{aligned}$$

(ii) r 이 음의 정수인 경우

$$\begin{aligned}
\Delta_n n^{(r)} &= (n+1)^{(r)} - n^{(r)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n-r+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n-r)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n-r)}\left[\frac{1}{n-r+1} - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n-r)}\left[\frac{(n+1)-(n-r+1)}{(n+1)(n-r+1)}\right] \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n-r)} \cdot \frac{r}{(n+1)(n-r+1)} \\
&= \frac{r}{(n+1)(n+2)\cdots(n-r)(n-r+1)} \\
&= rn^{(r-1)}
\end{aligned}$$

(2)의 증명 :

$$\begin{aligned}
\Delta_n \binom{n}{r} &= \binom{n+1}{r} - \binom{n}{r} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} - \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n![(n+1)-(n-r+1)]}{r!(n-r+1)!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n! \cdot r}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n}{r-1}.$$

계승함수를 이용하면, 다음과 같은 차분방정식의 해는 쉽게 구할 수 있다.

(예제) 다음 차분방정식의 해를 구해 보자.

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = n(n-1)$$

위의 차분방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\Delta^2 y(n) = n^{(2)}$$

정리 1.3에 의하여

$$\Delta^2 n^{(4)} = \Delta(4n^{(3)}) = 12n^{(2)}$$

그러므로

$$n^{(2)} = \frac{1}{12}\Delta^2 n^{(4)} = \Delta^2 \frac{n^{(4)}}{12}$$

따라서

$$\Delta^2 y(n) = \Delta^2 \frac{n^{(4)}}{12}$$

그러므로

$$y(n) = \frac{1}{12}n^{(4)} = \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

이것은 위의 차분방정식의 해가 된다.

제 2 절 합(**Summation**)

2.1 부정합

<u>정의 **2.1**</u> $\{y(n)\}$의 부정합(indefinite sum)을 기호로 $\sum y(n)$라고 표시하고 그 정의는 다음 등식을 성립시키는 수열이다. 모든 n에 대하여

$$\Delta\left(\sum y(n)\right) = y(n)$$

(참고) 미분계산에서 부정적분의 역할과 차분계산에서 부정합의 역할은 비슷하다.

$$\frac{d}{dt}\left(\int y(t)dt\right) = y(t)$$

(예제) 부정합 $\sum 6^n$ 을 구해 보자.

정리 1.2 (1) 에 의해 $\Delta 6^n = 5 \cdot 6^n$. 따라서

$$6^n = \Delta\frac{6^n}{5}$$

그러므로 $\dfrac{6^n}{5}$ 은 6^n 의 부정합이다. 만약 $\Delta C(n) = 0$ 이면

$$\Delta\left(\frac{6^n}{5} + C(n)\right) = \Delta\left(\frac{6^n}{5}\right) = 6^n$$

이 되어서 $\dfrac{6^n}{5} + C(n)$ 도 역시 6^n 의 부정합이 된다.

더우기, $f(n)$ 이 6^n 의 임의의 부정합이면

$$\begin{aligned}\Delta\left(f(n)-\frac{6^n}{5}\right) &= \Delta f(n)-\Delta\frac{6^n}{5}\\ &= 6^n-6^n\\ &= 0.\end{aligned}$$

따라서

$$f(n)=\frac{6^n}{5}+C(n).$$

여기서 $\Delta C(n)=0$. 결론적으로 6^n 의 부정합은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum 6^n=\frac{6^n}{5}+C(n)$$

여기서 $C(n)$ 는 $\Delta C(n)=0$ 을 만족하는 임의의 수열이다. 특히, $\Delta C(n)=C(n+1)-C(n)=0$ 이므로 모든 n 에 대하여 $C(n)=C(1)$ 인 수열이다.

이상과 같은 내용들을 종합하면, 부정합에 대한 다음 정리가 유도된다.

<u>정리 **2.1**</u> 만약 $Z(n)$이 $y(n)$의 부정합이면, $y(n)$의 모든 부정합은 다음과 같이 나타난다.

$$\sum y(n)=Z(n)+C$$

여기서 C는 임의의 상수

<u>정리 **2.2**</u> 상수 a 에 대하여

(1) $\sum a^n=\dfrac{a^n}{a-1}+C,\quad (a\neq 1)$

(2) $\sum \sin an=-\dfrac{\cos a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}}+C,\quad (a\neq 2n\pi)$

(3) $\sum \cos an = \dfrac{\sin a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}} + C,\quad (a \neq 2n\pi)$

(4) $\sum n^{(a)} = \dfrac{n^{(a+1)}}{a+1} + C,\quad (a \neq -1$인 정수$)$

(5) $\sum \binom{n}{a} = \binom{n}{a+1} + C,\quad (a$는 정수$)$

여기서 C는 임의의 상수

증명 :

(1)의 증명 :

정리 1.2 (1)에 의해 $\Delta a^n = (a-1)a^n$. 그러므로

$$a^n = \Delta \frac{a^n}{a-1} \quad (a \neq 1).$$

따라서

$$\sum a^n = \frac{a^n}{a-1} + C.$$

(2)의 증명 :

정리 1.2 (3)에 의해 $\Delta \cos a\left(n-\frac{1}{2}\right) = -2\sin\frac{a}{2}\sin an$. 그러므로

$$\sin an = -\Delta \frac{\cos a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}.$$

정의 2.1에 의해

$$\sum \sin an = -\frac{\cos a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C \quad (a \neq 2n\pi).$$

(3)의 증명 :

정리 1.2 (2)에 의해 $\Delta \sin a\left(n-\frac{1}{2}\right)=2 \sin \frac{a}{2} \cos a n$. 그러므로

$$\cos a n=\Delta \frac{\sin a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{a}{2}}.$$

정리 2.1에 의해

$$\sum \cos a n=\frac{\sin a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{a}{2}}+C \quad(a \neq 2 n \pi).$$

(4)의 증명 :

정리 1.3 (1)에 의해 $\Delta n^{(a+1)}=(a+1) n^{(a)}$. 그러므로

$$n^{(a)}=\Delta \frac{n^{(a+1)}}{a+1} \quad (a \neq -1\text{인 정수}).$$

따라서

$$\sum n^{(a)}=\frac{n^{(a+1)}}{a+1}+C \quad (a \neq -1\text{인 정수 }).$$

(5)의 증명 :

정리 1.3 (2)에 의해 $\Delta\binom{n}{a+1}=\binom{n}{a}$. 그러므로

$$\sum\binom{n}{a}=\binom{n}{a+1}+C \quad (a\text{는 정수}).$$

(예제) 다음과 같이 조건이 주어진, 차분방정식의 해를 구해 보자.

$$n=0,1,2,3, \cdots \text{ 에 대해서}$$

$$y(n+2)-2 y(n+1)+y(n)=n^{(2)}$$

$$y(0)=-1, y(1)=3$$

을 만족한다.

$$\Delta^2 y(n) = n^{(2)}$$

이므로, 정리 2.2 (1)에 의해서

$$\Delta y(n) = \frac{n^{(3)}}{3} + C$$

따라서

$$y(n) = \frac{n^{(4)}}{12} + Cn + D$$

여기서 C와 D는 상수.

$$-1 = y(0) = D$$
$$3 = y(1) = C + D$$

이므로

$$C = 4, D = -1$$

따라서

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{n^{(4)}}{12} + 4n - 1 \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3) + 4n - 1 \end{aligned}$$

정리 1.1에 의해서 부정합들의 일반적인 성질들을 기술한다.

<u>정리 **2.3**</u>

(1) $\sum(y(n) + z(n)) = \sum y(n) + \sum z(n)$

(2) $\sum Dy(n) = D\sum y(n)$ (D는 상수)

(3) $\sum(y(n)\Delta z(n)) = y(n)z(n) - \sum Ez(n)\Delta y(n)$

(4) $\sum(Ey(n)\Delta z(n)) = y(n)z(n) - \sum z(n)\Delta y(n)$

증명 :

(1)의 증명 :

정리 1.1 (2)에 의하여

$$\Delta\left(\sum y(n) + \sum z(n)\right) = \Delta\left(\sum y(n)\right) + \Delta\left(\sum z(n)\right).$$

정의 2.1에 의해

$$\Delta\left(\sum f(n) + \sum z(n)\right) = y(n) + z(n).$$

그러므로

$$\sum(y(n) + z(n)) = \sum y(n) + \sum z(n).$$

(2)의 증명 :

정리 1.1 (3)에 의하여

$$\Delta\left(D\sum y(n)\right) = D\left(\Delta\left(\sum y(n)\right)\right) = Dy(n).$$

그러므로

$$\sum Dy(n) = D\sum y(n) \quad (D\text{는 상수}).$$

(3)의 증명 :

정리 1.1 (4)에 의하여

$$\Delta(y(n)z(n)) = y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n).$$

정리 2.1에 의하여

$$\sum [y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n)] = y(n)z(n) + C.$$

따라서 정리 2.3 (1)에 의하여

$$\sum y(n)\Delta z(n) = y(n)z(n) - \sum Ez(n)\Delta y(n).$$

(4)의 증명 :

정리 1.1 (4)에 의하여

$$\Delta (y(n) \cdot z(n)) = y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n).$$

그러므로, 정리 2.1에 의하여

$$\sum [y(n)\Delta z(n) + Ez(n)\Delta y(n)] = y(n) \cdot z(n) + C.$$

따라서, 정리 2.3 (1)에 의하여

$$\sum Ez(n)\Delta y(n) = y(n)z(n) - \sum y(n)\Delta z(n).$$

(예제) 부정합 $\sum na^n$ $(a \neq 1)$ 을 구해 보자.

정의 2.3 (3)을 이용하기 위하여 $y(n) = n$, $\Delta z(n) = a^n$ 라 놓으면

$$z(n) = \frac{a^n}{a-1}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum n \cdot a^n &= n \cdot \frac{a^n}{a-1} - \sum \frac{a^{n+1}}{a-1} \cdot 1 \\ &= \frac{na^n}{a-1} - \frac{a}{a-1} \sum a^n \\ &= \frac{na^n}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2} \cdot a^n + C \end{aligned}$$

여기서 C는 임의의 상수

(예제) $\sum \binom{n}{2}\binom{n}{5}$ 를 계산해 보자.

$$y(n) = \binom{n}{2}, \quad \Delta z(n) = \binom{n}{5} \text{ 라 하자.}$$

정리 2.2 (5)에 의하여 $z(n) = \binom{n}{6} + C.$

정리 2.3 (3)에 의하여

$$\sum \binom{n}{5}\binom{n}{2} = \binom{n}{6}\binom{n}{2} - \sum \binom{n+1}{6}\binom{n}{1}.$$

또 $y_1(n) = \binom{n}{1}, \quad \Delta z_1(n) = \binom{n+1}{6}$ 라 놓으면

$$z_1(n) = \binom{n+1}{7}.$$

정리 2.3 (3)에 의하여

$$\begin{aligned}\sum \binom{n}{5}\binom{n}{2} &= \binom{n}{6}\binom{n}{2} - \left[\binom{n+1}{7}\binom{n}{1} - \sum \binom{n+2}{7}\binom{n}{0}\right] \\ &= \binom{n}{6}\binom{n}{2} - \binom{n+1}{7}n + \binom{n+2}{8} + C.\end{aligned}$$

(참고) 계산 과정을 간편하게 하기 위하여

- $a > b$인 경우

$$\sum_{k=a}^{b} y_k = 0$$

이라 약속한다.

- m을 고정하면 $n \geq m$인 모든 n에 대하여

$$\Delta_n \left(\sum_{k=m}^{n-1} y(k) \right) = y(n)$$

이며

- p을 고정하면 $p \geq n$인 모든 n에 대하여

$$\Delta_n \left(\sum_{k=n}^{p} y(k) \right) = -y(n).$$

이라 약속한다. 따라서

$$\sum y(n) = \sum_{k=m}^{n-1} y(k) + C \qquad (m \leq n)$$

여기서 C는 임의의 상수.

$$\sum y(n) = -\sum_{k=n}^{p} y(k) + D \qquad (p \geq n)$$

여기서 D는 임의의 상수.

(예제) $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ 을 계산해 보자.

정리 2.2 (1)와 위의 방정식에 의하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n + C \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} - 1} + C \\ &= -3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + C \end{aligned}$$

C를 구하기 위하여, $n=2$라 하면

$$\frac{2}{3} = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + C$$
$$2 = C$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2-3\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

<u>정리 2.4</u> 만약, $Z(n)$이 $y(n)$의 부정합이면

$$\sum_{k=m}^{n-1} y(k) = Z(n) - Z(m).$$

증명 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n-1} y(k) &= y(m) + y(m+1) + \cdots + y(n-1)\\ &= [y(1)+y(2)+\cdots+y(m-1)+y(m)+\cdots+y(n-1)]\\ &\quad -[y(1)+y(2)+\cdots+y(m-1)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} y(k) - \sum_{k=1}^{m-1} y(k)\\ &= Z(n) - Z(m).\end{aligned}$$

(예제) $\sum_{k=1}^{l} k^2$ 을 계산해 보자.

$$k^{(1)} = k, \quad k^{(2)} = k(k-1)$$

이므로

$$k^2 = k^{(1)} + k^{(2)}.$$

따라서 정의 2.2 (4)에 의하여

$$\begin{aligned}\sum k^2 &= \sum k^{(1)} + \sum k^{(2)} \\ &= \frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3} + C\end{aligned}$$

정리 2.4에 의하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l} k^2 &= \frac{(l+1)^{(2)}}{2} + \frac{(l+1)^{(3)}}{3} - \frac{1^{(2)}}{2} - \frac{1^{(3)}}{3} \\ &= \frac{(l+1)l}{2} + \frac{(l+1)l(l-1)}{3} \\ &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}.\end{aligned}$$

정리 2.5

(1) $m < n$이면

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k b_k = b_n \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{i=m}^{k} a_i \right) \Delta b_k$$

(2) $p \geq n$이면

$$\sum_{k=n}^{p} a_k b_k = b_{n-1} \sum_{k=n}^{p} a_k + \sum_{k=n}^{p} \left(\sum_{i=k}^{p} a_i \right) \Delta b_{k-1}.$$

증명 :

(1)의 증명 : $y(n) = b_n$, $z(n) = \sum_{k=m}^{n-1} a_k$ 라 놓으면

정리 2.3 (3)에 의하여

$$\begin{aligned}\sum a_n b_n &= \sum y(n)(\Delta z(n)) \\ &= y(n)z(n) - \sum Ez(n)\Delta y(n) \\ &= b_n \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \sum \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) \Delta b_n\end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k b_k = b_n \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{i=m}^{k} a_i\right) \Delta b_k + C.$$

$n = m + 1$ 이라 하면

$$a_m b_m = b_{m+1} a_m - a_m \Delta b_m + C$$

따라서 $C = 0$ 가 되어서 (1)이 증명 된다.

(2)의 증명 : $y(n) = b_{n-1}, z(n) = \sum_{k=n}^{p} a_k$ 라 놓으면

정리 2.3 (4)에 의하여

$$\begin{aligned}\sum b_n(-a_n) &= \sum Ey(n)\Delta z(n) \\ &= y(n)z(n) - \sum z(n)\Delta y(n) \\ &= b_{n-1} \sum_{k=n}^{p} a_k - \sum \left(\sum_{i=n}^{p} a_i\right) \Delta b_{n-1}.\end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{k=n}^{p} a_k b_k = b_{n-1} \sum_{k=n}^{p} a_k + \sum_{k=n}^{p} \left(\sum_{i=k}^{p} a_i\right) \Delta b_{k-1} + C$$

위와 같은 방법으로 $C = 0$가 되어 (2)가 증명 된다.

(예제)　$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k$ 를 계산해 보자.

정리 2.5 (1)에 의하여　$a_k = 2^k$,　$b_k = k$ 라 놓으면

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k = n\sum_{k=1}^{n-1} 2^k - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} 2^i\right)$$

정리 2.4와 정리 2.2 (1)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = [2^k]_1^n = 2^n - 2^1.$$

따라서 원래의 식으로 돌아가면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^k &= n(2^n - 2) - \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1} - 2^1) \\ &= n \cdot 2^n - 2n - (2^{n+1} - 2^2) + 2(n-1) \\ &= n \cdot 2^n - 2^{n+1} + 2\end{aligned}$$

제 3 절 선형차분방정식

3.1 일계 선형차분방정식

주어진 두 수열 $\{p(n)\}$, $\{r(n)\}$ 그리고 모든 n에 대하여 $p(n) \neq 0$일 때 다음과 같은 방정식

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n) \tag{3.1}$$

을 일계 선형차분방정식이라 한다.
만약 모든 n에 대하여 $y(n)$이 차분방정식 (3.1)을 만족하면, 수열 $\{y(n)\}$을 차분방정식 (3.1)의 해라고 한다.

<u>정리 3.1</u> 모든 n에 대하여 $p(n) \neq 0$일 때

(1). 차분방정식

$$u(n+1) - p(n)u(n) = 0 \tag{3.1$'$}$$

의 해는 다음과 같다.

$$u(n) = u(1)\prod_{k=1}^{n-1} p(k)$$

(2). 차분방정식 (3.1) 의 해는 다음과 같다.

$$y(n) = u(n)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r(k)}{Eu(k)} + C\right]$$

여기서 C는 상수이며, 수열 $\{u(n)\}$은 차분방정식 $(3.1)'$의 해로서 모든 항들이 0이 아닌 수열이다.

증명 :

(1)의 증명 : 반복적 계산에 의해

$$u(2) = p(1)u(1)$$
$$u(3) = p(2)u(2) = p(2)p(1)u(1)$$
$$u(4) = p(3)u(3) = p(3)p(2)p(1)u(1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u(n) = u(1)\prod_{k=1}^{n-1} p(k)$$

(2)의 증명

차분방정식 (3.1)의 해를 구하기 위하여 $y(n) = u(n)v(n)$으로 치환, (3.1)에 대입한 후 $v(n)$을 결정하면 구하는 해를 얻는다.

$$u(n+1)v(n+1) - p(n)u(n)v(n) = r(n)$$

또는

$$\begin{aligned} v(n+1) &= \frac{p(n)u(n)v(n)}{u(n+1)} + \frac{r(n)}{u(n+1)} \\ &= v(n) + \frac{r(n)}{u(n+1)} \\ &= v(n) + \frac{r(n)}{Eu(n)} \\ &= v(n-1) + \frac{r(n-1)}{Eu(n-1)} + \frac{r(n)}{Eu(n)} \end{aligned}$$

따라서

$$v(n+1) = v(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(k)}{Eu(k)}.$$

그러므로

$$y(n) = u(n)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r(k)}{Eu(k)} + C\right]$$

여기서 C는 임의의 상수

(예제) 차분방정식

$$\begin{cases} y(n+1) - ny(n) = (n+1)! \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

을 만족하는 수열 $\{y(n)\}$을 찾아 보자.

우선, 방정식

$$u(n+1) - nu(n) = 0$$

을 풀면, 그 해는 정리 3.1에 의해 다음과 같이 얻게 된다.

$$\begin{aligned} u(n) &= u(1)\prod_{k=1}^{n-1} k \\ &= u(1)\cdot(n-1)! \end{aligned}$$

그러면, 주어진 문제의 해는 정리 3.1에 의하여 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} y(n) &= u(1)(n-1)!\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)!}{k!} + C\right] \\ &= u(1)(n-1)!\left[\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) + C\right] \\ &= u(1)\frac{(n+1)!}{2} + u(1)(C-1)(n-1)! \end{aligned}$$

여기서 $u(1) = 1$ 이라 놓을 수 있기 때문에 $n = 1$일 때 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} 5 = y(1) &= \frac{2!}{2} + (C-1)\times 0! \\ C - 1 &= 4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 해는 다음과 같다.

$$y(n) = \frac{(n+1)!}{2} + 4(n-1)!$$

(참고)　　방정식

$$(3.1)' \qquad u(n+1) - p(n)u(n) = 0$$
$$(3.1) \qquad y(n+1) - p(n)y(n) = r(n)$$

들은 다음과 같은 방법으로도 해결된다.
우선, $(3.1)'$을 Log (Logarithm)를 이용하여 푼다.

$p(n) > 0$이라 가정하고, 방정식 $(3.1)'$의 양변에 Log를 취하면

$$\log |u(n+1)| = \log |u(n)| + \log p(n)$$
$$\Delta \log |u(n)| = \log p(n)$$
$$\log |u(n)| = \sum \log p(n) + C$$

여기서 C는 임의의 상수

$$|u(n)| = e^{c} \cdot e^{\sum \log p(n)}$$
$$u(n) = c' \cdot e^{\sum \log p(n)}$$

여기서 C''는 임의의 상수
다음 방정식 (3.1)을 푼다.

$$y(n) = \frac{-r(n) + y(n+1)}{p(n)}.$$

그러면

$$y(n+1) = \frac{-r(n+1) + y(n+2)}{p(n+1)}.$$

을 윗식에 대입하면

$$y(n) = \frac{-r(n) + \dfrac{-r(n+1) + y(n+2)}{p(n+1)}}{p(n)}.$$

이러한 과정을 반복하면, 다음과 같은 연분수(Continued Fraction)를 얻는다.

$$y(n) = \frac{-r(n) + \dfrac{-r(n+1) + \dfrac{-r(n+2) + \dfrac{-r(n+3) + \dfrac{\cdots}{p(n+4)}}{p(n+3)}}{p(n+2)}}{p(n+1)}}{p(n)}.$$

만약, 연분수를 계산하여 다음과 같은 무한급수를 얻는다고 가정하자.

$$y(n) = \frac{-r(n)}{p(n)} + \frac{-r(n+1)}{p(n)p(n+1)} + \cdots$$

또는

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-r(n+k)}{p(n)\cdots p(n+k)}$$

이때 위의 급수가 수렴하면 그 합은 방정식 (3.1)의 해가 됨을 대입해 보면 알 수 있다.

(예제) 차분방정식 $y(n+1) - ny(n) = -3^n$ 의 해를 구해 보자.

위의 참고로부터

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{n+k}}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \\ &= \frac{3^n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k n^{(-k)} \end{aligned}$$

급수의 수렴 여부를 확인 하기 위하여 비교판정법을 사용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{k+1}n^{(-k+1)}}{3^k n^{(-k)}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 3 \times \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 3 \times \frac{1}{n+k+1} = 0$$

따라서 위의 급수는 수렴한다.

3.2 선형방정식에 관한 일반적인 결과

일반적인 m계 선형방정식

(3.2) $$p_m(n)y(n+m) + \cdots + p_0(n)y(n) = r(n)$$

에서 $\{p_0(n)\}, \cdots, \{p_m(n)\}, \{r(n)\}$들은 알려진 수열들이며 모든 n에 대하여 $p_0(n) \neq 0, p_m(n) \neq 0$. 만약, $r(n) \neq 0$인 경우 방정식 (3.2)를 선형비동차(nonhomogeneous) 차분방정식이라 부른다.

방정식 (3.2)에 관련된 선형동차(homogeneous) 차분방정식은 다음과 같다.

(3.2)$'$ $$p_m(n)y(n+m) + \cdots + p_0(n)y(n) = 0$$

방정식 (3.2)는 추이연산자 E를 이용하면, 다음과 같이 표시된다.

$$(p_m(n)E^m + \cdots + p_0(n)E^0)y(n) = r(n)$$

여기서 $E^0 = I$, $E = \Delta + I$이므로 방정식 (3.2)는 차분연산자 Δ에 의하여 표시될 수 있다.

<u>정리 **3.2**</u> 임의로 m개의 수 $C_0, C_1, \cdots, C_{m-1}$들이 주어졌을 때, 선형차분방정식 (3.2)를 만족하고, $y(1) = C_0, y(2) = C_1, \cdots, y(m) = C_{m-1}$

을 만족하는 수열 $\{y(n)\}$은 유일하게 존재한다.

증명 : 증명은 반복적으로 계산하는 과정에서 얻어진다.

예를 들면

$$y(m+1) = \frac{r(1) - p_{m-1}(1)y(m) - \cdots - p_0(1)y(1)}{p_m(1)}$$
$$= \frac{r(1) - p_{m-1}(1)C_{m-1} - \cdots - p_0(1)C_0}{p_m(1)}$$

마찬가지 방법으로, 방정식 (3.2)에 $n = 2$, $n = 3$을 대입하면

$$y(m+2) = \frac{r(2) - p_{m-1}(2)y(m+1) - \cdots - p_0(2)y(2)}{p_m(2)}$$
$$= \frac{r(2) - p_{m-1}(2)C_m - \cdots - p_0(2)C_1}{p_m(2)}$$

$$y(m+3) = \frac{r(3) - p_{m-1}(3)y(m+2) - \cdots - p_0(3)y(3)}{p_m(3)}$$
$$= \frac{r(3) - p_{m-1}(3)C_{m+1} - \cdots - p_0(3)C_2}{p_m(3)}$$

<u>정리 **3.3**</u>

(1) 만약 수열 $\{u_1(n)\}$과 $\{u_2(n)\}$이 방정식 (3.2)$'$를 만족하면, 임의의 상수 C_1과 C_2에 대하여 수열 $\{C_1u_1(n) + C_2u_2(n)\}$도 방정식 (3.2)$'$의 해가 된다.

(2) 만약 수열 $\{u(n)\}$이 방정식 (3.2)$'$을 만족하고, 수열 $\{y(n)\}$이 방정식 (3.2)를 만족하면 수열 $\{u(n) + y(n)\}$도 방정식 (3.2)의 해가 된다.

(3) 만약 수열 $\{y_1(n)\}$과 $\{y_2(n)\}$이 방정식 (3.2)$'$를 만족하면, 수열 $\{y_1(n) - y_2(n)\}$도 방정식 (3.2)$'$의 해가 된다.

증명 :

(1)의 증명 : 수열 $\{u_1(n)\}$과 $\{u_2(n)\}$이 방정식 (3.2)′를 만족하므로

$$p_m(n)u_1(n+m)+\cdots+p_0(n)u_1(n)=0$$
$$p_m(n)u_2(n+m)+\cdots+p_0(n)u_2(n)=0$$

한편, 방정식 (3.2)′에서

$$\begin{aligned} &p_m(n)[C_1u_1(n+m)+C_2u_2(n+m)]+\cdots \\ &\quad +p_0(n)[C_1u_1(n)+C_2u_2(n)] \\ &=C_1[p_m(n)u_1(n+m)+\cdots+p_0u_1(n)] \\ &\quad +C_2[p_m(n)u_2(n+m)+\cdots+p_0u_2(n)] \\ &=0 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{C_1u_1(n)+C_2u_2(n)\}$은 방정식 (3.2)′를 만족시킨다.

(2)의 증명 :

수열 $\{u(n)\}$가 방정식(3.2)′를 만족하므로

$$p_m(n)u(n+m)+\cdots+p_0(n)u(n)=0 \qquad \text{(i) 성립}$$

또, 수열 $\{y(n)\}$가 방정식(3.2)를 만족하므로

$$p_m(n)y(n+m)+\cdots+p_0(n)y(n)=r(n) \qquad \text{(ii) 성립}$$

이 때 (i) + (ii) 하면

$$p_m(n)[u(n+m)+y(n+m)]+\cdots+p_0(n)[u(n)+y(n)]=r(n)$$

가 되므로 수열 $\{u(n)+y(n)\}$은 방정식 (3.2)의 해가 된다.

(3)의 증명 :

수열 $\{y_1(n)\}$가 방정식(3.2)를 만족하므로

$$p_m(n)y_1(n+m) + \cdots + p_0(n)y_1(n) = r(n) \qquad \text{(i) 성립}$$

또, 수열 $\{y_2(n)\}$가 방정식 (3.2)을 만족하므로

$$p_m(n)y_2(n+m) + \cdots + p_0(n)y_2(n) = r(n) \qquad \text{(ii) 성립}$$

이 때 (i) - (ii) 하면

$$p_m(n)[y_1(n+m) - y_2(n+m)] + \cdots + p_0(n)[y_1(n) - y_2(n)] = 0$$

이 되므로 수열 $\{y_1(n) - y_2(n)\}$은 방정식 $(3.2)'$의 해가 된다.

따름정리 만약 수열 $\{z(n)\}$이 방정식 (3.2)의 해이면,
방정식 (3.2)의 모든 해 $\{y(n)\}$은 다음과 같이 나타난다.

$$y(n) = z(n) + u(n)$$

여기서 수열 $\{u(n)\}$은 방정식 $(3.2)'$의 해이다.

증명 :

수열 $\{z(n)\}$가 방정식 (3.2)의 해이므로

$$p_m(n)z(n+m) + \cdots + p_0(n)z(n) = r(n) \qquad \text{(i) 성립}$$

또, 수열 $\{y(n)\}$가 방정식 $(3.2)'$의 해이므로

$$p_m(n)y(n+m) + \cdots + p_0(n)y(n) = 0 \qquad \text{(ii) 성립}$$

이 때 (i) + (ii) 하면

$$p_m(n)[z(n+m) + y(n+m)] + \cdots + p_0(n)[z(n) + y(n)] = r(n)$$

가 되므로 수열 $\{z(n) + u(n)\}$, 즉 $y(n) = z(n) + u(n)$인 수열 $\{y(n)\}$은 방정식 (3.2)의 해가 된다.

(참고) 따름정리로부터 방정식 (3.2)의 모든 해를 구하는 문제는 다음의 간단한 두 가지 문제로 축소된다.

(1). 방정식 $(3.2)'$의 모든 해를 구한다.

(2). 방정식 (3.2)의 하나의 해를 구한다.

<u>정의</u> **3.1** 수열들의 집합 $\{\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots \{u_m(n)\}\}$이 모든 n에 대하여 등식

$$C_1 u_1(n) + C_2 u_2(n) + \cdots + C_m u_m(n) = 0$$

을 만족하는 m개의 상수 $C_1, C_2, \cdots, C_m$들이 존재하고, 그것들 중에 적어도 하나는 0이 아닐 때 위 수열들의 집합을 일차종속(linearly dependent)이라 하며, 일차종속이 아니면 일차독립(linearly independent)이라 한다.

(예제) 수열

$$\{2^n\}, \{n2^n\}, \{n^2 2^n\}$$

은 일차독립이다. 왜냐하면, 만약 모든 n에 대하여

$$C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n = 0$$

을 만족하면, 모든 n에 대하여 다음 방정식을 만족한다.

$$C_1 + C_2 n + C_3 n^2 = 0$$

따라서 위의 방정식이 무한개의 해를 가질려면

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

을 만족해야 한다.

선형 방정식을 연구하는데 매우 유용한 행렬(Matrix)을 정의한다.

3.3 캐소라티(Casorati)행렬

정의 3.2 주어진 m개의 수열 $\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}$에 대하여, 다음과 같이 표시되는 행렬을 캐소라티(Casorati)의 행렬이라 부른다.

$$W(n) = \begin{pmatrix} u_1(n) & u_2(n) & \cdots & u_m(n) \\ u_1(n+1) & u_2(n+1) & \cdots & u_m(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1(n+m-1) & u_2(n+m-1) & \cdots & u_m(n+m-1) \end{pmatrix}$$

행렬식 $w(n) = \det W(n)$을 캐소라티안(Casoration)이라 부른다.

(참고) 캐소라티안은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$w(n) = \det \begin{pmatrix} u_1(n) & u_2(n) & \cdots & u_m(n) \\ \Delta u_1(n) & \Delta u_2(n) & \cdots & \Delta u_m(n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta^{m-1} u_1(n) & \Delta^{m-1} u_2(n) & \cdots & \Delta^{m-1} u_m(n) \end{pmatrix}$$

정리 3.4 수열 $\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}$들이 방정식 $(3.2)'$의 해들이라 하면, 다음 명제들은 서로 동치이다.

(1) 수열들의 집합 $\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}$은 일차종속이다.

(2) $w(1) = 0$

(3) 모든 n에 대하여 $w(n) = 0$

증명 :

명제 (1)이 명제 (3)의 충분조건이 됨을 증명한다.

해들의 집합 $\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}$이 일차종속이라 가정하자. 그러면 m개의 상수 $C_1, C_2, \cdots, C_m$들이 존재하며 그것들 중에 적어도 하나는 0이 아니며, 모든 n에 대하여 다음 등식들을 만족한다.

$$C_1u_1(n) + C_2u_2(n) + \cdots + C_mu_m(n) = 0$$
$$C_1u_1(n+1) + C_2u_2(n+1) + \cdots + C_mu_m(n+1) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1u_1(n+m-1) + C_2u_2(n+m-1) + \cdots + C_mu_m(n+m-1) = 0$$

위의 m원 일차연립방정식은 모두 0이 아닌 해 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 을 가지므로 $w(n) = 0$이다.

명제 (2)가 명제 (3)의 필요조건이 됨은 명백하다.

명제 (2)가 명제 (3)의 충분조건이 됨을 보인다.

$w(1) = 0$이라고 가정하자. 그러면 다음 등식들을 만족하는 m개의 상수

$$D_1, D_2, \cdots, D_m \text{ (단, 적어도 하나는 0이 아님)}$$

들이 존재한다.

$$D_1u_1(1) + D_2u_2(1) + \cdots + D_mu_m(1) = 0$$
$$D_1u_1(2) + D_2u_2(2) + \cdots + D_mu_m(2) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_1u_1(m) + D_2u_2(m) + \cdots + D_mu_m(m) = 0$$

여기서

$$u(n) = D_1u_1(n) + D_2u_2(n) + \cdots + D_mu_m(n)$$

이라고 하면, $u(n)$은 방정식 (3.2)'의 해가 된다. 그리고

$$u(1) = u(2) = \cdots = u(m) = 0$$

정리 3.2에 의하면, 모든 n에 대하여 $u(n)=0$
따라서

$$\begin{pmatrix} u_1(n) & u_2(n) & \cdots & u_m(n) \\ u_1(n+1) & u_2(n+1) & \cdots & u_m(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1(n+m-1) & u_2(n+m-1) & \cdots & u_m(n+m-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(D_1, D_2, \cdots, D_m) \neq (0, 0, \cdots, 0)$이므로 $w(n)=0$

명제 (3)이 명제 (1)의 충분조건이 됨을 위의 과정에서 쉽게 할 수 있다. 왜냐 하면, 모든 n에 대하여

$$u(n) = D_1u_1(n) + D_2u_2(n) + \cdots + D_mu_m(n) = 0$$

그러므로 $\{\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}\}$은 일차종속이다.

정리 3.5 만약 수열들의 집합 $\{\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}\}$이 방정식 $(3.2)'$ 의 해들의 집합이고, 일차독립이면 방정식$(3.2)'$의 모든 해는 다음과 같이 표시된다.

$$u(n) = C_1u_1(n) + C_2u_2(n) + \cdots + C_mu_m(n)$$

여기서 $C_1, C_2, \cdots, C_m$은 $\{u(n)\}$에 종속된 상수들이다.

증명 : 수열 $\{u(n)\}$을 방정식 $(3.2)'$의 해라고 가정하자. 해들의 집합 $\{\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}\}$이 일차독립이므로 모든 n에 대하여 $w(n) \neq 0$
왜냐하면, 임의의 상수들 $D_1, D_2, \cdots, D_m$ 에 대하여

$$D_1u_1(n) + D_2u_2(n) + \cdots + D_mu_m(n) = 0$$

이면, 즉

$$\begin{pmatrix} u_1(n) & u_2(n) & \cdots & u_m(n) \\ u_1(n+1) & u_2(n+1) & \cdots & u_m(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1(n+m-1) & u_2(n+m-1) & \cdots & u_m(n+m-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

이면 일차독립이라는 가정에서 $D_1 = D_2 = \cdots = D_m = 0$ 따라서 $w(n) \neq 0$.

상수 $u(1), u(2), \cdots, u(m)$에 대하여 다음 연립방정식

$$C_1 u_1(1) + C_2 u_2(1) + \cdots + C_m u_m(1) = u(1)$$
$$C_1 u_1(2) + C_2 u_2(2) + \cdots + C_m u_m(2) = u(2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1 u_1(m) + C_2 u_2(m) + \cdots + C_m u_m(m) = u(m)$$

은 유일한 해 $C_1, C_2, \cdots, C_m$이 존재하게 된다. 따라서 방정식 $(3.2)'$의 해 $\{u(n)\}$은 $u(1), u(2), \cdots, u(m)$에 의하여 유일하게 결정되므로 모든 n에 대하여

$$u(n) = C_1 u_1(n) + C_2 u_2(n) + \cdots + C_m u_m(n)$$

(예제) 방정식

$$u(n+3) - 6u(n+2) + 11u(n+1) - 6u(n) = 0$$

또는

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$$

는 다음과 같은 해 $\{2^n\}, \{3^n\}, \{1\}$을 갖는다. 캐소라티안을 구하면

$$w(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^n & 2 \cdot 3^n & 0 \\ 2^n & 4 \cdot 3^n & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2^{n+1} \cdot 3^n$$

이 때 $w(1) = 12 \neq 0$ 되므로 $\{\{2^n\}, \{3^n\}, \{1\}\}$은 일차독립이다. 따라서 위의 방정식의 모든 해는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$u(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + C_3$$

여기서 $C_1, C_2, \cdots, C_n$들은 $\{u(n)\}$에 따른 상수들이다.

3.4 매개변수변분법

$$p_2(n)y(n+2)+p_1(n)y(n+1)+p_0(n)y(n)=r(n) \qquad (*)$$

의 해를 매개변수변분법이라는 방법을 이용하여 구한다. $u_1(n)$과 $u_2(n)$을 방정식

$$p_2(n)y(n+2)+p_1(n)y(n+1)+p_0y(n)=0 \qquad (*')$$

의 해들로서 일차독립이라고 가정하자. 여기서 방정식 $(*)$의 해로써 다음과 같은 형태의 해를 구한다.

$$y(n)=a_1(n)u_1(n)+a_2(n)u_2(n)$$

여기서 $a_1(n)$과 $a_2(n)$은 나중에 결정한다. 그러면

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= a_1(n+1)u_1(n+1)+a_2(n+1)u_2(n+1)\\
&= a_1(n)u_1(n+1)+a_2(n)u_2(n+1)\\
&\quad -a_1(n)u_1(n+1)-a_2(n)u_2(n+1)\\
&\quad +a_1(n+1)u_1(n+1)+a_2(n+1)u_2(n+1)\\
&= a_1(n)u_1(n+1)+a_2(n)u_2(n+1)\\
&\quad +\Delta a_1(n)u_1(n+1)+\Delta a_2(n)u_2(n+1)
\end{aligned}$$

만약, 위의 마지막 표현에서

$$\Delta a_1(n)u_1(n+1)+\Delta a_2(n)u_2(n+1)=0 \qquad (\ ** \ )$$

라고 가정하자. 그러면 다음 등식

$$\begin{aligned}
y(n+2) &= a_1(n+1)u_1(n+2)+a_2(n+1)u_2(n+2)\\
&= a_1(n)u_1(n+2)+a_2(n)u_2(n+2)\\
&\quad -a_1(n)u_1(n+2)-a_2(n)u_2(n+2)\\
&\quad +a_1(n+1)u_1(n+2)+a_2(n+1)u_2(n+2)\\
&= a_1(n)u_1(n+2)+a_2(n)u_2(n+2)\\
&\quad +\Delta a_1(n)u_1(n+2)+\Delta a_2(n)u_2(n+2)
\end{aligned}$$

방정식 $(*)$에 $y(n)$, $y(n+1)$, $y(n+2)$를 대입하고, $a_1(n)$을 포함하는 항들과 $a_2(n)$를 포함하는 항들을 정리하면

$$\begin{aligned} & p_2(n)y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_0 y(n) \\ & = a_1(n)\{p_2(n)u_1(n+2) + p_1(n)u_1(n+1) + p_0(n)u_1(n)\} \\ & \quad + a_2(n)\{p_2(n)u_2(n+2) + p_1(n)u_2(n+2) + p_0(n)u_2(n)\} \\ & \quad + p_2(n)\{u_1(n+2)\Delta a_1(n) + u_2(n+2)\Delta a_2(n)\} = r(n) \end{aligned}$$

여기서 $u_1(n)$과 $u_2(n)$는 방정식 $(*')$을 만족하므로 위의 첫번째 괄호와 두번째 괄호는 0이 된다. 따라서

$$\begin{aligned} & p_2(n)y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_0(n)y(n) \\ & = p_2(n)\{u_1(n+2)\Delta a_1(n) + u_2(n+2)\Delta a_2(n)\} = r(n) \end{aligned}$$

만약

$$u_1(n+2)\Delta a_1(n) + u_2(n+2)\Delta a_2(n) = \frac{r(n)}{p_2(n)} \qquad (***)$$

을 만족하면 $y(n)$은 방정식 $(*)$의 해가 된다.

결론적으로 $\Delta a_1(n)$과 $\Delta a_2(n)$이 이원 일차연립방정식

$$\begin{cases} u_1(n+1)\Delta a_1(n) + u_2(n+1)\Delta a_2(n) = 0 & (**) \\ u_1(n+2)\Delta a_1(n) + u_2(n+2)\Delta a_2(n) = \frac{r(n)}{p_2(n)} & (***) \end{cases}$$

을 만족하면 $y(n)$은 방정식$(*)$의 해가 된다. 위의 연립방정식의 계수들은 캐소라티 행렬 $W(n+1)$을 이루고, 캐소라티안 $w(n+1) \neq 0$이므로 위의 연립방정식은 유일한 해를 갖는다.

이상의 결과들을 종합하여 m계의 차분방정식에 적용하면, 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 3.6 $\{\{u_1(n)\}, \{u_2(n)\}, \cdots, \{u_m(n)\}\}$을 방정식 $(3.2)'$의 해들의 집합으로서 일차독립이라 하면, 방정식 (3.2)의 해는 다음과 같다.

$$y(n) = a_1(n)u_1(n) + a_2(n)u_2(n) + \cdots + a_m(n)u_m(n)$$

여기서 $a_1(n), a_2(n), \cdots, a_m(n)$들은 다음 행렬방정식을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1) & u_2(n+1) & \cdots & u_m(n+1) \\ u_1(n+2) & u_2(n+2) & \cdots & u_m(n+2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1(n+m) & u_2(n+m) & \cdots & u_m(n+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_1(n) \\ \Delta a_2(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta a_m(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{r(n)}{p_m(n)} \end{pmatrix}$$

(예제) 차분방정식 $y_{(n+2)} - 7y_{(n+1)} + 6y_{(n)} = n$ 의 해를 모두 구해 보자.

다음 절에서 동차방정식의 해들을 구하는 방법이 제시된다. 여기서는 위의 비동차방정식에 관련된 동차방정식

$$y_{(n+2)} - 7y_{(n+1)} + 6y_{(n)} = 0$$

의 일차독립인 두 개의 해는 $\{u_1(n)\} = \{1\}$과 $\{u_2(n)\} = \{6^n\}$ 들로 이미 계산된 것으로 간주한다. 매개변수변분법을 이용하기 위하여 다음 연립방정식을 만들고

$$\begin{cases} 1\Delta a_1(n) + 6^{n+1}\Delta a_2(n) = 0 \\ 1\Delta a_1(n) + 6^{n+2}\Delta a_2(n) = n \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면

$$\Delta a_1(n) = -\frac{n}{5}, \quad \Delta a_2(n) = \frac{n}{30}6^{-n}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_1(n) &= \sum\left(-\frac{n}{5}\right) + C \\ &= -\frac{n^{(2)}}{10} + C \\ &= -\frac{n(n-1)}{10} + C \end{aligned}$$

여기서 C는 상수.
그리고

$$
\begin{aligned}
a_2(n) &= \frac{1}{30}\sum n\left(\frac{1}{6}\right)^n + D \\
&= \frac{1}{30}\left\{n\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n - \sum\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right\} + D \\
&= \frac{1}{30}\left\{-\frac{6}{5}n\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} + D \\
&= -\frac{n}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{125}\left(\frac{1}{6}\right)^n + D
\end{aligned}
$$

여기서 D는 상수.
결국, 주어진 비동차차분방정식의 모든 해는 일반적으로 다음과 같이 표시된다.

$$
\begin{aligned}
y(n) &= a_1(n)1 + a_2(n)6^n \\
&= -\frac{n(n-1)}{10} + C - \frac{n}{25} - \frac{1}{125} + D6^n \\
&= C + D6^n - \frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{125}
\end{aligned}
$$

여기서 C, D 는 상수.

따름정리 이계 선형차분방정식

$$p_2(n)y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_0(n)y(n) = r(n)$$

의 해로서 $y(1) = y(2) = 0$을 만족하는 해는 매개변수변분법을 사용하여 다음과 같이 나타난다.

$$y(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_1(k+1)u_2(n) - u_2(k+1)u_1(n)}{p_2(k)w(k+1)} r(k)$$

여기서 $u_1(n)$과 $u_2(n)$은 동차방정식의 일차독립인 해들이며, $w(n)$은 캐소라티안이다.

증명 : 매개빈수변분법을 사용하면,

$$y(n) = a_1(n)u_1(n) + a_2(n)u_2(n)$$

$$\Delta a_1(n)u_1(n+1) + \Delta a_2(n)u_2(n+1) = 0 \tag{1}$$

$$\Delta a_1(n)u_1(n+2) + \Delta a_2(n)u_2(n+2) = \frac{r(n)}{p_2(n)} \tag{2}$$

따라서 $(1) \times u_1(n+2) - (2) \times u_1(n+1)$하면

$$\Delta a_2(n)\{u_1(n+2)u_2(n+1) - u_1(n+1)u_2(n+2)\} = -\frac{r(n)u_1(n+1)}{p_2(n)}$$

위의 식을 풀면,

$$a_2(n+1) - a_2(n) = \Delta a_2(n) = \frac{r(n)u_1(n+1)}{p_2(n)w(n+1)}$$

위의 식에서 $a_2(n+1)$를 구하면,

$$\begin{aligned} a_2(n+1) &= \frac{r(n)u_1(n+1)}{p_2(n)w(n+1)} + a_2(n) \\ &= \frac{r(n)u_1(n+1)}{p_2(n)w(n+1)} + \frac{r(n-1)u_1(n)}{p_2(n-1)w(n)} + a_2(n-1) \\ &\cdots\cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{r(k)u_1(k+1)}{p_2(k)w(k+1)} + a_2(1) \end{aligned} \tag{3}$$

같은 방법으로 $a_1(n+1)$을 구하면,

$$a_1(n+1) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{r(k)u_2(k+1)}{p_2(k)w(k+1)} + a_1(1) \tag{4}$$

따라서

$$y(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_2(n)u_1(k+1) - u_1(n)u_2(k+1)}{p_2(k)w(k+1)} r(k) + a_1(1)u_1(n) + a_2(1)u_2(n)$$

$y(1) = 0$ 이므로,

$$a_1(1)u_1(1) + a_2(1)u_2(1) = 0 \tag{5}$$

$y(2) = 0$ 이므로,

$$a_1(1)u_1(2) + a_2(1)u_2(2) = 0 \tag{6}$$

(5)와 (6)에서 $w(1) \neq 0$이므로, $a_1(1) = a_2(1) = 0$. 그러므로

$$y(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_1(k+1)u_2(n) - u_2(k+1)u_1(n)}{p_2(k)w(k+1)} r(k)$$

3.5 계수가 상수인 선형동차방정식

방정식 $(3.2)'$에서 계수들이 모두 상수인 경우에 n개의 서로 독립인 해들을 구하는 방법을 소개한다.

$p_m \neq 0$이므로 방정식$(3.2)'$의 양변을 p_m으로 나누면, 다음과 같은 방정식을 얻는다.

(3.3) $$u(n+m) + q_{m-1}u(n+m-1) + \cdots + q_0 u(n) = 0$$

여기서 $q_0, q_1, \cdots, q_{m-1}$들은 상수들이며 $q_0 \neq 0$

<u>정의 **3.3**</u>

(1) 다항식 $\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_0$
를 방정식 (3.3)의 고유다항식(Characteristic Polynomial)이라 부른다.

(2) 방정식 $\lambda^m + q_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + q_0 = 0$

를 방정식 (3.3)의 고유방정식(Characteristic Equation)이라 부른다.

(3) 고유방정식의 해 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 들을 고유근(Characteristic Root) 이라 부른다.

(참고) 추이연산자 E를 사용하여 방정식 (3.3)를 표현하면 다음과 같이 된다.

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + \cdots + q_0)\, u(n) = 0$$

또는

(3.4) $$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (E - \lambda_k)^{\alpha_k} u(n) = 0$$

여기서 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = m$ 그리고 연산자에 대한 곱의 순서는 무시할 수 있다.

$q_0 \neq 0$이므로 각 고유근들은 0이 아니다.

우선, 다음 방정식을 풀자.

(3.5) $$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} u(n) = 0$$

명백히 방정식 (3.5)의 해는 방정식 (3.4)의 해이다. 만약, $\alpha_1 = 1$이면 방정식 (3.5)은 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$u(n+1) = \lambda_1 u(n)$$

따라서 방정식 (3.5)의 해는 $u(n) = \lambda_1^n$이다.

만약, $\alpha_1 > 1$일 때 $u(n) = \lambda_1^n v(n)$라고 놓으면

$$\begin{aligned}
&(E-\lambda_1)^{\alpha_1}\lambda_1^n v(n) \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{k}(-\lambda_1)^{\alpha_1-k}E^k\lambda_1^n v(n) \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{k}(-\lambda_1)^{\alpha_1-k}\lambda_1^{n+k}E^k v(n) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+n}\sum_{k=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{k}(-1)^{\alpha_1-k}E^k v(n) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+n}(E-I)^{\alpha_1}v(n) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+n}\Delta^{\alpha_1}v(n)
\end{aligned}$$

따라서 만약, $v(n) = 1, n, n^2, \cdots, n^{\alpha_1-1}$이면

$$(E-\lambda_1)^{\alpha_1}\lambda_1^n v(n) = 0$$

결론적으로 방정식 (3.5)에는 α_1개의 해

$$\lambda_1^n, n\lambda_1^n, n^2\lambda_1^n, \cdots, n^{\alpha_1-1}\lambda_1^n$$

들이 존재한다. 캐소라티안을 계산해 보면, 이 해들은 일차독립임을 알 수 있다. 방정식 (3.4)의 각 인수(factor)에 같은 방법을 적용하면, 일차독립인 m개의 해들이 방정식 (3.3)에 존재함을 알 수 있다.

위의 결과들을 종합하면, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

<u>정리 3.7</u> 방정식 (3.3)의 고유근들 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$의 중복도가 각각 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$이라 하면, 방정식 (3.3)에는 다음과 같은 m개의 서로 일차독립인 해들이 존재한다.

$$\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \cdots, n^{\alpha_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n, \cdots, n^{\alpha_2-1}\lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n, n\lambda_k^n, \cdots, n^{\alpha_k-1}\lambda_k^n$$

여기서 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = m$.

(예제) 다음 방정식의 모든 해를 구해 보자.

$$u(n+3) - 7u(n+2) + 16u(n+1) - 12u(n) = 0$$

위의 방정식에 대한 고유방정식은

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

또는

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

정리 3.7에 의하면, 위의 차분방정식에 대한 3개의 해는

$$u_1(n) = 2^n,\ u_2(n) = n2^n, u_3(n) = 3^n$$

이며 캐소라티안을 구하면

$$w(n) = \det\begin{pmatrix} 2^n & n2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & (n+1)2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & (n+2)2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= 3^n 2^{2n} \det\begin{pmatrix} 1 & n & 1 \\ 2 & 2(n+1) & 3 \\ 4 & 4(n+2) & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 3^n 2^{2n+1} \neq 0$$

이므로 일차독립이다.

따라서 앞의 차분방정식의 해의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$u(n) = C_1 2^n + C_2 n2^n + C_3 3^n$$

(참고) 만약 고유근들 중에 복소수 $\lambda = a \pm ib$가 존재한다고 할때, λ를 극형식으로 고치면

$$\lambda = re^{\pm i\theta} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$$

여기서 $a^2 + b^2 = r^2$이고, $\tan\theta = \frac{b}{a}$. 그러면

$$\lambda^n = r^n e^{\pm ni\theta} = r^n(\cos n\theta \pm i\sin n\theta)$$

해들의 일차결합도 역시 해가 되므로, $r^n \cos n\theta$과 $r^n \sin n\theta$는 해가 되면서 일차독립이다. 그리고 나머지 복소수의 고유근에도 같은 방법을 적용하여 실수들로 이루어진 일차독립인 해들의 집합을 얻을 수 있다.

(예제) 다음 방정식에서 실수들로만 이루어지면서 일차독립인 해들을 구해 보자.

$$u(n+2) - 2u(n+1) + 4u(n) = 0$$

위의 방정식의 고유방정식은

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

따라서 고유근은 $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}i$이다. λ를 극형식로 고치면,

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \quad \theta = \tan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

따라서 실수들로만 이루어지면서 일차독립인 2개의 해는

$$u_1(n) = 2^n \cos\frac{n\pi}{3}, \quad u_2(n) = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} w(n) &= \det\begin{pmatrix} 2^n \cos\frac{n\pi}{3} & 2^n \sin\frac{n\pi}{3} \\ \cos\frac{(n+1)\pi}{3} & \sin\frac{(n+1)\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot 4^n \left[\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{(n+1)\pi}{3} - \sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\right] \\ &= 2\cdot 4^n \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3} - \frac{n\pi}{3}\right) = 4^n \cdot \sqrt{3} \neq 0 \end{aligned}$$

따라서 위의 방정식의 해들의 일반적인 형태는

$$u(n) = C_1 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$$

3.6 상수계수를 가진 일반 방정식

$$y(n+m) + p_{m-1}y(n+m-1) + \cdots + p_0 y(n) = r(n) \tag{3.6}$$

만약, $r(n)$가 어떠한 상수계수를 갖는 동차방정식의 해이면, 위의 방정식의 해는 영화법(annihilator method)에 의해 구할 수 있다.

<u>정리</u> **3.8** $y(n)$가 방정식 (3.6) 즉

$$(E^m + p_{m-1}E^{m-1} + \cdots + p_0)y(n) = r(n)$$

의 해이고, $r(n)$는

$$(E^k + q_{k-1}E^{k-1} + \cdots + q_0)r(n) = 0$$

을 만족한다고 가정하자. 그 때 $y(n)$은

$$(E^m + p_{m-1}E^{m-1} + \cdots + p_0)(E^k + q_{k-1}E^{k-1} + \cdots + q_0)y(n) = 0$$

을 만족한다.

증명 : 방정식의 양변에 연산자 $(E^k + q_{k-1}E^{k-1} + \cdots + q_0)$을 적용하면 간단히 된다.

(예제) 다음 차분방정식의 해를 영화법에 의해 구해 보자.

$$y_{(n+2)} - 7y_{(n+1)} + 6y_{(n)} = n$$

먼저, 처음 방정식을 추이 연산자 E를 사용하여 표현하면

$$(E^2 - 7E + 6)y(n) = n$$

또는

$$(E-1)(E-6)y(n) = n$$

지금 n은 동차방정식

$$(E-1)^2 \cdot n = \Delta^2 n = 0$$

을 만족하므로

정리 3.7에 의하면

$$(E-1)^3(E-6)y(n) = 0$$

위의 동차방정식의 고유근은 $6^n, 1, n, n^2$ 이다.

따라서 해는

$$y(n) = C_1 6^n + C_2 + C_3 n + C_4 n^2$$

다음, 계수를 정하기 위하여 처음 방정식에 $y(n)$을 대입하고 계수를 비교하면

$$C_1 6^{n+2} + C_2 + C_3(n+2)C_4(n+2)^2 - 7[C_1 6^{n+1} + C_2 + C_3(n+1)+$$
$$C_4(n+1)^2] + 6[C_1 6^n + C_2 + C_3 n + C_4 n^2] = n$$
$$[36C_1 - 42C_1 + 6C_1]6^n + [C_2 - 7C_2 + 6C_2] + [2C_3 + 4C_4 - 7C_3 - 7C_4]$$
$$+ [C_3 + 4C_4 - 7C_3 - 14C_3 + 6C_3]n + [C_4 - 7C_4 + 6C_4]n^2 = n$$

$$-10C_4 = 1$$
$$-5C_3 - 3C_4 = 0$$

그러므로 $C_4 = -\frac{1}{10},\quad C_3 = \frac{3}{50}$

따라서 예제의 해는

$$y(n) = C_1 6^n + C_2 + \frac{3}{50}n - \frac{1}{10}n^2$$

여기서 C_1, C_2는 상수.

(예제) 피보나치(Fibonacci)수열

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

의 일반항 a_n을 구하자. a_n은 다음 차분방정식을 만족한다.

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

위의 방정식의 고유방정식은

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

따라서 고유근들은

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그러므로, 일반적인 해의 형태는

$$a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$a_1 = 1$과 $a_2 = 1$로부터, 다음의 연립방정식을 만들어 풀면

$$C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$를 얻는다. 따라서 구하는 a_n은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

제 3 장 결 론

선형차분방정식에서 계수가 상수가 아닌 경우에도 일반적으로 해를 구하는 방법이 있지만, 그 해법은 감마함수 및 함수의 멱급수 전개를 이용해야 하므로 고등학교 수학교실에서는 그러한 방정식의 해결은 매우 어렵다고 생각된다. 따라서 이번 연구는 부정합과 일계 선형차분방정식, 이계 선형차분방정식 중, 계수가 상수인 선형차분방정식의 해법 연구에 제한했다.

고등학교 수학교실에서 부정합을 도입하는데 어려움이 없으며, 도입되면

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \qquad (a \neq 1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cdot a^k \qquad (a \neq 1)$$

의 값을 종전의 수학 교과서와 참고서에서의 방법이 아닌 새로운 방법으로 처리할 수 있다.

계수가 변수인 일계 선형비동차차분방정식

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n) \qquad (p(n) \neq 0)$$

의 해

$$y(n) = u(n)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r(k)}{Eu(k)} + C\right] \quad (C\text{는 상수})$$

은 계수가 변수인 일계 선형동차방정식

$$u(n+1) - p(n)u(n) = 0 \qquad (p(n) \neq 0)$$

의 해

$$u(n) = u(1)\prod_{k=1}^{n-1} p(k)$$

에서 유도한다. 일반적으로 계수가 변수인 m계 선형차분방정식

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(n)y(n+k) = r(n) \qquad (p_0(n) \neq 0, p_m(n) \neq 0)$$

에서 해 $y(n)$을 구하는 일은 교과서 수준을 넘지만 특수한 경우 고등학교 수학교실에 도입할 수도 있다.

위의 방정식의 일반적인 해는 매개변수변분법을 이용하여 다음과 같은 형태임을 유도했다. $\{\{u_1(n)\},\{u_2(n)\},\cdots,\{u_m(n)\}\}$을 방정식

$$p_m(n)y(n+m)+\cdots+p_0(n)y(n)=0$$

의 해들의 집합으로서 일차독립이라 하면, 방정식

$$p_m(n)y(n+m)+\cdots+p_0(n)y(n)=r(n)$$

의 해는 다음과 같다.

$$y(n)=a_1(n)u_1(n)+a_2(n)u_2(n)+\cdots+a_m(n)u_m(n)$$

여기서 $a_1(n),a_2(n),\cdots,a_m(n)$들은 다음 행렬방정식을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1) & u_2(n+1) & \cdots & u_m(n+1) \\ u_1(n+2) & u_2(n+2) & \cdots & u_m(n+2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1(n+m) & u_2(n+m) & \cdots & u_m(n+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a_1(n) \\ \Delta a_2(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta a_m(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{r(n)}{p_m(n)} \end{pmatrix}$$

또한 계수가 상수인 선형동차방정식

$$\sum_{k=0}^{m} p_k y(n+k)=0 \qquad (p_m\neq 0, p_0\neq 0)$$

에서 해 $y(n)$은 고유방정식의 해를 이용하여 그 해를 구할 수 있다.

본 연구의 결과를 이용하면 고등학교 수학교실에서 귀납적으로 정의된 수열의 일반항은 물론 그 이외에 일반적으로 정의된 수열의 일반항을 학생들이 쉽게 구할 수 있게 된다.

참 고 문 헌

1. Walter Kelly & Allam Petercon, Difference Equation ; An introduction with Application, Academic press, 1991.

2. Carl Bander & Steven Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGrow-Hill Book Company, 1978.

3. 박을용 외 6인 감수, 수학대사전, 한국사전연구원, 1989.

4. 박두일, 신동선, 수학 I의 교과서, 교학사 1992. 외 3종

5. 홍성대, 수학 I의 정석, 성지사, 1991.

6. 최현준, 해법수학, 천재교육사, 1991.

7. 박상덕, 최신학력수학, 중앙입시문제연구소, 1992.

< Abstract >

A Study on Finite Difference Equations in the Level of High-school Mathematics

Kim, Jong-Seog

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by professor Ko, Bong-Soo. Ph.D.

In the thesis, we consider the method to solve finite linear homogeneous difference equation with constant coefficients by using the solutions of characteristic equations, which is useful to finding the general term of sequences which are defined by mathematical induction. We also study the method to solve equations even when they are nonhomogeneous through transforming them into homogeneous equations by using the annihilator method.

Even though the level in solving linear difference equation with variable coefficients is much higher to high-school students we introduce the method of variation of parameters by which the equations can be solved.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1994.

감사의 글

살아가는 데 족적이 될 수 있는 이 한 편의 논문을 완성하기까지에는 많은 분들의 도움이 있었습니다. 지도 교수로 강의와 논문 지도를 맡아 산파역을 아무 불평 없이 해 주신 고봉수 교수님은 물론 강의에 열정을 쏟아주신 수학교육과 및 수학과 교수님들 그리고 전에 진학하려던 기회를 놔 버리고 망서리고 있던 저에게 용기를 불러 일으켜 주신 제주제일고 재직 때의 김운기 교장선생님을 비롯하여 거기에 더욱 자신감을 갖게 해 주신 수학교육과의 김도현, 양성호 교수님과 영어 교육과의 고태홍 현 사범대학장님 그리고 김종훈 교수님께 깊고 깊은 사의를 표합니다. 아울러 과정을 마치는데 부담없이 시간을 할애해 주시고 격려를 아끼지 않으신 재직 학교 선생님 여러분과 또한 참고 자료 챙기는데 온 정성을 기울여준 내 벗 웅삼 내외분께도 감사의 말씀을 올립니다.

끝으로 같이 시작하여 낙오 없이 전 과정을 마칠 수 있도록 협조해 주신 송임권, 문영봉, 고연순 여러분의 우의에도 감사드립니다.

1994년 8월

김 종 석