
碩士學位 請求論文

空氣 抵抗에 따른 拋射體의 軌道 變化 考察

指導教授 朴 奎 殷



濟州大學校 教育大學院

物理教育 專攻

韓 大 熙

1989年度

空氣抵抗에 따른 拋射體의 軌道
變化 考察

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함



提出者 韓 大 熙

指導教授 朴 奎 殷

1989年 7月 日

韓大熙의 碩士學位 論文을 認准함

1989年 7月 日



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

主 審

Ⓜ

副 審

Ⓜ

副 審

Ⓜ

濟州大學校 教育大學院

目 次

Abstract	1
I. 序 論	2
II. 理 論	4
III. 實 驗 裝 置 및 方 法	16
IV. 結 果 및 分 析	18
V. 結 論	34
參 考 文 獻	35



< Abstract >

A Study on Trajectory of Projectile Motion with Air Resistance

Han, Dae-Heui

Physics Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

*Supervised by professor **Park, Kyu-Eun***

Moving projectile with air resistance is affected by drag force, lift force and gravitational force. Lift force is not considered in spherical projectile because air stream is symmetrical around the sphere. Hence we compare range and hang time of golf ball, base ball and softball with theoretical value when they are launched.

The results of this study are follows;

- 1) Solution of the equation of motion with air resistance is not perfectly fitted to experimental result, but in case of air resistance action on the projectile is proportional to the square of instantaneous speed, theoretical value is approximatly same as experimental value.
- 2) The trajectory is not symmetrical. The ball takes less time to rise to its maximum height than it does to fall back to the ground. The descent is steeper than the rise. The speed of the ball when it hits ground is less than the launching speed.
- 3) The launching angle for maximum horizontal range is generally about 45° .

* A Thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Education in July, 1989.

I. 序 論

物體가 空氣中에서 運動하게 되면 그 物體는 운동 방향과 반대 방향의 抗力(drag force), 운동 방향과 垂直인 揚力(lift force), 重力 및 그 반대 방향의 揚力 등 여러가지 힘을 받게 된다. 그리고 抗力은 다시 物體의 前面과 後面의 壓力 차이로 생기는 힘과, 空氣의 粘性때문에 생기는 힘으로 구분할 수 있다.¹⁾ 한편, 이와같은 힘에 영향을 미치는 요인은 物體의 크기나 모양, 表面狀態나 自體 回轉運動, 運動 速度, 空氣의 密度나 粘性 등 아주 다양하다.²⁾

空氣의 抵抗力을 받는 拋射體의 運動에 관한 연구가 다수의 學者에 의해 실시되어 왔다. 野球공의 表面 狀態와 그로인해 생기는 變化球에 대해서는 Cliff Frohlich(1984년)³⁾가 행했고, 打者가 친 공의 運動 軌道에 관해서는 Rober G. Watts와 Eric Sawyer(1976년)⁴⁾가, 골프공에 적용할 수 있는 最大 射程距離에 관한 數值的인 解를 Herman Erlichson(1983년)⁵⁾이 컴퓨터를 이용하여 구했다. 圓盤에 작용하는 空氣 抵抗力에 대해서는 R. V. Ganslen(1964년)⁶⁾이, 포환에 관해서는 D. B. Lichtenberg와 J. G. Wills(1978년)⁷⁾가 연구했으며 그외 여러 분야에 걸쳐 다수의 學者들이 空氣 抵抗力을 연구했다. 上述한 학자 모두가 空氣 抵抗力을 拋射體 運動 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 두어 설명하고 있다. 이는 각종 운동 경기에 나타나는 拋射體 運動을 速度에 一次的으로 比例하는 抵抗力으로 설명하면 잘 적용되지 않기 때문이다.⁸⁾

그러므로 본 논문에서는 空氣 抵抗力을 받는 拋射體의 運動方程式을 記述할 때, 速度와의 관계를 物體의 半徑을 중심으로 살펴보고 실험을 통해 이를 분석하고자 한다.

다음 節에서는 레이놀드 수에 따라 運動하는 球의 周圍에 形成되는 空氣의 유형을 고려하여 空氣 抵抗力을 速度에 一次的으로 比例하는 힘으로 둘수 있는 경우와 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 둘수 있는 경우를 살펴보고, 그에 따른 각각의

운동방정식과 抵抗力을 無視한 경우의 운동방정식을 記述하겠다.

實驗은 發射臺를 직접 제작하여 골프공, 야구공, 소프트공을 對象으로 射程距離와 滯空 時間을 측정했으며 이 자료를 토대로 理論上 射程距離와 比較 分析했다.



II. 理 論

일반적으로 球와 같은 對稱形의 物體는 空氣中에서 運動할 때, 球 周圍의 空氣 흐름이 上下 對稱的이므로 揚力이 없고, 抗力의 영향만을 받게 된다. 한편 運動하는 球에 작용하는 抗力은 壓力抗力과 摩擦抗力으로 구분할 수 있다.¹⁾

壓力抗力은 球의 表面 要素 dA 에 작용하는 압력을 p 라 하고, 空氣의 흐름 方向과 dA 가 이루는 角을 ϕ 라 하면

$$F_p = \int p \cos \phi \, dA \quad (1)$$

가 된다. 한편 球의 表面 要素에 작용하는 摩擦力을 q 로 두면

$$F_f = \int q \sin \phi \, dA$$

인 摩擦抗力을 갖는다. 그러므로 抗力은

$$F_D = F_p + F_f \quad (2)$$

이다. 그런데 원통이나 球와 같은 물체가 받는 抗力은 摩擦抗力보다 壓力抗力이 대단히 커서 摩擦에 의한 抗力은 무시할 수 있다.¹⁾

단면적 A 인 球가 밀도 ρ 인 공기중에서 速度 v 로 運動할 때, 球에 作用하는 抗力을 구해보면, 球가 運動하면서 Δt 時間 동안 휩쓸고 지나간 부피가 $Av\Delta t$ 이므로 공기 입자들은 運動量 $\Delta p = Av\Delta t \rho v$ 를 얻게 된다. 한편, 球는 같은 量의 운동량을 잃으므로 球에 作用하는 抗力은 $F = \Delta p / \Delta t = A\rho v^2$ 이 된다. 이 抗力의 일반적인 표현은¹⁾

$$F_D = C_D \rho A v^2 / 2 \quad (3)$$

인데, C_D 는 抗力係數(drag coefficient)로서 레이놀드수(Reynolds number)에 依存한다. 한편 球에 작용하는 레이놀드수 R 은

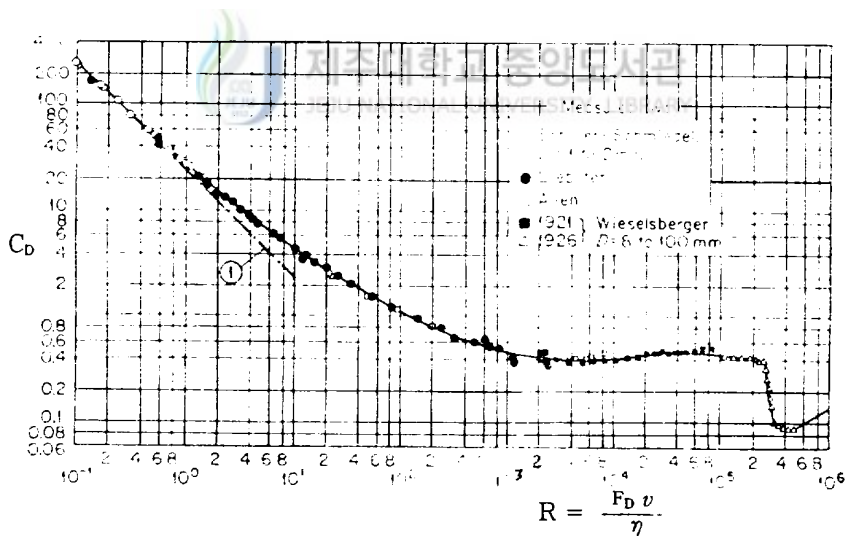
$$\begin{aligned}
 R &= \text{관성력} / \text{점성력} \\
 &= \rho v^2 (2r)^2 / 2r\eta v \\
 &= 2\rho r v / \eta
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

이 되며, η 는 空氣의 粘性係數이다.

<그림 1>은 R 과 C_D 의 관계를 나타낸 것이다. $R \leq 1$ 인 범위에서는 그림에 표시된 선 ①과 같은 $C_D = 24/R$ 의 관계를 갖고, $1 \leq R \leq 10^5$ 인 범위에서는 $C_D \approx 1/2$ 이며, $R \approx 2.5 \times 10^5$ 인 부근에서는 C_D 의 값이 급격히 감소함을 알 수 있다.¹⁾

抗力은 C_D 에 의존하고, C_D 는 R 의 값에 따라 변하므로 레이놀드수를 細分하여 살펴보아야 한다. 이는 運動하는 球 주위의 空氣 흐름이 서로 다른 樣狀으로 나타나 抗力이 달라지기 때문이다.⁹⁾

本節에서는 運動하는 球 주위에 層流(laminar)를 形成하는 $R \leq 1$ 인 범위, 渦流를 포함하는 $1 \leq R \leq 10^5$ 인 범위, C_D 가 급격히 감소하는 $R \approx 2.5 \times 10^5$ 인 부분의 空氣

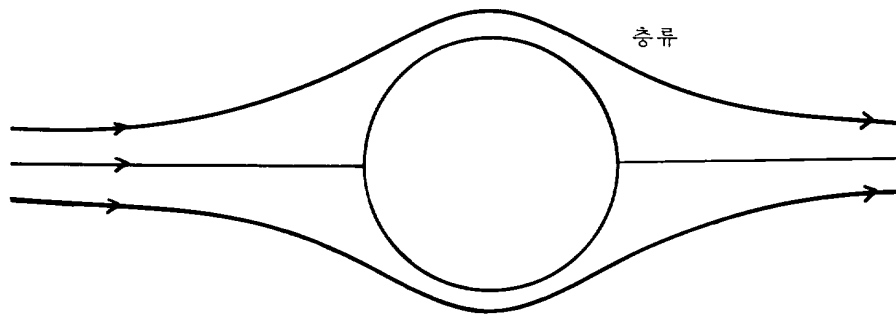


<그림 1> 레이놀드수 R 과 抗力係數 C_D 의 관계

흐름으로 나누어 살펴보고, 크게 $R \leq 1$ 인 경우와 $1 \leq R$ 인 경우로 구분하여 運動方程式을 記述하겠다.

레이놀드수 R 이 1보다 작은 경우 球 주위의 공기 흐름은 層流가 된다. 이 경우 抗力은 공기의 층과 층 사이의 摩擦力으로 생기며, 이 힘은 空氣의 粘性에 依해 결정된다.^{10,11)}

<그림 2>는 레이놀드수 R 이 1보다 작은 경우, 運動하는 球 주위의 공기 흐름을 나타낸 것인데, 이 경우 $C_D = 24/R$ 인 관계를 갖는다.¹⁰⁾



<그림 2> 레이놀드수 R 이 1보다 작은 범위에서 運動하는 球 주위의 공기 흐름

그러므로 式(3)과 (4) 그리고 $R=24/R$ 인 관계로 부터 抗力이

$$F_D = 6\pi\eta r v \quad (5)$$

가 됨을 알 수 있다.

한편 式(5)에서 v 를 終末速度(terminal velocity) v_T 로 두면

$$\begin{aligned} F_D &= 6\pi\eta r v_T \\ &= mg \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s g \end{aligned} \quad (6)$$

가 되는데, 여기서 ρ_s 는 球의 密度를 나타낸다. 式(4)에서 v 를 v_T 로 두고 式(6)과 관련지으면

$$R = 4\pi\rho\rho_s r^3 g / \eta^2$$

이 된다.

球의 密度를 물과 같은 $1g/cm^3$ 로 가정하고, $20^\circ C$ 에서 空氣의 密度 $1.2 \times 10^{-3}g/cm^3$ 와 粘性係數 $1.8 \times 10^{-4}g/cm \cdot s$ 로 두어 $R \leq 1$ 인 관계를 만족하는 r 값을 구하면

$$r \leq 4 \times 10^{-3}cm \quad (7)$$

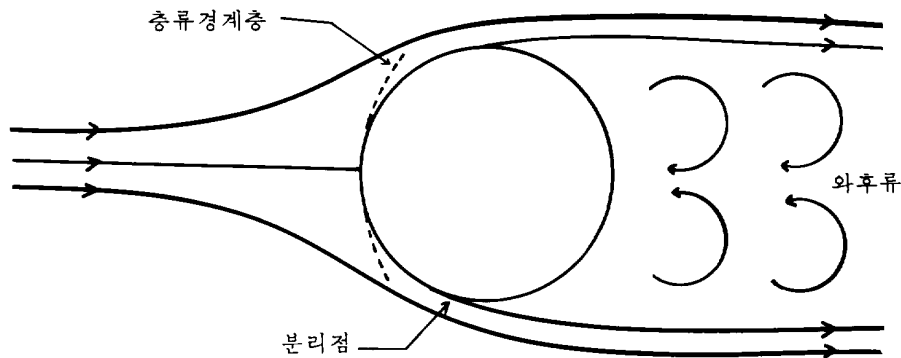
임을 알 수 있다. 즉 半徑이 $4 \times 10^{-3}cm$ 보다 작은 球가 공기중에서 운동할때, 抗力을 速度에 一次的으로 비례하는 힘으로 두어 運動方程式을 記述할 수 있다.¹²⁾ 따라서 式(5)는 空氣中에서 運動하는 一般的인 抛射體의 抗力으로 적용할 수 없다.

실질적으로 각종 운동경기나 日常生活에서 관찰할 수 있는 抛射體 運動에는

$$F_D = C_D \rho A v^2 / 2, \quad 1 \ll R \leq 10^5 \quad (8)$$

와 같은 抗力이 作用하게 된다.

한편, $1 \ll R \leq 10^5$ 인 범위에서 抗力係數 C_D 는 약 1/2인데, 공기의 흐름이 渦流로서 空氣 粒子들은 아주 불규칙한 경로를 따른다. <그림 3>에서 알수 있듯이 運動하는 球의 前面에는 層流 境界層(laminar boundary layer)을 形成하고 分離點 뒤에는

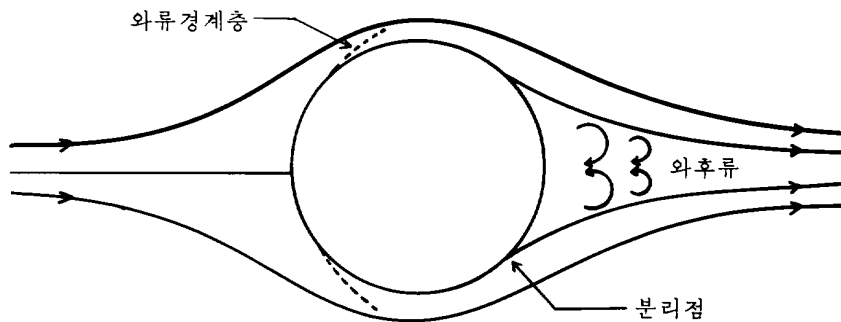


<그림 3> 레이놀드수 Ro 이 $1 \ll R \leq 10^5$ 인 범위에서 運動하는 球 주위의 공기 흐름

渦後流(turbulent wake)가 생긴다.¹¹⁾ 이 경우 抗力은 대부분 球 前面과 後面의 壓力 차이로 생긴다.¹¹⁾

한편 레이놀드수가 $R \approx 2.5 \times 10^5$ 인 부근에서는 항력계수 C_D 가 급격히 감소한다.

<그림 4>는 이 경우의 空氣 흐름을 나타낸 것이다.¹¹⁾ 渦流 境界層보다 훨씬 뒤쪽에 분리점이 형성되며 이로 인해 와후류가 오므라든다. 그러므로 C_D 가 감소하고, 따라서 抗力도 감소하게 되어 球의 運動에 영향을 미치게 된다.



<그림 4> 레이놀드수 R 이 2.5×10^5 인 부근에서 運動하는 球 주위의 空氣 흐름

한편 Briggs는 1959년에 미국 Major league 야구 경기를 분석하여 終末速度가 $1m/s$ 와 $42.67m/sec$ 인 범위에서는 레이놀드 수가 4×10^3 과 2×10^5 인 범위에 있음을 밝혔다.¹³⁾

以上の 理論을 종합하면 空氣中에서의 抛射體 運動方程式을 記述할 때, 반경이 아주 작은 경우는 速度에 一次的으로 比例하는 空氣 抗力으로, 日常的인 生活에서 관찰되는 抛射體 運動은 速度의 自乘에 比例하는 空氣 抗力으로 두어야만 한다.

抛射體의 運動에 대하여 空氣의 抵抗을 무시한 경우와 速度에 一次的으로 比例하는 抗力을 갖는 경우, 速度의 自乘에 비례하는 抗力을 갖는 경우의 順으로 運動 方程式을 고찰하겠다.

1. 空氣 抵抗을 無視한 抛射體 運動

質量이 m 인 物體가 初速 v_0 , 發射角 α 로 發射될 때 이 抛射體의 運動方程式은¹⁴⁾

$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

가 되고, $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$ 로 두면 임의의 時間에서 위치는

$$x = v_{x0} t, y = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

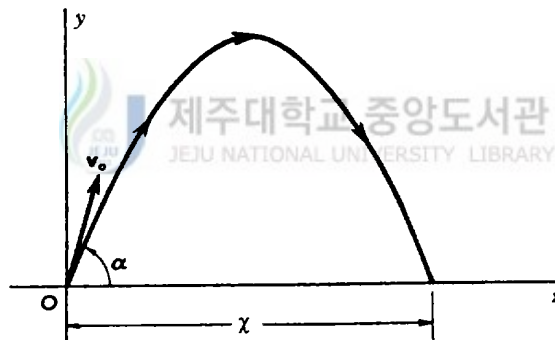
이 되며 최대 수평 거리와 수직 거리는

$$x_{\max} = 2 v_{x0} v_{y0} / g, y_{\max} = v_{y0}^2 / 2 g \quad (9)$$

이다. 한편 滯空 時間은

$$T = 2 v_{y0} / g \text{ 가 된다.}$$

<그림 5>은 抵抗力을 無視할 때의 拋射體 運動 軌道를 나타낸 것으로서 완전한 拋物線을 그리고 있다.¹⁴⁾



<그림 5> 空氣 抵抗을 無視한 拋射體의 運動 軌道

2. 空氣 抗力이 速度에 一次的으로 比例하는 拋射體의 運動

質量 m 인 物體가 空氣中에서 받는 抗力이 $-Kmv$ 이면 運動方程式¹⁵⁾은

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - Kmv \quad (10)$$

가 된다. 이 式을 水平과 沿直 方向으로 나누어 살펴보면
 水平 方向의 式은

$$m \frac{dv_x}{dt} = -Kmv_x \quad (11)$$

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-kt} \quad (12)$$

$$x(t) = (v_{x0} / K) (1 - e^{-kt}), \quad (13)$$

가 된다.

沿直 方向의 式은

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - Kmv_y \quad (14)$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{K} + (v_{y0} + g/K) e^{-kt} \quad (15)$$

$$y(t) = -\frac{g}{K} t + \frac{1}{K} (v_{y0} + g/K) (1 - e^{-kt}) \quad (16)$$

가 된다.

만일, $t \rightarrow \infty$ 이면 $v_y \rightarrow -g/K$ 가 되는데 부호가 陰인 것은 沿直 下向으로 運動함을 의미하며, 이 時의 速度를 終末速度라 한다.

最高點에 도달하는 時間 T_1 은 式(15)를 $v_y(T_1) = 0$ 로 둠으로서

$$e^{-kT_1} = \frac{g}{K} / (v_{y0} + g/K)$$

$$T_1 = -\frac{1}{K} \ln \frac{g/K}{v_{y0} + g/K}$$

$$= \frac{1}{K} \ln \left(1 + \frac{K}{g} v_{y0} \right) \quad (17)$$

가 되고, 代數函數의 Taylor 級數 전개식을 이용하면

$$T_1 = (v_{y0} / g) \left[1 - \frac{K}{2} \left(\frac{v_{y0}}{g} \right) + \frac{K^2}{3} \left(\frac{v_{y0}}{g} \right)^2 - + \dots \right] \quad (18)$$

이 된다.

y_{\max} 는 式(17)을 式(16)에 代入하면

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y(T_1) \\ &= -\frac{g}{K^2} \ln \left(1 + \frac{K}{g} v_{y0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{K} \left(v_{y0} + \frac{g}{K} \right) \left[1 - \frac{g}{K} \left(v_{y0} + \frac{g}{K} \right) \right] \\ &= -\frac{g}{K^2} \ln \left(1 + \frac{K}{g} v_{y0} \right) + \frac{v_{y0}}{K} \end{aligned} \quad (19)$$

가 된다. 다시 代數函數의 Taylor 級數 전개식을 이용하면

$$y_{\max} = \frac{v_{y0}^2}{2g} - \frac{K}{3} \frac{v_{y0}^3}{g^3} + \frac{K^2}{4} \frac{v_{y0}^4}{g^3} - + \dots \quad (20)$$

이 된다.

滯空 時間 T_2 는 式(16)에 $y(T_2)=0$ 으로 두면

$$T_2 = \frac{1}{g} \left(v_{y0} + \frac{g}{K} \right) (1 - e^{-KT_2}) \quad (21)$$

인 超越函數가 된다. 指數函數의 Taylor 級數 전개식을 이용하면

$$T_2 = \frac{1}{g} \left(v_{y0} + \frac{g}{K} \right) \left(KT_2 - \frac{K^2}{2!} T_2^2 + \frac{K^3}{3!} T_2^3 - \frac{K^4}{4!} T_2^4 + \dots \right) \quad (22)$$

또는

$$T_2 = \frac{2 v_{y0}}{g} \left(1 + K v_{y0} / g \right) + \frac{K}{3} T_2^2 - \frac{K^2}{12} T_2^3 + \dots \quad (23)$$

이 된다. 먼저 零次($K=0$) 근사인 反復 近似셈을 하면 $T_2^{(0)} = 2v_{y0} / g$ 가 된다. 이 값을 式(23)에 넣으면

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{2v_{y0}}{g} / \left(1 + \frac{Kv_{y0}}{g}\right) + \frac{K}{3} \left(\frac{2v_{y0}}{g}\right)^2 - \frac{K^2}{12} \left(\frac{2v_{y0}}{g}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{2v_{y0}}{g} \left\{ 1 - K \frac{v_{y0}}{g} + K^2 \left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^2 - K^3 \left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^3 + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{4K}{3} \left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^2 - \frac{2K^2}{3} \left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

이 된다. 여기서 k 의 一次項까지만 취하면

$$\begin{aligned} T_2 &\equiv T_2^{(1)} \\ &= \frac{2v_{y0}}{g} \left\{ 1 - \frac{K}{3} \left(\frac{v_{y0}}{g}\right) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

이 된다. 만약 더 정확히 계산하려면 K^2 이후의 項을 고려해야 한다.

수평 거리는 式(13)을 指數函數의 Taylor 級數 전개식을 이용하여 전개하면

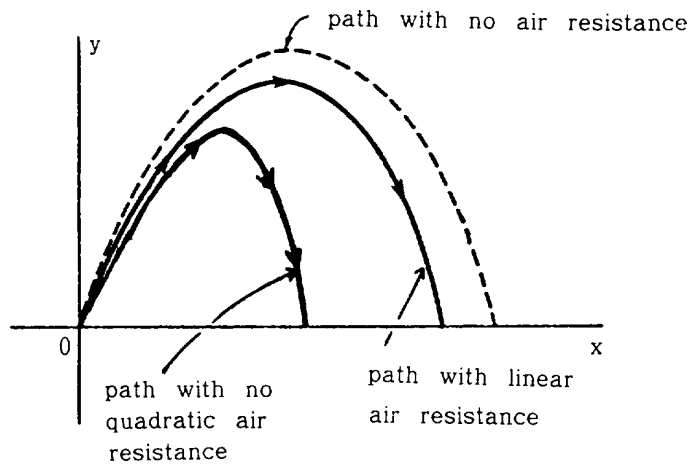
$$x(t) = v_{x0} \left(t - \frac{K}{2} t^2 + \frac{K^2}{6} t^3 - \dots \right)$$

인데, 여기에 T_2 의 값을 넣으면

$$x_{\max} = \frac{2v_{x0} v_{y0}}{g} \left[1 - \frac{4K}{\eta} \left(\frac{v_{y0}^3}{g^2}\right) \right] \quad (26)$$

를 얻을 수 있다.

<그림 6>은 空氣 抗力이 없을 때와 速度에 一次的으로 比例하는 경우, 速度의 自乘에 比例하는 경우로 둘 때의 拋射體 運動 軌道를 비교한 것이다.¹⁴⁾



〈그림 6〉 空氣 抗力을 無視, 速度에 一次的으로 比例하는 경우, 速度의 自乘에 比例하는 경우로 둘 때의 拋射體 運動 軌道

3. 空氣 抗力이 速度의 自乘에 比例하는 拋射體의 運動

質量 m 인 物體가 空氣中에서 運動할 때 $-bv^2$ 의 抗力을 받는다면 運動方程式¹²⁾은

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv^2 \quad (27)$$

또는

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

이 된다. 수직 上方을 y 축의 陽으로 두었고 b 는 $C_D \rho A / 2$ 의 값을 갖는다. 終末速度를 $v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow -V$ 로 두면

$$V = (mg/b)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

이 되는 終速度를 얻을 수 있고, 이 終速度와 重力加速度的 조합으로 自然 時間 單位(natural time unit)인

$$T = V / g \quad (31)$$

를 얻을 수 있다. 이 T는 運動하는 物體가 終末速度에 이를 때까지의 時間이다. 式(30)과 (31)을 이용하면 변수들을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\tau = t/T \quad (32)$$

$$U_x = v_x/V, \quad U_y = v_y/V \quad (33)$$

$$X = x/VT \quad Y = y/VT \quad (34)$$

위의 변수들을 이용하여 運動方程式을 다시 표현하면

$$\begin{aligned} \dot{U}_x &= -U_x (U_x^2 + U_y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{U}_y &= -1 - U_y (U_x^2 + U_y^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (35)$$

이 된다.

한편 變位는

$$\begin{aligned} X &= x_0 + \int_0^\tau U_x d\tau, \\ Y &= y_0 + \int_0^\tau U_y d\tau \end{aligned} \quad (36)$$

가 된다.

運動方程式의 解를 얻기 위해, $U_y^2 / U_x^2 \ll 1$ 인 경우로 發射될 때를 살펴보면 式(35)는

$$\begin{aligned} \dot{U}_x &\approx -U_x^2, \\ \dot{U}_y &\approx -U_x U_y - 1 \end{aligned}$$

이 되며 적분으로

$$U_x = U_{x0} (1 + U_{x0} \tau)^{-1}$$

을 얻을 수 있고, U_y 를 간단히 하기 위해

$$U_y = hU_x \quad (37)$$

로 두면 $U_x \dot{h} = -1$ 이 된다. 그러므로

$$h = \frac{U_{y_0}}{U_{x_0}} - \int_0^\tau U_x^{-1} d\tau \quad (38)$$

이다.

式(37)과 (38), 그리고 U_x 의 결과式을 이용하면

$$\begin{aligned} U_x &= U_{x_0} (1 + U_{x_0} \tau)^{-1} \\ U_y &= [U_{y_0} - \tau (1 + U_{x_0} \tau / 2)] (1 + U_{x_0} \tau)^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

을 얻을 수 있다.

한편 變位는 式(39)를 적분하고 $X_0 = Y_0 = 0$ 임을 고려하면

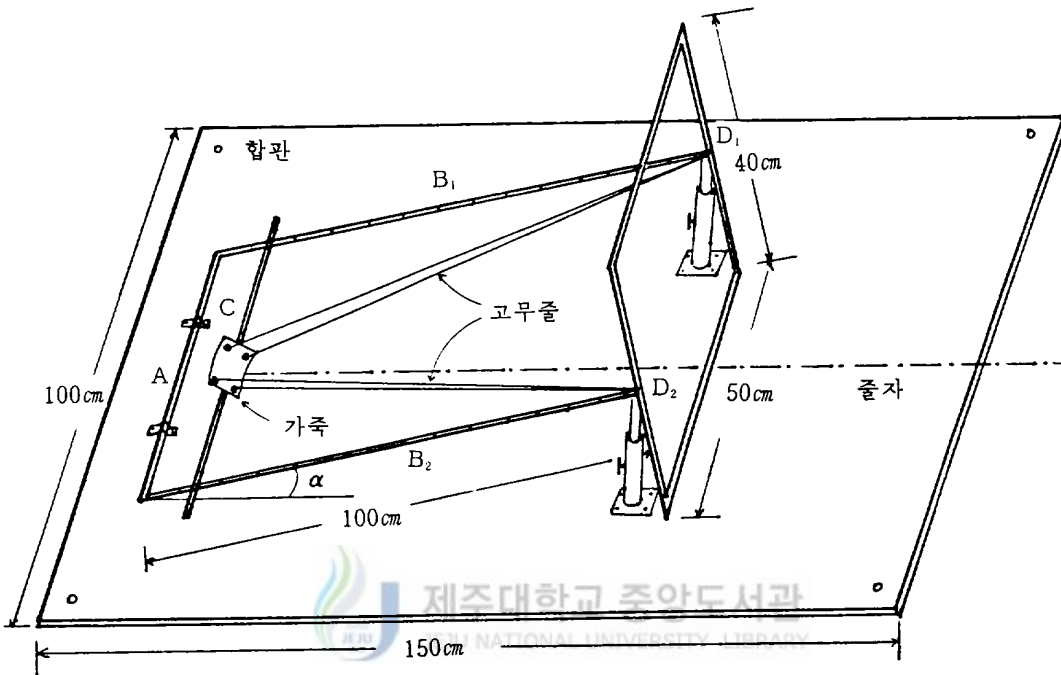
$$X = \ln(1 + U_{x_0} \tau) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Y &= -\tau / 2U_{x_0} - \tau^2 / 4 \\ &+ (U_{y_0} / U_{x_0} + 1/2 U_{x_0}^2) \ln(1 + U_{x_0} \tau) \end{aligned} \quad (41)$$

을 얻을 수 있다.

Ⅲ. 實驗裝置 및 方法

〈그림 7〉과 같은 發射臺를 직접 제작하여 拋射體의 自體 回轉運動에 의한 空氣 抗力을 最少化하면서 速度에 關係되는 項만을 측정했다.



〈그림 7〉 發射臺 모식도

〈그림 7〉과 같이 앵글철을 재료로 발사대를 조립한 후 합판에 부착했다. A부분을 합판에 半固定했으며 회전할 수 있도록 하여 α 에서 角度를 측정했다. 앵글철의 B₁과 B₂에는 미터자를 부착하여 고무줄이 늘어난 길이를 측정할 수 있도록 했다. C는 고무줄이 늘어났을 때 한쪽으로 치우치지 않도록 중심을 잡고, 측정된 각도와 늘어난 고무줄의 각도가 같게 손을 의지할 수 있도록 만들었다. 한편 공을 잡고 고무줄을 잡아 당길 때 움켜쥐기 쉽게 가죽을 사용했다. 또한 D₁과 D₂에는 고무줄 끝을 고정시켰고, 지면을 향하여 상·하로 길이를 조절할 수 있도록 다리를 부착했다.

이는 측정된 각도를 정확히 유지하고, 고무줄이 늘어났을 때 앵글철의 遊動을 막기 위한 장치이다. 한편 測定距離는 줄자를 사용하여 고무줄이 늘어났을 때의 위치로부터 공이 떨어진 지점까지의 거리를 측정했다.

發射는 手動으로 했으며, 실험은 바람의 영향을 줄이기 위해 室內에서 실시했다. 實驗對象은 <그림 7>의 발사대로 發射 가능한 골프공, 야구공, 소프트공을 선택했다.

실험상의 어려움은 고무줄을 늘여서 측정된 각도와 동일한 角으로 발사하는 것과, 공의 自體 回轉을 막기 위해 가죽의 中央에 物體를 固定시키는 것이었다.

발사각은 30°, 40°, 45°, 50°, 60°로 한정했다. 한편 고무줄이 늘어난 길이는 60cm와 70cm 두가지이며, 滯空 時間은 1/100초까지 측정 가능한 時計로 측정했다.

實驗 순서는 낮은 角부터 큰 角으로, 고무줄이 60cm 늘어났을 때부터 70cm 늘어났을 때의 순으로, 공은 골프공, 야구공, 소프트공의 순으로 시행했다. 공은 각각 8개를 사용했으며, 고무줄은 4개씩 사용했는데 탄성계수를 일정하게 유지하기 위해 30회 發射後 교환했다.

위와 같은 순서로 각각의 경우에 따라 9回 反復 시행했다.

<표 1>은 실험에 사용된 각종 기구 및 재료의 明細表이다.

<표 1> 실험에 사용된 각종 기구 및 재료의 明細表

시 계	디지털식, 1/100초, 과학교구공사(1987년)
줄 자	눈금장 50m, 최소눈금 2mm, 에스론제(1988년)
각 도 기	측정범위 0~90°, 최소눈금 0.5°, 대림화학(1989년)
고 무 줄	라텍스 고무줄, 70cm, 수정고무공업사(1989년)
골 프 공	질량 46g, 직경 4.26cm, 동아스포츠(주)(1989)
야 구 공	질량 145g, 직경 7.32cm, 동아스포츠(주)(1988)
소 프 트 공	질량 188g, 직경 9.70cm, 동아스포츠(주)(1988)
버어니어 캘리퍼스	측정범위 0~150mm, 최소눈금 0.05mm, 과학교구공사(1987년)
접시저울	칭량 1,000g, 감량 1,000mg, 과학교구공사(1987년)

IV. 結果 및 分析

고무줄의 彈性係數는 실험 장치에서 직접 측정한 결과 110.05N/m 이었고, 탄성 에너지가 모두 운동 에너지로 전환된다고 가정하여 $Kx^2/2 = mv_0^2/2$ 의 式으로 初期 速度를 구했다. 각각의 경우에서 얻은 9개의 測定值중에서 最長, 最短 距離는 精確한 測定值를 얻기 위해 버렸으며 나머지 7개의 측정치를 평균하여 測定距離와 滯空 時間으로 두었다. 空氣의 密度와 粘性係數는 1기압 20°C 에서의 값 $\rho = 1.2 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3$ 와 $\eta = 1.8 \times 10^{-4} \text{g/cm} \cdot \text{s}$ 로 계산했으며, 초기 속도를 변화시키기 위해 늘어난 고무줄의 길이를 60cm 와 70cm 두가지로 했다.

다음에 나타나는 표에서 '저항 무시 거리'는 v_0 를 이용하여 式(9)에서 구한 거리이고, '일차 항력 거리'는 式(26)에서, '自乘 항력 거리'는 抗力을 速度의 自乘으로 둘때 拋射體의 사정거리를 나타낸 式(40)에서 구한 數值이다.

각 공의 半徑과 質量은 8개씩의 공을 모두 측정한 후 평균치를 사용했으며, 測定 距離는 0.01m 까지 읽은 후 반올림 했고, 滯空 時間은 $1/100$ 초까지 측정했다.

1. 골 프 공

여덟개 공의 반경과 질량을 버니어 캘리퍼스와 접시저울로 측정하여 평균값을 계산한 결과 각각 0.021m 와 0.046kg 이었다.

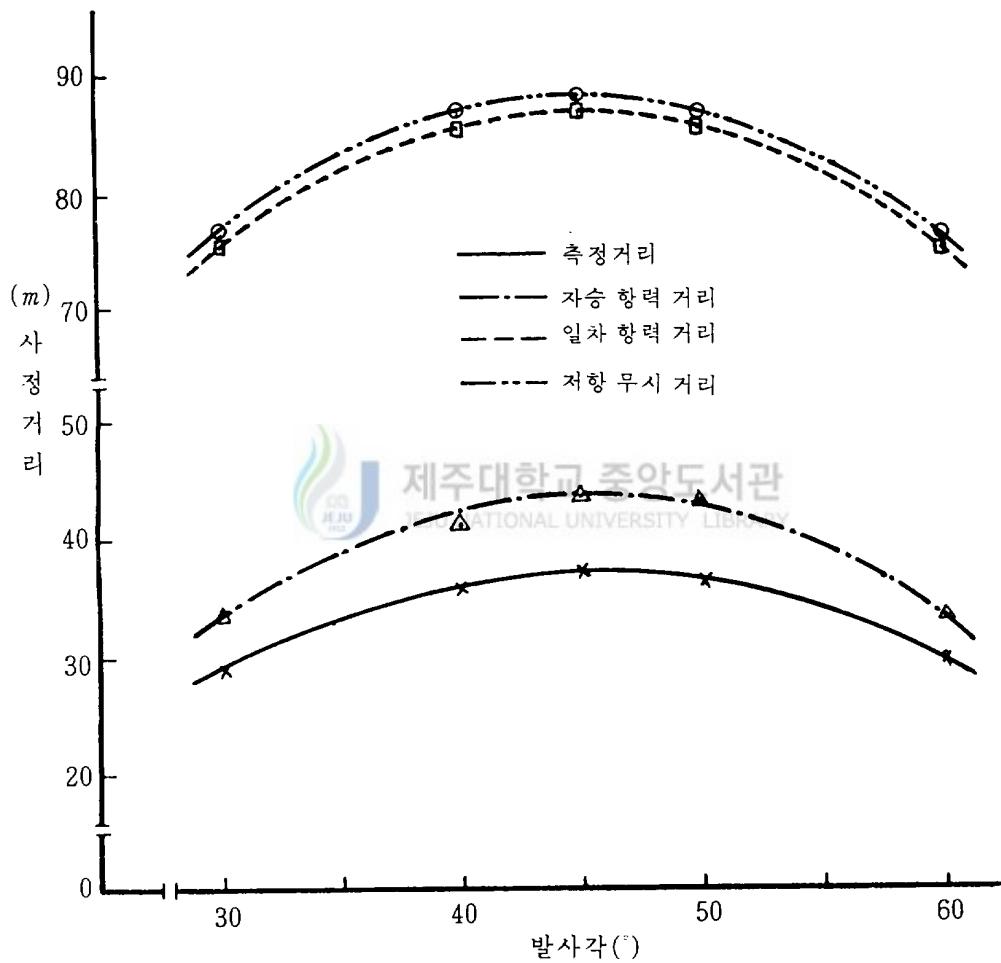
(1) 初速 $v_0 = 29.4\text{m/s}$ 일때

〈표 2〉 골프공이 初速 $v_0 = 29.4\text{m/s}$ 로 發射될 때의 射程距離

구분 발사각	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°	29.1	1.69	76.1	75.5	31.2
40°	35.8	2.19	86.6	85.7	41.0
45°	37.4	2.64	87.9	86.9	44.3
50°	36.3	2.79	86.6	85.6	43.2
60°	29.8	2.89	76.1	75.1	36.0

발사대를 이용하여 측정한 결과는 <표 2>와 같다. <표 2>를 근거로 사정거리를 發射角의 函數로 나타낸 것이 <그림 8>이다.

<그림 8>에서 보는 바와 같이 저항을 무시한 경우와 抗力을 物體의 運動 速度에 一次的으로 비례하는 힘으로 둘 때의 사정거리는 서로 비슷하지만 측정거리와 아주 큰 차이를 나타낸다. 이것은 空氣中에서의 拋射體 運動을 설명할 때 결코 抵抗을 무시할 수 없으며, 또한 골프공과 같은 반경을 갖는 球인 경우 抗力을 速度에 一次的으로 비례하는 힘으로 둘 수 없음을 의미한다.



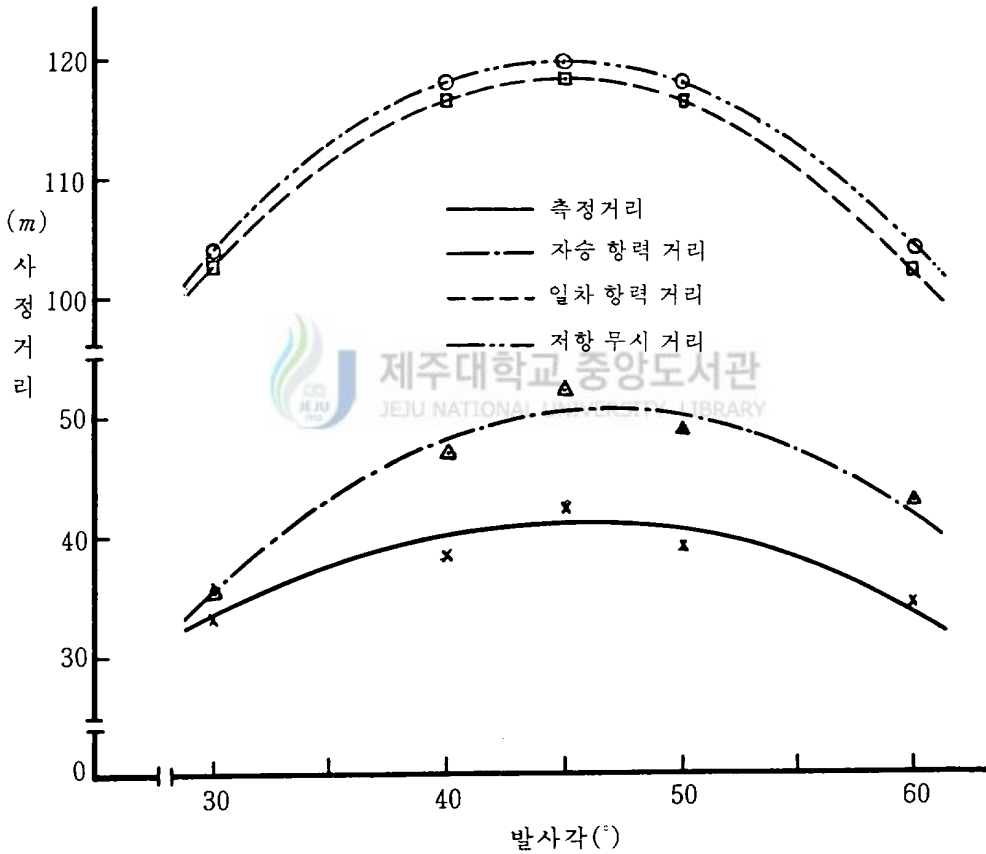
<그림 8> 初速이 29.4m/s인 골프공의 發射角과 射程距離의 관계

(2) 初速 $v_0 = 34.2\text{s}$ 일때

<표 3> 골프공이 初速 $v_0 = 34.2\text{m/s}$ 로 發射될 때의 射程距離

구분 발사각	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°	33.4	1.46	103.6	102.7	36.5
40°	38.5	2.20	117.9	116.5	46.5
45°	42.8	2.60	119.6	118.1	52.3
50°	38.8	3.08	117.9	116.2	48.4
60°	34.2	3.13	103.6	102.0	43.2

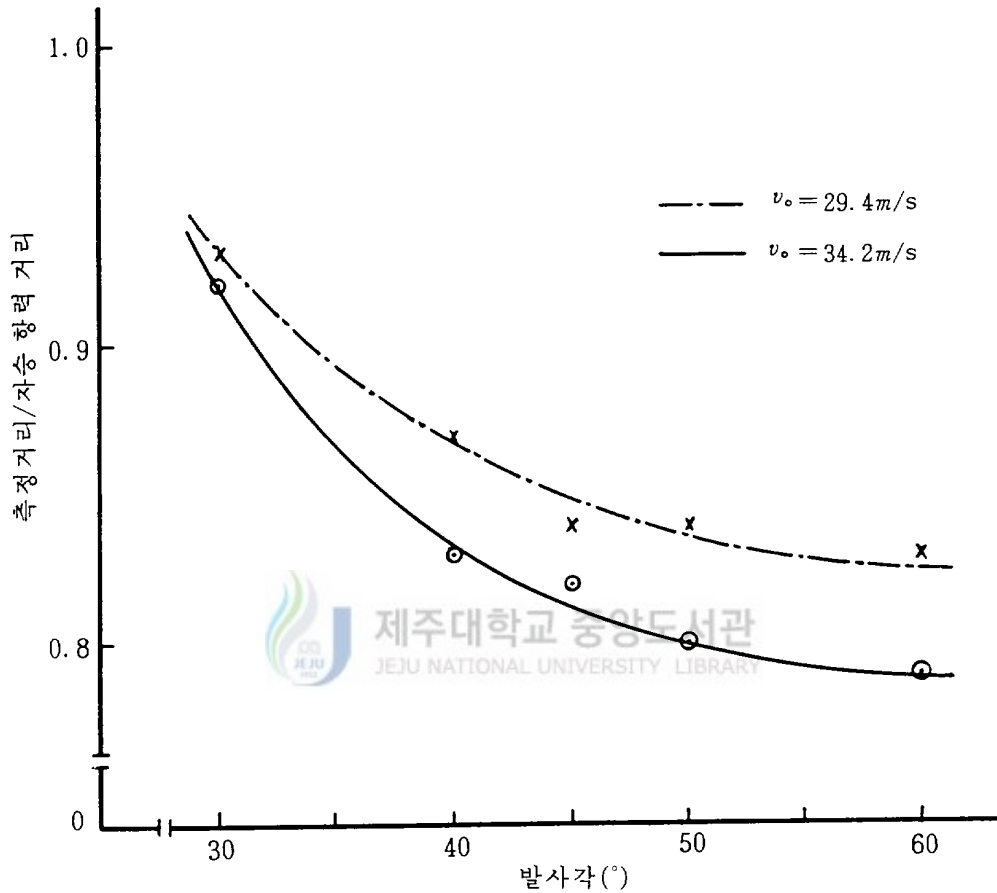
<표 3>을 이용하여 발사각과 사정거리의 관계를 <그림 9>에 나타내었다.



<그림 9> 初速이 34.2m/s인 골프공의 發射角과 射程距離의 관계

〈그림 9〉에서 보는 바와 같이 운동하는 포사체의 空氣 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 들 때가 측정거리와 유사한 값을 갖는다. 물론 일차 항력 거리와 저항 무시 거리는 측정 거리와 아주 큰 차이를 나타내고 있다.

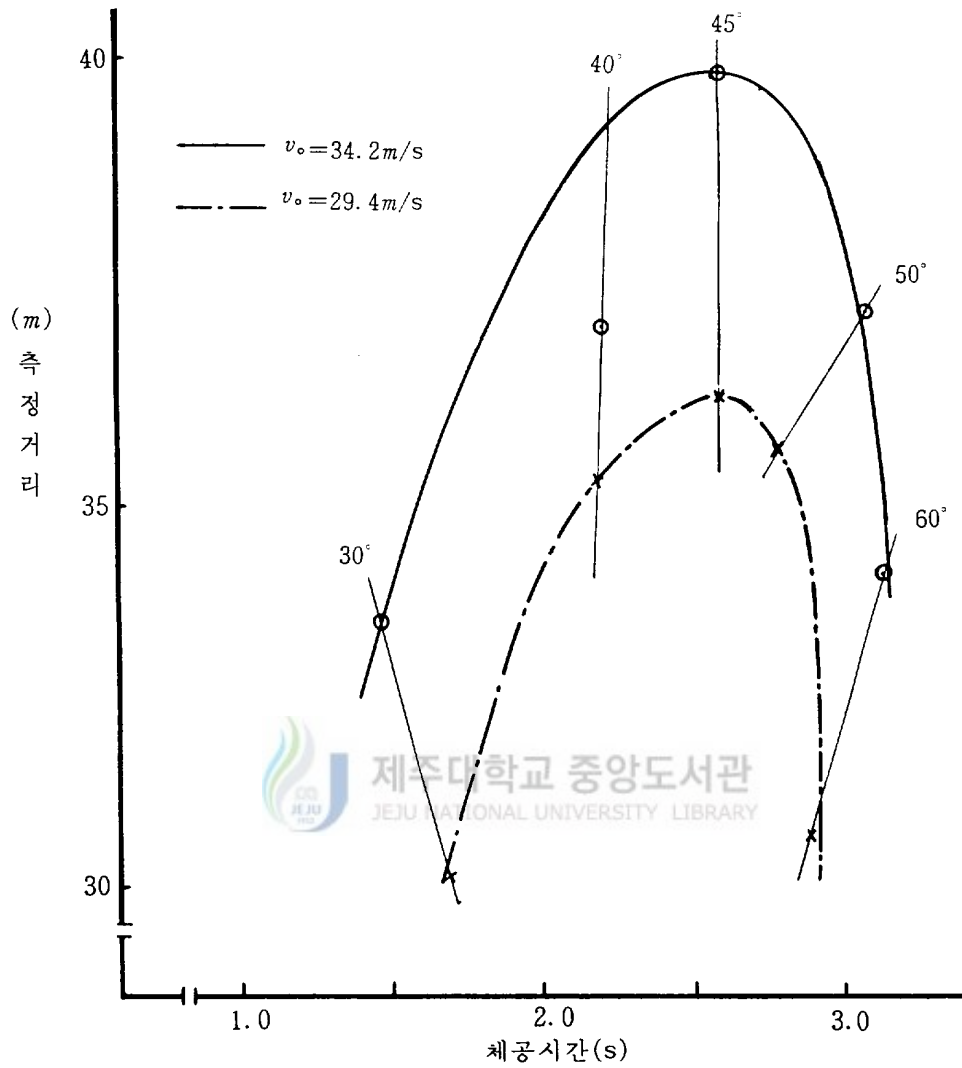
〈그림 10〉은 발사각에 따른 自乘 抗力 距離와 測定距離의 比를 나타낸 것이다.



〈그림 10〉 골프공의 發射角에 따른 測定距離와 自乘 抗力 距離의 比 관계

〈그림 11〉을 살펴보면 발사각이 커질수록 측정거리와, 速度의 自乘으로 둔 항력이 작용할 때 사정거리의 비가 작아진다. 이는 측정거리와 자승 항력 거리 사이에 오차가 많음을 의미한다. 한편 初期 速度가 큰 경우일수록 더 큰 오차를 나타낸다.

〈그림 11〉은 체공 시간과 측정거리의 관계를 나타낸 것이다.



〈그림 11〉 골프공이 發射되었을 때 滯空 時間과 測定距離의 관계

〈그림 11〉은 골프공의 射程距離와 滯空 時間의 관계를 나타낸 것인데 중요한 의미를 포함하고 있다. 우선 발사각이 45°일때 사정거리가 가장 길며, 적어도 40°와 50° 사이의 발사각을 유지해야 비교적 먼 사정거리를 얻을 수 있다. 한편

45°를 기준으로 좌측보다 우측 기울기의 절대값이 더 크다. 이는 空氣中에서 拋射體의 運動 軌道가 완전한 拋物線이 아님을 의미한다. 또한 각 발사각마다 그려진 선은 다른 초기 속도에 대한 체공 시간과 측정 거리의 관계를 예측하게 해준다.

2. 야 구 공

여덟개 공의 반경과 질량을 버니어 캘리퍼스와 접시저울로 측정하여 평균값을 구한 결과 각각 0.037m와 0.145kg이었다.

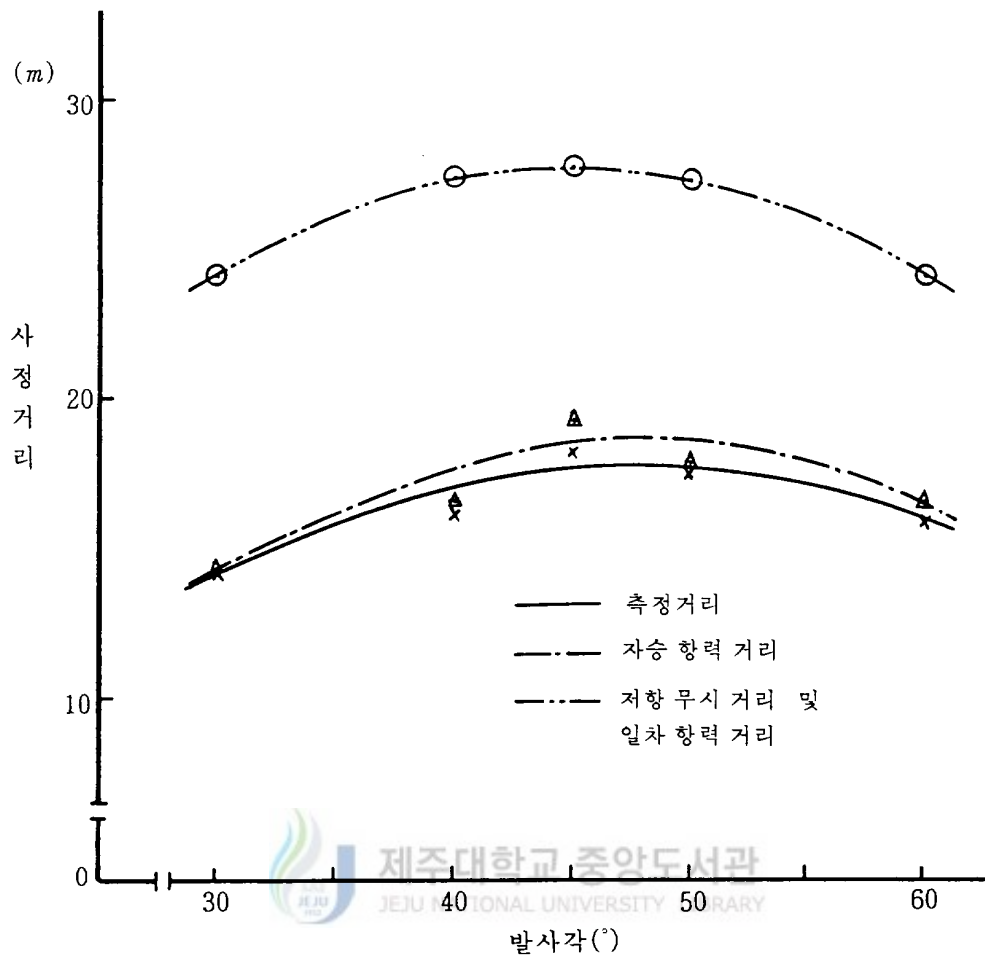
(1) 初速 $v_0 = 16.5\text{m/s}$ 일때

발사대를 이용하여 측정한 射程距離와 滯空 時間을 <표 4>에 나타내었다.

<표 4> 야구공이 初速 $v_0 = 16.5\text{m/s}$ 로 發射될 때의 射程距離

구분 발사각	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°	14.2	1.07	24.2	24.1	14.3
40°	16.2	1.44	27.5	27.4	16.6
45°	18.3	1.60	27.9	27.8	19.4
50°	17.5	1.81	27.5	27.4	17.8
60°	15.9	2.12	24.2	24.1	16.6

<그림 12>는 <표 4>를 이용하여 射程距離를 發射角의 函數로 나타낸 것이다.



〈그림 12〉 初速이 16.5m/s인 야구공의 發射角과 射程距離의 관계

〈그림 12〉을 살펴보면 抵抗을 무시할 때의 거리와, 速度에 一次的으로 比例하는 抗力으로 둔 때의 사정거리가 일치하고 있는데 〈표 4〉에 의하면 0.1m 정도의 차이가 있다. 한편 速度의 自乘에 比例하는 抗力으로 둔 경우의 射程거리는 測定距離와 거의 일치하고 있다. 이것은 空氣中에서 야구공의 運動을 記述할 때 空氣 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 두어야 함을 의미한다.

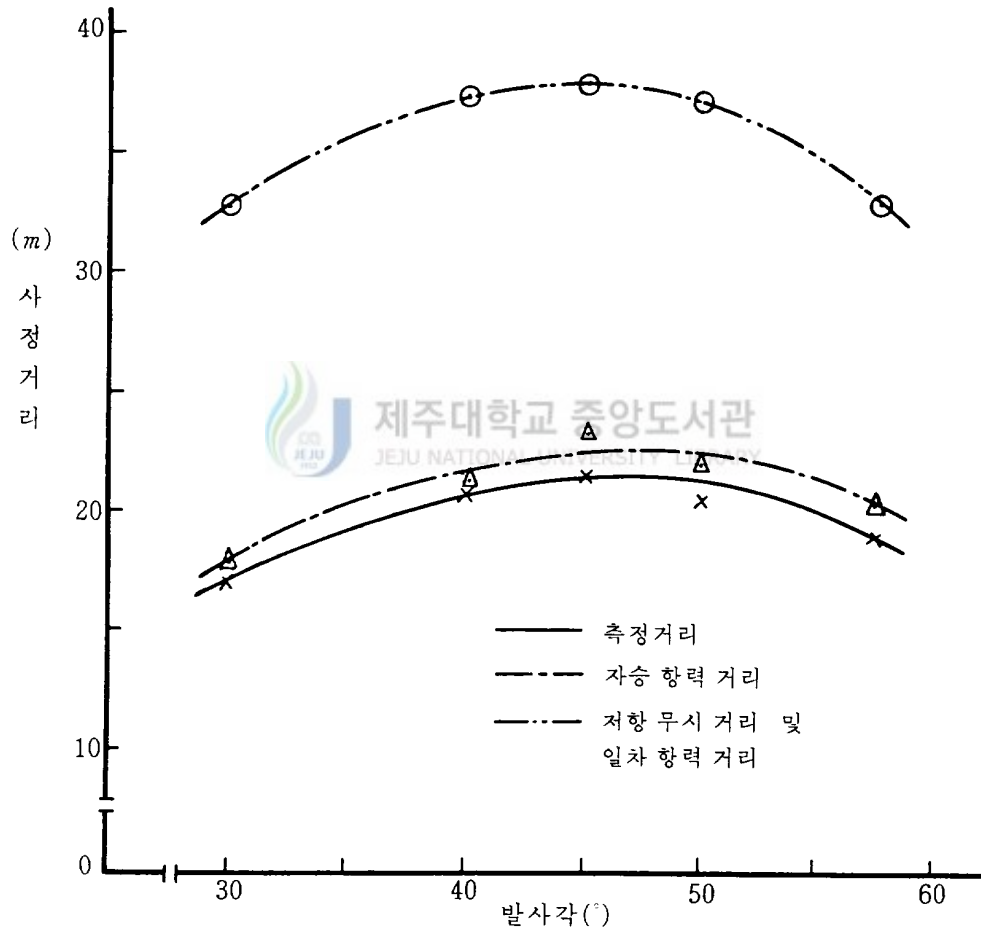
(2) 初速 $v_0 = 19.3\text{m/s}$ 일때

初速 19.3m/s로 發射된 야구공의 사정거리를 <표 5>에 나타내었다.

<표 5> 야구공이 初速 19.3m/s로 發射될 時의 射程距離

발사각 \ 구분	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°	17.2	1.12	32.9	32.8	17.9
40°	20.8	1.58	37.4	37.3	21.4
45°	21.7	1.91	37.9	37.8	23.2
50°	20.3	1.95	37.4	37.2	22.0
60°	16.8	2.27	32.9	32.7	20.2

<표 5>를 이용하여 사정거리와 발사각과의 관계를 <그림 13>에 나타내었다.

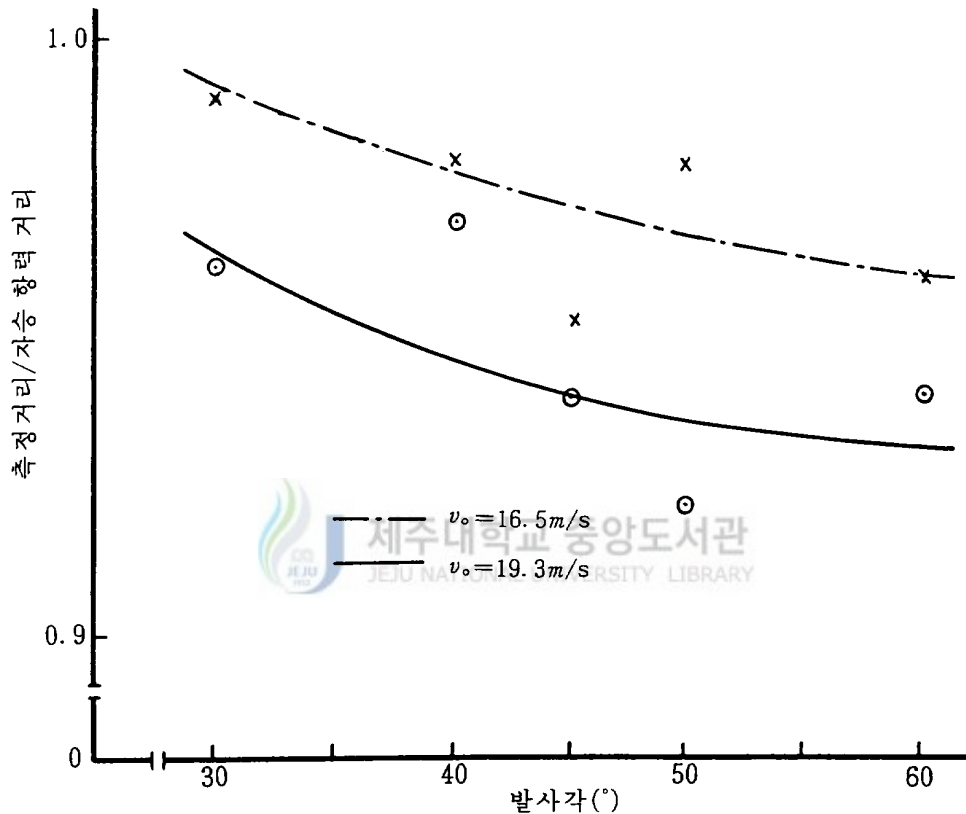


<그림 13> 初速이 19.3m/s인 야구공의 發射角과 射程距離의 관계

〈그림 13〉을 살펴보면 측정거리와 근접한 거리를 나타내는 경우는 空氣의 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 계산한 射程距離임을 알 수 있다.

그러므로 야구공과 같은 반경을 갖는 球가 공기중에서 운동할 때 空氣 抗力을 速度의 自乘에 비례하는 힘으로 두어 運動方程式을 記述해야 함을 의미하고 있다.

다음의 〈그림 14〉는 發射角에 따른 측정거리와 自乘 抗力 距離의 비를 나타낸 것이다.

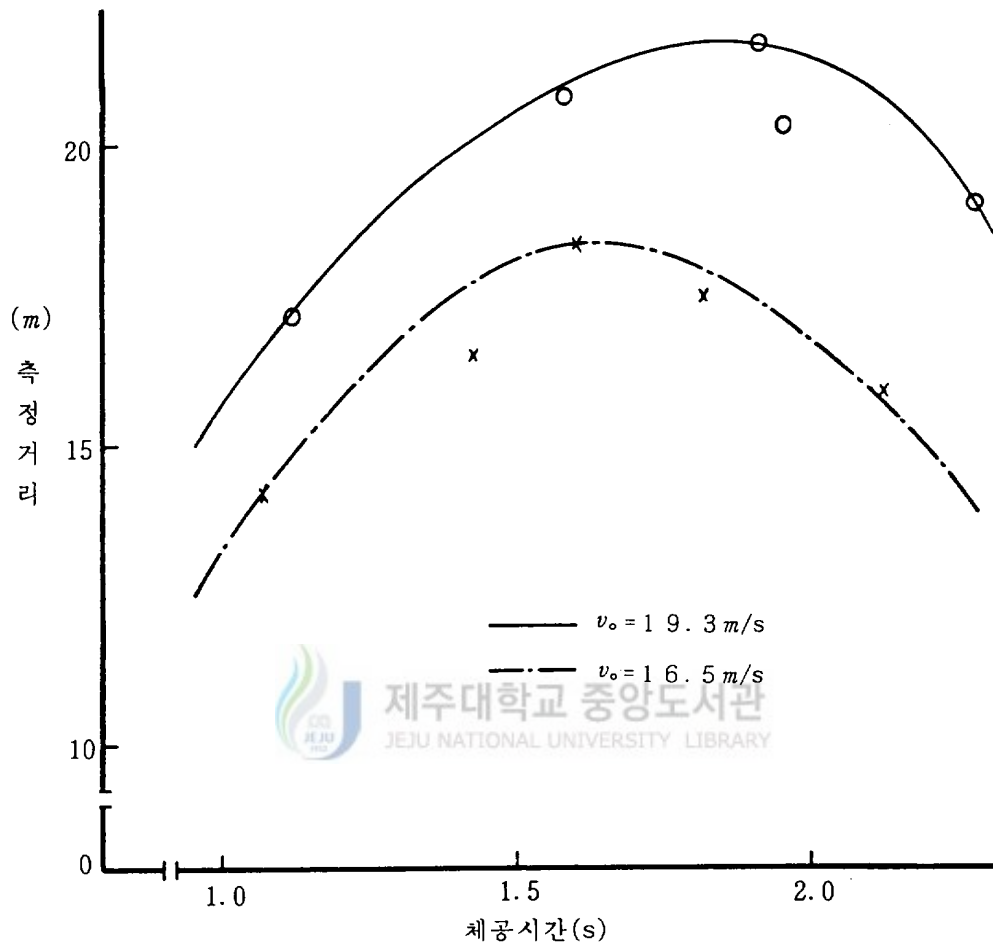


〈그림 14〉 야구공의 발사각에 따른 測定距離와 自乘 抗力 距離의 比 관계

〈그림 14〉로 보아 初期 速度가 작을수록 측정거리와 拋射體의 空氣 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 둘 때의 사정거리가 거의 일치함을 알 수 있고 발사각이 작을수록 측정거리와 自乘 抗力 距離의 비가 더 큰 값을 갖는다. 그러므로

速度的自乘에 比例하는 抗力은 初期 速度가 작을수록, 發射角이 작을수록 더 잘 적용됨을 알 수 있다.

〈그림 15〉는 測定距離를 時間의 函數로 나타낸 것이다.



〈그림 15〉 야구공이 發射되었을 때 滯空 時間과 測定距離의 관계

〈그림 15〉를 살펴보면 초기 速度가 큰 경우일 때 체공 시간 및 사정거리가 더 커짐을 알 수 있다. 한편 發射角이 45° 일때 最大 사정거리를 이루며, 45° 를 기준으로 좌측보다 우측 기울기의 절대값이 더 크다. 그러므로 空氣中에서 運動하는 야구공의 軌道는 完全한 拋物線이 아니다.

3. 소프트공

여덟개 공의 반경과 질량을 버어니어 캘리퍼스와 접시저울로 측정하여 평균값을 구한 결과 각각 0.048m와 0.188kg이었다.

(1) 初速 $v_0 = 14.5\text{m/s}$ 일때

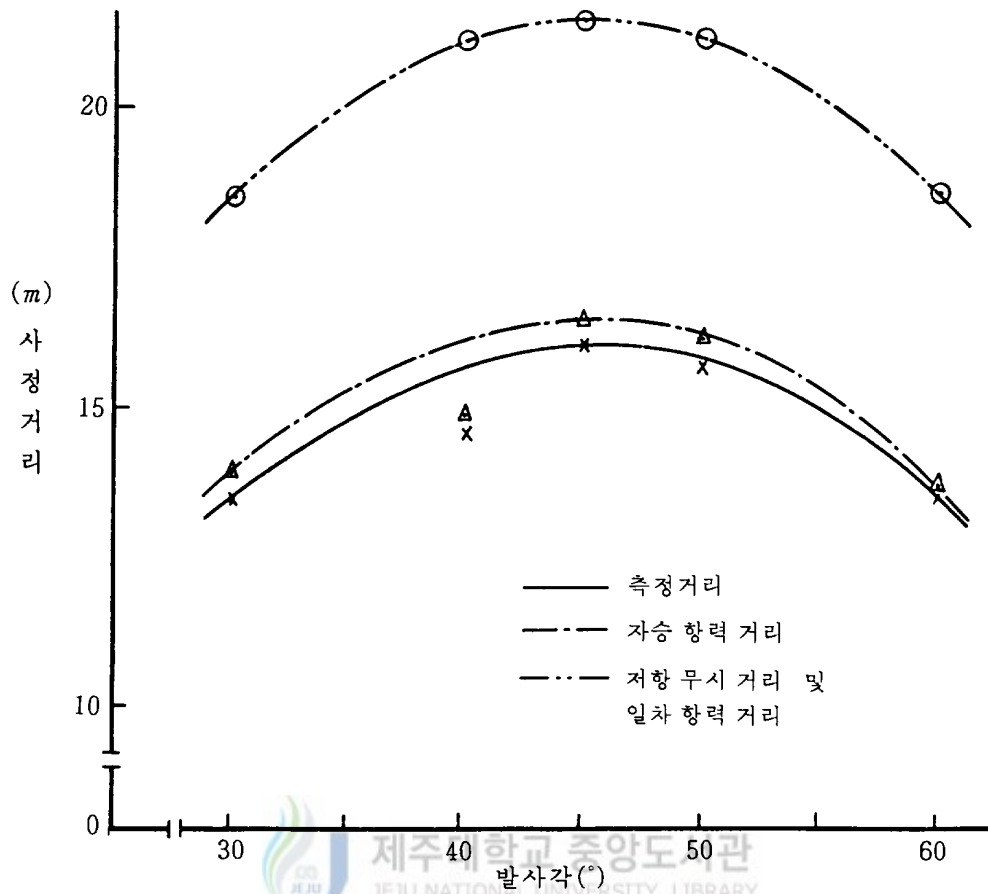
발사대를 이용하여 측정한 사정거리와 체공 시간, 이론에서 구한 각각의 값이 <표 6>에 실려있다.

<표 6> 소프트공이 初速 $v_0 = 14.5\text{m/s}$ 로 發射될 때의 射程距離

발사각	구분	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°		13.5	1.21	18.6	18.5	13.9
40°		14.6	1.42	21.2	21.1	14.7
45°		16.1	1.76	21.5	21.4	16.5
50°		15.7	1.88	21.2	21.1	16.2
60°		13.6	2.05	18.6	18.5	13.7

<표 6>을 근거로 소프트공의 發射角에 따른 射程距離를 비교 分析하기 위해 <그림 16>을 작성했다.

<그림 16>에서 저항 무시 거리와 抗力을 速度에 一次的으로 比例하는 값으로 둔 경우의 사정거리를 하나의 곡선에 나타내었지만 0.1m의 차이가 있다. 한편, 발사각에 따른 사정거리의 차이가 적은 듯하나, 거리 범위를 고려하면 적은 편이 아니다.



〈그림 16〉 初速이 14.5m/s인 소프트공의 發射角과 射程距離의 관계

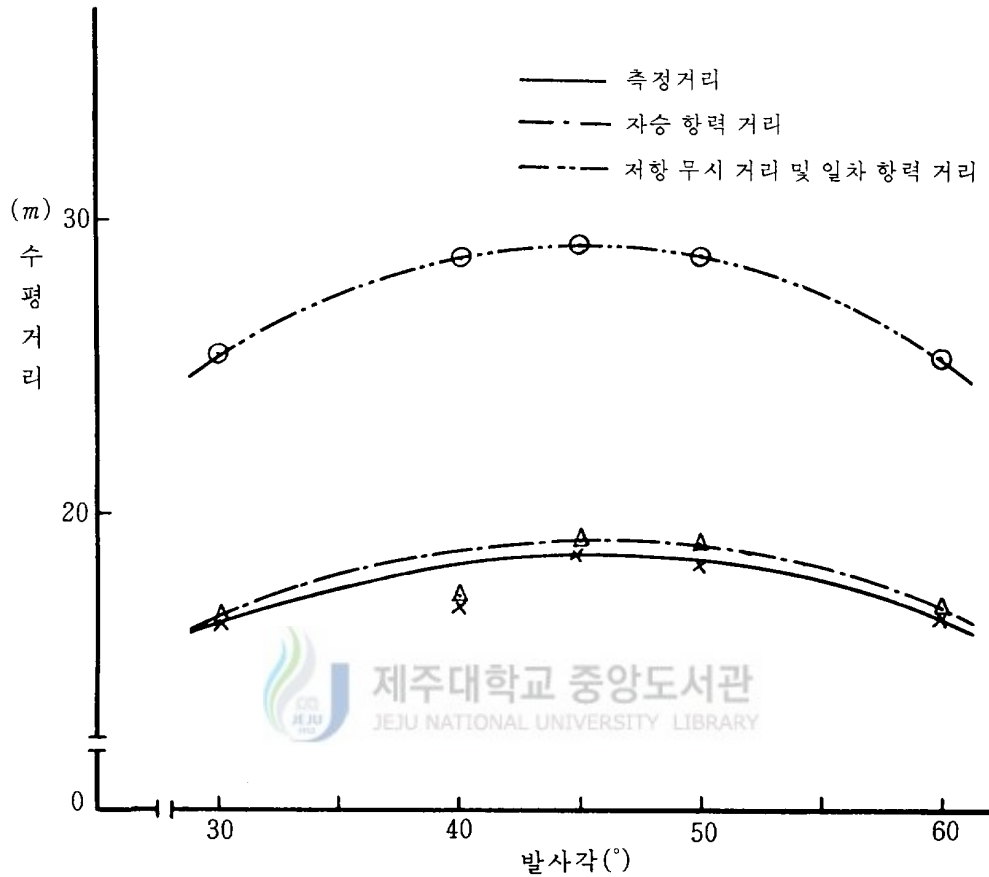
(2) 初速 $v_0 = 16.9\text{m/s}$ 일때

측정한 사정거리와 체공 시간, 각 경우의 理論値는 〈표 7〉과 같다.

〈표 7〉 소프트공이 初速 16.9m/s로 發射될 때의 射程距離

구분 발사각	측정거리(m)	체공시간(s)	저항무시거리(m)	일차항력거리(m)	자승항력거리(m)
30°	16.4	1.23	25.4	25.3	16.5
40°	16.9	1.48	28.8	28.7	17.3
45°	18.8	1.79	29.3	29.2	19.1
50°	18.3	1.98	28.8	28.7	19.0
60°	16.5	2.17	25.4	25.3	16.9

〈그림 17〉은 〈표 7〉을 근거로 比較 分析이 용이하도록 하기 위해 작성했다.

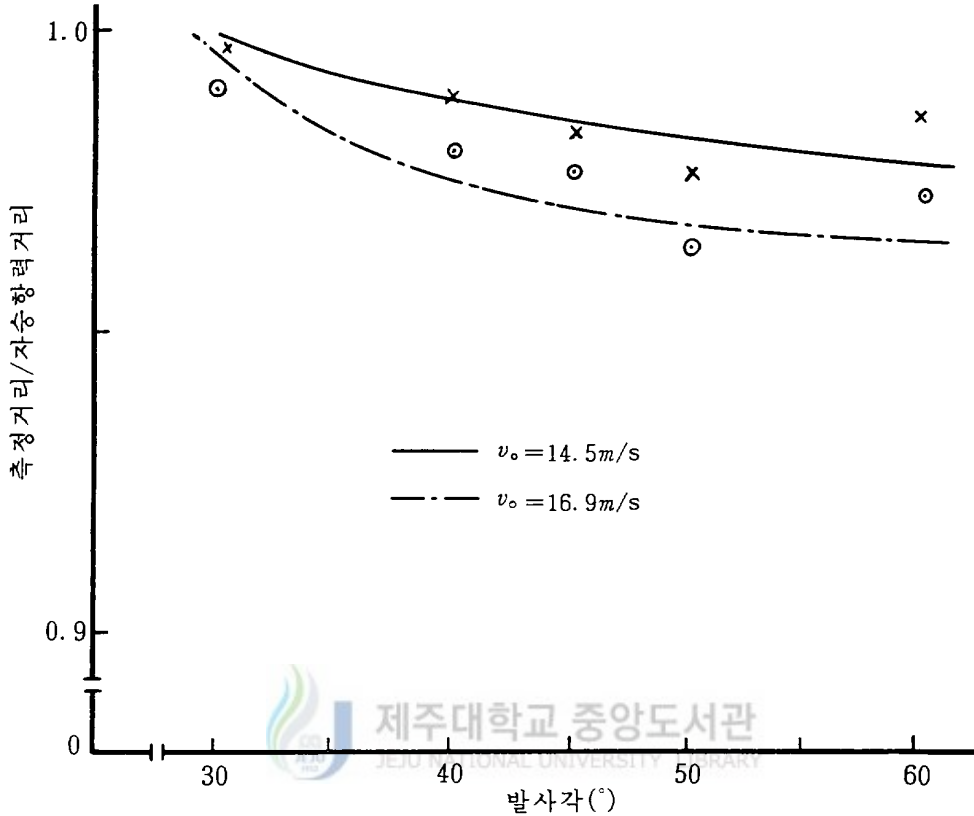


〈그림 17〉 初速이 16.9m/s인 소프트공의 發射角과 射程距離의 관계

〈그림 17〉은 발사각의 변화에 대한 사정 거리의 변화가 적음을 보여준다. 그러나 사정 거리가 30m 미만임을 고려하면 적은 편이 아니다. 그리고 이 경우도 空氣 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 두어 運動方程式을 記述해야 함을 나타내고 있다.

〈그림 18〉은 소프트공의 발사각에 따른 측정거리, 空氣 抗力을 速度의 自乘에

比例하는 힘으로 든 사정거리의 비를 나타낸 것인데 작은 初期 速度일수록, 작은 發射角일수록 比의 값이 큼을 보여주고 있다.

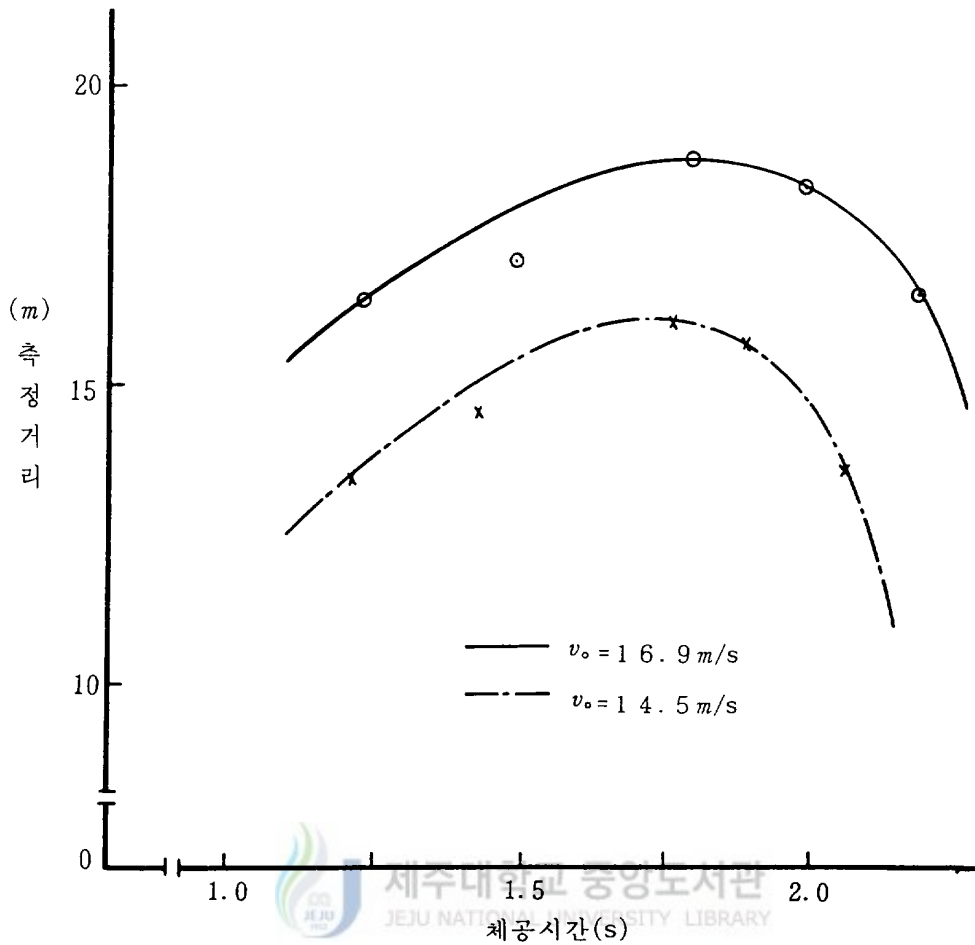


〈그림 18〉 소프트공의 發射角에 따른 測定距離와 自乘 抗力 距離의 比 관계

〈그림 19〉는 측정거리를 滯空 時間의 函數로 나타낸 것이다.

〈그림 19〉는 發射角이 45°일때 최대 수평거리를 얻을 수 있고, 40°에 보다 50°일 때가 더 멀리 날아간다. 한편 그림에서 곡선 후반부의 기울기 절대값이 더 크므로 空氣中에서 運動하는 소프트공의 軌道는 完全한 拋物線을 그리지 않음을 알 수 있다.

以上の 結果를 종합해보면 發射角이 45°일때 최대 射程距離를 얻을 수 있고, 적어도 40°와 50° 사이의 發射角을 유지해야 비교적 먼 射程距離를 얻을 수 있다.



〈그림 19〉 소프트공이 發射되었을 때 滯空 時間과 測定距離의 관계

한편 測定距離와 空氣 抗力을 速度의 自乘에 비례하는 힘으로 둔 射程距離는 發射角이 작거나, 初速이 작을수록 더 접근하게 됨을 알 수 있다. 또한 測定距離는 抵抗을 무시하거나, 抗力을 速度에 一次的으로 比例하는 힘으로 둔 射程距離와 큰 오차를 나타내고 있다. 나아가 滯空 時間과 測定距離의 관계를 나타낸 〈그림 11, 15, 19〉를 살펴보면 最高點에 도달한 이후에는 그 이전보다 射程距離의 落差가 심하다. 이것은 運動 軌道가 完全한 拋物線이 아니라 〈그림 6〉과 같은 양상을 나타냄을 의미한다.

한편, 抗力을 速度에 一次的으로 比例하는 힘으로 둘 때의 射程距離와 測定距離가 큰 차이를 나타내는 이유는 理論에서 살펴본 球의 半徑과 實驗에 사용된 球의 半徑이 약 10^3 배의 차이를 갖기 때문이다. 그리고 測定距離와 오차가 있기는 하지만 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 둘 때의 射程距離가 비교적 일치하고 있음을 알 수 있다.

V. 結 論

空氣中에서 運動하는 拋射體는 抗力이나 揚力, 重力 등 여러가지 힘을 받게 된다. 球形의 拋射體는 球 周圍의 空氣 흐름이 上·下 대칭을 이루므로 揚力은 무시할 수 있다. 그러므로 本 論文에서는 골프공, 야구공, 소프트공을 발사하여 射程距離와 滯空 時間을 比較 分析한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

i. 空氣中에서의 拋射體 射程距離는 抵抗을 무시하거나, 速度에 一次的으로 比例하는 抗力으로 둘 때의 射程距離와 큰 차이를 나타낸다.

ii. 拋射體의 發射角이 45° 를 이룰 때 最大 射程距離를 얻을 수 있고, 적어도 40° 와 50° 사이의 發射角을 유지해야 비교적 먼 射程距離를 얻을 수 있다.

iii. 空氣中에서 運動하는 拋射體의 軌道는 <그림 6>과 같다.

iv. 空氣中에서 運動하는 球의 拋射體 半徑이 $4 \times 10^{-5}m$ 보다 큰 경우는 抗力을 速度의 自乘에 比例하는 힘으로 두어 運動方程式을 記述해야 한다.

本 論文의 實驗에는 半徑이 약 $0.04m$ 부근의 球形인 공을 사용했고, 그 공의 表面 常態나 自體 回轉을 고려하지 않았다. 그러므로 空氣中에서의 拋射體 運動을 더 정확히 記述하기 위해서는 精밀한 測定 裝置가 필요한 것으로 思料된다.

參 考 文 獻

1. H. Schlichting; Boundary Layer Theory, translated by J. Kestin, Mc. Graw-Hill, 9-7~10(1968)
2. J. A. Lock; Phys. Teach., March; 158~160(1982)
3. Cliff Frohlich; Am. J. Phys., 52(4); 325~334(1984)
4. R. G. Watts, Eric Sawyer; Am. J. Phys., 24(1); 960~964(1976)
5. Herman Erichson; Am. J. Phys.; 51(4); 357~362(1983)
6. R. V. Ganslen; Athletics Journal; 44, 50(1964)
7. D. B. Lichtenberg, J. G. Wills; Am. J. Phys., 46(5); 546~549(1978)
8. Peter J. Brancasio; Phys. Teach., January; 20~25(1985)
9. B. L. Coulter, C. G. Adler; Am. J. Phys., 47(10); 841~846(1978)
10. 李澤直, 孫炳鎮; 流體力學, 東明社, 490~501(1987)
11. 李鍾純, 盧秉俊; 流體力學, 東明社, 304~307(1987)
12. G. W. Parker; Am. J. Phys., 45(7); 606~607(1977)
13. L. J. Briggs; Am. J. Phys., 27; 589(1959)
14. G. R. Fowles; Analytical Mechanics, 59~61(1963)
15. 高在杰, 力學, 清文閣, 71~76(1988)