碩士學位論文

高等學校에서 Maple 6을 利用한 微·積分의 指導에 관한 硏究

-數學 Ⅰ,Ⅱ 敎科 中心으로-

指導敎授 金 道 鉉

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 秉 卓

2001年 8月

高等學校에서 Maple 6을 利用한 微·積分의 指導에 관한 研究
-數學Ⅰ,Ⅱ 教科 中心으로-

指導教授 金 道 鉉

이 論文을 教育學碩士學位論文으로 提出함.

2001年 4月 日

提出者 金 秉 卓

金秉卓의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

2001年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

< 抄 錄 >

高等學校에서 Maple 6을 利用한 微·積分의 指導에 관한 研究

-數學Ⅰ,Ⅱ 教科 中心으로-

金 秉 卓

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

指導教授 金 道 鉉

본 논문은 컴퓨터 응용 software인 Maple 6의 기능을 이용하여「고등학교 수학Ⅰ과 수학Ⅱ」의 교과과정 중 효율적인 극한과 미적분의 지도를 위해 교수 학습 자료를 최적화하는 데 있다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 첫째, 극한과 미적분에서 여러 가지 계산 공식 및 계산 결과의 확인, 기본개념을 쉽게 이해할 수 있도록 Maple 6을 이용한 구현 과정을 구체적으로 개발하였고 둘째, 교과서에서 제시된 기존의 학습 내용을 근거로 하여 Maple 6의 그래픽 기능을 통하여 시각화함으로써 학습자로 하여금 흥미를 유발하도록 하였으며 셋째, 특히, 수학적 기본개념이 정립된 학생들이 자기 주도적으로 직접 Maple 6을 사용하여 문제들을 해결하고 그 결과를 쉽게 얻는 방법을 제시하여 수학에 대한 흥미도를 높이고, 창의적 사고력을 향상시키려는 의도로 시행된 연구로써, 이 내용을 좀 더 발전시킨다면 교사 스스로 학생들에게 보여줄 자료를 만드는데 도움이 될 것으로 예상된다. 또한 이 연구는 극한과 미적분에서 기본개념의 재습득을 중시하였으므로 학습 지도시 필요한 내용은 추가하여 지도 되어져야 하며, 또한 극한과 미적분에 대한 개념의 습득에 대한 효과 여부는 추후 연구자들에 의하여 검증되어야 한다.

※ 본 논문은 2001년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

< 目 次 >

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

2002 학년도 시행되는 고등학교의 제 7차 교육과정에서 수학 교과는 국민 공통 기본 교과로서 '수학' 과목이 개설되고 일반 선택과목으로 '실용수학', 그리고 심화 선택과목으로 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '미분과 적분', '확률과 통계', '이산수학'이 개설된다. 현재 학교 현장에서는 대부분의 학생들이 어려운 수학공부를 기피하는 실정인데, 이를 개선하기 위해서는 교사의 일방적인 주입식 교수방법에서 탈피하여 새로운 교육방법이 절실히 요구되고 있는 현실이다.

현대 사회가 산업 사회로부터 정보화 시대로 이동함에 따라 교육의 방법론도 변해야 되는데 수학 교육에서도 이러한 경향이 나타나고 있다. 근래에 등장한 구성주의적 방법론과 상황적 인지(situated cognition)에 관련된 이론들은 수학 교육에 많은 영향을 주고 있는데, 특히 인터넷의 활용과 관련하여 이 이론들은 이론적 근거로써 제시되고 있다. 구성주의의 이론은 교사가 학생들에게 일방적으로 지식을 전달하는 방식을 탈피하여, 학생 스스로 수준에 맞는 지식을 찾아서 구축해 나가는 것을 강조하고 있다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식을 구성하는 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 결코 가능하지 않다. 즉 내면화된 자주적 활동의 메카니즘(Mechanism)이 바로 반영적 추상화이고 이 반영적 추상화가 지식의 구성에 필수적인 역할을 한다는 점에서 그것을 교수-학습의 원리로 택할 수 있다. 교사는 학생들이 이러한 반영적 추상화를 통하여 개별화 학습을 할 수 있도록 안내자 역할을 하도록 제시하고 있고, 그것은 단순히 수학 문제를 공식에 따라서 해결해 나가는 것이 아니라, 문제 상황에 따라서 교사와 수학적 지식을 교환하고 토론해 봄으로써 학생 스스로 의미 있는 지식을 구현해 나가는 학생 중심의 학습 방법이다.

수학은 추상화와 형식화된 대상을 조작함으로써 패턴을 탐구하는 학문이기 때문에 다른 어떤 과목에 비해 교과의 대상이 학생의 인지 수준과 맞지 않을 가능성이 많다. 결국 자신의 눈으로 사물을 바라보는 노력과 함께 주변에서 이를 뒷받침해 주는 조력이 절대적으로 필요하다. 컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학적 대상을 구체적인 표현형태로 제시할 수 있을 뿐만 아니라 그 대상의 조작이 학생

들의 통제 내에서 일어날 수 있다는 점에서 열린 교육의 중요한 도구로 등장할 수 있다. 또한, 적절한 소프트웨어를 사용하면 구체적인 조작활동을 수학적언어로 나타내게 함으로써 자신의 수학적·인지적 활동을 반성할 수 있을 뿐만 아니라 학습 구성원들 사이의 수학적 의사소통을 강화할 수 있다.

수학 교과는 개념이나 원리가 중요시되고, 내용의 연계성이 강하여 학습이 진행될수록 학생들간의 개인차가 심한 것이 현실이다. 현 시점에서 수학 교육이 전통적인 수업 방법으로 진행된다고 볼 때, 교육의 효율성을 기대하기는 힘들다. 이를 극복하기 위한 것이 새로운 매체의 활용이다. 기술의 발달로 등장한 컴퓨터의 신속한 계산 능력, 정확성, 멀티미디어 기능을 이용하여 계산이나 식의 조작에만 매달리지 않고 학생들의 흥미를 유발함과 동시에 개념, 원리의 학습에 효과를 기대할 수 있다. 또한 가상 공간에서의 실험을 가능하게 함으로써 수학을 학습하는데 있어 사고력과 창의력을 제고할 수 있다. 이런 방법을 모색하기 위하여 1990년대 후반에 이르러 각급 학교의 교실마다 컴퓨터, 대형 모니터를 설치하고 네트워크를 구축하여 학생들에게 좀더 양질의 교육을 할 수 있도록 배려하고 있다. 그러나 수학 교과에서 활용할 수 있는 뉴 미디어에 대한 자료나 교육과정에 맞는 소프트웨어가 아직까지는 충분하지 않은 상황이므로 자료의 개발은 필수적이다. 이에 현행 수학 교육에서 일반적으로 사용하고 있는 언어는 아니지만, 그래픽 기능과 수치 계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등의 다양한 환경을 제공하고 있고 사용이 편리하여 수학 교육용 언어로서 손색이 없다고 생각되는 Maple 6을 이용한 수학 교과의 자료 개발과 지도 방법을 연구하여 적용함으로써, 모든 학생들에게 수학교과에 흥미를 갖고 수학적인 지식을 향상시킬 수 있다는 데에 착안점을 두고 연구를 추진하게 되었다.

2. 연구의 목적

수학이라는 교과의 성격을 살펴볼 때, 컴퓨터만큼 수학 학습 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육 매체도 드물다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인

경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적, 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

지금까지의 수학의 교수 방법은 교사가 판서를 해 가며 설명을 하고 있는데, 이런 방법으로는 계산을 한다든가 또는 그래프를 그리는데 시간을 많이 보내게 되어 많은 예를 보여주기 어렵고 그 과정에서 학생들이 지루함을 느끼고 있다. 컴퓨터를 이용한다면 이미 익숙해져 있는 계산 과정을 반복함으로써 나타나는 지루함을 예방할 수 있고, 특히 복잡한 계산 결과와 여러 가지 기본 개념 및 공식들을 바로 확인시킬 수 있다. 또한 여러 함수의 성질을 이해하는 데 있어서 컴퓨터에서는 주어진 식을 변화시키면 바로 그래프가 그려지기 때문에 한정된 시간에 보다 많은 예를 보여줄 수 있다. 이렇게 시각화하여 제시함으로써 학생들이 내용을 이해하는데 용이하고 여기에 자신이 생긴 학생들은 직접 프로그래밍하고 이를 실행시킴으로써 문제 해결력 및 사고력 향상에 도움을 줄 수가 있을 것이다.

본 논문에서는 다목적 소프트웨어(software)인 Maple 6의 기능들을 이용하여 극한과 미적분의 기본 개념을 재확인시키며, 또한 그래픽기능과 animation기능을 이용하여 다양한 함수의 그래프를 시각화하여 제시함으로써 학습자가 스스로 개념과 성질을 이해하도록 하고 함수의 극한과 미적분에 대한 문제 해결을 Maple 6 에서 구현하는 방법을 제시함으로써 더 좋은 자료가 개발되는데 도움이 되고자 한다.

본 자료는 특히 학교 현장 학습에서 수학 학습에 흥미를 잃은 학생들에게 새로운 학습환경을 제공하여 기초학력 향상은 물론 학습자에게 흥미를 유발시켜 학습 효과를 높일 수 있고 기본적인 개념이 정립된 학생들에게는 자기 스스로 심화 반복 학습을 통해 학습 시간의 단축, 능동적인 학습 태도를 길러 주는데 그 목적이 있다.

3. 연구의 제한점

본 논문의 연구결과를 실제 고등학교 수학교육현장에 적용함에 있어서 몇 가지 제한점이 있다고 판단된다.

첫째, Maple 6에서의 수식이나 연산기호 표현이 현행 고등학교 수학 교과서에서 사용되는 표현과 거의 비슷하나 다른 점도 있어 학생들에게 혼란을 줄 수 있고 식을 보기 좋게 정리하기가 어렵다.

둘째, Maple 6에서 컴퓨터 모니터를 통해 재현되는 그래픽이 정확하기는 하나 좌표의 표시, 좌표축의 설정 등이 실제적이지 못하다.

셋째, 교실에서 컴퓨터를 이용하여 일방적으로 수업할 경우, 교실에서 학생들이 얻은 학습경험이 획일화될 가능성이 있으며 교실내의 컴퓨터의 존재는 교사와 학생간의 관계를 약화 시킬 뿐만 아니라, 학생들과의 접촉에서 생기는 '내적기쁨' 을 빼앗아 갈 수 있으므로 유효적절하게 Maple 6을 활용하여야 한다는 것이다.

넷째, 교사들이 Maple 6과 같은 이미 만들어진 소프트웨어에 지나치게 의존하게 되어, 교사들을 타인의 교수계획, 절차, 평가체제의 '고립된 실행자' 로 만들어 버릴 수 있다는 것이다.

다섯째, 본 연구는 연구자의 논문 작성 시기와 학교내의 학년 및 교과배정 관계로 실제로 Maple 6을 활용한 수업을 실시하지 못하여 교육효과에 대한 결과를 검증하지 못한 아쉬움이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 교육과 컴퓨터

21C를 맞은 우리는 최첨단 컴퓨터와 정보화의 시대를 걷고 있다. 1980년대 이래 컴퓨터는 하드웨어 기능이 비약적으로 향상되고, 가격이 대폭 낮아진데다 양질의 각종 소프트웨어가 보급됨으로써 사회의 거의 모든 분야에서 널리 사용되고 있다. 지금은 한 가정에 한 PC를 가지고 있으며 컴퓨터의 존재는 정보의 획득, 조직, 활용에 필요할 뿐만 아니라 컴퓨터를

이용하지 못하면 현대 사회에 적응할 수 없을 정도로 우리 사회에 깊이 관여하고 있다. 따라서 교육분야에서도 그 어느 때보다 컴퓨터의 활용을 강조하고 있다.

1) 컴퓨터 기능과 수학 교육

컴퓨터는 이제 더 이상 연구자나 학자 또는 과학자의 전유물이 아니라, 모든 사람이 손쉽게 다루고 적극적으로 활용해야 되는 일상적인 도구이다. 이런 변화는 학교 교육 과정에 컴퓨터가 가장 중요한 매체로 떠오르게 된 이유이다. 그러나 현재까지도 우리나라 고등학교 수학 교육에서 교사들은 컴퓨터를 거의 활용하지 않고 있을 뿐 아니라 컴퓨터에 대해 별다른 관심도 보이지 않고 있다. 그 이유는 지금까지 우리 나라에서 개발되어 온 교수 학습용 소프트웨어들이 전통적인 지필 환경보다 더 나은 환경을 제공해 주지 못했기 때문이다. 그러나 역으로 양질의 소프트웨어가 개발되지 못하는 이유는 개발에 대한 기술이 부족해서라기 보다는 수학 교육계에 종사하는 모든 사람들이 수학 교육에서의 컴퓨터의 활용에 대한 관심이 부족한 때문이다.

컴퓨터는 그래픽, 애니메이션, 시뮬레이션, 계산의 신속성, 정보 기억 용량, 디버깅 등 다른 어떤 교육 매체가 갖지 못하는 독특한 교수 학습 환경을 제공한다. 그래픽과 애니메이션은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있게 할 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 크게 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계로 그래픽이나 애니메이션을 통한 직관적이 지도는 대단히 효과적이다.

시뮬레이션은 시간 공간적인 이유 등으로 실제 조작할 수 없는 경우, 실제와 유사한 상황을 제시함으로써 학생들로 하여금 직접적인 참여자로서의 역할을 수행하도록 하는 것을 의미한다. 시뮬레이션 기능은 수학의 연역적인 성질을 경험적이고 귀납적으로 바꾸어 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다는 점에서 수학 교육에서 중요한 위치를 차지한다. 또 산술적인 계산뿐 아니라 대수적 문자식의 변환도 신속히 처리될 수 있게 됨으로써 종래의 계산 기능 위주에서 문제 해결과 같은 사고력

중심의 교육과정으로 옮겨갈 수 있게 해 준다. 뿐만 아니라 컴퓨터 프로그래밍을 작성하는 데 있어서 오류 수정의 기회를 통해 사고력 향상을 위한 기회로 사용할 수 있다. 오류는 예상하지 못한 엉뚱한 곳에서 일어나기 때문에 학생들의 흥미를 끌 수 있으며 오류를 제거하기 위하여 반드시 무엇을 할 수밖에 없으므로 자신의 행동에 대한 새로운 통찰을 이끌 수 있다.

1980년대이래 컴퓨터의 기억용량, 속도, 가격, 사용의 편의성, 유연성, 표상 능력 등은 눈에 띌 만큼 발달해 왔다. 시각적인 인터페이스와 계산 능력, 데이터 기억 능력이 획기적으로 향상되고 있으며, 소프트웨어 측면에서 학교 수학을 획기적으로 변화시킬 만한 특별한 컴퓨터 언어와 강력한 힘을 지닌 도구가 개발되고 있다.

1970년대 들어와 개발된 logo언어는 초등학교부터 고등학교에 이르기까지 많은 개념을 학생들 스스로 구성하도록 하는데 도움을 줄 수 있다. 또한 「Maple」,「mathematica」와 같은 소프트웨어는 학생들로 하여금 수학적 이론을 탐구하고 구성하는 데 도움을 줄 수 있다. 하이퍼텍스트 체제는 상황을 그림, 방정식, 표, 그래프와 같은 형태로 동시에 나타냄으로써 다양한 표상 사이의 개념적 연결성을 파악할 수 있고, 다른 표상에서의 변화가 또 다른 표상에 어떻게 영향을 미치는지를 용이하게 탐구할 수 있다. 즉, 수학을 행하는 데 있어서 탐구적이고 예제 지향적인 접근법이 수학 교육에 이용될 수 있다. 또 논증에서 연역적인 분석이 가능한 인공지능 소프트웨어가 개발되어 논증을 단순히 한 단계 한 단계 이해하는 차원이 아니라 학생들로 하여금 실제 연역적인 활동을 하고 이를 컴퓨터가 점검하는 환경이 구축되고 있다.

2) 컴퓨터 활용의 실제

대수와 함수 - 대수와 함수 영역에서 컴퓨터를 이용하면, 첫째, 대수적 변환 및 조작 능력에 소비하는 시간의 상당 부분을 응용 중심으로 옮길 수 있다. 둘째, 지도 계열을 개선함으로써 학습 전체에 대한 태도를 개선할 수 있다. 기능이나 개념을 먼저 지도한 후 응용문제를 접하는 것이 아니라, 응용문제를 먼저 소개함으로써 학습 내용의 의미를 알게 할 수 있

다. 셋째, 역동적인 그래프로 양적인 관계를 산출해 내는 컴퓨터의 기능은 대수 학습을 의미 있게 해준다. 가령, 곡선의 절편, 점근선, 기울기, 오목한 상태 등을 역동적으로 관찰할 수 있으므로 종래의 지필 방법으로는 힘들었던 함수에 대한 직관력을 기를 수 있다.

기하 - 기하 영역에서 컴퓨터를 이용하면, 첫째, 기하 개념을 지도하는데 있어서 개념적 이해나 추론을 하기 전에 구조들 사이의 관계를 직관적으로 파악시킬 수 있다. 도형과 도형의 변환과 관련된 학습 내용을 전체적인 시각을 통해 파악하고 도형을 마음대로 조작할 수 있게 되어 학생들의 시각적 직관력을 키우는 데 도움이 된다. 둘째, 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다. 현재 기하 교육은 공리나 정의로부터 주어진 기하학적 정의를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있다. 컴퓨터의 그래픽 기능과 계산 처리 능력은 학생들 스스로 수치를 결정하고 도표를 완성해 가며 도형 관계를 탐구하고 추정하는 실험 기회를 제공해 수학이 역동적인 과목임을 느끼게 해준다. 셋째, 논리적 사고력을 향상시킬 수 있다. 넷째, 로고프로그래밍 언어를 통해 종래와는 다른 기하교육환경을 제공할 수 있다. 학생들로 하여금 거북그래픽을 이용하여 초등학교 저학년에서부터 도형을 그리는 훈련을 함으로써, 기하학의 중요원리를 조기에 도입할 수 있을 뿐 아니라 문제해결력이나 초인지(metacognition)와 같은 중요한 수학적 능력을 향상시킬 수 있다. 다섯째, 변환기하를 쉽게 도입할 수 있다. 학교기하에서 변환기하를 도입하기 어려운 것은 도형의 '움직임'을 구현하는 도구가 없었기 때문이다. 컴퓨터 그래픽 소프트웨어를 사용하면, 변환기하의 중심 아이디어(회전, 대칭이동, 평행이동, 닮은변환)를 시각적으로 분명히 이해시킬 수 있다. 여섯째, 컴퓨터의 계산능력 때문에 전에는 가능하지 않았던 내용이 쉽게 도입될 수 있다, 예를 들어 주어진 둘레나 주어진 n에 대하여 가장 큰 면적의 다각형을 구하는 문제나, 복잡한 계산이 요구되는 헤론의 공식을 통한 삼각형의 넓이 계산 등이 도입될 수 있다. 일곱째, 기하나 여러 다른 과목(대수, 물리, 화학, 확률 등)의 아이디어를 통합시킬 수 있다. 예를 들어 변환기하가 도입되고, 행렬의 곱을 쉽게 계산할 수 있게 됨에 따라 행렬의 함수적 의미를 쉽게 이해시킬 수 있다. 또한 시뮬레이션 소프트웨어를 이용해 도형의 넓이와 경험적 확률 사이의

관계를 탐구할 수 있다.

통계 및 확률 - 전통적으로 확률문제에 쓰이는 산술적인 풀이방법은 다루기 힘든 조합적 분석에 기초하고 있다. 산술적인 풀이법은 계산적 측면 이면에 존재하는 확률적 개념을 명백히 보여주지 못하는 경우가 많다. 또한 전통적인 통계학습은 탐구 조작을 통한 교육이 이루어지지 못해 학생들에게 의미없고 흥미없는 과목이 되고 있다. 통계 및 확률 분야에 컴퓨터를 활용하면, 첫째, 컴퓨터 시뮬레이션 프로그램을 이용해 학생들에게 경험적인 확률을 도입할 수 있다. 이 방법은 확률개념에 대한 동기 유발을 도울 뿐 아니라 조작 활동을 통해 확률 개념을 더욱 역동적으로 다룰 수 있게 해준다. 둘째, 통계 수업에서 계산에 대한 부담이 없어지고, 자료처리에 대한 기능이 보여됨으로써 일상생활에서 볼 수 있는 생생한 자료를 사용하여 통계가 학생들에게 의미있는 과목이 될 수 있다. 셋째, 통계 패키지를 사용하면 여러 가지 자료를 시각적으로 보여줄 수 있으므로 탐구조작 측면에 초점을 맞추어 통계교육을 시킬 수 있게 된다.

미적분 - 현재 미적분 교육은 개념의 이해보다는 주어진 함수의 미분과 적분값을 구하는 기능 위주에 초점을 주고 있다고 해도 지나친 말이 아니다. 이는 학생들의 인지 수준에 비추어 엄밀한 지도법을 택할 수 없으며, 미적분 개념에 들어 있는 극한 및 무한 개념을 지필 환경으로 설명하기가 곤란하다는데 문제가 발생한다. 첫째, 컴퓨터의 시각적인 기능을 이용하면, 미분계수와 정적분 등의 개념을 좀더 직관적으로 이해시킬 수 있다. 특히 줌기능이나 그래프 변환기능을 이용하면 학생들에게 이해시키기 어려운 미분계수나 정적분의 기본 정리와 같은 개념을 이해시킬 수 있다. 둘째, 그래프를 마음대로 그리고 미적분과 관련된 모든 계산을 수행할 수 있게 됨으로써 종래의 계산 및 기능 위주의 교육에서 벗어나 역동적인 그래프 조작을 통한 실험 탐구적인 환경에 초점을 둘 수 있다.

이산수학 - 컴퓨터 공학은 수학의 새로운 창조에 결정적으로 영향을 미치고 있다. 또한 컴퓨터의 출현으로 수학의 응용 범위가 엄청나게 확대되고 있다. 특히 컴퓨터에 의한 사색(four-color)문제의 증명은 발견과 함께

받아들일 수 있는 수학적 증명의 성격에 대한 광범위한 논의를 불러일으켰다. 컴퓨터에 의한 증명은 주어진 가설을 사용하여 결론을 이끌어내는 연역적 증명이 아니다. 컴퓨터의 강력한 계산기능을 바탕으로 있을 수 있는 모든 가능성을 다 나열한 후, 어떤 규칙을 찾거나 하나 하나 점검한 후 어떤 결론을 내리게 된다. 컴퓨터는 유한적이고, 이산적이며, 따라서 이산수학은 컴퓨터를 사용하여 문제를 푸는 데 필수적이다. 이산수학은 모든 학생에게 재미있는 소재가 될 수 있다. 유한 그래프와 행렬 표현, 수열과 급수, 피보나치 수열, 복리계산, 알고리즘, 프랙탈 등이 학교교육에서 강조될 필요가 있다.

컴퓨터 프로그래밍 - 컴퓨터 프로그래밍을 수학교육에 도입하는 것은 두 가지로 생각할 수 있다. 첫째, 오류수정 활동을 통해 수학적 사고력을 향상시키고자 하는 움직임을 생각할 수 있다. 컴퓨터 문화에서는 지식의 절대성이 부정된다. 절대로 완벽한 지식이나 절대로 틀린 지식은 존재하지 않는다. 오류 수정은 여러 가지 어려움을 하나하나 처리해 감으로써, 상대적으로 개선된 프로그램을 만들어감을 의미한다. 자신의 입장에서 프로그래밍의 오류(bug)를 수정해 감으로써 사고력을 배양시킬 수 있다. 둘째, 새로운 교과내용으로서의 프로그래밍 기능을 생각할 수 있다. 주어진 문제를 지필로 풀게 하듯이 컴퓨터 프로그래밍을 이용해 문제를 풀 수 있는 능력을 갖추게 하는 것은 장차 도래하게 될 새로운 컴퓨터 사회에 대비시키는 지름길이다.

3) 컴퓨터로 할 수 있는 것은 무엇인가?

교실에서 사용하는 프로그램된 여러 가지 컴퓨터 소프트웨어의 가능성은 무한하다. 중학교 학생들은 소수 또는 최대 공약수 계산, 주어진 날짜가 어느 주 무슨 요일에 해당하는가를 계산하는 등의 프로그램을 만들 수 있다. 산업 수학을 배우는 학생들에게는 일차식의 프로그램이나 다른 여러 가지 문제들을 풀기 위한 프로그램 뿐만 아니라, 투자, 저당, 감가 상각비, 대부금, 세금, 수표금액 등에 관한 어떠한 문제라도 사실상 답하는 프로그

램이 있다. 대수를 배우는 학생은 연립방정식을 풀고 행렬 연산과 복소수 계산을 수행하기 위한 프로그램뿐만 아니라 상당히 다양한 축척과 변환 개념을 가진 곡선을 그리고, 직선과 곡선의 삽입, 근 구하기 등의 프로그램에서 매혹적인 도구를 발견할 것이다. 해석학을 배우는 학생들은 극한, 도함수, 그리고 적분 등을 계산하기 위한 프로그램을 쉽게 이용할 수 있다. 정교한 시뮬레이션을 하는 것 뿐만 아니라 순열과 조합을 계산하기 위한 프로그램은 확률을 배우는 학생들이 이용할 수 있다. 통계를 배우는 학생들은 어떤 일반적인 분포에서 주어진 값에 따른 확률을 계산하거나, 여러 가지 훌륭한 통계 조사를 수행, 또는 주어진 자료의 회귀 분석을 완성하는 데에 프로그램을 적용하는 것은 그렇게 문제가 되지 않을 것이다. 무수한 다른 응용들이 의심할 여지없이 매일 같이 만들어 지고 있고, 그 가능성은 끝이 없는 것처럼 보인다.

지금까지 수학교육에서 이용될 수 있는 컴퓨터의 기능이 무엇인지를 알아보고 수학교육에 컴퓨터가 어떻게 영향을 미칠 수 있는지를 정리해 보았다.

수학교육과정에서 컴퓨터의 영향을 반영하는 문제는 신중하고 장기적인 검토와 연구가 선행될 필요가 있다.

첫째, 학생들의 내재적 동기 유발을 향상시킬 수 있고 학생들의 탐구력을 향상시킬 수 있으며, 시각적인 직관력을 향상시킬 수 있는 다양한 소프트웨어의 개발로 방향을 전환하여야 한다. 물론 열린 수학교육 측면에서 교과내용을 바탕으로 이루어져야 한다.

둘째, 수학교육에서의 컴퓨터의 활용에 대한 기초연구가 활발히 이루어져야 한다. 특히 특정 내용의 추가와 삭제, 학습계열이나 교육내용의 학년별 할당 등에 대한 연구가 시급히 이루어져야 한다.

셋째, 다양한 코스웨어의 개발이 이루어져야 한다. 단순히 교과서 내용을 재설명 해주는 개인학습식 CAI프로그램뿐 아니라, 종이 매체로서의 교과서가 담지 못하는 내용이 포함되는 교육용 유틸리티 프로그램이나 사고력 신장을 위한 프로그램 등이 다양하게 개발되어야 한다.

넷째, 더욱 풍족한 컴퓨터 교육환경이 구축되어야 함은 물론 학생들이 마음껏 활용할 수 있는 운용체제가 도입되어야 한다.

다음은 요즘 수학 교육에서 강조하고 있는 수학적 시각화에 대하여 알아 보겠다.

4) 수학적 시각화

그 동안 시각화는 수학 교육에서 소홀히 다루어져 왔다. 그 이유는 적절한 시각화의 수단이 없었음을 들 수 있다. 지필이나 구체물은 학생들로 하여금 다양한 장면에서 역동적으로 활동할 기회를 제공하기 힘들다. 컴퓨터의 출현은 이러한 방법론상의 한계를 없앨 수 있게 해준다. 수학적 시각화에서 우리가 흥미를 가지는 것은 설명을 위한 보조적인 위치로서의 시각화가 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 도형을 그릴 수 있는 학생들의 능력이다. 수학적 시각화는 발견과 이해를 위해, 수학적 이미지를 형성하고 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다.

수학적 시각화는 모호한 종류의 직관이나 이해에 대한 표면적인 대응이 아니라, 이해에 깊이와 의미를 주고 문제 해결에 믿음직한 안내자를 제공하며 창조적 발견을 고취시키는, 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이다. 사람들은 보이지 않거나 전혀 보지 않았던 것들을 마음속에 떠올릴 수 있다. 따라서, 시각화는 이미 마음속에 있는 생각들을 응시함으로써 지식을 창출하거나 획득하는 과정이다. 시각화는 단순한 정적인 그림을 통한 이해의 차원을 넘어선다. 정적인 시각화는 교과서에서 나오는 도형과 같이 이해를 위한 보조물에 지나지 않는다. 우리는 학생들에게 증명을 이해시키기 위해 도형을 오른쪽에 두고 설명한다. 그러나 그러한 종류의 시각화는 새로운 기하 문제를 푸는데 거의 도움이 되지 못한다. 예를 들어, 보조선을 주지 않고 문제를 풀라고 하면 많은 경우 실패하는 경험을 한다. 문제는 보조선을 준 상태에서 이해시키는 것이 아니라 보조선을 그어 문제를 풀 수 있는 능력이다. 그림을 통해 탐구하고 그 결과를 정리하는 활동이 그림을 통한 이해만큼이나 강조되어야 한다.

시각화는 수학적 행동의 모든 측면에 걸쳐 도움을 줄 수 있다. 지식의 이해, 적용, 종합, 문제 해결, 심미적 정의적인 측면 등에 결정적인 영향을 준다. 이것을 세분해 보면 다음과 같다.

첫째, 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있다.

둘째, 컴퓨터 그래픽을 사용하면 학생들에게 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있다.

셋째, 보다 발전된 학습이 가능하다. 교과서에 나오는 정적인 시각화 이외에 역동적인 시각화를 사용하면 학생들에게 보다 발전된 학습을 시킬 수 있다.

넷째, 지식의 생성 배경을 이해시킬 수 있음으로써 훨씬 설득력 있는 수업이 가능하다. 컴퓨터의 그래픽 기능을 잘 활용하면 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다.(Schwartz & Yerushalmy, 1985). 현재 기하 교육은 공리나 정의로부터 주어진 기하학적 원리나 정리를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있다. 적절한 정리를 발견하고 형성화하며 가설을 설정하는 능력은 증명하는 능력만큼 중요하다. 도형을 마음대로 조작할 수 있는 컴퓨터의 그래픽 기능은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공한다. 지금까지 수학 교육에서 이러한 탐구 환경이 마련되지 못한 것은 도형을 자유롭고 정확하게 그릴 수 있는 도구가 마련되지 못했기 때문이다.

다섯째, 시각적인 자료는 전체적이며 경우에 따라서는 많은 내용을 한번에 연결된 상태로 담을 수 있고, 따라서 보다 의미 있는 형태로 여러 지식을 한번에 파악하기 쉽다. 낱낱으로 떨어진 지식을 외우기보다는 시각적인 정보 형태로 기억하는 경우 학습 효과를 높일 수 있다.

여섯째, 문제 해결이나 증명에 도움이 된다.

일곱째, 공간 추론 능력을 신장시킬 수 있다. 컴퓨터의 기능을 활용하면 기하 개념을 지도하는데 좀더 직관적인 방법을 택할 수 있으며, 도형과 도형의 변환과 관련된 학습 내용을 전체적인 시각을 통해 파악하도록 하는데 도움이 된다. 도형을 마음대로 조작할 수 있기 때문에 학생들의 시각적 직관력이나 공간 추론 능력을 키우는데 도움이 된다.

여덟째, 만약 학생들에게 동적인 시각화를 제시했다면 수학에 대해 훨씬 좋은 태도를 갖게 될 것이다. 학생들에게 수학이 지루하고 의미 없는 수학식의 학문이라는 느낌 대신 수학의 아름다움을 실감시킬 수 있다. 수학이 지니는 미적인 측면을 느끼게 하는 것은 그 동안 소홀히 다루어진 수학 교육의 중요한 목표 중의 하나이다. 수학의 아름다움은 모델링과 시각화에 있다. 복잡한 사회적・자연적 현상을 우리는 간단한 방정식이나 기하학적 모델로 나타내고 이것을 탐구함으로써 그 현상을 해석하고 예측할 수 있다. 모델링은 시각화와도 깊

은 관련이 있다. 많은 모델링 과정은 시각적으로 표현이 된다. 이 때, 학생들은 눈에 보이지 않는 자연과 사회의 내적 질서를 한눈에 볼 수 있게 되고, 수학이 이러한 질서의 패턴과 규칙을 찾아내는데 도움이 됨을 느끼게 된다.

2. 미적분학의 역사적 배경

미적분학이 현재 다루어지고 있는 것과 같은 형태를 갖추게 된 것은 19C 이후이고, 18C까지만 하여도 논리적인 기초가 확립되지 못하였다. 의심할 바 없이 17세기의 가장 주목할 만한 수학적 업적은 세기말로 접어들면서 뉴턴과 라이프니츠가 만든 미적분학이다. 이 시기에는 곡선에 접선을 긋는 문제가 데카르트, 파스칼, 페르마에 의하여 연구되고, 특히 페르마는 그 결과를 극값을 구하는 문제로 응용하였다. 또한, 수학계의 양상이 갑자기 새로운 국면을 맞이하게 되었는데, 그 특징은 대수학이 차츰 기하학적 요소를 버렸다는 것으로 그 결과 방정식의 일반론이 확립되었으며, 곡선형의 구적 및 접선론, 그리고 데카르트에 의해 창시된 해석기하는 그리스 기하학을 근본적으로 개조하여, 곡선에 대한 여러 문제를 해석적으로 다루게 되었다.

미적분학의 발명으로 창조적인 수학은 고등 수준으로 올라서고, 기초수학의 역사는 본질적으로 마감됐다. 고등학교나 대학 교양수학에서 미분을 먼저 시작하고 다음에 적분을 공부하는 관습적인 순서와는 반대로, 역사적으로는 적분학의 착상이 미분학보다 먼저 발달되었다. 적분학의 착상은 어떤 면적이나 체적, 호의 길이 등을 구하는 것과 관련한 합의 과정에서 처음 떠올랐으며, 그보다 약간 늦게 미분학은 곡선의 접선에 관한 문제와 함수의 최대 최소에 관한 문제로 인하여 창조되었다. 그러고 나서 적분과 미분이 서로 역연산의 관계에 있다는 사실이 밝혀졌다. 미적분학의 발견에 대한 뉴턴-라이프니츠 논쟁은 서로 독립적으로 발전 시켰다는 의견으로 귀결되었다. 미적분학의 발견은 뉴턴이 먼저, 결과의 출시는 라이프니츠가 먼저하였다. 영국의 월리스와 배로는 뉴턴의 미적분학에 영향을 미쳤는데, 미적분학의 발전에 대한 월리스의 주요 공헌이 적분론에 있는 반면에 배

로의 가장 중요한 공헌은 미분론에 관련된 것이다. 뉴턴에 의하여 1671년 오늘날 미분학으로 알려진 <유율법,Method of Fluxions> 이 쓰여졌다. 이 논문에서 뉴턴은 곡선을 점의 연속적인 운동에 의하여 생성되는 자취로 고찰하였다. 이 개념에서 변량(fluent)은 변하는 양, 유율(fluxion)은 변량의 변화 비율, 주유율(pricipal fluxion)은 어떤 변량의 일정한 증가율, 모멘트(moment)는 하나의 변량이 시간이 0인 무한히 작은 구간에서 증가하는 양으로 고찰되었다. 변량으로부터 유율을 구하는 것은 미분이며, 유율로부터 변량을 구하는 것은 적분이다. 뉴턴은 유율법을 수없이 그리고 놀랄 만큼 응용하여 극대와 극소, 곡선의 접선, 곡선의 곡률, 변곡점, 곡선의 요철 등을 결정하고, 그의 이론을 수많은 구적법과 곡선의 길이를 구하는 문제에 적용하였다. 미적분법의 발명에서 뉴턴의 경쟁자였던 라이프니츠는 1673년과 1676년 사이에 미적분학을 고안하였다. 그가 카발리에리의 불가분량의 합을 나타내는 라틴어 summa (합)의 첫 문자를 딴 S를 길게 늘인 문자로서 현대 적분 기호인 ∫를 처음 사용하였다. 미분학에 관한 최초 논문은 1684년이 되어서야 발간되었다. 이 논문에서 그는 dx를 임의의 유한 구간으로 소개하고 나서 dy를 다음과 같은 비에 의하여 정의하였다.

dy : dx = y : 접선영

라이프니츠가 사용한 수학의 용어나 기호는 세련되고 단순하면서도 사물의 본질을 잘 나타내고 있어 쉽게 이해할 수 있으며, 다루는 방법도 간편하다. 현재 사용하고 있는 미적분학의 용어와 기호는 대부분 라이프니츠로부터 이어받은 것이다.

미적분학의 발견은 수학 뿐만 아니라 자연과학의 발전을 위해서 대단한 역할을 하였다. 미적분학은 비단 접선이나 넓이, 부피의 문제를 푸는 열쇠가 되었을 뿐만 아니라, 이 계산과 깊은 관계가 있는 무한급수에 결부되는 기본개념으로 쓰였고, 종전의 ‘유한수학’을 ‘무한수학’으로 탈바꿈 시키는 가장 큰 요인이 된 것이다. 또한 미적분학은 자연과학, 특히 역학의 문제를 연구하는 중요한 발판이 되었고, 물리학과 관계되는 미분방정식이라든지, 변분법등의 새로운 연구분야를 탄생시키게 되었다.

3. Maple 6의 특징

컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종인 Maple 6은 그래픽 기능과 수치계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등의 다양한 환경을 제공하고 있으면서 사용이 편리하므로 수학교육용 언어로서 손색이 없다고 생각한다. 또한, 컴퓨터의 신속하고도 정확한 계산처리 능력을 이용하여 산술적 계산이나 그밖의 데이터 조작을 효율적으로 수행하는 프로그램이다. Maple 6은 수학의 개념 이해와 계산 능력과 관련된 문제 해결 등에 적용될 수 있다. 예를 들어, 삼차원적인 입체도형을 Maple 6을 이용하여 표현 한다면 학생들의 입체적인 사고의 발달에 도움을 줄 수 있고, 특히 Maple 6은 원하는 위치에서 삼차원적인 그래프를 관찰할 수 있으므로 한층 더 효과적으로 학생들의 개념 습득을 도울 수 있다.

수학 교육용 언어로서 Maple 6의 특징들을 살펴본다.

첫째, Maple 6은 바로 수식 그 자체이기 때문에 배우고 사용하기가 쉽다.
Maple 6은 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으므로 표현이 매우 용이하다. 예를 들면, 수학교육에서 많이 다루는 함수의 표현에 있어서 $f(x)=x^3+2$ 과 같이 표현하는데, Maple 6에서도 Display 옵션을 사용하여 $f(x)=x^3+2$ 과 같은 수식 그 자체를 입출력에 사용할 수 있다.

【보기】 > f(x)=x^3+2;

$$f(x)=x^3+2$$

둘째, Maple 6은 정확한 값을 계산하는 훌륭한 계산기이다.
일반적으로 컴퓨터를 통한 수치 연산의 결과는 절단 오차, 마무리 오차 등에 의해 정확한 값을 출력하지 않는다. 그러나 Maple 6은 수학 및 응용 분야에서 이론식을 얻기 위한 시뮬레이션을 시행하고, 고정도(umlimited precision)의 수치계산이 가능하다. 그래서 Maple 6에서는 무리수나 순환소수 등을 연산하더라도 특별한 요구가 없는 한 근사값이 아닌 참값을 출력한다.

【보기】 무리수 $\sqrt{\pi}$ 나 순환소수 $\frac{1}{3}$ 을 Maple 6에서 계산하면 근사값이 아닌

참값 $\sqrt{\pi}$ 나 $\dfrac{1}{3}$ 이 그대로 출력된다. 그러나, Maple 6의 상수는 글로벌 변수 Digit에 의해 지정된 유효숫자를(미리 지정된 값은 10이다.)를 사용하여 부동소수점 수에 근사시킬 수 있다. 또한 내장함수 evalf 명령어를 이용하면 사용자가 원하는 정도의 근사값을 얻을 수 있다.

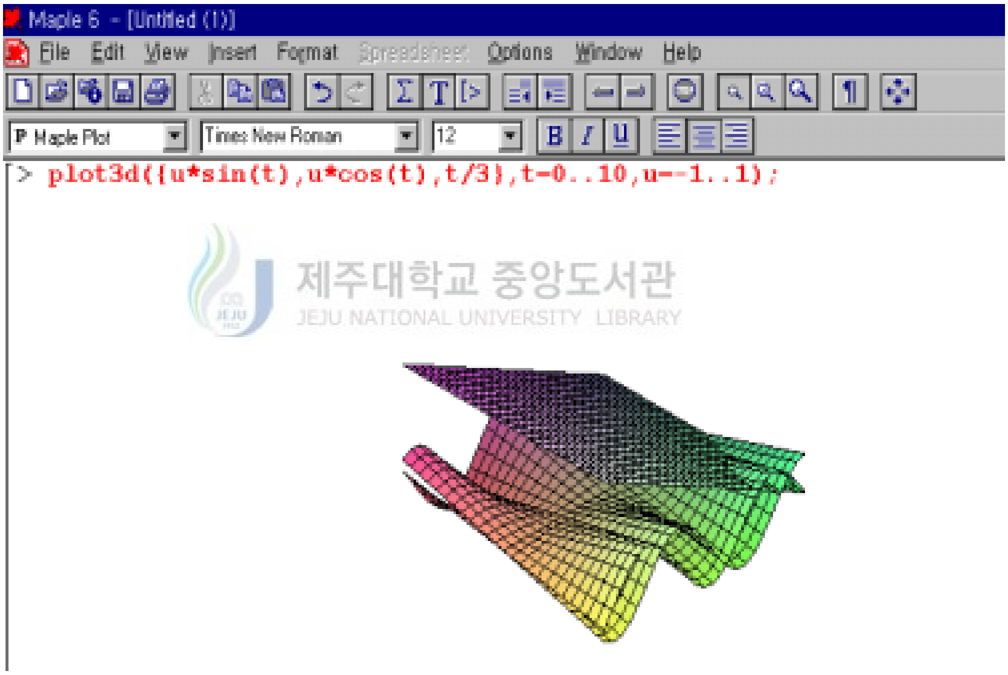
셋째, Maple 6은 기호 연산(symbolic computation)이 가능하다.
일반적으로 컴퓨터를 통한 연산과정에서 가장 큰 문제가 수치들의 계산만이 가능하다는 것이다. 그러나 Maple 6에서는 수식의 전개, 인수분해, 통분, 부분 분수로 분해하기, 약분하기, 주어진 식을 간단히 하기를 수행할 뿐만 아니라 극한, 미분, 적분, 미분방정식, 멱급수, 벡터 해석, 라플라스 변환 등에서도 기호 연산이 가능하다.

넷째, 다양한 그래픽의 기능이 있으며, 애니메이션(animation)구현이 가능하다.
Maple 6은 여러 가지로 주어진 식을 그림으로 나타낼 뿐만 아니라, 그림을 나타내는 형태도 자른다던가 명암을 구별하고, 시점을 이동하는 등의 조작이 쉬워서 복잡한 그림도 매우 정확하게 그려볼 수 있다. Maple 6의 그래픽 기능은 막대그래프나 원그래프 등의 차트(chat)에서 시작하여 2차원이나 3차원 그래프(plot), 등고선그래프, 밀도그래프 등 다양한 그래픽 기능을 갖고 있다. 그 이외에도

Maple 6은 다양한 애니메이션 기능이 있어 움직이는 그래프의 표현을 흥미롭게 만들 수 있다. Maple에서 애니메이션을 plot하기 위해서는 plots패키지 안에 들어 있는 animate와 animate3d명령어를 사용한다. 이러한 애니메이션 기능을 수학적 개념의 설명에도 응용할 수 있다.

【보기】 다음과 같은 매개변수 u와 t에 의해 주어지는 매개방정식의 그래프를

$x = u\sin t$, $y = u\cos t$, $z = \dfrac{t}{3}$, $0 \leqq t \leqq 10$, $-1 \leqq u \leqq 1$ 인 영역에서 그려보면 다음과 같다.



다섯째, Maple 6은 고수준(high-level)의 프로그래밍 언어이다.
Maple 6에서는 수백 개가 넘는 내장 함수(built-functions)가 있다. 이 내장함수들을 이용하면 고수준의 프로그래밍이 가능하다. 일반 프로그래밍 언어(C, FORTRAN, COBOL 등) 와 달리 Maple 6의 큰 장점 중의 하나는 계산하려는 식을 입력하고 바로 계산의 결과를 얻어 볼 수 있으므로, 자신의 생각의 결과를

바로 다음 생각에 연결시킬 수 있다. 그러나 고급 언어와 비교할 때 컴파일러를 사용하여 실행 파일을 따로 만들 수 없다는 단점은 있다.

여섯째, Maple 6은 Notebook의 기능을 갖는다.

Maple 6은 한 화면에 명령어와 계산 결과를 보여주고, 메모가 가능하며, 크기, 색, 서체의 지정도 가능하다. 개체 삽입에 의해 다른 프로그램에서 작업을 한 것을 끼워 넣을 수 있고, 노트북을 파일로 저장하여 필요할 때 다시 쓸 수 있다. 잘 구성하면 강의 내용이 순서대로 하나 또는 여러 file에 저장되고, 다시 실행하면서 한 단계씩 재현해 볼 수 있고, 하이퍼링크의 기능을 사용해서 노트북간의 연결이 가능하다.

일곱째, Maple 6의 구조적 특성에 의하여 학교 수학 교육의 CAI(Computer Aided Instruction) 프로그램 개발에 최적인 도구로 쓸 수 있다. 그래서 수학을 전공하는 연구진에 의하여 거의 매년 프로그램 향상을 위한 새로운 Release를 User에게 제공하고 있다.

여덟째, Maple 6은 Maple 5에서 불가능했던 중요한 추가 기능인 엑셀(Excel)에서 Maple 6을 구현할 수 있다는 것이다.

엑셀(Excel)에서도 Maple 6에서 가능한 다양한 그래픽 기능을 사용할 수 있고 Maple 6을 이용한 선형 회귀분석도 가능하다.

Maple 6은 학생들이 문제와 관련된 원리, 관계 등을 발견하고 문제를 해결하는 능력을 함양하는데 사용되어져야 할 것이다. 학습자는 수학 학습에 Maple 6을 이용함으로써 까다로운 계산 때문에 어려움을 겪지 않게 되므로, 보다 많은 실생활의 문제를 다룰 수 있다. 또한 Maple 6이 제공하는 그래픽 기능은 중요한 시각 기능을 발달시킬 수 있을 뿐만 아니라, 보다 발달된 수학 학습의 방향을 제시할 수 있게 되리라 기대된다. 그리고 여러 가지 특징을 가진 Maple 6 프로그램을 수학 교과 과정에 적용하기 위해 교사는 먼저 학생들에게 Maple 6 프로그램을 소개하고, 이에 대한 학생들의 이해를 도모하고 활용 기술을 함양시켜야 할 것이다.

Ⅲ. 미적분에서 Maple 6의 미·적분하기 및 지도 방안

고등학교 수학Ⅰ,수학Ⅱ의 극한, 미분, 적분 단원에 나오는 함수의 극한값 구하기, 극한의 개념, 함수의 연속성, 미분법, 미분법의 응용, 적분법, 구분구적법, 정적분, 정적분의 활용을 Maple 6을 이용해서 기본 개념뿐 만 아니라 계산과정 및 계산결과와 여러 가지 공식을 체계적으로 쉽게 확인할 수 있다.

1. 함수의 극한과 연속

미·적분은 극한에서부터 출발한다. Maple 6을 이용하여 극한의 개념을 소개하고, 여러 가지 극한을 직접 계산하도록 하고, 함수의 연속에 대한 개념을 이해 시켜 보자.

◎ 주요 명령어

> limit(f(x), x=a);

x 가 a로 접근할 때, f(x) 의 극한값을 구한다.

limit(sin(x)/x, x=0); # $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

limit(exp(x), x=infinity); # $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

limit(1/x, x=0, right); # $\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$

> Limit(f(x), x=a);

식 $\lim_{x \to a} f(x)$ 를 출력해 준다. 이 값을 알기 위해서는 value(%)를 입력한다.

> piecewise(C_1, `$f_1(x)$`, ... , C_n ,`$f_n(x)$`,`$f_n+1(x)$`);

함수 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & C_1 \\ \cdots, & \\ f_n(x), & C_n \\ f_{n+1}(x), & \text{그 외} \end{cases}$ 을 정의한다.

piecewise(x<=0,x,-x); # $\begin{cases} x, & x \le 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$

> subs(x=a, g(x));

식 $g(x)$ 에 x대신 a 를 대입한다.

subs(t=1, 3*t); # t에 1을 대입하여 3을 얻는다.

> seq(f(i), i=a..b);

$i = a$에서 b까지 수열 $f(i)$ 를 구하여 출력한다.

seq(2*i, i=1..3); # 2, 4, 6을 출력한다.

1) 극한의 개념

주어진 함수의 극한을 구하기 위해서는 limit 라는 명령어를 이용한다.
limit(f(x), x=a); 라고 입력하면, x 가 a로 접근할 때, f(x) 의 극한값을 구한다.

【예제1】 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 의 값을 구하여 보자.

먼저 식을 e1이라고 지정하자.

>e1:=(x^3-1)/(x-1);

$$e1 := \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

극한값을 limit 로 구할 수도 있지만, 첫 글자가 대문자인 Limit 라는 명령어를 사용하면 수학식으로 표현된 식이 출력되고, 이 값을 알아보기 위하여 value 라는 명령어를 이용한다.

>Limit(e1,x=1);

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

>value(%);

$$3$$

실제로 주어진 식 e1을 약분하면,

>e2:=normal(e1);

$$e2 := x^2 + x + 1$$

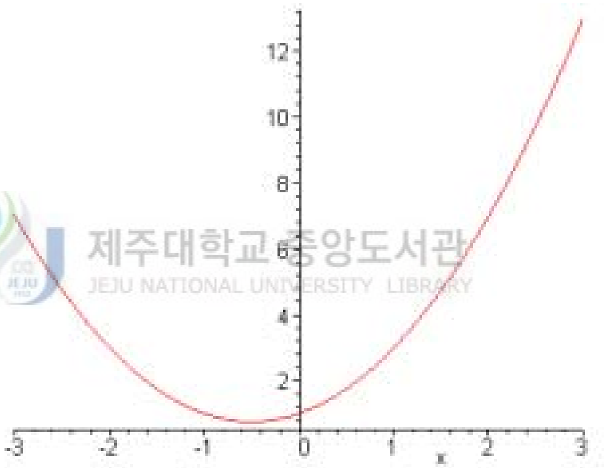
이다. 이 식에 x=1을 대입하면,

```
>value(subs(x=1,e2));
```

$$3$$

이므로 위에서 구한 극한값과 같다. 실제로 그래프를 그려보면

```
>plot({e1,e2},x=-3..3);
```



처럼 두 식이 일치함을 알 수 있다.

【예제2】 $x=0$ 근방에서 함수 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 의 함수 값의 변화를 살펴보고, x가 0 으로 접근할 때의 극한값 A와 비교하여 보자. 또 $\varepsilon = 0.001$ 일 때, $|f(x) - A| < \varepsilon$을 만족하는 x 의 범위를 구하여보자.

(풀이) $f(x)$ 를 $\dfrac{\sin x}{x}$ 라 정의하고, 좀더 정확한 값을 구하기 위하여 유효자리 숫자를 20 자리로 한다. 이 때는 Digits 라는 명령을 사용한다. 미리 지정된 값은 10 자리이다.

> f:=x->sin(x)/x;

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{x}$$

> Digits:=20;

Digits := 20

$x=0$ 근방에서 함수값의 변화를 알아보기 위하여 x의 값이

$x_1 = \{1/3\,,\, 1/3^2\,,\, \cdots\,,\, 1/3^{20}\}$, $x_2 = \{-1/3\,,\, -1/3^2\,,\, \cdots\,,\, -1/3^{20}\}$

일 때 그 함수값을 구해보자. 수열의 값을 계산하기 위하여 seq 라는 명령어를 사용하였다. 이 명령어는 수열의 값을 계산해주고 출력은 식의 나열로 된다. 리스트로 출력되기를 원하기 때문에 [seq()] 로 입력하였다. 먼저 x_1값 즉 오른쪽에서 접근하는 경우를 살펴보자.

> x1:=[seq(1/3^i, i=1..20)];

x1:= [1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, 1/729, 1/2187, 1/6561,
1/19683, 1/59049, 1/177147, 1/531441, 1/1594323, 1/4782969,
1/14348907, 1/43046721, 1/129140163, 1/387420489,
1/1162261467, 1/3486784401]

> seq(evalf(f(x)), x=x1);

.98158409038845673251, .99794365658957686581, .99977139199471092269,
.99997459756187476136, .99999717748775523731,
.99999968638729231274, .99999996515414067615,
.99999999612823781695, .99999999956980420144,
.99999999995220046679, .99999999999468894075,
.99999999999940988230, .99999999999993443136,
.99999999999999271458, .99999999999999919051,
.99999999999999991008, .99999999999999999001,
.99999999999999999888, .99999999999999999988,
.99999999999999999999

x값이 오른쪽에서 0으로 접근해감에 따라 $f(x)$는 1로 한없이 접근함을 알 수

있다, 즉 우극한이 1 임을 알 수 있다. 이번에는 왼쪽에서 0 으로 접근하는 x_2 에 대하여 같은 방법으로 살펴보자.

```
> x2:=[seq(-1/3^i, i=1..20)];
```

x1:=[-1/3, -1/9, -1/27, -1/81, -1/243, -1/729, -1/2187, -1/6561, -1/19683, -1/59049, -1/177147, -/531441, -1/1594323, -1/4782969, -1/14348907, -1/43046721, -1/129140163, -1/387420489, -1/1162261467, -/3486784401]

```
> seq(evalf(f(x)), x=x2);
```

.98158409038845673251, .99794365658957686581, .99977139199471092269,
.99997459756187476136, .99999717748775523731,
.99999968638729231274, .99999996515414067615,
.99999999612823781695, .99999999956980420144,
.99999999995220046679, .99999999999468894075,
.99999999999940988230, .99999999999993443136,
.99999999999999271458, .99999999999999919051,
.99999999999999991008, .99999999999999999001,
.99999999999999999888, .99999999999999999988,
.99999999999999999999

즉 좌극한이 1 임을 알 수 있다.

모두 실제로 극한값을 구해보고 그래프로 확인해보아도 위의 두 결과와 일치함을 알 수 있다.

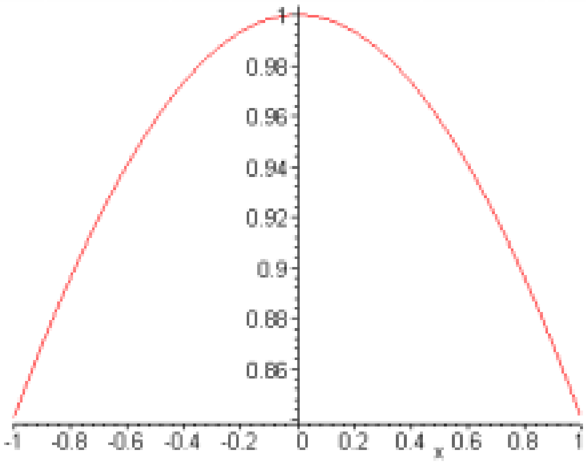
```
> Limit(f(x), x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> value(%);
```

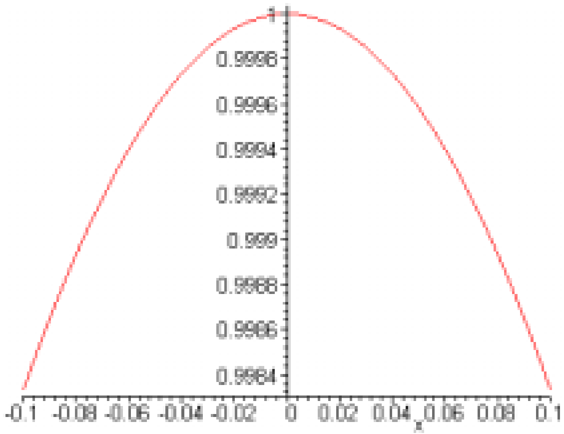
$$1$$

> plot(f(x), x=-1..1);



다음에는 x의 범위를 구하기 위하여, $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = 0.001$을 만족하는 x의 값을 0근방에서 구하여 보자. 다음의 그래프에서 보이듯이 이를 만족하는 x의 값은 0근방에서 두 개가 존재하고 그 해를 정확하게 구할 수 없으므로 fsolve 라는 명령어를 이용한다. 그리고 맨 뒤의 옵션은 구하는 해의 범위를 지정한 것이다.

> plot(f(x),x=-0.1..0.1);



> delta1:=fsolve(f(x)=1-0.001,x,0..1);

delta1 := .077471290316498034779

> delta2:=fsolve(f(x)=1-0.001,x,-1..0);

$$\text{delta2} := -.077471290316498034779$$

따라서 구하는 x의 범위는

$$-0.077471290316498034779 < x < 0.077471290316498034779$$

이다.

이와 같이 함수 $f(x)$가 x축 위의 한 점 a를 중심으로 하여 좌우편에 충분히 가깝게 있는 모든 점들(단, 점 a 자신은 제외함)을 y축 위의 한 고정점 A의 상하로 충분히 가깝게 있는 점들(점 A 자신을 포함하여)에 대응시킬 때, 함수 $f(x)$는 a에서 극한(limit) A를 갖는다 하고 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

위의 【예제1】과 【예제2】에서 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이다.

위의 극한에 대한 설명에서 "점 a에 충분히 가깝게 있는 점들"이란 직관적으로 이해될지 모르지만 좀더 면밀히 생각하면 a에 얼마나 가깝게 있어야 A에 충분히 가깝게 있는 점으로 볼 수 있는가 하는 문제를 가지고 있다. 이러한 직관적인 정의로부터 탈피하여 논리적인 극한의 정의를 알아보자.

【예제3】 함수 $f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$ 로 정의되는 함수 $f(x)$에 대하여 $x = 1$ 부근에서 1에 접근시킬 때 함수값 $f(x)$의 변화를 조사하여라.

(풀이) > f:=x->(x^6-1)/(x^3-1);

$$f := x \to \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$$

> x1:=[evalf(seq(1-10^(-n),n=1..10))];

x1:= [.9000000000, .9900000000, .9990000000, .9999000000,

.9999900000, .9999990000, .9999999000, .9999999900,

.9999999990, .9999999999]

```
> seq(evalf(f(x)),x=x1);
```

1.729000000, 1.970299000, 1.997003004, 1.999699970, 1.999970000,

2.000000000, 2.000000000, 2.000000000, 2.000000000,

2.000000000

```
> x2:=[evalf(seq(1+10^(-n),n=1..10))];
```

x2:= [1.100000000, 1.010000000, 1.001000000, 1.000100000,

1.000010000, 1.000001000, 1.000000100, 1.000000010,

1.000000001, 1.000000000]

```
> seq(evalf(f(x)),x=x2);
```

2.331000000, 2.030301000, 2.003003001, 2.000300030, 2.000030000,

2.000003000, 2.000000300, 2.000000030, 2.000000003,

2.000000000

따라서 $x \to 1$ 이면 $f(x) \to 2$ 임을 알 수 있다.
위에서부터 $|x-1| < 10^{-3}$ 인 모든 x에 대하여 $|f(x)-2| < 10^{-2}$ 이고 $|x-1| < 10^{-9}$ 인 모든 x에 대하여 $|f(x)-2| < 10^{-8}$ 이 됨을 알 수 있다.

그러므로 점 a에서의 함수 $f(x)$ 의 극한을 다음과 같이 정의한다.
함수 $f(x)$ 에서 임의의 양수 ε 이 주어질 때 $0 < |x-a| < \delta$인 모든 x에 대하여 $|f(x)-A| < \varepsilon$을 만족하는 δ 가 존재하면 x가 a에 접근할 때 $f(x)$ 는 A에 수렴(converge)한다고 하며, A를 $f(x)$ 의 극한값이라 하고, 이를 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 또는 $x \to a$ 일 때 $f(x) \to A$ 로 나타낸다.
$\varepsilon - \delta$ 로 나타난 함수의 극한값 정의에서 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$을 만족하는 $\delta > 0$ 를 찾아야 한다.

δ 는 ε 의 값에 따라 결정된다. 극한을 이와 같이 정의하는 방법을 ε - δ 정의 방법이라 한다. 이제 이 방법에 의하여 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대한 δ 를 구하여 보자.

【예제4】 함수 $f(x) = 4x+1$ 에 대한 $x=3$ 에서의 극한 A 를 구하고, $\varepsilon = 0.1$ 에 대응하는 양수 δ 를 구하여라.

그리고, $\lim_{x \to 3}(4x+1) = 13$ 임을 극한값의 정의를 이용해 증명하여라.

(풀이) 먼저 정의에 의해서 $\lim_{x \to 3}(4x+1) = 13$ 를 증명해 보면

임의의 양수 ε 에 대하여 $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(4x+1)-13| < \varepsilon$

가 성립하는 양수 δ 가 존재함을 보이면 된다. 한편,

$|(4x+1)-13| = |4x-12| = 4|x-3|$

이므로 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ 으로 택하면

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(4x+1)-13| = 4|x-3| < 4\delta < \varepsilon$

가 성립한다. 그러므로 $\lim_{x \to 3}(4x+1) = 13$ 이다.

위의 풀이에서 δ 를 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ 로 택하였으므로 $\delta = \dfrac{0.1}{4} = 0.025$ 이다.

Maple 6을 이용하여 극한 값을 구하면 다음과 같다.

```
> Limit(4*x+1,x=3);
```

$$\lim_{x \to 3} 4x+1$$

```
> value(%);
```

$$13$$

2) 여러 가지 극한의 계산

극한값을 직접 구할 경우는 다양한 방법을 사용하여야 계산할 수 있다. 우선 함수가 유리식으로 표현된 경우는 앞에서 본 것과 같이 공통인수를 약분하여 계산하여야 하고 함수가 무리식으로 표현된 경우는 무리식을 유리화하여 계산하여야 한다. 하지만 Maple 6을 이용하여 계산할 경우는 이런 방법의 구분 없이 명령어 서식에 맞추어 입

력 하기만 하면, 자동적으로 계산된다.

【예제1】 유리함수의 극한 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ 을 계산하여라.

(풀이) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)$

$= 4$

(Maple 6 이용)

```
>Limit((x^2-4)/(x-2),x=2);
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

```
>value(%);
```

$$4$$

【예제2】 무리함수의 극한 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ 을 계산하여라.

(풀이) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$

$= \frac{1}{2}$

(Maple 6 이용)

```
>Limit((sqrt(x)-1)/(x-1),x=1);
```

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

```
>value(%);
```

$$\frac{1}{2}$$

【예제3】 무리함수의 극한 $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x-1}$ 을 계산하여라.

(풀이) >Limit((x^(2/3)-1)/(x-1),x=1);

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\left(\frac{2}{3}\right)}-1}{x-1}$$

>value(%);

$$\frac{2}{3}$$

삼각함수의 극한에 대해서는 가장 많이 활용되는 것으로 다음과 같은 공식이 있다.

【예제4】 삼각함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 을 계산하여라.

>limit(sin(x)/x,x=0);

$$1$$

이 공식을 이용하여 삼각함수들이 포함된 극한값을 직접 구할 수 있다. 하지만 Maple 6은 다른 구분없이 쉽게 극한값을 구한다.

【예제5】 삼각함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 4x}$ 을 계산하여라.

>limit(tan(3*x)/tan(4*x),x=0);

$$\frac{3}{4}$$

【예제6】 삼각함수의 극한 $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ 을 계산하여라.

>limit(cos(x)/(x-Pi/2),x=Pi/2);

$$-1$$

지금까지 $x \to a$ 일 때의 함수의 극한값을 구하였다. 이러한 극한 이외에 $x \to \infty$ 일 경우에는 limit 명령어에 x=infinity 라고 입력하면 그 값을 구할 수 있다. 또 다른방법으로 $x = \frac{1}{t}$ 로 치환하면 $x \to \infty$ 인 경우에 $t \to +0$ 이므로 limit (f(t), t=0, right); 로 입력한다. $x \to -\infty$ 인 경우에는 $t \to +0$ 이므로 right 를 left 로 바꾼다.

【예제7】 유리함수의 극한 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ 을 계산하여라.

>limit(1/x,x=infinity);

$$0$$

앞의 【 예제1】 에서 【예제7】 까지의 계산을 Limit 와 limit 라는 명령어를 함께 사용하여 극한기호와 그 값을 동시에 출력해준다.

【예제1】 유리함수의 극한(유형1)
>Limit((x^2-4)/(x-2),x=2)=limit((x^2-4)/(x-2),x=2);

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

【예제2】 무리함수의 극한 (유형1)
>Limit((sqrt(x)-1)/(x-1),x=1)=limit((sqrt(x)-1)/(x-1),x=1);

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

【예제3】 무리함수의 극한(유형2)

>Limit((x^(2/3)-1)/(x-1),x=1)=limit((x^(2/3)-1)/(x-1),x=1);

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{\left(\frac{2}{3}\right)} - 1}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

【예제4】 삼각함수의 극한(유형1)

>Limit(sin(x)/x,x=0)=limit(sin(x)/x,x=0);

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

【예제5】 삼각함수의 극한(유형2)

>Limit(tan(3*x)/tan(4*x),x=0)=limit(tan(3*x)/tan(4*x),x=0);

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3\,x)}{\tan(4\,x)} = \frac{3}{4}$$

【예제6】 삼각함수의 극한(유형3)

>Limit(cos(x)/(x-Pi/2),x=Pi/2)=limit(cos(x)/(x-Pi/2),x=Pi/2);

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\pi\right)} \frac{\cos(x)}{x - \frac{1}{2}\pi} = -1$$

【예제7】 유리함수의 극한(유형2)

>Limit(1/x,x=infinity)=limit(1/x,x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

【예제8】 함수 $f(x) = \dfrac{4x^2 + \dfrac{1}{x}}{3x^2 - x}$ 의 그래프를 $0 < x \leq 10$ 의 범위에서 그려 보고, $x \to \infty$ 일 때의 극한값을 예상하여라. 그리고 직접 이 극한값을 구하여라.

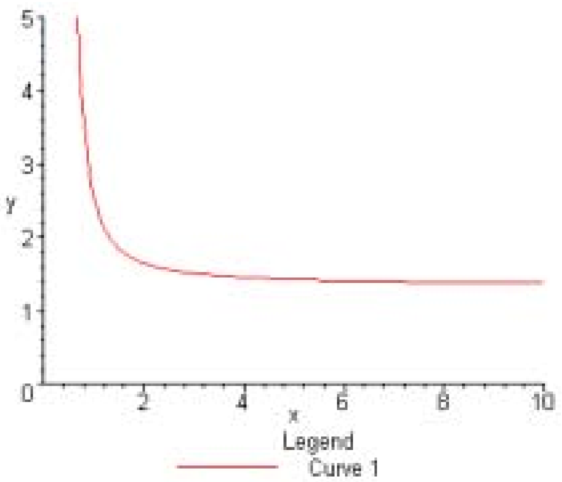
(풀이) $f(x)$ 를 정의하면,

```
>f:=x->(4*x^2+x^(-1))/(3*x^2-x);
```

$$f := x \to \frac{4x^2 + \frac{1}{x}}{3x^2 - x}$$ 이다.

그런데 이 함수는 $x = 0$ 근방에서 무한대로 증가하므로, 치역의 범위도 제한하여 그래프를 그려야 한다. 그렇지 않으면 y축의 크기가 매우 커져서 그래프 모양이 다르게 나타난다. 또 Maple 6은 불연속점에서는 점근선을 표시하는데 이를 표시하지 않으려면 discont=true 라는 옵션을 추가해야 한다.


```
>plot(f(x),x=0..10,y=0..5,discont=true);
```



위의 그래프를 보면 이 함수가 $x \to \infty$ 일 때 어떤 값으로 수렴하는 것처럼 보이는 데 실제로 그 극한값을 구해보면,

>Limit(f(x),x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + \frac{1}{x}}{3x^2 - x}$$

>value(%);

$$\frac{4}{3}$$

이므로 수렴한다.

【예제9】초월함수의 극한 $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ 을 계산하여라.

(풀이) >limit((1+x)^(1/x),x=0,right);

$$e$$

>limit((1+x)^(1/x),x=0,left);

$$e$$

즉, $\lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ 이다.

여기서 e는 자연로그의 밑으로 알려져 있는 무리수이다. 이 극한값 문제는 $x = \frac{1}{t}$ 로 치환한다면 $x \to +0$ 가 $t \to \infty$로 바뀌므로,

>limit((1+1/t)^t,t=infinity);

$$e$$

와 같은 계산 결과를 얻는다. 무리수 e의 값을 알아보자.

```
> x_value:=[1,10,100,1000,10000,30000,50000,70000,
   100000];

  x_value := [1, 10, 100, 1000, 10000, 30000, 50000, 70000, 100000]

> Digits:=20;

                    Digits := 20

> seq(evalf((1+1/t)^t),t=x_value);

  2., 2.5937424601000000000, 2.7048138294215260933,

      2.7169239322358924574, 2.7181459268252248640,

      2.7182365251461703969, 2.7182546461391027997,

      2.7182624124145281161, 2.7182682371744896680
```

결과에서 보이듯이 x값의 변화가 많음에도 불구하고 식의 값은 큰 변화가 없고 $x = 10^6$일 때, 소수점 다섯자리까지는 정확해 보인다. 실제로 Maple 6 이 가지고 있는 무리수 e 의 값을 소수점 200자리까지 계산해 보면,


```
> evalf(exp(1),200);

  2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627\
      7724076630353547594571382178525166427427466391932003059921\
      8174135966290435729003342952605956307381323286279434907632\
      3382988075319525101901
```

이다. 따라서 앞의 예상과는 달리 소수 다섯 번째 숫자가 6에서 8로 바뀐 것을 알 수 있다.
이렇듯무한대까지의극한은유한한어떤숫자들까지만계산하고그의수렴성을논해서는안된다.

위의 극한 공식을 이용하면, 다음과 같이 임의의 미지수가 있는 경우에도 극한 문제를 계산할 수 있다.

【예제10】 극한값 $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{a}{x})^x$ 을 계산하여라.

(풀이) > Limit((1+a/x)^x,x=infinity)=limit((1+a/x)^x,x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

3) 한쪽 극한(좌극한, 우극한)과 연속

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 근방에서 정의되어 있을 때 만약 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 이면 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다. 직관적으로는 함수의 그래프가 연결되어 있으면 연속이고 끊어져 있으면 불연속이다.

그리고 함수 $f(x)$ 가 $x=a$에서 극한이 존재, 즉 $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재할 필요충분조건은 $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$ 이다. 즉 좌극한과 우극한이 같아야 한다. 극한값이 존재하지 않는 경우는 한쪽 극한(좌극한, 우극한)을 계산해 보아야 하는데, 다음과 같이 limit 명령어에 left, right를 추가하면 한쪽 극한값을 얻을 수 있다.

> Limit(g(x),x=a,left);

$$\lim_{x \to a-} g(x)$$

> Limit(g(x),x=a,right);

$$\lim_{x \to a+} g(x)$$

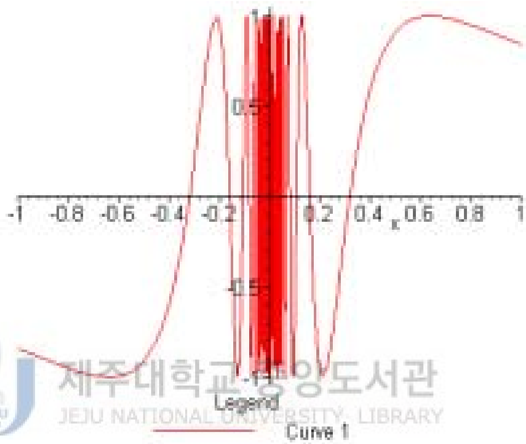
【예제1】 함수 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 에서 $x=0$에서 연속성을 조사하여라.

(풀이) > f:=x->sin(1/x);

$$f := x \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

이 함수의 그래프를 그려보면, 아래의 그림과 같이 $x = 0$ 근처에서 -1과 1 사이를 진동한다.

> plot(f(x),x=-1..1);



따라서 극한값은 존재하지 않고, Maple은 다음과 같이 출력한다.

> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1 .. 1$$

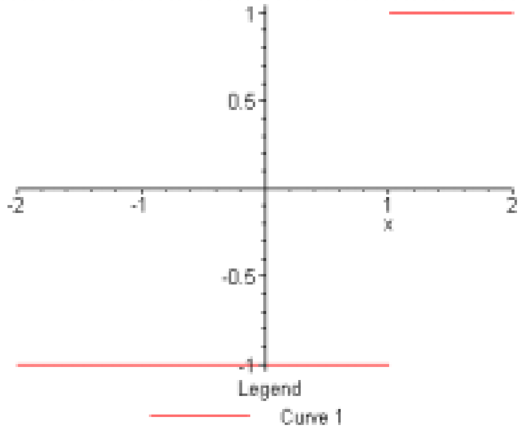
그러므로 $x = 0$에서 연속이 아니다.

【예제2】 함수 $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ 의 그래프를 그리고, $x = 1$에서의 한쪽 극한값을 구하고 연속성을 조사하여라.

(풀이) > g:=x->abs(x-1)/(x-1);

$$g := x \to \frac{|x-1|}{x-1}$$

```
> plot(g(x),x=-2..2,discont=true);
```



이 함수는 $x = 1$에서 정의되지 않지만, 다음과 같이 한쪽 극한값을 갖는다.

```
> limit(g(x),x=1,left);
```

$$-1$$

```
> limit(g(x),x=1,right);
```

$$1$$

```
> limit(g(x),x=1);
```

$$\mathit{undefined}$$

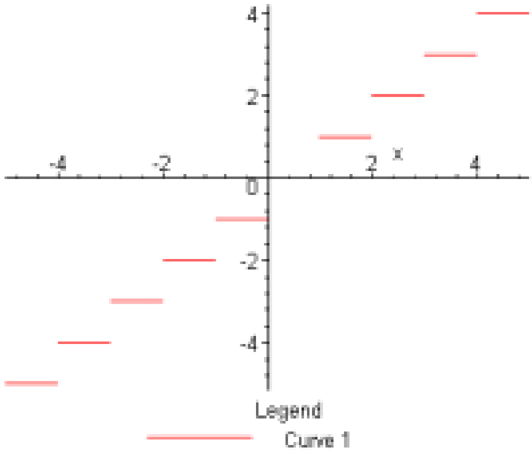
그러므로 $x = 1$에서 연속이 아니다.

【예제3】 함수 $f(x) = [x]$ ($[x]$ 는 x를 넘지 않는 최대의 정수)의 연속성을 조사하여라.

(풀이)
```
> gauss:=x->floor(x);
```

$$gauss := floor$$

> plot(gauss(x),x=-5..5,discont=true);



> limit(gauss(x),x=1,left);

$$0$$

> limit(gauss(x),x=1,right);

$$1$$

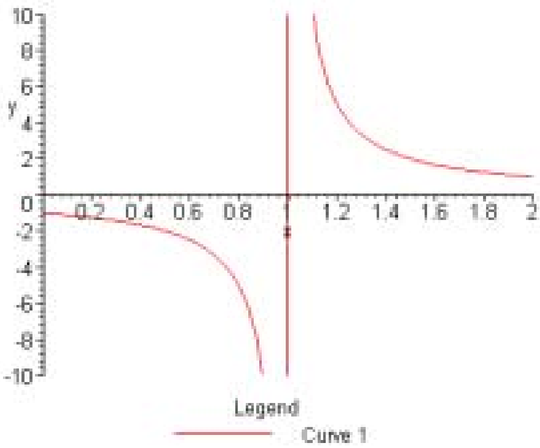
그러므로 모든 정수점에서 불연속이다.

【예제4】 함수 $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ 에서 연속성을 조사하여라.

(풀이) > g:=x->1/(x-1);

$$g := x \to \frac{1}{x-1}$$

> plot(g(x),x=0..2,y=-10..10);



> limit(g(x),x=1,left);

$$-\infty$$

> limit(g(x),x=1,right);

$$\infty$$

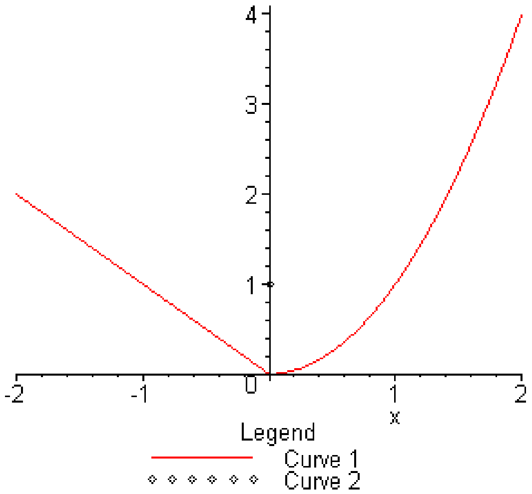
그러므로 $x = 1$ 에서 연속이 아니다.

【예제5】 함수 $f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$ 에서 $x = 0$ 에서 연속성을 조사하여라.

(풀이) > f:=piecewise(x<0,-x,x=0,1,x^2);

$$f := \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x^2 & otherwise \end{cases}$$

> plot(f(x),x=-2..2);



> f(0);

$$1$$

그런데 $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$ 이므로 $x = 0$ 에서 연속이 아니다.

2. 미분법과 그 활용

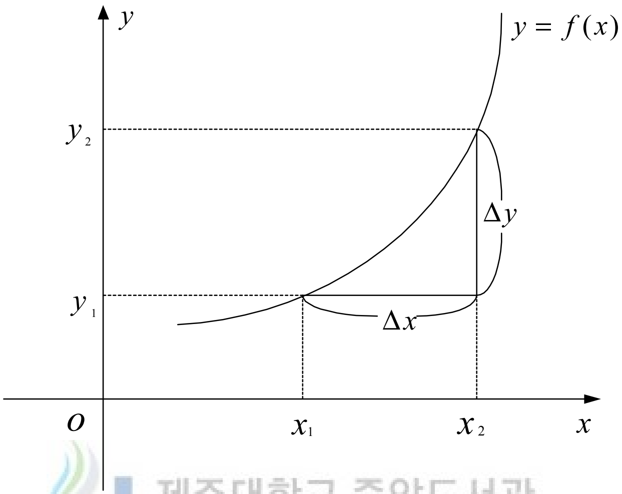
아래의 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 에서 x가 x_1에서 x_2까지 변할 때, $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_2) = \Delta y$ 라 놓을 때, Δx 를 x의 증분, Δy 를 y의 증분이라고 한다. 따라서, 평균변화율은 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

변수 x 가 a에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때, $y = f(x)$ 의 평균변화율

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 에서 $\Delta x \to 0$ 일 때의 극한값

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 이 존재하면, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다. 이 때의 극한값을 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서 미분계수라 하고 $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 로 나타낸다.



또한, 함수 $f: (a, b) \to R$ 에 있어서, 점 $x = c \in (a, b)$ 에 대하여 $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ 가 존재할 때, 이들의 극한값을 각각 $x = c$ 에서 f 의 좌방도함수, 우방도함수라고 하고, 이들을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다. $f_-'(c)$, $f_+'(c)$

함수 $f: (a, b) \to R$ 에 있어서, 점 $x = c \in (a, b)$ 에 대하여 미분가능하기 위한 필요충분조건은 점 c 에서 f 의 좌방도함수 $f_-'(c)$ 와 우방도함수 $f_+'(c)$ 가 모두 존재하고 $f_-'(c) = f_+'(c)$ 인 것이다.

◎ 주요명령어

> slope(p1,p2); 평면에 놓인 점 p1 과 p2를 잇는 직선의 기울기를 구한다. 이 명령어는 student 패키지에 포함되어 있다.
slope([0,0],[1,1]); # 점 [0,0] 과 [1,1]을 지나는 직선의 기울기, 1을 출력한다.

> showtangent(f(x), x=a, x=b..c); 식 f(x)에 대한 그래프와 x=a에서 접선을 범위 $b \leqq x \leqq c$ 에서 그린다. 이 명령어는 student 패키지에 포함되어 있다.
showtangent(x^3, x=1, x=0..2); # x^3 의 그래프와 $x = 1$ 에서의 접선을 그린다.

> D(f); 함수 f의 도함수를 구한다. D(sin); # cos을 출력하고, D(cos)(Pi); # cosx 의 $x=\pi$ 에서의 도함수 값, 0을 출력한다.

> diff(expr, var); 식 expr을 변수 var에 대하여 미분한다.

diff(x^2, x); # 식 x^2을 미분한 값 $2x$를 출력한다.

diff(f(x), x); # 식 $f(x)$ 를 미분한 값 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 를 출력한다.

> Diff(expr, var); 식 expr을 변수 var에 대하여 미분하는 식으로 출력한다. 이 식의 값을 알기 위해서는 value(%)를 입력한다.

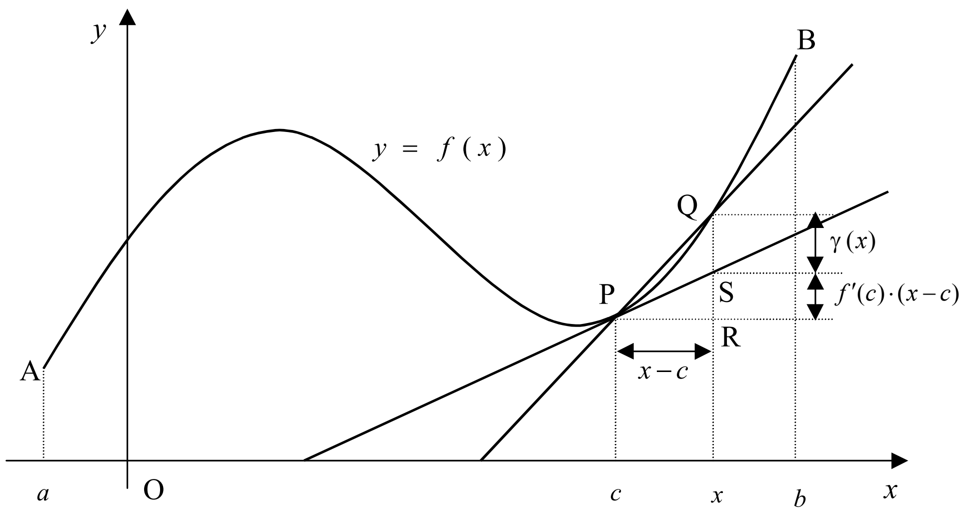
Diff(x^2, x); # 식 $\frac{\partial}{\partial x}x^2$ 를 출력한다.

> implicitdiff(eqn, var1, var2); 음함수로 주어진 방정식 eqn에서 var1에 대한 var2로의 미분값을 출력한다.

implicitdiff(x^2+y^2=1, y, x); # $x^2+y^2=1$ 에 대한 $\frac{dy}{dx}$, 즉 $-\frac{x}{y}$ 를 출력한다.

1) 접선의 기울기와 변화율(미분계수)

미분가능의 기하학적 의미는 앞에서 설명한 것처럼 미분가능의 정의를 내릴 경우 함수 $y=f(x)$ 위의 어떤 점 P에서 접선을 그으면



위의 그림에서 보는 바와 같이
$x > c$, $x - c = \overline{PR} \to +0$ 일 때, 곡선위의 점 Q는 정점 P에 한없이 가까워지며 할선(secant line) $\overline{PQ}$는 P를 중심으로 회전하면서 곡선위의 점 P에서 접선(tangent line)[**매끄러운 곡선의 국부적인 근사직선**] $\overline{PS}$에 한없이 가까이 간다.

이때, $\overline{SR}$은 $x - c$의 $f'(c)$ 배의 크기로 0에 가까워지고, $\overline{QS}$는 $\overline{PR}$보다 더 빠르게 0에 가까워지기 때문에 앞에서 정의한 미분가능의 의미를 직관적으로 이해하기 쉽다.

【예제1】 곡선 $y = f(x) = x^2 - 4x + 8$ 위의 두 점 $P(1, 5)$, $Q(4, 8)$을 지나는 직선의 방정식과 점 Q에서의 접선의 방정식을 구하고 그 그래프를 동시에 그려보자(애니메이션)

(풀이) 먼저 할선 PQ의 기울기(x가 x=1에서 x=4까지 변할 때 평균변화율)는

```
> with(student):
> m1:=slope([1,5],[4,8]);
```


$$m1 := 1$$

이다. 그러므로 할선 PQ 의 방정식은

```
> PQ:=isolate(y-5=m1*(x-1),y);
```

$$PQ := y = x + 4$$

이다. 다음은 점 Q에서의 접선의 방정식을 구하자. 먼저 함수를 지정하고

```
> f:=x->x^2-4*x+8;
```

$$f := x \to x^2 - 4x + 8$$

점 Q 에서의 접선의 기울기(x=4에서의 미분계수)를 구하면

```
> D(f)(4);
```

$$4$$

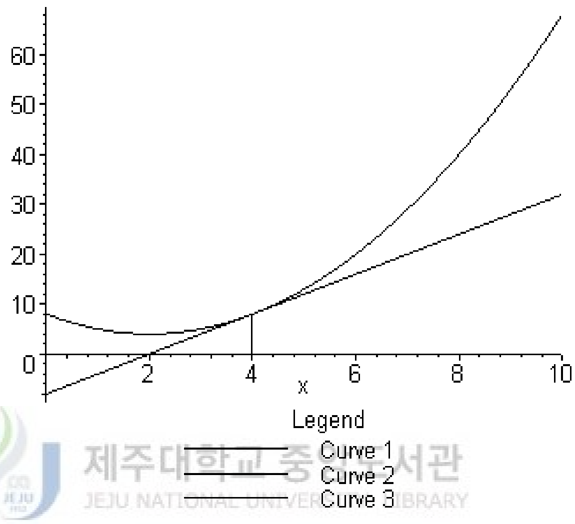
이다. 따라서 점 Q에서의 접선의 방정식은

> tline:=isolate(y-f(4)=D(f)(4)*(x-4),y);

$$tline := y = 4\,x - 8$$

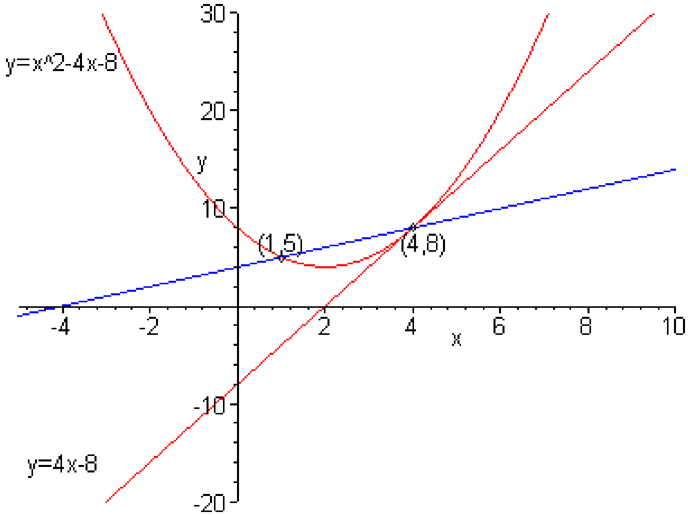
이다. 여기서 함수의 그래프와 접선을 동시에 출력하면 다음과 같다.

> showtangent(f(x),x=4,x=0..10);



결과적으로 함수의 그래프 및 할선PQ 와 점 Q에서의 접선을 동시에 출력하고 할선이 접선으로 점점 더 접근하는 상태를 animate 라는 명령어를 이용하여 보여줄 수 있다.

```
> a:=plot(x^2-4*x+8,x=-5..10,y=-20..30):
> b:=plot(4*x-8,x=-5..10,y=-20..30):
> c:=textplot([-4,25,"y=x^2-4x-8"]):
> d:=textplot([-4,-16,"y=4x-8"]):
> e:=animate((x-4)*t+x+4,x=-5..10,t=0..3,color=blue):
> f:=pointplot([4,8],color=black):
> g:=textplot([17/4,13/2,"(4,8)"]):
> h:=pointplot([1,5],color=black):
> i:= textplot([1,13/2,"(1,5)"]):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
```



【예제2】 함수 $f(x) = x^3 - x$ 에 대하여 $a = \dfrac{4}{10}$, $b = a + h$일 때, $h > 0$ 가 0으로 접근해 갈 때 할선이 변화하는 모습을 $f(x)$ 의 그래프와 함께 한 평면에 그려라. 그리고 할선의 기울기의 극한을 구하고, 이로부터 접선을 구하여라.

(풀이) 함수 $f(x)$ 와 a를 지정하고,

```
> f:=x->x^3-x;
```

$$f := x \to x^3 - x$$

```
> a:=4/10;
```

$$a := \frac{2}{5}$$

seq를 이용하여 h를 1/2에서부터 1/20씩 감소시키면서 할선의 기울기를 구하면

```
> slps:=[seq(slope([a,f(a)],[a+1/2*(1-(n-1)/10),
        f(a+1/2*(1-(n-1)/10))]),n=1..10)];
```

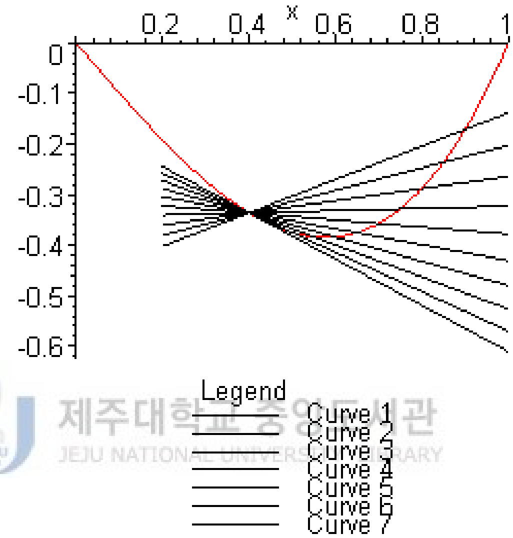
$$slps := \left[\frac{33}{100}, \frac{89}{400}, \frac{3}{25}, \frac{9}{400}, \frac{-7}{100}, \frac{-63}{400}, \frac{-6}{25}, \frac{-127}{400}, \frac{-39}{100}, \frac{-183}{400}\right]$$

이제 이 기울기를 갖는 할선들과 그래프를 동시에 그려보면 다음과 같다.

```
> pp:={seq(plot(slps[i]*(x-a)+f(a),x=0.2..1,color=black)
        ,i=1..10)}:

> pf:=plot(f(x),x=0..1,color=red):

> plots[display]({seq(pp[i],i=1..10)}union{pf});
```



위와 같이 할선이 점점 한 직선으로 접근하면서 두점이 일치하면 접선이 된다. 접선을 구하기 위하여 먼저 할선의 기울기의 극한값 즉 접선의 기울기를 구하면

```
> h:='h'; b:=a+h;
```

$$h := h$$

$$b := \frac{2}{5} + h$$

```
> with(student):
> Limit(slope([b,f(b)],[a,f(a)]),h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{2}{5}+h\right)^3 - \frac{8}{125} - h}{h}$$

```
> m:=value(%);
```

$$m := \frac{-13}{25}$$

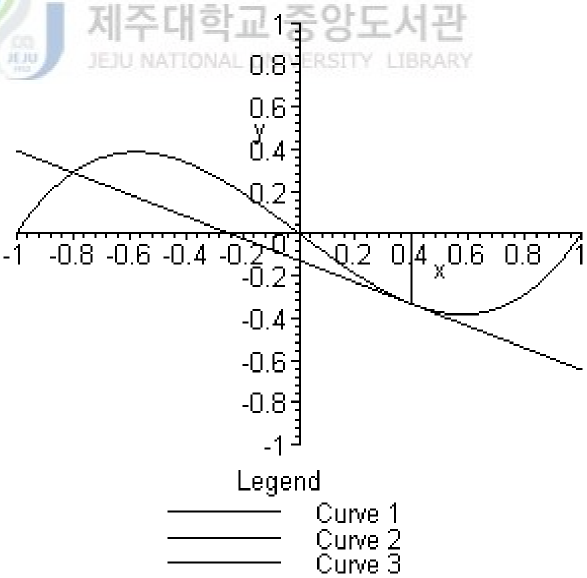
이다. 이로부터 점 [a,f(a)]를 지나는 접선을 구하면

```
> isolate(y-f(a)=m*(x-a),y);
```

$$y = -\frac{13}{25}x - \frac{16}{125}$$

실제로 그래프와 접선을 동시에 출력하면 다음과 같다.

```
> showtangent(f(x), x=2/5, x=-1..1, y=-1..1);
```

이와 같이 할선의 기울기에 대한 극한값을 f에 대한 x=a에서의 미분계수라 한다.

2) 도함수의 계산(미분법)

미분가능한 함수이면 Maple를 이용하여 미분할 수 있고 간단하게 계산된다.

【예제1】 다항함수 미분 $y = x^3 - 4x + 2$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(x^3-4*x+2,x)=diff(x^3-4*x+2,x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 4x + 2) = 3x^2 - 4$$

【예제2】 유리함수 미분 $y = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff((2*x-3)/(x^2+1),x)=diff((2*x-3)/(x^2+1),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2x-3}{x^2+1} = 2\frac{1}{x^2+1} - \frac{2(2x-3)x}{(x^2+1)^2}$$

답: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x^2+1} - \dfrac{2(2x-3)}{(x^2+1)^2}$

【예제3】 합성함수 미분 $y = \dfrac{1}{\sqrt{(6-x)^3}}$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(1/sqrt((6-x)^3),x)=diff(1/sqrt((6-x)^3),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(6-x)^3}} = \frac{3}{2}\frac{(6-x)^2}{\left((6-x)^3\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

답: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(6-x)^2}{2\{(6-x)^3\}^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{2(6-x)^{\frac{5}{2}}}$

【예제4】 음함수 미분 $x^2 + y^2 = 4$ 에서 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> ans:=implicitdiff(x^2+y^2=4,y,x);
```

$$ans := -\frac{x}{y}$$

【예제5】 역함수 미분 $y = \sqrt[4]{x}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(x^(1/4),x)=diff(x^(1/4),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} x^{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\frac{1}{x^{\left(\frac{3}{4}\right)}}$$

답: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

【예제6】 매개변수로 나타내어진 함수 미분법

$x = 2t - 1$, $y = t^2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.


```
> x:=2*t-1; y:=t^2;
```

$$x := 2t - 1$$

$$y := t^2$$

```
> ans:=diff(y,t)/diff(x,t);
```

$$ans := t$$

【예제7】 삼각함수 미분 $y = \cos 2x$, $y = \tan 3x$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(cos(2*x),x)=diff(cos(2*x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos(2x) = -2\sin(2x)$$

```
> Diff(tan(3*x),x)=diff(tan(3*x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan(3x) = 3 + 3\tan(3x)^2$$

【예제8】 로그함수 미분 $y = \ln|2x|$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(ln(2*x),x)=diff(ln(2*x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(2x) = \frac{1}{x}$$

【예제9】 지수함수 미분 $y = e^x \sin x$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

```
> Diff(exp(x)*sin(x),x)=diff(exp(x)*sin(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}e^x \sin(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

3) 도함수의 활용

(1) 접선의 방정식

【예제1】 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

```
> eq:=x^2+y^2=4:
> drv:=implicitdiff(eq,y,x);
```

$$drv := -\frac{x}{y}$$

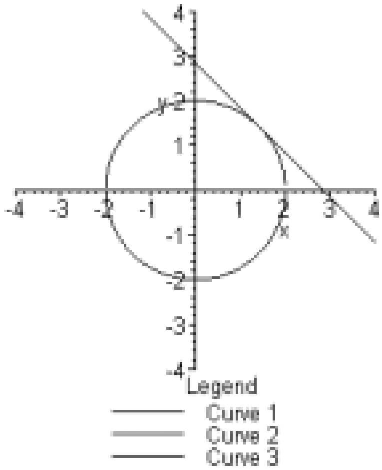
```
> m:=subs({x=sqrt(2),y=sqrt(2)},drv);
```

$$m := -1$$

```
> tline:=isolate(y-sqrt(2)=m*(x-sqrt(2)),y);
```

$$tline := y = -x + 2\sqrt{2}$$

```
> plot({rhs(%),
solve(eq,y)},x=-4..4,y=-4..4,color=black,scaling=constrained);
```



(2) 평균값의 정리

함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ $(a < c < b)$ 가 되는 c 가 적어도 하나 존재한다.

【예제2】 함수 $f(x) = x^3 - 3x - 4$ 와 구간 $[-2, 2]$에 대하여 평균값의 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여 보자.

```
> f:=(x)->x^3-3*x-4;
```

$$f := x \to x^3 - 3x - 4$$

```
> A:=[-2,f(-2)]; B:=[2,f(2)];
```

$$A := [-2, -6]$$

$$B := [2, -2]$$

```
> with(student):
```

```
> g1:=slope(A,B);
```

$$g1 := 1$$

```
> ans:=[solve(D(f)(x)=g1,x)];
```

$$ans := \left[\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$$

(3) 함수의 증감과 극대, 극소

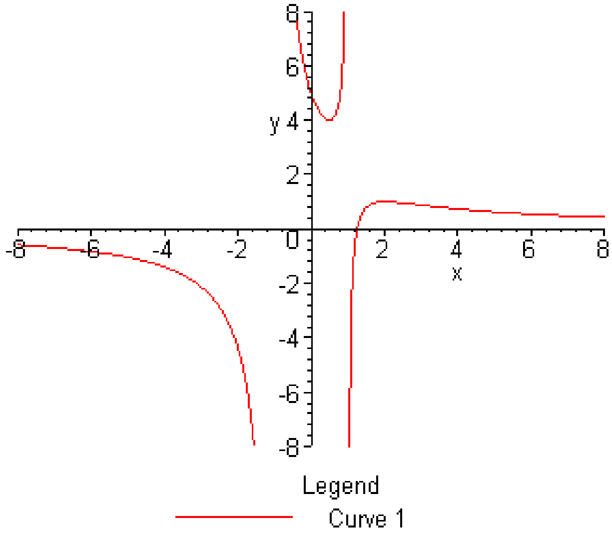
함수의 증감과 극대 극소의 개념을 확실히 알고 Maple 6를 이용하여 그래프를 그려보면 직관적인 이해를 할 수 있다.

【예제3】 함수 $f(x) = \dfrac{4x-5}{x^2-1}$ 의 극값을 구하여라.

```
>f:=x->(4*x-5)/(x^2-1);
```

$$f := x \to \frac{4x-5}{x^2-1}$$

```
>plot(f(x),x=-8..8,y=-8..8,discont=true);
```



>cri:=[solve(D(f)(x)=0,x)];

$$cri := \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

>seq([cri[n],f(cri[n])],n=1..2);

$$\left[\frac{1}{2}, 4\right], [2, 1]$$

답 : $x = \dfrac{1}{2}$ 에서 극소값 4, $x = 2$ 에서 극대값 1

(4) 함수의 최대값과 최소값

Maple 6에서 제공하는 명령어 maximize, minimize를 이용하여 간단히 구할 수 있다.

【예제4】 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2 \ (-1 \leqq x \leqq 4)$ 의 최대값과 최소값을 구하라.

> maximize(-x^3+3*x^2,x=-1..4);

$$4$$

> minimize(-x^3+3*x^2,x=-1..4);

-16

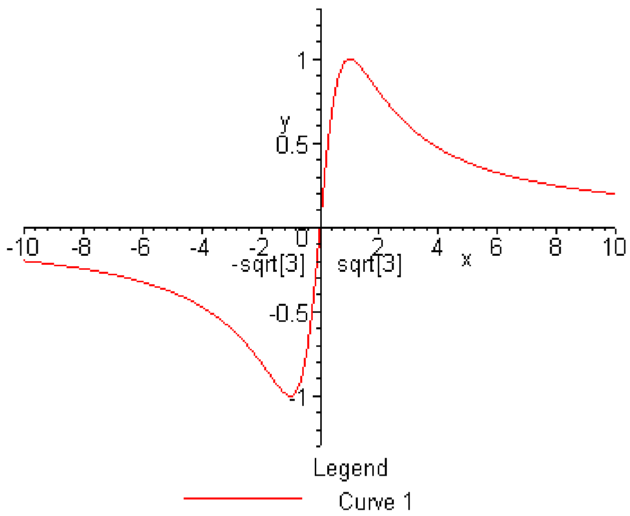
(5) 여러 가지 함수의 그래프

아마도 Maple 6를 이용하여 가장 쉽게 해결할 수 있는 것이 그래프를 그리는 것이리라 여겨진다.

【예제5】 함수 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 의 그래프 개형을 그려라

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘


```
> a:=plot(2*x/(x^2+1),x=-10..10,y=-1.3..1.3):
> b:=textplot([1.7,-0.2,"sqrt[3]"]):
> c:=textplot([-1.7,-0.2,"-sqrt[3]"]):
> display([a,b,c]);
```



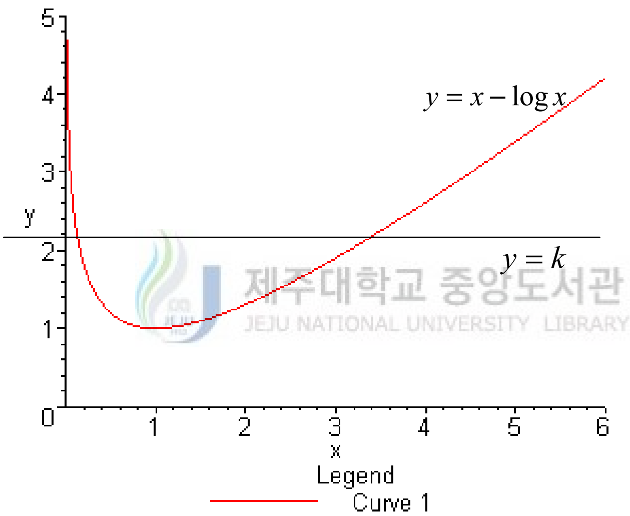
(6) 방정식과 부등식에의 응용

앞에서도 언급했듯이 Maple 6의 막강한 능력인 그래픽을 이용하여 이러한 유형의 문제도 쉽게 해결할 수 있다.

【예제6】 방정식 $x - \log x = k$ (k는 상수)의 실근의 개수를 구하여라.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

```
> plot(x-log(x),x=0..6,y=0..5);
```



$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 이다.

$y = f(x)$ 와 $y = k$ 의 교점이 개수가 실근의 개수이므로 따라서

답: $k > 1$ 일 때 2 개, $k = 1$ 일 때 1 개, $k < 1$ 일 때 0 개

(7) 속도와 가속도에의 응용

수직선 위를 움직이는 동점 P의 시각 t에서의 위치가 $x = f(t)$로 주어진다고 할 때, 시각 t에서의 속도 $v = \dfrac{dx}{dt}$, 가속도 $a = \dfrac{dv}{dt}$ 이다.

【예제7】 수직선 위를 움직이는 동점 P가 원점을 출발하여 t초 후의 위치가

$x=t^3-4t^2+3t$로 주어진다고 할 때, 다음을 구하시오.
(1) 점 P가 마지막으로 원점을 통과할 때의 속도를 구하여라.
(2) 점 P의 가속도가 4일 때, 점 P의 원점에서의 거리를 구하여라.
(풀이) 시각 t에서의 속도 v 와 가속도 a 는

```
> x:=t^3-4*t^2+3*t;
```

$$x := t^3 - 4t^2 + 3t$$

```
> v:=diff(x, t);
```

$$v := 3t^2 - 8t + 3$$

```
> a:=diff(v, t);
```

$$a := 6t - 8$$

이다.

(1) 마지막으로 원점을 통과할 때 시각은

```
> solve(x=0, t);
```

$$0, 3, 1$$

에서 $t=3$ 이다. 따라서 구하는 속도는

```
> answer:=value(subs(t=3, v));
```

$$answer := 6$$

(2) 가속도 $a=4$일 때 시각 t는

```
> solve(a=4, t);
```

$$2$$

이므로 그 때의 위치 x 는

```
> value(subs(t=2, x));
```

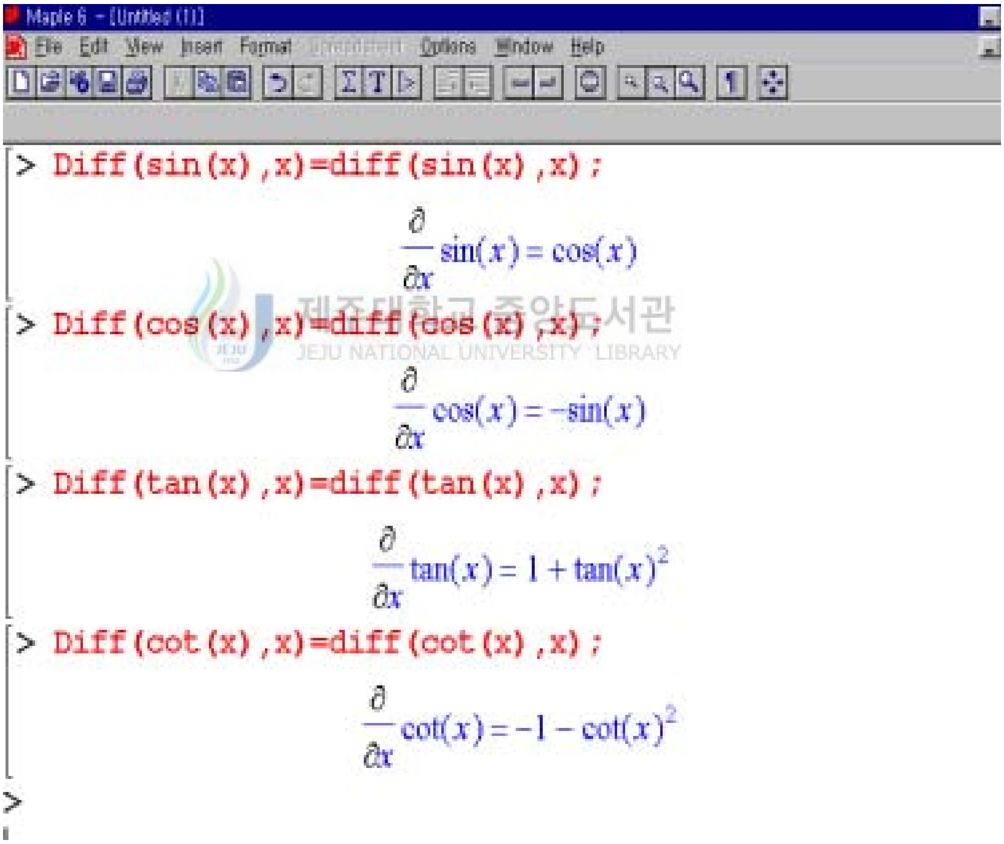
$$-2$$

이므로 점 P의 원점에서의 거리는 2 이다.

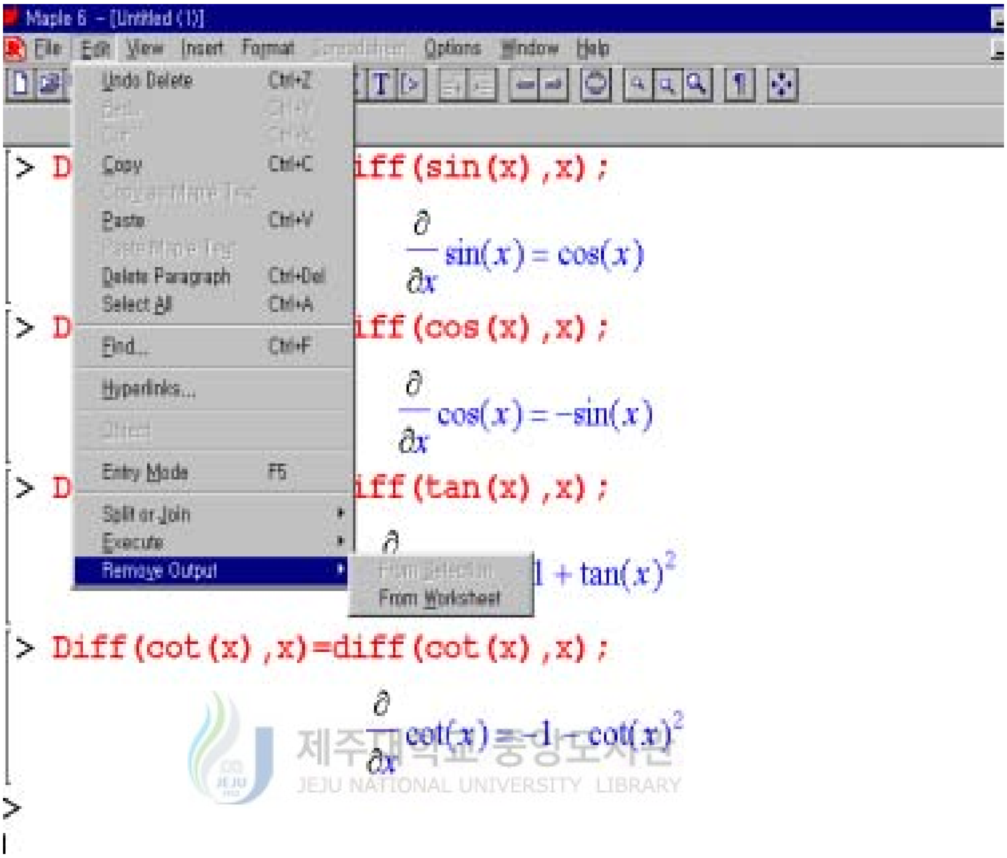
3. Maple 6를 이용한 멀티미디어자료 활용과 정적분의 개념 이해

1) Maple 6를 이용한 멀티미디어자료 활용 사례

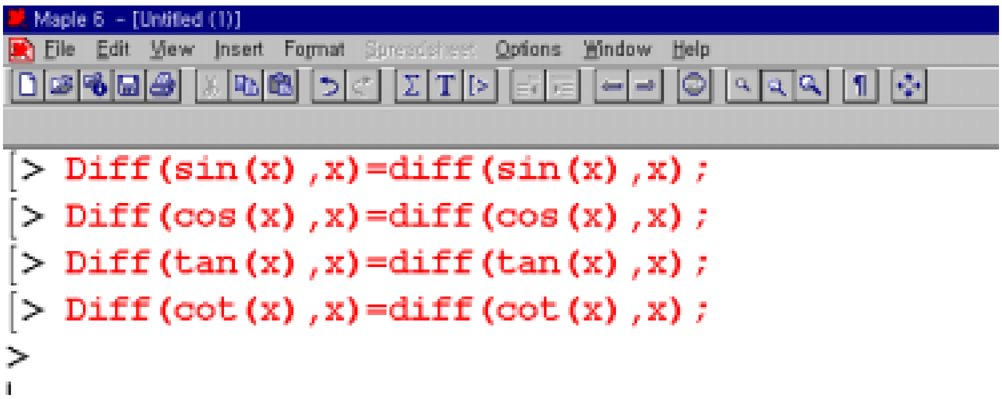
물론 Maple 6 화면 자체가 멀티미디어 자료가 될 수 있다. Maple 6의 줌기능에서 화면의 크기를 작게,보통, 크게 하는 메뉴를 클릭하여 멀티상에서 화면에 나타나는 글자의 크기를 조정할 수있다. Maple 6이 가지고 있는 특이한 멀티자료 내용을 소개하면 다음과 같다. 예를 들어 미분법에서는 도함수 공식을 이해하고 암기하는 것이 중요한 데 다음과 같이 초월함수들의 도함수 공식을 Maple 6에서 명령어를 입력하고 일차적으로 실행하여 보여준다.



다음은 위의 화면상태에서 Edit 메뉴에서 Remove Out put을 택하여 부 메뉴에서 From Worksheet를 택하여 마우스로 크릭한다.



그러면 다음과 같이 나머지 결과들은 삭제되고 명령어들만 화면에 나타내 준다.



위의 화면상태에서 Maple 6 File 에 저장하고 차기수업 시간에 다시 저장된 파일을 열고 각 명령어에서 Enter 키를 치면 위의 화면에서 일차적으로 보여준 결과들을 동적으로 실행하여 학생들에게 보여줄 수 있다.

2) 여러 가지 함수의 부정적분

명령어 Int 와 int를 이용하면 여러 가지 함수의 부정적분이 계산된다. Maple 6의 부정적분의 결과는 적분상수 c가 생략되어 있다.

(1) 부정적분

【예제1】 $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$ 를 구하여라.

```
>Int((sqrt(x)-1)^2/x,x)=int((sqrt(x)-1)^2/x,x);
```

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx = x - 4\sqrt{x} + \ln(x)$$

답: $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx = x - 4\sqrt{x} - \ln x + c$ (단, c는 적분상수)

(2) 치환적분

$y = f(x)$ 에서 $x = g(t)$ 로 놓으면 $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$

치환적분이라고 특별한 명령어가 있는 것은 아니다. 부정적분과 같이 함수만 입력해 주면 Maple 6이 알아서 적분해 준다. 부분적분도 마찬가지다.

【예제2】 $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ 를 구하여라.

```
>Int(x*sqrt(1+x^2),x)=int(x*sqrt(1+x^2),x);
```

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

답: $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ (단, c는 적분상수)

(3) 부분적분

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

미분하여 그 결과가 간단히 되는 것을 $f(x)$로, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 택하던 것을 구분없이, Maple 6이 알아서 계산해준다.

【예제3】 $\int xe^{-x}dx$ 를 구하여라.

```
> Int(x*exp(-x),x)=int(x*exp(-x),x);
```

$$\int x\,e^{(-x)}\,dx = -x\,e^{(-x)} - e^{(-x)}$$

답: $\int xe^{-x}dx = \dfrac{-1-x}{e^x} + c$ (단, c는 적분상수)

3) Maple 6에서 정적분의 개념 이해 및 계산

(1) 정적분의 개념 이해

$f(x)$의 원시함수를 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

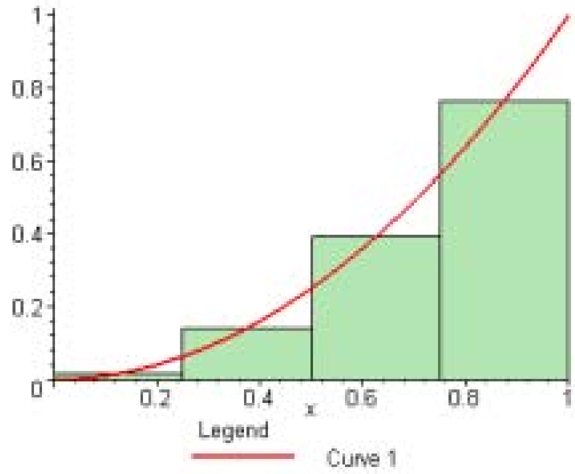
Maple 6를 이용하여 구분구적법으로 정의되는 정적분의 뜻과 여러 가지 성질을 알아보자.

【예제1】 $y = x^2$과 x축 및 직선 $x = 1$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구분구적법으로 구하여라.

```
> with(student):
> f:=x->x^2;
```

$$f := x \to x^2$$

```
> middlebox(x^2,x=0..1);
```



> middlesum(f(x),x=0..1,n);

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2}}{n}$$

> Limit(%,n=infinity);

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2}}{n}$$

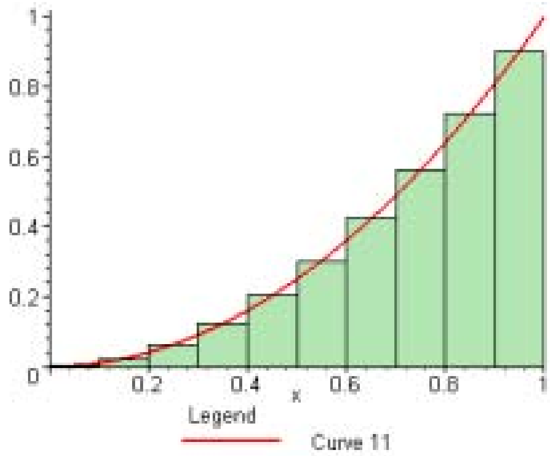
> value(%);

$$\frac{1}{3}$$

따라서 $S = \frac{1}{3}$ 이다. 이 값이 $y = x^2$ 의 $x = 0$ 에서 $x = 1$ 까지의 정적분이다.

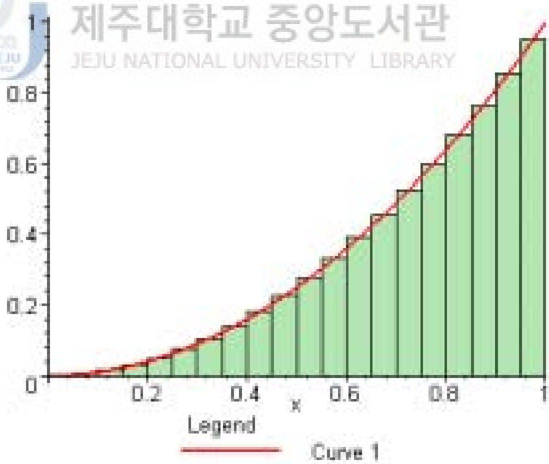
실제로 세분단계를 조정해가면서 그래프를 그려보면 직관적으로 이해가 쉬울 것이다.

```
> middlebox(f(x),x=0..1,10);
```



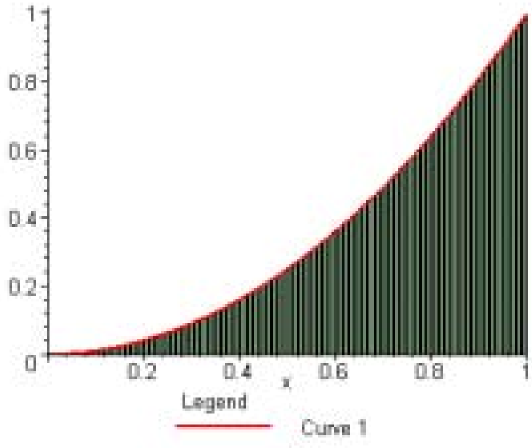
구간을 좀 더 세분해 보면 다음과 같다.

```
> middlebox(f(x),x=0..1,20);
```

다음은 구간을 아주 세밀하게 나누어 보면 거의 곡선에 가깝다.

```
> middlebox(f(x),x=0..1,200);
```



위의 계산을 Maple 6에서 정적분으로 계산하면 다음과 같고 그 결과들은 일치한다.

> eval(Int(x^2,x=0..1))=eval(int(x^2,x=0..1));

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

(2) 여러 가지 정적분의 계산

【예제2】 정적분 $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ 를 구하여라.

> eval(Int(sqrt(4-x^2),x=0..2))=eval(int(sqrt(4-x^2),x=0..2));

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \pi$$

여러 가지 정적분의 계산은 위의 명령어에서 적분구간과 피적분함수만 바꾸어 주면 Maple 6이 알아서 계산해 준다.

4. 정적분의 활용

1) 도형의 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geqq g(x)$ 일 때, 두곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

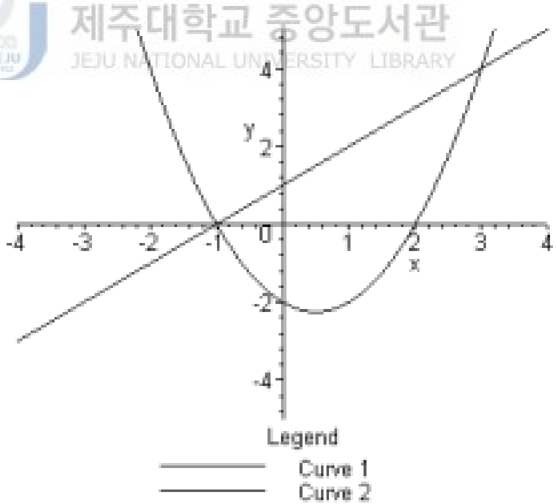
【예제】 곡선 $y = x^2 - x - 2$ 와 직선 $y = x + 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(풀이) >f:=x->x^2-x-2; g:=x->x+1;

$$f := x \to x^2 - x - 2$$

$$g := x \to x + 1$$

>plot([f(x),g(x)], x=-4..4,y=-5..5,color=black);



>solve(f(x)=g(x),x);

3, -1

>int(abs(f(x)-g(x)), x=-1..3);

$$\frac{32}{3}$$

2) 도형의 부피

(1) 입체의 부피

구간 $[a, b]$ 에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 할 때, 입체의 부피 V 는 $V = \int_a^b S(x)\,dx$ 이다.

【예제1】 구간 $[0, 1]$ 에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x) = x^2 + 1$ 일 때, 그 입체의 부피를 구하여라.

(풀이) >Int(x^2+1,x=0..1);

$$\int_0^1 x^2 + 1\,dx$$

>value(%);

$$\frac{4}{3}$$

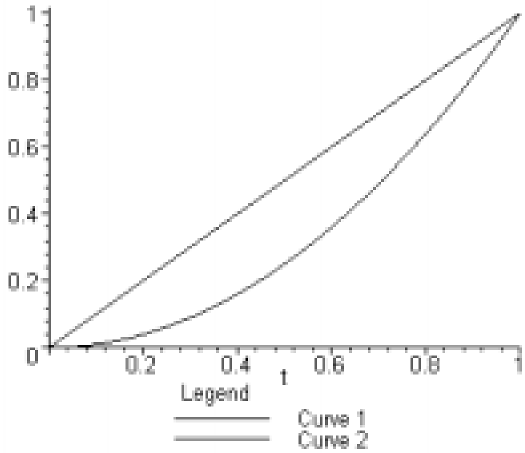
(2) 회전체의 부피

곡선 $y = f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$)를 x 축의 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V 는 $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

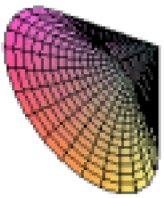
곡선 $x = g(y)$ ($c \leqq y \leqq d$)를 y 축의 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피 V 는 $V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy$

【예제2】 두 곡선 $y = x$ 와 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 부분을 x축을 둘레로 회전하여 생기는 입체의 부피를 구하여라.

(풀이) >f:=t->t: g:=t->t^2:
>plot([f(t),g(t)],t=0..1,color=black);



>p11:=plot3d([t,f(t)*cos(theta),f(t)*sin(theta)], t=0..1,theta=0..2*Pi):
p12:=plot3d([t,g(t)*cos(theta),g(t)*sin(theta)], t=0..1,theta=0..2*Pi):
>plots[display](p11,p12,scaling=constrained);



>Int(Pi*(f(t)^2-g(t)^2),t=0..1);

$$\int_0^1 \pi\,(t^2 - t^4)\,dt$$

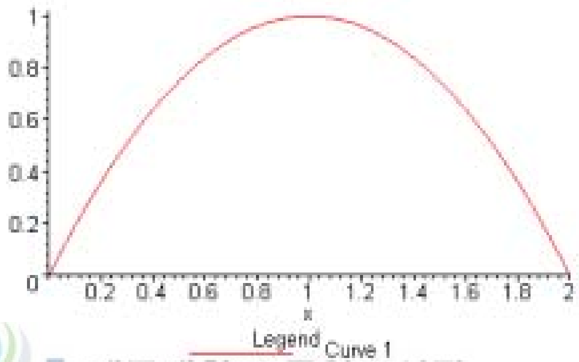
>value(%);

$$\frac{2}{15}\pi$$

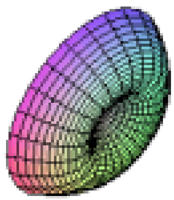
【예제3】 곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축을 둘레로 회전하여 생기는 입체의 부피를 구하여라.

(풀이) >f:=x->2*x-x^2:

>plot(f(x),x=0..2, scaling=constrained);



>plot3d([t*cos(theta),f(t),t*sin(theta)], t=0..2,theta=0..2*Pi,scaling=constrained);



>Int(2*Pi*x*f(x),x=0..2);

$$\int_0^2 2\pi x(2x-x^2)\,dx$$

>value(%);

$$\frac{8}{3}\pi$$

3) 곡선의 길이

함수 $y = f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$)로 주어지는 곡선의 길이 L 은

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

매개변수 방정식 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, ($a \leqq t \leqq b$) 로 주어지는 곡선의 길이 L 은

$$L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dx$$

【예제1】 $0 \leqq x \leqq 1$ 에서 $y = x^2$ 으로 주어지는 곡선의 길이를 구하여라.
(풀이) >f:=x->x^2;

$$f := x \to x^2$$

>Int(sqrt(1+D(f)(x)^2),x=0..1);

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

>value(%);

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\ln(-2+\sqrt{5})$$

【예제2】 반지름이 r 인 원의 둘레의 길이를 구하여라.

(풀이) $f(t) = r\cos t$, $g(t) = r\sin t$ 라 놓고 구하여 보자.

```
>f:=t->r*cos(t): g:=t->r*sin(t):
>Int(sqrt(D(f)(t)^2+D(g)(t)^2),t=0..2*Pi)=
   int(sqrt(D(f)(t)^2+D(g)(t)^2),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin(t)^2 + r^2 \cos(t)^2}\, dt = 2\pi \sqrt{r^2}$$

```
>simplify(%,assume=positive);
```

$$r \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi r$$

그러므로 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$ 이다.

마지막으로 극좌표로 주어지는 곡선의 길이를 구하여보자.

극좌표 방정식 $r = f(\theta)$, ($\alpha \leqq \theta \leqq \beta$) 로 주어지는 곡선의 길이 L 은

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2}$$

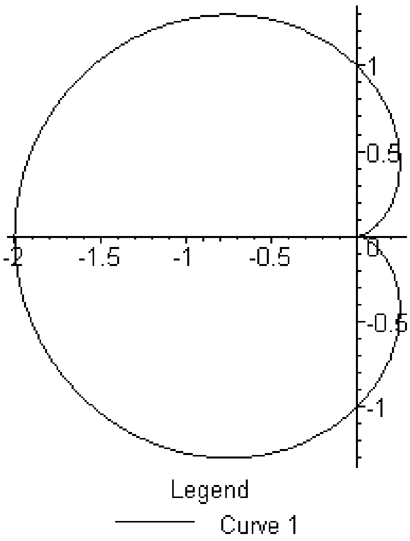
【예제3】 극좌표 방정식 $r = 1 - \cos\theta$, ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) 로 주어지는 곡선의 길이를 구하여라.

(풀이) 먼저 $f(\theta) = 1 - \cos\theta$ 라 정의하고 그 그래프를 그려보자.

```
> f:=theta->1-cos(theta);
```

$$f := \theta \rightarrow 1 - \cos(\theta)$$

```
>plots[polarplot](f(theta), theta=0..2*Pi, scaling=constrained);
```



함수 $f(\theta)$ 와 그 도함수 $f'(\theta)$ 를 위의 공식에 대입하면

>Int(sqrt(f(theta)^2+D(f)(theta)^2), theta=0..2*Pi);

$$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2}\,d\theta$$

>value(%);

$$8$$

그러므로 구하는 곡선의 길이는 8 이다.

VI. 결론 및 제언

지금까지의 고등학교 수학 교육은 입시 위주의 교육 때문에 단순하게 공식을 암기하여 문제를 풀어내는 식의 교육이었다. 교실 수업이 많이 개혁되고 있기는 하지만 아직도 지필중심으로 이미 만들어진 공식에 대입하여 문제를 풀어내느라고 칠판을 빽빽하게 채우고 있는 현실이다. 이제는 21세기 정보화 시대를 맞아 우리의 생활과 밀접한 컴퓨터를 수학 수업의 보조 학습도구로 활용할 수 있어야 하겠다. 컴퓨터를 효과적으로 활용한다면 수학적 이미지를 시각화하여 학생들의 흥미를 유발할 수 있을 뿐만 아니라, 수학적인 개념을 귀납적 직관적으로 전달할 수 있다고 여겨진다.

특히, 본 논문에서 소개하고 있는 Maple 6은 그래픽 기능과 수치 계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등 다양한 환경을 제공하고 있는 소프트웨어로써 교실 수업에서 유용하게 활용되어질 수 있는 프로그램이다. 수학 수업에 Maple 6을 활용함으로서 학생들에게 짧은 시간에 다양한 수학적 경험을 시각적으로 제공함으로써, 어려운 수학적 개념을 직관적으로 이해시켜 줄 것으로 기대된다.

본 논문에서는 극한 · 미분 · 적분 부분에서 어떻게 활용할 수 있는지에 중점을 두고 살펴보았는데, 교사가 기본적인 개념을 학생들에게 이해 시킨후, Maple 6에서 기본 개념 재확인, 계산결과의 확인, 여러 가지 공식 정리, 다양한 형태의 함수의 그래프를 그려봄으로써, 직관적으로 이해하면서 미적분에 자신을 갖도록 전개하였다. 학생들은 이런 활동을 통해 훨씬 흥미롭게 내용을 학습할 수 있을 것이며, 극한 · 미분 · 적분 뿐만 아니라, 특히, 함수의 그래프와 행렬, 방정식등 수치 계산에도 긍정적인 효과를 거둘 수 있다고 본다. 현재 우리나라의 교실에는 멀티미디어 시설이 설치되고 있다. 학생 개개인이 컴퓨터를 활용해서 프로그래밍을 하여 실습을 하려면 아직까지는 여건이 갖추어지지 않았다. 학교에서 컴퓨터를 활용하는 것도 제한될 수밖에 없다. 수학 수업 시간에 컴퓨터를 활용하는 것도 학생 개개인이 수학적인 내용을 프로그래밍하여 직접 실습을 하면서 배워가면 좋겠지만 아직은 여건이 되지 않고 있다. 가까운 시일내에 여건이 조성되면

Maple 6을 이용하여 수학 학습을 하는데 있어서 기대되는 효과는 다음과 같다.

첫째, 학습 자료를 시각화하여 제시함으로써 학습자가 개념을 직관적으로 쉽게 이해할 수 있고 학습자의 흥미를 유발할 수 있다.

둘째, 계산을 하거나 그래프를 그리는데 있어서 시간을 절약할 수 있다.

셋째, 교사 혼자서 수업을 하는 것이 아니라 학습자가 화면을 보고 계산을 하거나 그래프를 그리는 프로그램에 대하여 의견을 제시하면서 같이 참여하고, 그렇게 함으로써 창의력이나 문제 해결력의 신장에 도움이 될 수 있고, 집중력을 높일 수 있다.

넷째, 기본개념이 정립된 학생들은 스스로 컴퓨터 상에서 Maple 6을 재현함으로써 반복, 심화학습에 많은 도움을 줄 수 있다.

끝으로, 본 논문의 결과를 토대로 Maple 6을 활용한 수학과 수업이 좀 더 효과적으로 이루어지기 위해서 다음과 같은 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, Maple 6은 다양한 기능을 가지고는 있지만 영어로 되어 있다는 점이다. 고등학생 수준의 영어실력이면 Maple 6에서 제공하는 도움말이나 주어진 명령어가 대부분은 이해가 되지만 한글표현이 가능하고 교과서와 일치되는 수식 및 연산기호 표현이 가능한 수학 교육용 언어가 개발되어야 하겠다.

둘째, Maple 6을 이용하여 시각화를 향상시킬 수 있는 교수 자료의 개발을 위한 수업 환경이나 수업 내용 등에 대한 지속적인 연구가 이루어져야 한다.

셋째, Maple 6을 이용하여 개발한 교수-학습 보조 자료를 실제적인 교수 학습에 적용하였을 때 학생들의 개념 습득, 문제 해결력 등에 대한 구체적인 검증이 필요하다.

넷째, Maple 6을 이용하여 개발한 교수-학습 자료를 교사와 학생이 조작 기능을 익혀 어떤 방법으로 문제를 해결하고 있느냐에 대한 검증이 필요하다.

다섯째, Maple 6을 이용하여 교수-학습활동을 진행할 때, 학생들은 절대적으로

컴퓨터의 계산 결과를 믿는 경향이 있어 때로는 오류나 계산오차가 생길 수도 있다는 것을 생각하지 않는다. 따라서, 항상 교사는 이 점을 확인시키면서 교수-학습활동을 진행해야 한다는 것이다.

여섯째, Maple 6이 Excel 과 호환이 되고 HTML로 변환이 가능하기 때문에 Excel에서 Maple 6을 이용한 확률 통계 지도 방법과 웹상에서 Maple 6을 활용한 수학교육에 관해서도 미래에는 검토할 필요가 있다.

일곱째, 제7차 교육과정부터는 고등학교 2학년과 3학년 과정에서 수학교과가 다른 교과군과 함께 편성되어 학생 스스로가 교과를 선택하여 수업을 받도록 하는 학생중심 선택제가 실시된다. 그러므로 다른 교과에 비해 보다 많은 학생들을 수학교실로 끌어 들이기 위한 하나의 방법으로도 미래에는 수학시간에 Maple 6과 같은 컴퓨터 응용 프로그램을 활용한 수업을 유효적절하게 실시해야 될 필요가 있다고 생각된다.

또한, 미래의 연구 과제로 미·적분 단원에 대한 Maple 6을 적용한 결과 학생들의 반응 및 학습 효과를 검증할 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. 박세희(1987), “수학의 세계”, 서울대학교 출판부

2. 김용태, 박한식,우정호(1997), “수학교육개론”, 서울대학교 출판부

3. 구광조, 오병승, 전평국 공역(1998), “수학 학습 심리학”, 교우사

4. 윤행원외 5인(2000) “미분적분학과 그 응용”, 경문사

5. 박경수, 한동숭(2000), “ Maple V-미분적분학을 중심으로”, 경문사

6. 신동선, 류희찬(1999), “수학교육과 컴퓨터”, 경문사

7. 고완경(1999), “수학 및 통계학 연구를 위한 기초 Maple V 입문”, 경문사

8. 최한숙(1997), “미적분에서의 Mathematica의 활용”,전남대학교 교육대학원 석사학위논문

9. 김석만(2000), “고등학교에서 Maple을 이용한 함수의 지도에 관한 연구” -공통수학 교과 중심으로-, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문

10. 홍성민(1999), “Maple을 활용한 수학 교수법 연구” 전주대학교 교육대학원 석사학위논문

11. 홍인실(1997), “ Computer Program을 이용한 도함수 접근 방법에 관한 연구”, 홍익대학교 교육대학원 석사학위논문

12. 강옥기(1989), “Computer Programming이 수학 학습에 미치는 효과”,수학 교육논집 제7권 : 23-41.

13. 김용운 외 (1996), 「數學史大全」,서울 : 도서출판 枯成

14. 성수용(1998), “컴퓨터를 활용한 수학교육 방법 모색”, 순천향대학교 교육대학원 석사학위논문

15. 지병한(1998), “ 수학 교육에서 계산기 사용이 학습에 미치는 영향에 관한 연구, 강원대학교 교육대학원 석사학위논문

16. 김상기(1998), “고등학교에서 Mathematica를 이용한 함수의 지도에 관한 연구”, 충북대학교 교육대학원 석사학위논문

17. 박을태(1998), "Maple을 이용한 함수의 그래프 지도에 관하여" 전북대학교 교육대학원 석사학위논문

18. 곽성은(1998), "Maple을 통한 수학교육의 향상, 한국수학교육학회 시리즈 E", <수학교육 프로시딩>, 제7집

19. 손기도(1998), "수학적 모델링과 그래픽을 활용한 탐구수업 효과의 고찰" -고등학교 공통수학 부등식의 영역을 중심으로-, 전주대학교 교육대학원 석사학위 논문

20. 엄민섭(2000), "중등 수학교육에서의 Mathematica 활용 방안에 대한 고찰", 울산대학교 교육대학원 석사학위논문

21. 이상화(1993), "미분법과 그 활용에 관한 연구", 서강대학교 교육대학원 석사학위논문

22. 이종영(1999), "컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석", 서울대학교 대학원 수학교육과 박사학위논문

23. 박홍규(1995), "고등학교에서의 미적분학의 지도에 관하여", 한남대학교 교육대학원 석사학위논문

24. 구정모(2000), "Mathematica 이용한 미분·적분법의 지도에 관한 연구", 인천대학교 교육대학원 석사학위논문

25. 정영복(2000), " Mathematica 의 중등 수학교육 활용 방안" -그래픽 기능을 중심으로-, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문

26. 최수정(2000), "컴퓨터에 의한 수학교육에 관한 연구" <Mathematica를 중심으로>, 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문

27. 박한식외 5인(1996), "고등학교 공통수학", (주)지학사

28. 박두일외 3인(1996), "고등학교 수학Ⅰ,수학Ⅱ" (주)교학사

<Abstract>

A Study of Teaching differential and integral calculus by using Maple 6 in highschool.

-In Highschool Mathematics Ⅰ,Ⅱ-

Kim, Byeong Tak

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Kim, Do hyun

The current Korean highschool education in mathematics needs changes. It is too stereotypical for the students to have interests in it and to think creatively. This study tries to improve current situation of korean mathematics education.

The aim of this study is to make the teaching material most suitable for effective teaching limit and differential and integral calculus in highschool mathematics Ⅰ, Ⅱ by using the function of Maple 6 which is computer-applied software.

There are three aims in this thesis. First, This concretely develops the process of understanding the fundamental concepts easily, checking various calculation formula and the result of calculation by Maple 6. Second, this motivates the learners′ interests by visualizing graphs and the procedure of calculation based on the existing learning material in the text. Third, especially this intends to enable the students who established the

mathematical basic concept to solve the problems by using the maple 6, give the easiest way to get the result, draw their interests in mathematics and improve their creativity. In addition, this, I think, is helpful for teachers themselves to make their additional teaching learning materials. This also puts great importance on students′ reacquiring the basic concepts in limit and differential and integral calculus. Therefore, when they teach, there should be additional learning materials. And the effects of understanding limit and differential and integral calculus should be examined by researchers in the future.