碩士學位論文

과학고 고급수학 내실화를 위한 지도 방안

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 炯 錄

2010 年 8 月

과학고 고급수학 내실화를 위한 지도 방안

指導敎授 박 진 원

李 炯 錄

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2010 年 8 月

金玟徹의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 ____________ ㊞

委　　員 ____________ ㊞

委　　員 ____________ ㊞

濟州大學校 敎育大學院

2010 年 8 月

<국문초록>

과학고 고급수학 교육의 내실화를 위한 지도 방안.

李 炯 錄

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 박 진 원

과학고등학교의 교육과정은 일반계 고등학교와는 다른 특징들을 갖고 있다.

우리나라의 미래를 이끌어갈 과학 영재 육성을 목표로 과학자로서의 전문 지식과 창의성, 탐구 능력 향상을 위한 교육과정을 편성·운영하고 있으며, 정규 교육과정은 전문 지식 교육 중심으로 편성되어 있다.

따라서 학습자 중심의 교육을 위한 과학고등학교 교육과정의 운영은 무엇보다도 학교, 학생, 학부모의 특성을 살릴 수 있어야 한다. 이러한 면에서 교육과정을 편성·운영하는데 있어서 과학고등학교 학생들의 특성과 진로를 고려한 교육과정이 편성 되어야 하며, 보통 교과와 전문 교과와의 이수 비율의 적정성, 각 교과목 간의 학습 내용의 계열성, 과학고등학교 학생들의 학업능력을 고려한 운영에 초점이 맞추어져야 할 것이다.

본 연구를 통하여 과학고등학교 12학년 고급수학 교육과정의 내실화에 도움을 주고자 노력 하였으며, 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째 보통교과와 고급수학 교과 간의 연계 분야를 도출할 수 있었다.

둘째 보통교과와 고급수학 교과 간의 연계 요소를 바탕으로 보통교과 시간에 고급수학 교과 내용을 포함하는 교수·학습 지도안을 작성할 수 있었다.

셋째 개발한 교수·학습지도안을 현장에 적용하고 보통교과와 고급수학 교과간 연계학습을 할 수 있었다.

넷째 조기 졸업을 희망하는 학생들에게 12학년에 편제된 고급수학 교과의 내용들을 학습할 수 있는 기회를 만들고, 심화학습을 위한 동기를 강화시킬 수 있었다.

차 례

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 연구개요

1. 연구의 필요성

21세기는 정보통신기술의 발달과 함께 지식과 정보의 양이 폭발적으로 증가하기 때문에 창의적 사고력과 문제를 스스로 해결하는 능력이 강조되는 지식정보사회이다. 지식정보사회는 지식이 자본인 사회이며 국민의 지적 수준이 국가경쟁력이 되는 시대라고 할 것이다. 이런 점에서 국가 발전이란 측면에서 보면, 과학교육의 중요성은 매우 크며 그 필요성 또한 어느 때보다도 절실하다. 이런 맥락에서 본다면 과학기술의 발전은 곧 국가발전의 원동력일 뿐만 아니라 그 기초가 된다는 점을 알 수 있다. 그렇기 때문에 선진국들은 과학영재를 일찍부터 발굴하여 자국의 실정에 맞는 교육 제도와 방법을 강구하는 데 노력을 기울이고 있다.

우리나라에서도 과학 영재를 육성하기 위해서 1983년도부터 과학고등학교를 설립하여 우수한 과학 인재를 키워내기 위한 교육을 실시해 왔는데, 현재 전국에 20개 학교가 설립되어 있다. 과학 계열 고등학교의 교육목표(교육인적자원부, 1997)는 '과학의 기초적인 학습 내용을 바탕으로 과학의 여러 분야에서 심화된 내용을 학습함으로써 과학에 대하여 올바르게 이해하고, 과학의 학문적 체계를 이해함과 아울러 과학 연구에 필요한 탐구능력을 기른다.'로 제시하고 있다.

과학고등학교의 교육과정 운영은 일반계 고등학교와는 다른 특징들을 갖고 있다. 우리나라의 미래를 이끌어갈 과학 영재 육성을 목표로 과학자로서의 전문 지식과 창의성, 탐구 능력 향상을 위한 교육과정을 편성·운영하고 있으며, 정규교육과정은 전문 지식 교육 중심으로 편성되어 있다.

따라서 학습자 중심의 교육을 위한 과학고등학교 교육과정의 운영은 무엇보다도 학교, 학생, 학부모의 특성을 살릴 수 있어야 한다. 이러한 면에서 과학고등학교 교육과정을 편성·운영하는 데 있어서 학생들의 특성과 진로를 고려한 교육과정이 편성 되어야 하며, 보통 교과와 전문 교과와의 이수 비율의 적정성, 각 교과목 간의 학습 내용의 계열성, 과학고등학교 학생들의 학업능력을 고려한 운영에 초점이 맞추어져야 할 것이다.

본교는 2007학년도 84.6%, 2008학년도 95%, 2009학년도 92.3%의 학생이 조기 졸업을 하여 해마다 많은 학생이 12학년에 편제된 고급수학 정규 과정을 제대로 공부하지 못하고 상급학교에 진학하고 있다. 물론 조기졸업을 위한 조기이수과정이 있고, 또 이 과정을 충실히 이수하고 조기졸업을 하고 있지만, 11학년에 편제된 교육 과정을 공부하면서 조기이수과정에 포함된 12학년 과정을 일반 교육과정과 동일한 수준으로 공부하고 있다고 보기는 힘들 것이다. 전국의 과학고등학교에 재학하는 대부분의 학생이 조기 졸업을 하고 있는 현실을 감안한다면 과학영재들이 대학에서 연구 활동을 원만하게 수행할 수 있도록 전문인으로서의 성장을 도모하고 각 분야에 전문적인 능력을 개발할 수 있도록 교육과정을 재편성해야 할 필요성이 있다.

이에 본 연구는 “과학고 고급수학 교육의 내실화를 위한 지도 방안”을 모색하고자 한다.

2. 연구의 목적

본 연구의 목적은 많은 과학고 학생들이 조기 졸업으로 인하여 12학년에 편제된 고급수학 교육과정의 내용을 충실히 공부하지 못하는 문제점들을 극복하고 교육과정의 유용성과 교육적 효과를 높이는데 있다.

이를 위해 과학고등학교 12학년에 편제된 고급수학 교육과정의 내용을 보통교과 교육과정과 최대한 연계하여 학습할 수 있는 기회를 제공해야 할 필요성이 있어 그 구체적인 방안을 다음과 같이 구성하였다.

첫째, 과학고등학교 12학년에 편제된 고급수학의 내용을 분석하고, 이를 근거로 10, 11학년에 편제된 보통교과와 연계된 요소를 추출한다.

둘째, 과학고등학교 보통교과 심화지도를 위하여 고급수학 교육과정에서 연계된 분야를 포함하여 교수·학습 과정안을 구안하여 재편성한다.

셋째, 보통교과 심화지도를 시범 적용하고 문제점을 추출한 후 해결 방안을 모색하여 재적용한다.

3. 연구의 범위

가. 본 연구는 과학고등학교의 교육과정에 한하여 연구한다.

나. 보통교과와 고급수학 교과의 연계요소 추출과 지도안 구안 및 보통교과 심화지도에 한하여 연구한다.

4. 용어의 정의

가. 보통교과

보통교과는 일반 선택 과목(12단위)과 심화 선택 과목(42단위)으로 구분된다. 본 연구에서는 보통 교과는 '수학Ⅰ', '미분과 적분', '수학 Ⅱ' 과목으로 한다.

나. 전문교과

전문 교과는 '고급 수학' 과목으로 한다.

다. 교육과정 내실화

교육과정 내실화는 과학고등학교 교육과정상 보통교과와 전문교과의 연계요소를 추출하여 전문교과의 내용을 보통교과 수업시간에 병행하여 수업함으로써 12학년에 편제된 전문교과 내용을 속진학습 할 수 있는 기회를 제공한다.

라. 보통교과 심화지도

보통교과와 전문교과 사이의 연계요소를 추출하여 전문교과의 내용을 보통교과 지도시 보통교과의 내용과 연관하여 지도한다.

Ⅱ. 과학고등학교 교육과정

1. 교육과정

가. 보통 교과

선택 교과 선정의 기본 원칙은 체계적인 선택, 안내가 있는 선택, 진로를 개척하는 선택, 적성과 소질에 맞는 선택이 되도록 한다. 그러나 과학고등학교인 경우는 과학 계열 교과를 중점적으로 학습하고자 하는 학생들의 요구와 장래진로를 고려하여 선택할 수 있도록 한다. 또한 학생들에게 선택교과 내용을 10학년 수업 중에 지도하여 선택 교과에 대한 학습준비를 예측할 수 있도록 한다.

(1) 도 교육청 및 학교 지정 과목과 단위 수

도 지정 선택 과목과 학교 지정 선택 과목은 도나 학교가 정하도록 되어있으나 각 학교는 교사·학생·학부모들의 의견을 종합하여 학생의 지론, 교사수급, 학교 실정 등을 고려하여 정한다. 그리고 가능한 교과 군별로 고르게 선정되도록 한다.

(가) 선택 중심 교육 과정의 교과는 보통 교과와 전문 교과로 구분하여 편성한다. 보통교과는 일반 선택 과목(12단위)과 심화 선택 과목(42단위)으로 구분하고, 전문 교과는 86 단위를 이수한다.

① 일반 선택 과목: 체육과 건강(2), 일본어/불어Ⅰ 중 택 1(6), 교양(과학사)(4)

② 심화 선택 과목: 독서(8), 문학(8), 수학Ⅰ(6), 영어회화(4), 영어Ⅰ(8), 영어Ⅱ(8)

③ 전문교과: 수학Ⅱ(8), 미분과 적분(4), 이산수학/확률과 통계 중 택1(6), 화학Ⅱ(6), 물리실험(6), 화학실험(6), 생물실험(6), 지구과학실험(6), 고급수학(6), 고급물리(7), 고급화학 (7), 고급생물(4), 고급지구과학(4), 컴퓨터 과학Ⅱ(6), 원서강독(4)을 이수한다.

(나) 3년 동안에 이수해야 할 선택 중심 교육과정 교과는 총 146단위로, 선택 과목에 138단위, 특별활동에 8단위를 배당한다. 선택 과목에 배당된 138단위 중에서 시·도 교육청과 학교에서 각각 28단위 이상 지정할 수 있다.

(다) 도 지정 선택 과목 중 보통 교과 선택 과목 편성은 일반 선택과 심화 선택을 포함하여 시교육청이 지정한 과목군 별 1과목 이상 편성한다. 일반 선택 과목과 심화 선택과목의 선호도가 비슷할 경우에는 일반 선택 과목을 우선적으로 선정한다.

(라) 학교는 학생이 선택한 교과목에 대해서는 가급적 개설하려고 노력한다. 다만 학생들의 특정 과목 편중 선택을 방지하여야 하며, 연차적으로 교사 수급 및 시설 계획을 수립하여 점진적으로 학생 선택 비율을 높인다.

(마) 내용이 유사하거나 관련되는 보통 교과의 선택 과목과 전문 교과는 교체하여 편성, 운영할 수 있다.

(바) 학교장은 필요에 따라 교육감의 승인을 받아 총 교과 이수 단위를 10% 범위 내에서 증배 운영할 수 있다.

(2) 학생 선택의 과목 선정

(가) 도 지정 선택 과목과 학교 지정 선택 과목을 제외하고, 학교에서 개설 가능한 나머지 교과 중에서 학생들이 선택할 수 있다.

(나) 도 지정 선택 과목과 학교 지정 선택 과목을 제외한 나머지 교과에 대한 희망 조사를 실시하여 전 교과 내 순위와 교과군 내 순위 및 빈도를 조사하여 선택 과목 교과 선정 자료로 활용한다.

(다) 선택 과목을 조사할 때 특별활동 중 적응활동(매월 1회 실시)시간을 이용하여 지도하고 선택 교과의 내용 및 대학 진학 시 연계되는 자료를 제공하여 학생들의 교과 선택에 참고하도록 한다.

(라) 조사된 자료를 분석하고 교육과정위원회에서 협의를 통하여 합리적인 학교 교육 과정 운영을 위한 선택 교과를 결정한다. 그 시기는 매년 5월 중 실시한다.

(마) 학생 선택 과목을 선정할 때는 최대한 집중 교과 이수 과정의 특성과 학생의 희망을 수용하도록 한다.

(바) 학생 선택 과목에서도 도 지정 선택 과목과 학교 선택 과목에서 자신이 수강하지 못한 과목을 수강할 수 있는 기회를 주도록 시간표를 편성한다.

(3) 선택 과목 개설 기준

소수 인원이 선택한 교과목의 처리 방안은 다음과 같다.

(가) 소수 인원일 때는 학생을 개별 면담한 후, 그들의 진로와 적성을 고려하여 유사한 과목으로 대체 선택할 수 있게 유도한다. 이 때 특정한 과목에 집중되지 않도록 지도한다.

(나) 특정한 날 오후시간을 이용하여 학년 구분 없이 수강 신청자를 교육한다.

(다) 가), 나)로 해결되지 않는 10명 미만의 과목은 폐강한다.

(4) 보통 교과와 전문 교과의 이수 비율

(가) 학교는 국민 공통 기본교과에 배당된 72단위(교과 56단위, 재량활동 12단위, 특별활동 4단위)를 필수적으로 이수하고 이를 포함하여 보통 교과를 82단위 이상 이수하여야 한다. 우리 학교의 경우 보통 교과는 114단위(국민 공통 기본 교과 56단위, 일반 선택 과목 12단위, 심화 선택 과목 42단위)이며 전문 교과는 86단위이다.

(나) 학교는 보통 교과의 일반 선택 과목과 심화 선택 과목을 합하여 반드시 28단위 이상을 선택한다.

(다) 내용이 유사하거나, 관련되는 보통교과의 선택 과목과 전문교과는 교체하여 편성, 운영할 수 있다.

(5) 일반 및 심화 선택의 단위 수 증감

(가) 보통 교과의 선택 과목은 기준 단위를 4단위까지 증감 운영한다.

(나) 학기 당 이수 과목 수를 학생들의 학습 부담을 고려하여 가능한 한 최소화하려고 노력해야 하며, 학기 당 과목 수는 12과목 내외가 적절하다.

표 1. 교육과정 편제와 단위 시간 배당 기준

구분		국민 공통 기본 교과	선택 과목	
			일반 선택 과목	심화 선택 과목
교과	국어	국 어(8)	국어 생활(4)	화법(4), 독서(8), 작문(8), 문법(4), 문학(8)
	도덕	도 덕(2)	시민 윤리(4)	윤리와 사상(4), 전통 윤리(4)
	사회	사 회(10) (국사 4)	인간 사회와 환경(4)	한국 지리(8),세계지리(8),경제 지리(6) 한국 근・현대사(8),세계사(8),법과 사회(6) 정치(8), 경제(6), 사회・문화(6)
	수학	수 학 (8)	실용 수학(4)	수학Ⅰ(8), 수학Ⅱ(8),미분과 적분(4) 확률과 통계(4), 이산 수학(4)
	과학	과 학 (6)	생활과 과학(4)	물리Ⅰ(4), 화학Ⅰ(4), 생물Ⅰ(4), 지구과학Ⅰ(4), 물리Ⅱ(6), 화학Ⅱ(6), 생물Ⅱ(6), 지구과학Ⅱ(6)
	기술·가정	기술・가정(6)	정보 사회와 컴퓨터(4)	농업 과학(6), 공업 기술(60, 기업 경영(6) 해양 과학(6), 가정 과학(6)
	체육	체 육(4)	체육과 건강(4)	체육 이론(4), 체육 실기(4 이상)
	음악	음 악(2)	음악과 생활(4)	음악 이론(4), 음악 실기(4 이상)
	미술	미 술(2)	미술과 생활(4)	미술 이론(4), 미술 실기(4 이상)
	외 국 어	영 어(8)	독일어Ⅰ(6), 프랑스어Ⅰ(6) 스페인어Ⅰ(6), 중국어Ⅰ(6) 일본어Ⅰ(6), 러시아어Ⅰ(6) 아랍어Ⅰ(6)	영어Ⅰ(8), 영어Ⅱ(8), 영어 회화(8) 영어 독해(8), 영어 작문(8) 독일어Ⅱ(6), 프랑스어Ⅱ(6) 스페인어Ⅱ(6), 중국어Ⅱ(6) 일본어Ⅱ(6), 러시아어Ⅱ(6) , 아랍어 Ⅱ(6)
	한문		한문(6)	한문 고전(6)
	교련		교련(6)	
	교양		철학(4), 논리학(4) 심리학(4), 교육학(4) 생활 경제(4), 종교(4) 생태와 환경(4) 진로와 직업(4), 기타(4)	
	이수 단위	(56)	24이상	112이하
재량 활동		(12)		
특별 활동		(4)	8	
총 이수 단위			8	

나. 전문 교과

전문교과 중심 교육과정은 학교와 교사의 계획 하에 꾸며지는 학생들의 학습내용과 경험의 총체이며, 전문교과는 과학 계열 고등학교 학생이 '과학과'의 기초적인 학습을 바탕으로 보다 심화된 내용을 학습함으로써 과학의 다양한 분야에 대하여 올바르게 인식하고 진로 선택 을 바르게 하도록 함과 동시에, 대학에서 학문을 연구하는 데 필요한 기본적인 능력을 기르기 위한 교과이다.

그렇다면 전문교과 중심 교육과정이란 어떤 의미로 보아야 하는가? 전문 교과 '중심'이란 전문교과 '위주'로 교과 시간을 편성하여 운영하는 것을 의미하지는 않을 것이다. 왜냐하면 이공계를 지망하는 과학고 학생이라 하더라도 보통교과를 통해 길러져야 할 인성이나 기초 적 소양이 필요하기 때문이다. 따라서 전문교과 중심 교육과정이란 말은 전문교과에 비중을 두고 교육과정을 편성하여 운영한다는 뜻으로 보아야 한다. 다시 말하면 모든 교과에서 그 교과목의 과목이 추구하는 목표에 도달하기 위한 학습 내용으로 수업을 전개하되 전문교과와 연계된 학습 내용을 투입하여야 한다는 뜻으로 이해할 수 있겠다.

(1) 과학 계열 고등학교는 전문 교과를 82단위 이상 반드시 이수해야 한다. 과학 계열고등학교에서 전문 교과는 최고 110단위까지 이수할 수 있다.

(2) 본교는 필수 과목으로 수학Ⅱ, 미분과 적분, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ, 물리실험, 화학실험, 생물실험, 지구과학실험, 컴퓨터과학Ⅱ, 원서강독을 이수한다.

(3) 과학 계열 고등학교의 학과별 필수 과목은 필요한 경우 학교장이 정할 수 있으며, 선택과목은 학교장이 정하는 비율의 범위 내에서 학생이 선택하여 이수할 수 있다.

(4) 전문 교과의 각 과목에 대한 이수 단위는 계열에 따라 학교가 정하되 과학에 관한 교과는 각 교과목별 이수 단위를 12단위 이하로 배당한다.

(5) 전문 교과 중 선택 과목으로 우리 학교는 이산수학, 확률과 통계, 고급수학, 고급물리, 고급화학, 고급생물, 고급지구과학을 이수한다.

다. 제주과학고등학교 조기 졸업 시행 규정

제1장 총칙

제1조(목적) 조기진급 및 조기졸업에 관한 규정(대통령령 제16479호, 1999.7.23) 제7조 규정에 의하여 조기졸업에 관한 시행의 세부적인 기준을 정함을 목적으로 한다.

제2장 교과목별 조기이수 대상자의 선정

제2조(선정시기) 교과목별 조기이수 대상자의 선정은 11학년 초 30일 이내로 한다.
제3조(학생과 학부모의 동의) 교과목별 조기이수 대상자를 정할 때는 학생 본인과 학부모의 동의를 얻어야 한다.
제4조(선정절차) 교과목별 조기이수 대상자를 선정할 때는 다음 절차에 따른다.

1. 학생과 학부모의 신청에 의한(또는 학생과 학부모의 동의 후) 학급담임의 추천
2. 학교장이 정하는 교과목의 학업성취도 평가
3. 교직원 회의 사정
4. 학교장 선정

제5조(선정기준) 과목별 조기이수 대상자는 심신 발달 및 건강상태가 양호하고, 정서가 안정되며 사회 적응력이 양호한 자로 다음 각 호 중 하나에 해당하여 학교장이 적합하다고 판단하는 자이다.

1. 10학년 교육과정에서 국어, 수학(수학10 ,수학1 중 한 개 과목), 과학(물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중 한 개 과목), 영어 교과의 석차등급이 1학기 또는 2학기 중 7등급 이내인 자
2. 국제올림피아드(수학, 물리, 화학, 생물, 천문, 정보 분야 등)에 국가 대표로 참가한 자
3. 수학(수학10 ,수학1 중 한 개 과목)교과와 과학(물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중 3개 과목)교과의 석차등급이 1학기 또는 2학기 중 6등급 이내인 자
4. 교내·외 각종 경시·경연 대회(수학, 과학, 정보관련) 입상자로서 해당 교과목 교사의 추천을 받은 자

5. 위의 '1~4'호에 해당하지 않는 자 가운데 교직원 회의에서 다음 각 호의 조건을 붙여 추천한 자
   가. 대학의 수시입학전형에 합격한 경우에 한하여 조기졸업을 신청한다.
   나. 수시입학전형에서 대학수학능력시험 결과를 요구하는 대학에 지원하는 경우에 한하여 대학수학능력시험에 응시한다.

제3장 교과목 조기 이수 절차

제6조(이수방법) 교과목별 조기이수 대상자로 선정된 학생은 12학년 해당과목 담당교사들의 지도 아래 자율적으로 학습하는 것을 원칙으로 한다.

제4장 교과목별 이수인정평가위원회

제7조(위원회의 구성) 교과목별 이수인정평가위원회를 다음과 같이 구성한다.

1. 교과목 이수인정평가위원회의 위원은 해당과목 담당교사 2인, 교무부장, 학생부장, 과학부장으로 구성한다.
2. 해당 교과과목 담당교사가 1인인 경우에는 다른 학교의 해당과목 교사를 학교장이 1인을 위촉하여 위원회를 구성한다.

제8조(위원회의 업무) 교과목별 이수인정평가위원회는 다음 각 호의 업무를 수행한다.

1. 교과목별 조기이수인정 기준의 결정
2. 교과목별 이수인정평가 방법의 결정
3. 교과목별 이수인정평가 도구의 제작 또는 선정
4. 교과목별 이수인정평가 및 성적 산출
5. 기타 교과목별 조기이수인정평가와 관련된 업무

제5장 교과목별 이수인정 평가

제9조(평가 시기)

1. 교과목별 조기이수 대상자의 개별 교과목에 관한 조기이수 인정을 위한 교과목을 이수인정평가를 수시로 행한다.

2. 조기졸업 대상자의 교과목별 이수인정평가는 상급학교 조기진학에 지장이 없는 시기에 실시한다.

제10조(평가 기준)

1. 12학년 교육과정 교과목 대하여 이수인정평가에 응시하여 60점 이상을 받거나,
2. 교과목별 이수인정평가위원회에서 이수를 인정 받아야한다.

제11조(이수 교과목) 조기졸업 대상자는 12학년의 교육과정에 편성된 전 교과목에 대한 조기 이수 인정을 받아야 한다.

제12조(위원회 결정에 대한 재심) 이수인정평가위원회의 결정에 이의가 있을 경우에는 다음 절차에 따라 학교장에게 재심을 청구할 수 있다.

1. 위원회 결정에 이의가 있을 시는 결정통보를 받은 날부터 7일 이내 당해 학생과 학부모가 연서한 서류로 학교장에게 재심을 청구할 수 있다.
2. 학교장은 재심 신청을 접수 후 해당 교과목별 이수인정평가위원회의를 소집하여 접수한 날부터 15일 이내에 재심결과를 신청자에게 통보하여야 한다.

제6장 조기졸업 대상자의 선정

제13조(자격) 12학년의 교육과정에 편성된 전 교과목에 대한 조기이수인정을 받은 자로서 심신발달과 건강상태, 사회적응력이 양호하며, 상급 학교에 입학허가를 받은 자여야 한다.

제14조(절차) 학교장은 조기졸업 대상자를 선정함에 있어서 학생 본인과 학부모의 동의를 받고 교직원회의의 사정을 거쳐서 확정한다.

부 칙

1. 이 규정은 2001년 3월 10일부터 시행한다.
2. 이 규정은 2006년 3월 2일부터 시행한다.
3. 이 규정은 2008년 3월 3일부터 시행한다.

라. 2009학년도 제주과학고등학교 교육과정 편성

구분			교과(대체교과)	기준 단위	이수 단위	10학년 1학기	10학년 2학기	11학년 1학기	11학년 2학기	12학년 1학기	12학년 2학기
보통교과 (82~110)	국민공통 기본교과 (56)		국어	8	8	4	4				
			도덕	2	2	1	1				
			사회	6	6	3	3				
			국사	4	4			2	2		
			수학	8	8	4	4				
			과학(생물Ⅱ)	6	6	3	3				
			기술·가정(정보사회와컴퓨터)	6	6	3	3				
			체육	4	4	1	1	1	1		
			음악	2	2			1	1		
			미술	2	2	1	1				
			영어	8	8	4	4				
			소 계	56	56	24	24	4	4		
	선택과목 (26~54)	도	문학	8	8			4	4		
			교양(과학사)	4	4					2	2
			체육과 건강	4	2					1	1
			영어회화	8	4			2	2		
			영어Ⅰ	8	8			4	4		
			소 계	32	26			10	10	3	3
		학교	영어Ⅱ	8	8					4	4
			소 계	8	8					4	4
		학생	독서	8	8					4	4
			한국근현대사	8	4					2	2
			일본어Ⅰ	6	6			1	1	2	2
			소 계	22	18			1	1	8	8
		계		62	52			11	11	15	15
보통 교과 계				118	108	24	24	15	15	15	15
전문교과 (82~110)	선택교과	도	물리실험	4-8	6			3	3		
			화학실험	〃	6			3	3		
			생물실험	〃	6			3	3		
			지구과학실험	〃	6			3	3		
			컴퓨터과학Ⅰ	〃	6			3	3		
			소 계		30			15	15		
		학교	수학Ⅰ	4-8	6	3	3				
			수학Ⅱ	〃	8			4	4		
			미분과적분	〃	4			2	2		
			화학Ⅱ	〃	6	3	3				
			원서강독	〃	4					2	2
			소 계		28	6	6	6	6	2	2
		학생	이산수학,확률통계중 택1	4-8	6						6
			고급수학	〃	6					6	
			고급물리	〃	6					3	3
			고급화학	〃	8					4	4
			고급생물	〃	4					2	2
			고급지구과학	〃	4					2	2
			소 계		34					17	17
전문교과 계 (82~110)					92	6	6	21	21	19	19
재량활동	교과 재량활동(10)		물리Ⅱ	6	6	3	3				
			지구과학Ⅱ	6	4	2	2				
	창의적 재량활동(2)		소집단 공동연구 주제 탐구 활동	2	2	1	1				
특별 활동(6)				12	6	1	1	1	1	1	1
소 계					18	7	7	1	1	1	1
총 계 (단위/과목수)				216	218	37/13	37/13	37/14	37/14	35/12	35/12

마. 연구의 방향

일반적으로 과학고등학교인 경우 보통교육과 전문교육을 동시에 실시하기는 하지만 그 중에서 전문교육에 보다 중점을 두어 교육과정을 전개하고 있다. 따라서 지역의 특색과 학교 교육 여건이 교육과정에 반영되도록 하자는 것이 교육 과정 편성에서의 또 하나의 원칙으로 설정되었다. 이는 특수목적고등학교 산하의 각 계열별 특징을 고려하는 것과는 별도로, 해당 학교가 지닌 지역성과 학교의 특징에 맞도록 과목 편성 및 이수 단위의 조정이 가능하도록 허용하는 것이다.

이에 조기 졸업생이 많은 본교의 실정에 맞게 융통성 있는 교육 과정을 운영하기 위하여 교사가 직접 교과 내용을 선택적으로 선정하여 학습하는 주제 중심 교육과정의 필요성을 느끼게 되었다.

따라서 본 연구는 보통 교과와 전문 교과 단원별로 연관성이 있는 주제를 선정하여 조기 졸업으로 인하여 학습이 곤란한 12학년에 편성된 전문 교과의 내용을 10, 11학년 때 학습할 수 있는 기회를 제공하기 위한 목적을 갖고 있다.

2. 선행 연구 고찰

가. 선행 연구 분석

아쉽게도 본 연구와 관련한 연구 논문이 아직까지 국내에 없는 관계로 연구 추진에 어려움을 겪었으나 다행히도 교육과학부 지정 연구학교로서 이미 여러 학교에서 유사한 연구들을 활발히 해온 결과 그 연구들을 통하여 본 연구의 시사점을 찾아보았다. 본 연구의 추진을 위하여 알아본 선행 연구의 내용을 분석한 결과는 '표 2'와 같다.

표 2. 선행 연구 분석

연도	학 교 명	주 제	결 과
2002	부산 주례여고	일반계고등학교 영재학급 운영 방안연구	영재학습 프로그램에 따른 영재교육을 실시하여 학생들의 잠재력을 개발
2002	제주여자 상업고등학교	진로탐색 프로그램을 구안 적용한다.	사이버 진로정보실을 통하여 다양한 진로 정보를 제공한다.
2002	한림여자 중학교	주5일 수업제를 위한 중학교 교육과정 편성 운영	제7차 교육과정의 취지를 반영하면서 주5일 수업제의 활성화를 위하여 학교 · 가정 · 지역사회의 실정에 적합한 교육적 여건 조성
2003	산서고등학교	소규모 일반계 고등학교 학생의 과목 선택권 확대를 위한 선택중심 교육과정 편성 · 운영	선택중심 교육과정의 편성 및 운영에 대한 농어촌 지역 소규모 학교의 모형을 개발하여 소규모 학교에 적합한 선택 중심 교육과정을 운영
2007	전북 과학고등학교	문제중심학습(PBL) 프로그램에 의한 창의적 문제해결력 신장	실생활 교과, 교과와 교과를 연계한 문제중심학습 프로그램을 개발하고 운영함

나. 시사점

선행 연구 고찰을 통하여 얻게 된 본 연구와 관련한 시사점은 다음과 같다.

(1) 정규 교육과정 내에서 학교와 학생들의 특성에 알맞은 교육과정을

편성·운영함으로써 조기에 졸업하는 학생들에게 폭넓은 수학적 지식과 정보를 제공할 필요가 있다.

(2) 보통교과와 고급수학 교과의 연계성을 추출하여 학습요소를 제시함으로써 조기졸업 교과 이수에 더욱 흥미를 유발시킬 수 있다.

(3) 보통교과 교육과정을 고급수학 교과 교육과정과 연계하여 운영함으로써 조기 졸업을 하는 학생들이 상급학교 교육과정을 이수하는 데 도움을 줄 수 있다.

Ⅲ. 연구 과제

1. 실태 분석

가. 전국 20개 과학고 교육과정 편성 실태 분석

본 연구의 운영방향을 설정하기 위해 전국 20개 과학고등학교를 대상으로 조사한 2009 학년도 보통·전문교과 중심의 편성 실태는 '표 3'과 같다.

표 3. 전국 과학고등학교 전문 교과 중심 교육과정 편성 실태 분석

교명	전문 교과																			
	고급 물리	물리 실험	고급 화학	화학 실험	현대 과학 과 기술	원서 강독	고급 생물	생물 실험	현대 과학	워크숍	고급 지학	지학 실험	고급 수학	전자 과학	과제 연구 Ⅰ	과제 연구 Ⅱ	과학 사	과학 철학	컴퓨터 과학 Ⅰ	컴퓨터 과학 Ⅱ
강원	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○							
경기	○	○	○	○			○	○		○	○	○	○							○
경남	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○		○	○				○
경북	○	○	○	○			○	○			○	○	○						○	○
경산	○	○	○	○			○	○			○	○	○		○					○
광주	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○		○					
대구	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○						○	
대전	○	○	○	○			○	○			○	○	○							○
서울	○	○	○	○		○	○	○		○	○	○	○		○	○	○		○	○
세종	○	○	○	○			○	○			○	○	○			○	○		○	
울산	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○		○	○	○			○
의정부	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○		○
인천	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○	○			○			○
장영실	○	○	○	○			○	○	○		○	○	○		○	○				○
전남	○	○	○	○			○	○			○	○	○		○		○			
전북	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○		○		○	○		○
제주	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○				○		○	
충남	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○							
충북	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○							○
한성	○	○	○	○		○	○	○			○	○	○				○	○		○
계	20	20	20	20	1	13	20	20	2	3	20	20	**20**	2	9	5	7	3	4	13

나. 제주과학고등학교 학생 현황

제주과학고는 10학년 2학급, 11학년 2학급, 12학년 1학급 총 5학급으로 구성되어 있으며, 학급당 인원은 20명으로 되어 있다. 따라서 우리 과학고등학교는 타 고등학교에 비하여 소수 학급으로 구성되어 과학영재교육 및 개별화 학습이 수월하다.

표 4. 본교 학생 현황(2009학년도 기준)

	1반	2반	계	비고
10학년	21(3)	20(3)	41(6)	( ) 안은 여학생 수
11학년	20(5)	19(4)	39(9)	
12학년	2(1)	·	2(1)	
계	5 학급		82(16)	

다. 최근 3년간 본교 조기 졸업 현황

제주과학고 학생의 조기 졸업은 2007년 84.6%, 2008년 95%, 2009년 92.3%로 매년 대 다수의 학생이 조기졸업을 하고 있다.

표 5. 조기 졸업 현황

년　도	재학생 수	조기 졸업 학생 수	비　율(%)	비고
2007	39	33	84.6	
2008	40	38	95	
2009	39	36	92.3	
합　계	118	107	90.6	

2. 설문 조사

가. 실태 조사 내용 및 방법

본 연구의 운영 방향을 모색하기 위하여 '표 6'의 내용과 같이 과학고등학교 설립 취지와 교육과정의 편성, 운영 및 대학진학을 위한 조기졸업 제도를 얼마나 이해하고 있는가에 대하여 설문지를 자체 제작하여 재학생을 대상으로 설문 조사를 실시하였다.

표 6. 과학고등학교 교육과정에 대한 실태 조사 방법 및 내용

구 분	실태 조사 내용	도 구	시 기
과학고등학교 설립취지	· 과학고등학교 설립취지에 대한 이해 · 과학고등학교 교육내용	설문지	2009.5
과학고등학교 교육과정 편성·운영	· 과학고등학교 설립취지에 맞는 교육과정 운영 · 3개년 교육과정 이수 단위 · 국민공통기본교과 학습량 · 이수단위의 적절성 · 보통교과 심화과정 이수시기	설문지	2009.5
대학진학을 위한 조기졸업 제도	· 조기졸업 제도	설문지	2009.5

나. 실태 분석 결과

본 연구의 교육 프로그램을 효율적으로 운영하기 위한 과학고등학교 설립 취지와 교육 과정의 편성, 운영 및 대학진학을 위한 조기졸업 제도에 대하여 학생들을 대상으로 설문을 조사·분석한 결과는 다음과 같다.

(1) 설립 취지

(가) 과학고등학교의 설립 취지에 대한 이해

우리 학교의 설립 취지를 이해하였는가에 대하여 학생 82.7%가 특수 목적 고등학교인 우리 학교의 설립 취지에 대하여 잘 이해하고 있었다.

이는 학생 대부분이 과학고등학교의 교육 목적을 잘 인식하고 있으며, 과학고등학교에 대한 관심이 매우 높다는 것을 보여주고 있다고 하겠다.

(나) 과학고등학교 교육내용

우리 학교에서 주로 제공하고 있는 교육활동에 대하여 학생 69.1%가 과학 관련 분야 대학진학교육이라고 답한 반면, 17.3%만이 과학 관련 영재교육이라고 답하고 있다. 이는 과학고등학교 교육활동이 학교 설립 목적에 맞는 영재교육에 충실하되 교육 수요자들이 원하는 대학진학과 관련하여 이공계 중심으로 운영되어야 함을 시사한다고 볼 수 있다.

이를 위해 과학고등학교 교육과정에 대학교육과 관련한 좀 더 심화된 내용을 첨가해야 될 필요성이 있음을 말해 준다.

표 7. 과학고등학교 설립 취지에 관한 설문

설 문 내 용	구 분	학 생(N=81)	
		f	%
과학고등학교의 설립 취지를 이해하고 과학고에 입학하였습니까?	매우 그렇다	23	28.4
	그렇다	44	54.3
	보통이다	10	12.3
	그렇지 않다	3	3.8
	전혀 그렇지 않다.	1	1.2
우리 학교에서는 주로 어떤 교육을 제공하고 있다고 생각하십니까?	과학 관련 영재	14	17.3
	과학 관련분야 대학진학 교육	56	69.1
	모든 분야 대학 진학교육	7	8.6
	기타	4	4.9

(2) 교육과정 편성 · 운영

(가) 설립취지에 맞는 교육과정

우리 학교의 설립 취지에 맞는 교육과정 운영에 대하여 학생 43.2%가 설립 취지에 맞는 교육과정을 운영하고 있다고 답하고 있다. 그러나 '보통이다', 또는 '그렇지 않다고' 생각하는 학생도 많은 것으로 볼 때 과학고등학교 교육과정은 학생의 요구를 조사하고 그에 따른 개선점을 제시할 필요성이 있는 것으로 분석된다.

(나) 교육과정 이수단위

우리학교 3개년 교육과정의 이수단위가 보통교과 112단위(국민공통 56단위 포함), 전문교과 82단위, 재량활동 12단위, 특별활동 6단위(총 212단위)으로 편성된 것에 대하여 학생 72.8%가 '보통이다'고 답변하고 있다. 이는 과학고등학교 교육과정의 이수단위에 대하여 학습자의 요구를 반영하여 재구성할 필요성이 있는 것으로 분석된다.

(다) 국민공통 기본교과 학습량 수준

국민공통 기본교과 학습량의 적절성에 대하여 '적절하다'고 답한 학생이 21%인데 반해 '보통이다' 또는 '그렇지 않다'고 답한 학생이 79%에 달하고 있다. 이는 과학고등학교의 특성에 맞도록 국민공통 기본교과에 대한 학습량을 조절할 필요성이 있는 것으로 분석된다.

(라) 이수 단위의 적절성

과학고등학교에서 국민공통 기본교과 56단위를 필수적으로 이수해야 하는 교육활동에 대하여 학생 37.1%가 '적절하지 않다'고 답하고 있다. 이는 과학고등학교에 다니는 학생이 국민공통 기본 교과보다는 전문교과에 대하여 더 많은 관심을 가지고 있으며 교육과정을 전문교과 중심으로 지도해야 할 필요성이 있는 것으로 분석된다.

(마) 보통교과 심화과정 이수시기

12학년에 편성된 전문교과 교육과정의 이수시기에 대하여 학생 54.3%가 12학년에서 실시되는 전문교과 내용을 10, 11학년 과정에서 연계요소를 추출하여 다루어야 한다고 대답하고 있다.

이는 조기 졸업을 통해 과학고등학교에서 대학에 진학한 후 학생이 보다

전문적인 교육을 받을 때 도움이 되기 위해서는 12학년의 전문교과 내용을 10, 11학년에 속진 학습할 필요성이 있는 것으로 분석된다.

표 8. 교육과정 편성 및 운영에 관한 설문

설문내용	구분	학 생(N=81)	
		f	%
우리 학교 설립 취지에 맞는 교육과정을 운영하고 있다고 생각하십니까?	매우 그렇다	4	4.9
	그렇다	31	38.3
	보통이다	29	35.8
	그렇지 않다	17	21.0
	전혀 그렇지 않다.	1	1.2
우리 학교 3년 교육과정 이수단위가 다음처럼 편성・운영되는데, 적절하다고 생각합니까?	매우 그렇다	4	4.9
	그렇다	24	29.6
	보통이다	59	72.8
	그렇지 않다	4	4.9
	전혀 그렇지 않다.		
일반고와 동일하게 적용되는 국민공통 기본교과 학습량과 수준이 적절하다고 생각합니까?	매우 그렇다		
	그렇다	17	21.0
	보통이다	32	39.5
	그렇지 않다	28	34.6
	전혀 그렇지 않다.	4	4.9
우리 학교는 특목고임에도 불구하고 국민공통 기본교과 56단위를 필수적으로 이수해야 합니다. 적절하다고 생각합니까?	매우 그렇다	10	12.3
	그렇다	18	22.2
	보통이다	25	30.9
	그렇지 않다	22	27.2
	전혀 그렇지 않다.	8	9.9
교육과정 상 12학년에 편성된 고급 수학 교과를 충실히 수업 받지 못하고 있습니다. 고급수학 이수시기를 조정할 경우 적절한 시기는 언제입니까?	11학년 고급 3단위	14	17.3
	11학년 고급 1단위	14	17.3
	10,11학년 과정 연계요소 추출	44	54.3
	기타	9	11.1

다. 조기졸업 제도

1, 2학년 학생 79명을 대상으로 한 설문조사 결과 89.9%가 조기 졸업을 희망하고 있었다. 또 조기 졸업이 본인의 과학에 대한 재능을 개발할 수 있는가에 대하여는 학생 58.0%가 '그렇다'라고 답하고 있다. 그 이유로 조기 진학을 통해 대학에서 깊이 있는 학문을 공부하기 위한 시간을 확보하는 차원과 일반계 학생들과는 다른 교육과정을 통해 보다 많은 과학지식을 공부하였기 때문에 조기에 대학을 진학하는 것이 당연하다는 생각 때문이었다.

표 9. 조기 졸업 제도에 관한 설문

설문내용	구분	학 생(N=79)	
		f	%
현재 조기졸업을 생각하고 있습니까?	매우 그렇다	53	67.1
	그렇다	18	22.8
	보통이다	6	7.6
	그렇지 않다	2	2.5
	전혀 그렇지 않다.		
조기졸업은 과학에 대한 재능을 개발하는 데 바람직한 제도라고 생각합니까?	매우 그렇다	17	21.0
	그렇다	30	37.0
	보통이다	28	34.6
	그렇지 않다	4	4.9
	전혀 그렇지 않다.		

3. 연구 과제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 탐색한 과학고등학교 교육과정과 선행 연구 고찰 및 실태 분석을 바탕으로 다음과 같이 연구 과제를 설정하였다.

연구 과제 1

과학고 수학교과 심화지도를 위한 기반 조성

가. 보통교과와 전문교과의 단원별 연계 요소 추출

나. 보통교과 심화지도를 위한 교수·학습 과정안 구안

연구 과제 2

과학고 수학교과 심화지도 운영

가. 보통교과 심화지도 프로그램 적용

나. 보통교과 심화지도에 따른 문제점 추출과 해결 방안 모색

Ⅳ. 연구 방법

1. 연구 대상 및 기간

가. 대상 : 제주과학고등학교 1, 2학년 학생(남 65명, 여 15명, 계 80명)

나. 기간 : 2009. 3. 1. ~ 2010. 2. 28.(1년간)

2. 연구 절차

단계	추진 내용	2009년						2010년	
		1월 ~2월	3월 ~4월	5월 ~6월	7월 ~8월	9월 ~10월	11월 ~12월	1월 ~2월	3월~ 6월
계획단계	논문주제 선정 및 연구 계획 수립								
	논문계획서 작성								
	문헌 연구								
	선행 연구 및 실태조사								
실행단계	단원별 연계요소 추출								
	학습과정안 구안								
	과학고 실태 조사 및 분석								
	교육과정의 개발, 검증, 보완								
	교육과정의 적용								
	사후 검사								
정리단계	실행 상의 문제점 분석 및 평가								
	결과 분석 및 고찰								
	지도교수 조언								
	논문 작성								

Ⅴ. 연구 과제의 실행

1. 과제 1의 실행

과제 1. 과학고 수학교과 심화지도를 위한 기반 조성
가. 보통교과와 전문교과의 단원별 연계 요소 추출
나. 보통교과 심화지도를 위한 교수·학습 과정안 구안

가. 보통교과와 전문교과의 단원별 연계 요소 추출

과학고등학교에서 이수되고 있는 수학 과목에 대하여 보통교과 단원과 전문교과 단원을 분석하여 상호 연관된 요소를 추출한다. 또한 상대적으로 중요도가 낮거나 지나치게 어려운 내용을 제외하고 보통교과와 전문교과 간의 학습 분량을 고려하여 상호 연계가 자연스럽게 이루어지도록 연계 요소를 단원별로 추출하였다.

(1) 수학과 보통교과와 전문교과 연계 요소

(가) 목표

생활 속의 문제를 해결하기 위해서 수학의 기본개념, 원리, 법칙을 이해하고 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르는 것이 중요함을 강조한다. 또한 수학 학습 시 계산능력이 중요시되지 않는 문제 해결에는 계산기나 컴퓨터를 활용하도록 권장하여 보다 중요한 수학적 사고 능력의 계발이 이루어질 수 있도록 유도한다.

문제 해결력 기르기 등을 통해서 주어진 자료를 정확하게 판단하고 논리적으로 추론하며 창의적 접근 등 다양한 방법을 활용할 수 있도록 한다.

(나) 내용

복소수의 체계, 다항식, 삼각함수 행렬, 확률과 통계, 공간도형, 벡터, 미분과 적분 등 보통교과와 전문교과 사이의 연계 요소들은 다음의 표와 같다.

표 10. 1학년 보통교과와 관련한 전문교과 연계요소

보통 교과			전문 교과		비고
교과	단원	내용	단원	투입요소	
수학 10 -가	복소수 체계	-복소수 복소수가 서로 같을 조건, 켤레복소수 -복소수의 연산	복소수와 도형 복소수의 극형식	-실수부와 허수부 -절댓값과 아폴로니우스의 원 -극형식과 단위복소수 -드 무와브르의 정리	
	다항식	-나머지 정리 -인수분해 -약수와 배수	정수 다항식	-합동과 그 성질 -잉여류 -다항식의 나눗셈	
	방정식과 부등식	-삼·사차방정식	다항식 극좌표	-3차방정식의 해법 -단위근 -원시근	
수학 10 -나	도형의 방정식	-평면좌표 -직선의 방정식 -원의 방정식 -도형의 이동	극좌표	-극평면 -극방정식 -직선과 원	
	삼각 함수	-삼각함수 -삼각함수의 응용	극방정식의 그래프	-대칭성 -접선과 교각 -교점	
수학 I	행렬	-행렬의 뜻 -행렬의 연산 -역행렬과 연립방정식	행렬과 행렬식	-행렬 -행렬식 -고유값과 행렬의 대각화 -일차변환	
	확률과 통계	-확률의 정의 -확률의 덧셈 정리 -확률의 곱셈 정리 -확률분포 -연속확률변수와 정규분포 -통계적 추정	확률과 통계	-확률과 조건부확률 -확률분포와 기댓값 -결합 확률분포 -이항분포와 큰수의 법칙 -푸아송 분포 -정규분포와 중심극한 정리 -지수분포 -모평균의 추정 -모비율의 추정 -가설검정	

표 11. 2학년 보통교과와 관련한 전문교과 연계요소

보통 교과			전문 교과		비고
교과	단원	내용	단원	투입요소	
수학 Ⅱ	공간 도형	-평면의 결정 조건 -이면각 -삼수선의 정리 -정사영 -공간좌표	기하학의 세계 평면도형	-기학학의 역사 -공리와 추론 -유클리드 평면기하학의 공리 -평면도형의 성질 -직선과 삼각형 -원의 성질	
	벡터	-벡터와 그 연산 -벡터의 성분과 내적 -직선과 평면의 방정식	벡터	-벡터의 성질 -벡터의 내적과 외적	
	이차 곡선	-포물선의 방정식 -타원의 방정식 -쌍곡선의 방정식	극좌표	-이차곡선	
미분과 적분	미분법	-여러 가지 함수의 미분법 -도함수의 활용	여러 가지 함수의 미분법 미분법의 응용	-로그함수와 지수함수의 미분 -역삼각함수의 미분 -쌍곡선함수의 역쌍곡선함수의 미분 -편미분 -평균값 정리와 그 응용 -테일러의 정리 -로피탈의 정리	
	적분법	-부정적분 -정적분 -정적분의 활용	여러 가지 함수의 적분 적분의 응용	-로그함수와 지수함수의 적분 -삼각함수의 역삼각함수의 적분 -쌍곡선함수와 역쌍곡선 함수의 부정적분 -극좌표로 표시된 함수의 적분 -이상적분 -반복적분 -곡선의 길이 -회전체의 부피 -회전체의 겉넓이	

나. 보통교과 심화지도를 위한 교수·학습 과정안 구안

수학과 과목에 대하여 보통교과와 전문교과에서 상호 연계된 분야를 고려하여 보통교과 심화과정 지도를 위한 교수·학습 과정안을 구안하고 전문교과 교육목표에 도달할 수 있도 록 교수·학습 과정안을 재구성하였다.

교수·학습 과정안을 재구성할 때는 교수·학습 활동 시간 및 교과 내용을 적절히 분배하고 학습자가 과다한 수업 내용에 어려움을 겪지 않도록 편성하였다.

(1) 수학과 교수·학습 과정안 (예시) -<부록3> 참조

Ⅰ. 단원명 : 벡터

Ⅱ. 단원의 개관

1. 단원의 학습목표

가. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

나. 두 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

다. 좌표공간에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식을 구할 수 있다.

라. 일차결합, 일차독립, 일차종속의 뜻을 이해할 수 있다.

마. n차원 유클리드공간에서의 벡터의 내적과 외적의 뜻을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

2. 단원의 구성

가. 벡터와 그 연산 : 벡터의 뜻, 벡터의 덧셈과 뺄셈, 벡터의 실수배

나. 벡터의 성분과 내적 : 위치벡터, 벡터의 성분, 벡터의 내적

다. 직선의 방정식

라. 평면의 방정식(구면의 방정식 포함)

마. 벡터의 성질

바. 벡터의 내적과 외적

Ⅲ. 단원 지도 계획

1. 연계 요소

보통 교과		전문 교과
벡터와 그 연산, 평면벡터, 공간벡터, 벡터의 성분, 벡터의 내적	➡	n차원 유클리드공간에서의 벡터의 연산, 일차결합, 일차독립, 일차종속, 벡터의 외적

2. 연계 단원 지도 계획

중단원	소단원	학습 내용	차시
벡터	벡터의 성질	n차원 유클리드공간에서의 벡터의 연산, 벡터공간의 성질, 일차종속과 일차독립 이해	1/2
	벡터의 내적과 외적	n차원 벡터의 내적과 3차원공간에서의 외적을 이해하고 이를 활용할 수 있다.	2/2

Ⅳ. 지도시 유의사항

1. 평면벡터의 성질을 확인하되 공간벡터의 성질은 평면벡터에서 다룬 내용을 반복하지 않고 평면벡터에서의 성질을 확장하는 수준으로 다룬다.
2. 벡터를 선분으로 나타내면 벡터의 연산이 편리해짐을 알게 한다.
3. 벡터의 내적의 기하학적 의미를 정확하게 이해시킨다.
4. 두 벡터가 이루는 각의 크기는 내적을 이용하여 구하여야 함을 강조한다.
5. 벡터의 외적은 3차원 공간에서 정의됨을 강조하고, 내적이 스칼라인 반면 외적은 벡터임을 주지시킨다.

Ⅵ. 본시 교수·학습 과정안

단원	벡 터	소단원	벡터의 성질	차시	1/2
학습 목표	○ n차원 유클리드공간에서 벡터의 연산을 이해하고, 일차독립과 일차종속의 벡터들을 알 수 있다.				
연계 요소	○ n차원 유클리드공간에서의 벡터의 연산, 일차결합, 일차독립, 일차종속				

단계	학 습 내 용	교수-학습 활동		학습자료 및 유의점
		교사	학생	
도입	[보통교과 확인] - x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 크기가 $\sqrt{2}$ 인 벡터는? - x 축의 양의 방향과 이루는 각 θ 가 $\tan\theta = \frac{4}{3}$ 이고 크기가 5 인 위치 벡터는? **[학습목표 제시]**	보통교과 학습 내용을 발문을 통하여 확인 하고 학습목표를 제시한다.	발문에 대답하며 보통교과 벡터 내용을 이해한다.	
전개	[n 차원 벡터와 n 차원 유클리드공간] 2차원 벡터 : (x_1, x_2) 3차원 벡터 : (x_1, x_2, x_3) n차원 벡터 : $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 2차원 유클리드공간 : $\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2$ 는 실수 $\}$ 3차원 유클리드공간 : $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3$ 는 실수 $\}$ n차원 유클리드공간 : $\{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 는 실수 $\}$	n 차원 벡터와 n 차원 유클리드공간의 뜻을 설명한다.		
정리	[n차원 벡터와 유클리드공간] [일차결합],[일차독립] [일차종속]	[본시 학습 내용 정리]		PPT자료 제시
형성 평가	다음 중 일차독립인 벡터의 집합은? $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ $C = \{(6, -2, 3), (-2, 4, 1), (4, -7, -2)\}$			
차시 예고	벡터의 내적과 외적에 대하여 알아본다.			

2. 과제 2의 실행

과제 2. 과학고 수학교과 심화지도 운영
가. 보통교과 심화지도 나. 보통교과 심화지도에 따른 문제점 추출과 해결 방안 모색

가. 보통교과 심화지도의 적용

(1) 활동 목적 : 조기 졸업생이 많은 과학고등학교의 특성상 12학년에 편성된 전문교과를 10학년, 11학년 보통교과 수업내용과 연계하여 직접 수업함으로써 과학고 고급수학 교육의 내실화를 기하고 수업의 질을 향상시키는 데 그 목적이 있다.

(2) 대상 학년 : 10학년 전원(41명), 11학년 전원(39명)

(3) 연구 시기 : 2009. 5. 1 - 2009. 12. 29

(4) 연구 방법 : 보통교과 심화지도 적용

사진 1. 10학년 보통교과 심화지도 수업

(5) 성과

(가) 보통교과와 전문교과 연계 수업을 실시함으로써 심화학습의 기회가 자연

스럽게 학생들에게 제공됨으로써 학생들이 유익한 수학적 정보와 지식을 쌓는데 일조하였으며, 학생들의 다양한 학습욕구를 충족시켰을 뿐 아니라 계속하여 이러한 수업이 학생들에게 도움을 줄 것이라고 판단된다.

표 12. 학생 설문지 통계 자료 (1)

설문내용	구분	1학년		2학년	
		빈도	%	빈도	%
[물음 5] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업에 대하여 대체로 만족스럽다고 생각하십니까?	매우 그렇다	3	**7**	1	**3**
	그렇다	34	**83**	26	**70**
	그저 그렇다	4	10	6	16
	그렇지 않은 편이다	0	0	4	11
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0
[물음 6] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업을 받은 결과 긍정적인 효과가 있었다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	**2**	2	**5**
	그렇다	29	**72**	26	**70**
	그저 그렇다	10	24	8	22
	그렇지 않은 편이다	1	2	1	3
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0
[물음 7] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업 중 수업주제를 통하여 전공지식 및 관련 분야 지식을 많이 쌓을 수 있었다고 생각합니까?	매우 그렇다	0	**0**	2	**5**
	그렇다	26	**63**	30	**81**
	그저 그렇다	14	34	5	14
	그렇지 않은 편이다	1	2	0	0
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0
[물음 10] 여러분들이 참여한 본 고급수학의 보통교과 심화 지도 수업에 대하여 만족스럽다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	**2**	3	**8**
	그렇다	29	**72**	22	**59**
	그저 그렇다	9	22	9	24
	그렇지 않은 편이다	1	2	2	5
	전혀 그렇지 않다	1	2	1	3
[물음 11] 후배들에게 이런 수업 기회가 계속해서 주어지는 것이 바람직하다고 생각합니까?	매우 그렇다	3	**7**	4	**11**
	그렇다	28	**68**	25	**67**
	그저 그렇다	9	22	5	14
	그렇지 않은 편이다	1	2	1	3
	전혀 그렇지 않다	0	0	2	5

나. 수업 적용에 따른 문제점 추출과 해결 방안 모색

수학 교과에 대하여 보통교과 심화지도를 적용함에 있어서 학생들의 설문조사를 토대로 본 연구의 문제점을 파악하고 해결방안을 모색하였다.

(1) 문제점

(가) 보통교과와 전문교과 연계단원 지도시 정규 수업시간으로는 부족한 부분이 있었다.

(나) 학생들의 이해 수준에 개인차가 존재하였다.

(다) 선행학습이 현행학습에 많은 영향을 끼친다고 조사되었다.

표 13. 학생 설문지 통계 자료 (2)

설문내용	구분	1학년		2학년	
		빈도	%	빈도	%
[물음 4] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업은 그 시간이 충분하다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	2	1	3
	그렇다	26	63	13	35
	그저 그렇다	9	**22**	15	**40**
	그렇지 않은 편이다	4	**10**	7	**19**
	전혀 그렇지 않다	1	**2**	1	**3**
[물음 13] 3학년 교육과정에 편제되어 있는 고급수학의 내용을 보통교과 교육 과정에 포함시켜 수업을 진행했을 때 단점은 무엇이라 생각합니까?	고급수학의 내용이 차지하는 비율이 너무 크다	2	5	3	8
	내용 수준의 향상으로 학습량이 과도하다	15	**37**	11	**29**
	선행 학습이 되어 있지 않으면 내용 이해가 어렵다	9	**22**	13	**35**
	수준 차이에 따른 수업 분위기의 위화감이 조성된다.	8	19	5	14
	학력 차이로 수업에 흥미를 느끼지 못하여 자기 주도적 학습 진행이 어렵다	7	17	5	14

(2) 해결 방안

(가) 교수·학습 과정안 작성시 단계별 시간 계획을 철저히 수립하여 수업에 임한다.

(나) 심화학습 자료를 작성하여 사전에 학생에게 배부하여 수업 전에 미리 자기주도적 학습을 통하여 예습을 할 수 있도록 한다.

(다) 학급 내 수준별 수업을 통하여 개인차를 극복한다.

Ⅶ. 결론 및 제언

1. 결 론

본 연구를 통한 ‘과학고 고급수학 교육의 내실화를 위한 지도 방안’이라는 주제 아래 설정된 두 가지 과제인 ‘과학고 수학과 보통교과 심화지도를 위한 기반조성’ 과 ‘과학고 수학교과 심화지도 운영’을 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

가. 보통교과와 고급수학 교과 간의 연계 분야를 도출할 수 있었다.

나. 보통교과와 고급수학 교과 간의 연계 요소를 바탕으로 보통교과 시간에 고급 수학 교과 내용을 포함하는 교수·학습 지도안을 작성할 수 있었다.

다. 개발한 교수·학습지도안을 현장에 적용하고 보통교과와 고급수학 교과간 연계 학습을 할 수 있었다.

라. 조기 졸업을 희망하는 학생들에게 12학년에 편제된 고급수학 교과의 내용들을 학습할 수 있는 기회를 만들고, 심화학습을 위한 동기를 강화시킬 수 있었다.

2. 제 언

과학고등학교의 특성에 알맞은 교육과정 운영을 위해 위 연구 결과를 토대로 다음과 같이 제언하고자 한다.

가. 조기 졸업생이 많은 과학고등학교 특성상 12학년에서 배우는 전문교과 내용을 10, 11학년에서 접할 수 있도록 국가적 제도가 필요할 것이다.

나. 대부분의 학생이 이공계 대학을 진학하는 과학고등학교의 특성을 살려 수학 과목에 대한 효과적인 연계 프로그램을 마련하여야 할 것이다.

다. 보통교과와 전문교과 간의 효과적인 연계가 이루어질 수 있도록 과학고 교과서 내용의 재편성이 필요할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2007), 고등학교 교육과정Ⅵ.

과학기술부(2003), 과학영재학교 교육과정 개선에 관한 연구.

제주특별자치도교육청(2007), 제주특별자치도 고등학교 교육과정 편성·운영지침.

부산주례여자고등학교(2002), “일반계고등학교 영재학급 운영방안 연구”. 교육과학기술부 지정 연구학교 운영보고서6.

전북과학고등학교(2007), “문제 중심(PBL) 프로그램에 의한 창의적 문제해결력 신장” 교육과학기술부 정책연구학교 운영보고서.

전북산서고등학교(2003), “소규모 일반계 고등학교 학생의 과목 선택권 확대를 위한 선택중심 교육과정 편성 운영” 교육과학기술부 정책연구학교 운영보고서.

제주여자상업고등학교(2002), “진로탐색 프로그램을 구안 적용한다.” 방과후학교 정책연구학교 운영보고서.

제주한림여자중학교(2002), “주5일 수업제를 위한 중학교 교육과정 편성 운영”. 교육과학기술부 정책연구학교 운영보고서.

<Abstract>

A study on the sdvancement of the teaching advanced mathematics in science high school

yi, Hyung-rock
Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Jeju National University
Jeju, Korea
Supervised by professor park, Jin-won

The curriculum in the science high school has different features from the curriculum in ordinary academic high school. The goal of education in science high school is to educate the gifted students who will leads the future of our country, and so it is organized and operated to improve the expert knowledge, the creativity and the ability for research. The regular course of study is organized centered at the teaching expert knowledge.

The course of study in science high school must reflect the characteristics of the students, parents and the school. From this point of view, it must be considered taking the characteristics and the career of the students in organizing and operating the curriculum in science high school. Also, we must consider the appropriateness between rate of general subjects and that of technical subjects in curriculum, the connectivity of the contents in the subjects and the ability for study of the students.

In this thesis, I make an effort to improve the teaching advanced mathematics for 12th grade in science high school. And the results of this thesis are summarized as follows

1. I can obtain the related subjects between the ordinary mathematics and the advanced mathematics.
2. I can make an guidance plan for teaching ordinary mathematics including advanced mathematics based on the related subjects between the ordinary mathematics and the advanced mathematics.
3. I can apply the above guidance plan in the class and teach ordinary mathematics and advanced mathematic in the same time.
4. I can give an opportunity for the study who want early graduation to study advanced mathematics. And, the motive for the intensive study is enriched.

<부록 1>

설문지

안녕하십니까? 본 설문지는 '보통교과 심화지도를 통한 과학고 고급수학 교과교육의 내실화' 연구의 일환으로 실시하는 설문조사입니다. 학생 여러분은 본 설문지의 문항을 통해 과학고에서 공부하면서 평소 느끼고 생각하는 점에 대한 의견을 적어 주십시오. 한 문항도 빠짐없이 성실하고 솔직하게 응답해 주시면 감사하겠습니다. 또한 학생 여러분의 응답은 본 연구의 목적으로만 사용할 것입니다. 소중한 시간을 내어 설문조사에 참여해 주셔서 감사드립니다.

1. 성별 : ① 남자 ② 여자
2. 학년 : ① 10학년 ② 11학년 ③ 12학년

※ 다음 문항에 대해 여러분의 의견과 가장 일치하는 번호에 √표를 하거나 간단히 답해 주십시오.

Ⅰ. 설립취지

1. 학생은 우리학교의 설립취지(과학영재 양성을 위한 과학계열의 고등학교)를 이해하고 과학고에 입학했습니까?

   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

2. 우리학교에서는 주로 어떤 교육을 제공하고 있다고 생각합니까?

   ① 과학 관련분야 영재 교육 ② 과학 관련분야 대학진학 준비교육
   ③ 모든 분야 대학진학 준비교육 ④ 기타____________________

Ⅱ. 교육과정 편성 · 운영

1. 우리학교는 설립취지에 부합하는 교육과정을 운영하고 있다고 생각합니까?

   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

2. 우리학교 3년 교육과정 이수단위가 다음처럼 편성 · 운영되는데, 적절하다고 생각합니까?

교과 194단위(보통교과 112단위(국민공통 56단위 포함))+전문교과 82단위
+ 재량활동 12단위 + 특별활동 6단위 = 총 212단위

① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

3. 학생 본인의 수준을 반영하고 과학의 재능을 개발하기에, 다음 사항들이 적절하다고 생각합니까?

항목	내 용	① 매우동의	② 동의함	③ 보통	④ 반대함	⑤ 절대반대
가	일반고와 동일하게 적용되는 국민 공통기본교과 학습량과 수준 적절					
나	일반고 심화선택교과와 동일한 보통교과 학습량과 수준 적절					
다	일반고와 달리 실험 및 고급과목의 전문교과 학습량과 수준 적절					

4. 우리 학교는 특목고임에도 불구하고 국민공통 기본교과 56단위를 필수적으로 이수해야 합니다. 적절하다고 생각합니까?

① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

5. 우리 학교는 학생 대부분이 조기졸업을 하므로 교육과정 상 12학년에 편성된 ‘고급수학’을 조기 졸업 이수인정 평가만으로 이수 할 뿐 충실한 수업이 이루어지고 있지 않습니다. 전문교과 이수시기를 조정할 경우 적절한 시기는 무엇입니까?

① 11학년 1학기 보통(3단위) / 11학년 2학기 고급(3단위)
12학년 1학기 보통(3단위) / 12학년 2학기 고급(3단위)

② 11학년 1학기 보통(2단위), 고급(1단위) /11학년 2학기 보통(1단위), 고급(2단위)
12학년 1학기 보통(1단위), 고급(2단위) /11학년 2학기 보통(2단위), 고급(1단위)

③ 12학년에서 실시되는 전문교과 내용을 10, 11학년 과정에서 연계 요소를 추출하여 다루어야 한다.

④ 기타 (   )

Ⅲ. 대학 진학을 위한 조기졸업

1. 학생은 현재 조기졸업을 생각하고 있습니까?

① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

2. (1번 ①, ②번 응답자만) 조기졸업을 하려는 이유는 무엇입니까?

① 남들보다 빨리 대학에 진학하기 위해서

② 대학 진학할 때 유리하기 때문에

③ 남들이 조기졸업을 하니까

④ 12학년 진학하면 대학 진학이 어려우므로

⑤ 기타____________________

3. 조기졸업은 본인이 과학에 대한 재능을 개발하는 데 바람직한 제도라고 생각합니까?

① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다 ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

※ 설문에 응해 주셔서 감사합니다.

<부록 2>

- 고급수학의 보통교과 심화지도 후 실시한 설문지 통계자료

설문내용	구분	1학년		2학년	
		빈도	%	빈도	%
[물음 1] 졸업 후 진학하고 싶은 학교는?	KAIST	16	39	6	16
	포항공대	2	5	6	16
	GIST 또는 UNIST	0	0	1	3
	일반대학 이공계열	22	54	24	65
	의학계열	1	2	0	0
[물음 2] 고급수학의 내용을 보통교과 심화지도를 통하여 1,2학년 교육과정을 재편성하여 다루고 있는데 여러분의 생각은 어떠합니까?	매우바람직하다	7	17	5	14
	바람직하다	22	54	25	67
	그저 그렇다	10	24	6	16
	바람직하지 못하다	2	5	1	3
	매우 바람직하지 못하다	0	0	0	0
[물음 3] 고급수학의 내용을 보통교과 심화지도를 통하여 1,2학년 교육과정을 재편성하여 수업을 할 때, 수업 진행은 주로 어떤 방식으로 진행되어야 한다고 생각합니까?	자문교수나 지도교사가 설명하고 학생은 청강하는 방식	17	42	8	22
	하나의 토론주제를 선정하고 서로 토론하는 형식	9	22	13	35
	참여자에게 주제를 할당하고 순서대로 발표한 형식	7	17	7	19
	학생 스스로가 책과 인터넷 등을 이용하여 공부하는 형식	5	12	2	5
	배경지식은 따로 학습하지 않고 수업 중간에 필요에 따라 학습하는 방식	3	7	7	19
[물음 4] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업은 그 시간이 충분하다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	2	1	3
	그렇다	26	63	13	35
	그저 그렇다	9	22	15	40
	그렇지 않은 편이다	4	10	7	19
	전혀 그렇지 않다	1	2	1	3
[물음 4-1] [물음 4]에서 ③,④,⑤에 답한 학생만 고급수학의 보통교과 심화지도 수업시간이 충분하지 않았다면 그 주된 이유는 무엇이었다고 생각합니까?	흥미진작 단계 시간의 부족	4		2	
	이론 수업 단계 시간의 부족	3		6	
	프로그래밍 단계 시간의 부족	1		2	
	정리 단계 시간의 부족	1		6	
	수업 분량의 과다	5		7	
[물음 5] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업에 대하여 대체로 만족스럽다고 생각하십니까?	매우 그렇다	3	7	1	3
	그렇다	34	83	26	70
	그저 그렇다	4	10	6	16
	그렇지 않은 편이다	0	0	4	11
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0

설문내용	구분	1학년		2학년	
		빈도	%	빈도	%
[물음 5-1] [문제 5]에서 ③,④,⑤에 답한 경우 보완하여야 할 것은 무엇이라고 생각합니까?	내용수준	0		0	
	분량	1		1	
	내용의 구성	3		5	
	연계정도	0		3	
	기타	0		1	
[물음 6] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업을 받은 결과 긍정적인 효과가 있었다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	2	2	5
	그렇다	29	72	26	70
	그저 그렇다	10	24	8	22
	그렇지 않은 편이다	1	2	1	3
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0
[물음 7] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업 중 수업주제를 통하여 전공지식 및 관련 분야 지식을 많이 쌓을 수 있었다고 생각합니까?	매우 그렇다	0	0	2	5
	그렇다	26	63	30	81
	그저 그렇다	14	34	5	14
	그렇지 않은 편이다	1	2	0	0
	전혀 그렇지 않다	0	0	0	0
[물음 8] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업을 통하여 창의적 혹은 논리적으로 생각하려는 태도와 능력이 길러졌다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	2	3	8
	그렇다	16	39	28	75
	그저 그렇다	20	49	5	14
	그렇지 않은 편이다	3	7	1	3
	전혀 그렇지 않다	1	2	0	0
[물음 9] 고급수학의 보통교과 심화지도 수업에 참여하고 나서 장차 과학자로서의 진로를 결정하는데 중요한 계기가 되었습니까?	매우 그렇다	1	2	0	0
	그렇다	14	34	22	60
	그저 그렇다	21	51	12	32
	그렇지 않은 편이다	4	10	3	8
	전혀 그렇지 않다	1	2	0	0
[물음 10] 여러분들이 참여한 본 고급수학의 보통교과 심화 지도 수업에 대하여 만족스럽다고 생각합니까?	매우 그렇다	1	2	3	8
	그렇다	29	72	22	59
	그저 그렇다	9	22	9	24
	그렇지 않은 편이다	1	2	2	5
	전혀 그렇지 않다	1	2	1	3
[물음 11] 후배들에게 이런 수업 기회가 계속해서 주어지는 것이 바람직하다고 생각합니까?	매우 그렇다	3	7	4	11
	그렇다	28	68	25	67
	그저 그렇다	9	22	5	14
	그렇지 않은 편이다	1	2	1	3
	전혀 그렇지 않다	0	0	2	5

설문내용	구분	1학년		2학년	
		빈도	%	빈도	%
[물음 12] 3학년 교육과정에 편제되어 있는 고급수학의 내용을 보통교과 교육과정에 포함시켜 수업을 진행 했을 때 장점은 무엇이라 생각합니까?	과학고등학교 교육목표에 부합하는 전문교육이 가능하다	15	37	20	54
	탐구 위주의 교육과 이론을 접목할 수 있다	5	12	1	3
	수학 분야의 최신 이론을 접할 수 있다.	7	17	4	10
	여러 관련 분야의 이론을 통합할 수 있었다	6	15	5	14
	과학고등학교 수준에 맞는 학습을 할 수 있었다	8	19	7	19
[물음 13] 3학년 교육과정에 편제되어 있는 고급수학의 내용을 보통교과 교육과정에 포함시켜 수업을 진행 했을 때 단점은 무엇이라 생각합니까?	고급수학의 내용이 차지하는 비율이 너무 크다	2	5	3	8
	내용 수준의 향상으로 학습량이 과도하다	15	37	11	29
	선행 학습이 되어 있지 않으면 내용 이해가 어렵다	9	22	13	35
	수준 차이에 따른 수업 분위기의 위하감이 조성된다.	8	19	5	14
	학력 차이로 수업에 흥미를 느끼지 못하여 자기주도적 학습 진행이 어렵다	7	17	5	14

<부록 3>

수학 교수·학습 과정안

Ⅰ. 단원명

복소수

Ⅱ. 단원의 개관

1. 단원의 학습목표

가. 복소수의 실수부와 허수부의 뜻을 이해하고, 관련된 여러 성질을 이해한다.
나. 복소수의 절댓값이 의미하는 기하학적 성질을 이해한다.
다. 네 개의 복소수가 하나의 공통 원을 결정하는 조건을 이해한다.

2. 단원의 구성

가. 실수부와 허수부
나. 절댓값과 아폴로니오스의 원
다. 극형식과 단위복소수
라. 드무와브르의 정리

Ⅲ. 단원 지도 계획

1. 연계 요소

보통 교과		전문 교과
실수부와 허수부, 켤레복소수, 복소수의 연산	➡	복소평면, 실수부와 허수부, 절댓값과 아폴로니오스의 원,

2. 연계 단원 지도 계획

중단원	소단원	학습 내용	차시
복소수	실수부와 허수부	복소평면의 뜻, 실수부와 허수부, 실수축, 허수축, 실수부와 허수부의 성질	1/3
	절댓값과 아폴로니오스의 원	복소수의 절댓값, 절댓값과 거리, 삼각부등식	2/3
		원과 선분의 수직이등분선, 아폴로니오스의 원	3/3

Ⅳ. 지도시 유의사항

1. 실수는 수직선과 일대일 대응이 되고, 복소수는 평면과 일대일 대응이 됨을 주지시킨다.
2. 실수축 과 허수축을 설명한다.
3. 실수부와 허수부의 성질에 대하여 자세히 설명한다.
4. 복소수의 절댓값의 의미를 자세히 설명한다.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	실수부와 허수부	차시	1
학습목표	◦ 복소평면의 뜻과 복소수의 실수부와 허수부의 뜻을 이해하고, 관련된 여러 성질을 이해한다.				

- 다음 복소수를 $a+bi$ 꼴로 나타내어라

(1) 4　　(2) $3i$　　(3) 0　　(4) $1-i$

- 다음을 계산하여라.

$(3-i)+(1+5i)$

전문교과 학습내용

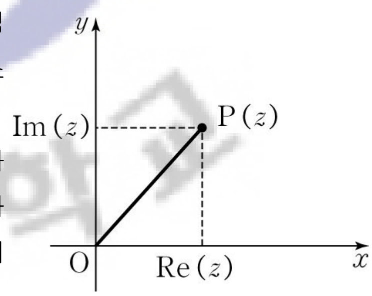
<복소평면>

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$에 대응시키면 복소수는 좌표평면 위의 점에 대응되고, 또 평면위의 점은 복소수로 나타낼 수 있다. 이와 같이, 좌표평면 위의 각점이 복소수를 나타내는 것으로 생각할 때, 이 평면을 **복소평면**이라고 한다.

[문제 1]

다음 복소수를 복소평면 위의 점으로 나타내어라.

(1) $1+2i$　　(2) -3　　(3) $4i$



복소수 $z=a+bi$ 에 대응되는 복소평면 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 의 x 좌표인 a 와 y 좌표인 b 를 각각 복소수 $z=a+bi$ 의 **실수부**와 **허수부**라고 한다.
또, 이것을 기호로는 $\mathrm{Re}(z)=a$, $\mathrm{Im}(z)=b$ 로 나타낸다. 실수는 허수부가 0 인 복소수이고, 허수부가 0 인 복소수는 실수이다. 한편, 실수부가 0 이고 허수부가 0 이 아닌 복소수를 **순허수**라고 한다. 즉, 순허수는 실수부가 0 인 복소수이다.

따라서 $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이고, $z=-\bar{z}\,(z\neq 0)$ 이면 z 는 순허수이다.
또, 실수 a는 x축 위의 점 $(a,0)$으로, 순허수 bi는 y축 위의 점 $(0,b)$로 나타낼 수 있으므로 x축을 **실수축**, y축을 **허수축**이라고 한다.

[보기]

복소수 $z=3+4i$ 에서 $\mathrm{Re}(z)=3$, $\mathrm{Im}(z)=4$ 이다.

[문제 2]

두 복소수 z , ω 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\mathrm{Re}(z+\omega)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(\omega)$ (2) $\mathrm{Im}(z+x)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(x)$

복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$ 이므로

$z=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)i$, $\bar{z}=\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)i$ 로 나타낼 수 있다.

따라서 복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 z , $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ 사이에는 다음이 성립한다.

실수부와 허수부_

[1] $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$ [2] $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})=-\dfrac{i}{2}(z-\bar{z})$

[예제 1]

자연수 n 에 대하여 복소수 $(2+i)^n+(2-i)^n$ 은 실수임을 보여라.

| 풀이 |

복소수 z 에 대하여 $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ 이고 $\overline{2+i}=2-i$ 이다.

따라서 $\omega=(2+i)^n$ 이라 하면 $(2-i)^n=(\overline{2+i})^n=\overline{(2+i)^n}=\bar{\omega}$ 이므로

$(2+i)^n+(2-i)^n=\omega+\bar{\omega}=2\mathrm{Re}(\omega)$ 이다.

그러므로 $(2+i)^n+(2-i)^n$ 은 실수이다.

[문제 3]

자연수 n 에 대하여 복소수 $(2+i)^n-(2-i)^n$ 은 순허수임을 보여라.

[문제 4]

$n=1$, 2와 실수 a , b , c , d $(b\neq 0)$ 에 대하여 복소수 $(a+bi)^n+(c+di)^n$ 이 실수이면, 모든 자연수 n 에 대하여 복소수 $(a+bi)^n-(c+di)^n$ 은 순허수임을 보여라.

복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 $\overline{z}=a-bi$, $iz=-b+ai$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$ 이므로

복소수 z 에 대하여 다음이 성립한다.

실수부와 허수부의 성질_

복소수 $z=a+bi$ 에 대하여

[1] $\mathrm{Re}(\overline{z})=\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\overline{z})=-\mathrm{Im}(z)$ [2] $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$

[3] $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{a^2+b^2}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{a^2+b^2}$

[예제 2]

순허수가 아닌 복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 $z-\dfrac{1}{z}$ 이 순허수이면 $a^2+b^2=1$ 임을 보여라.

| 풀이 |

$$\mathrm{Re}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}(z)-\frac{\mathrm{Re}(z)}{a^2+b^2}=\mathrm{Re}(z)\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)$$

그런데 $\mathrm{Re}(z)\neq 0$ 이므로 $z-\dfrac{1}{z}$ 이 순허수이면 $1-\dfrac{1}{a^2+b^2}=0$ 즉, $a^2+b^2=1$ 이다.

[문제 5]

$z=x+yi$ (x , y 는 실수), $x(x^2+y^2)=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\dfrac{z}{1+z^3}$ 는 실수임을 보여라.

[예제 3]

임의의 복소수 z 에 대하여 $\alpha z+\beta\overline{z}$ 가 실수이기 위한 복소수 α , β 의 조건을 구하여라.

| 풀이 |

$\alpha z+\beta\overline{z}$ 가 실수이므로 $\mathrm{Im}(\alpha z+\beta\overline{z})=\mathrm{Im}(\alpha z)+\mathrm{Im}(\beta\overline{z})=\mathrm{Im}(\alpha z)-\mathrm{Im}(\overline{\beta}z)$
$=\mathrm{Im}(\alpha z-\overline{\beta}z)=\mathrm{Im}[(\alpha-\overline{\beta})z]=0$ 이다.

즉, 임의의 복소수 z 에 대하여 $(\alpha-\overline{\beta})z$ 가 실수이므로 $\alpha-\overline{\beta}=0$ 이다 .

즉, $\alpha=\overline{\beta}$ 이다.

[문제 6]

임의의 복소수 z 에 대하여 $\alpha z-\beta\overline{z}$ 가 순허수이기 위한 복소수 α , β 의 조건을 구하여라.

[예제 4]

복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 복소수 $3(a^2-b^2)+2abi$ 를 z 와 $\overline{z}$ 의 식으로 나타내어라.

| 풀이 |

$a=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $b=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$ 이므로

$a^2-b^2=\frac{1}{4}(z^2+2z\overline{z}+\overline{z^2})+\frac{1}{4}(z^2-2z\overline{z}+\overline{z^2})=\frac{1}{2}(z^2+\overline{z}^2)$

$ab=-\frac{i}{4}(z^2-\overline{z^2})$ 이므로 $3(a^2-b^2)+2abi=\frac{3}{2}(z^2+\overline{z^2})+\frac{1}{2}(z^2-\overline{z^2})=2z^2+\overline{z}^2$

[과제 1]

좌표평면 위의 타원 $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$을 $z=x+yi$와 $\overline{z}$의 식으로 나타내어라.

[과제 2]

좌표평면 위의 포물선 $y=2x^2-3x+1$을 z와 $\overline{z}$의 식으로 나타내어라.

[과제 3]

좌표평면 위의 쌍곡선 $(x-2)^2-y^2=1$을 z와 $\overline{z}$의 식으로 나타내어라.

[확인문제]

1. 복소수 z가 $\mathrm{Re}(z)=a, \mathrm{Im}(z)=b\neq 0, a^2+b^2=4$를 만족시킬 때, $\mathrm{Re}\left[\frac{6-z}{2-z}\right]=2$ 임을 보여라.

2. $\frac{z}{1+z^2}$가 실수이기 위한 z의 조건을 구하여라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	절댓값과 아폴로니오스의 원	차시	2
학습목표	◦ 복소수의 절댓값, 절댓값과 거리, 삼각부등식의 성질을 이해한다.				

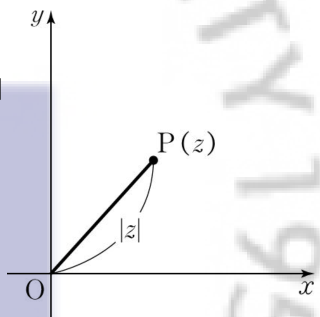
- 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$를 증명하여라. 또 등호가 성립하는 경우는 어떤 경우인지 말하여라.

- 부등식 $|a|-|b| \le |a-b|$를 증명하여라.

전문교과 학습내용

<복소수의 절댓값, 절댓값과 거리, 삼각부등식>

복소평면에서 복소수 $z=a+bi$ 로 나타내는 점과 원점과의 거리 $\sqrt{a^2+b^2}$ 을 복소수 z의 **절댓값**이라 하고, 다음과 같이 나타낸다.



$$\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|a+bi|$$

즉, 복소수 z 에 대응되는 복소평면 위의 점을 $\mathrm{P}(z)$, 원점을 O 라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=|z|$ 인 관계가 성립한다.

복소수 $z=a+bi$ 에 대하여

$|\mathrm{Re}(z)|=|a| \le |z|$, $|\mathrm{Im}(z)|=|b| \le |z|$ 이다.

또, $\bar{z}=a-bi$, $z\bar{z}=a^2+b^2$ 이므로 $|\bar{z}|=|z|$, $|z|^2=z\bar{z}$ 이다.

두 복소수 $z=a+bi$, $\omega=c+di$ 에 대하여

$z\omega=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 이므로

$|z\omega|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|\omega|^2$

이고, $\left|\dfrac{z}{\omega}\right|^2=\dfrac{z}{\omega}\overline{\left(\dfrac{z}{\omega}\right)}=\dfrac{z}{\omega}\dfrac{\bar{z}}{\bar{\omega}}=\dfrac{z\bar{z}}{\omega\bar{\omega}}=\dfrac{|z|^2}{|\omega|^2}=\left(\dfrac{|z|}{|\omega|}\right)^2$ 이므로 다음이 성립한다.

절댓값의 성질

두 복소수 z, ω 에 대하여

[1] $|\mathrm{Re}(z)|=|a| \le |z|$, $|\mathrm{Im}(z)|=|b| \le |z|$

[2] $|\bar{z}|=|z|$, $|z|^2=z\bar{z}$

[3] $|z\omega|=|z||\omega|$

[4] $\left|\dfrac{z}{\omega}\right|=\dfrac{|z|}{|\omega|}$ (단, $\omega \ne 0$)

[문제 1]

두 복소수 $z=2+7i$, $\omega=(3+4i)z$에 대하여 다음 복소수의 절댓값을 구하여라.

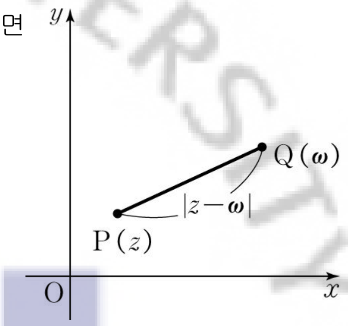
(1) $z^3\omega$ (2) $\dfrac{1}{z\omega}$

[문제 2]

복소수 z에 대하여 $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$ 임을 보여라.

두 복소수 $z=a+bi$, $\omega=c+di$ 에 대응되는 복소평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(\omega)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=|(a-c)+(b-d)i|$ 이다.



따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=|z-\omega|$ 인 관계가 성립한다. 또,

$$|z-\omega|^2=(z-\omega)\overline{(z-\omega)}=(z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega})$$
$$=z\bar{z}-(z\bar{\omega}+\omega\bar{z})+\omega\bar{\omega}=|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{\omega})+|\omega|^2$$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{\omega})+|\omega|^2}$ 이다.

따라서 복소평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(\omega)$사이의 거리를 간단히 두 복소수 z , ω 사이의 거리라 할 때, 다음이 성립한다.

절댓값과 거리_

두 복소수 z , ω 의 거리를 d 라 하면 $d=|z-\omega|=\sqrt{|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{\omega})+|\omega|^2}$

[문제 3]

복소평면 위의 원점O와 두 점 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(\omega)$ 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$이기 위한 필요 충분조건은$\mathrm{Re}(z\bar{\omega})=0$ 임을 보여라.

[예제 1]

두 복소수 z , ω 에 대하여 다음을 보여라.

$$|1+\bar{z}\omega|^2+|z-\omega|^2=(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)$$

| 풀이 |

$|1+\bar{z}\omega|^2=1+2\mathrm{Re}(\bar{z}\omega)+|\bar{z}\omega|^2=1+2\mathrm{Re}(\bar{z}\omega)+|z|^2|\omega|^2$

$|z-\omega|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{z}\omega)+|\omega|^2$ 이므로

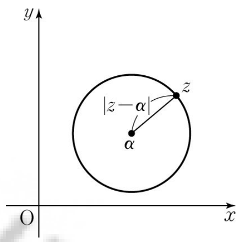
$|1+\bar{z}\omega|^2+|z-\omega|^2=1+|z|^2+|\omega|^2+|z|^2|\omega|^2=(1+|z|^2)(1+|\omega|^2)$

두 복소수 z,ω에 대하여 $|z+\omega| = \sqrt{|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{\omega}) + |\omega|^2}$

$$\leq \sqrt{|z|^2 + 2|z\overline{\omega}| + |\omega|^2} = \sqrt{|z|^2 + 2|z||\omega| + |\omega|^2} = |z| + |\omega|$$

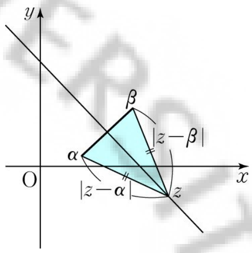
이므로 다음이 성립한다.

두 복소수 z,ω에 대하여 $|z+\omega| \leq |z| + |\omega|$ **<삼각부등식>**



절댓값을 이용하여 원과 선분의 수직이등분선의 방정식을 나타낼 수 있다. 복소평면 위에서 중심이 복소수 α 이고 반지름의 길이가 r 인 원 위의 임의의 점 z에 대하여 α 와 z 사이의 거리는 r 로 일정하므로 다음과 같다.

$$|z-\alpha| = r$$



한편, 서로 다른 두 복소수 α 와 β 를 잇는 선분의 수직이등분선 위의 임의의 점 z 에 대하여 z 로부터 α 와 β 까지의 거리가 서로 같으므로 다음과 같다.

$$|z-\alpha| = |z-\beta| \text{ 또는 } \frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = 1$$

[과제 1]

복소수 $z \neq -i$에 대하여 $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$라 하자. z가 x축 위를 움직일 때, ω의 자취의 방정식을 구하여라.

[과제 2]

복소수 $z \neq 3$에 대하여 $\omega = \dfrac{3z-1}{z-3}$이라 하자. z가 원점을 중심으로 하는 단위원 위를 움직일 때, $|\omega-2|$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

[과제 3]

복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

확인문제

1. 두 복소수 $2+3i$ 와 $-2+3i$ 를 초점으로 하고, 두 초점에서의 거리의 합이 r 인 타원의 방정식을 복소수의 절댓값을 이용하여 나타내어라.

2. 부등식 $2 \leq \left|\dfrac{z-3}{z-2i}\right| < 3$ 을 만족시키는 복소수 z 의 영역을 복소평면 위에 나타내어라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	절댓값과 아폴로니오스의 원	차시	3
학습목표	◦ 원과 선분의 수직이등분선과 아폴로니우스의 원의 방정식을 이해할 수 있다.				

- 두 점 $A(-2\,,1)$, $B(2\,,4)$ 로부터의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 집합이 나타내는 도형을 구하여라.

전문교과 학습내용

<원과 선분의 수직이등분선>

[1] 중심이 α, 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 $|z-\alpha|=r$

[2] α 와 $\beta(\alpha\neq\beta)$ 를 잇는 선분의 수직이등분선의 방정식은 $|z-\alpha|=|z-\beta|$ 또는 $\dfrac{|z-\alpha|}{|z-\beta|}=1$

[문제 1]

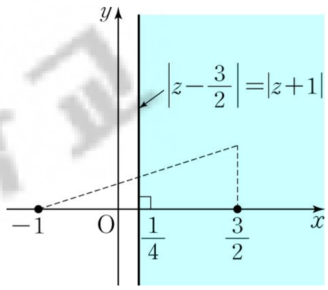
복소수 $2+3i$ 를 초점으로 하고 준선이 $x=-2$ 인 포물선의 방정식을 복소수의 절댓값을 이용하여 나타내어라.

[예제 1]

부등식 $\left|\dfrac{2z-3}{z+1}\right|\leq 2$ 를 만족시키는 복소수 z 의 영역을 복소평면 위에 나타내어라.

| 풀이 |

부등식을 변형하면 $\left|z-\dfrac{3}{2}\right|\leq|z+1|$ 이다.



따라서 구하는 영역은 오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{3}{2}$ 과 -1 을 잇는 선분의 수직이등분선을 경계로 하고 $\dfrac{3}{2}$ 을 품는 반평면이다.

[문제 2]

부등식 $|z|\leq 3\leq\left|\dfrac{3z-5}{z-i}\right|$ 를 만족시키는 복소수 z의 영역을 복소평면 위에 나타내어라.

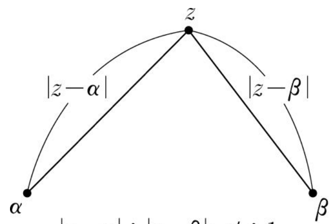
서로 다른 두 복소수 α 와 β 에 대하여 α 까지의 거리와 β 까지

거리의 비가 일정한 복소수 z가 이루는 도형에 대하여 알아보자.

$|z-\alpha|:|z-\beta|=t:1$ 이면 도형의 방정식은

$|z-\alpha|=t|z-\beta|$ 꼴로 쓸 수 있다.

$t=1$ 인 경우는 앞에서 알아본 바와 같이 α 와 β 를 잇는 선분의 수직이등분선이다.



$|z-\alpha|:|z-\beta|=t:1$

$t\neq 1$ 인 경우 $|z-\alpha|=t|z-\beta|$ 의 양변을 제곱한 후 정리하면

$$(1-t^2)|z|^2-2\mathrm{Re}\,z(\overline{\alpha}-t^2\overline{\beta})=t^2|\beta|^2-|\alpha|^2$$

양변을 $1-t^2$ 으로 나눈 후 $\left|\dfrac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}\right|^2$ 을 더하면

$$|z|^2-2\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{\frac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}}\right)+\left|\frac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}\right|^2=\frac{t^2|\beta|^2-|\alpha|^2}{1-t^2}+\left|\frac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}\right|^2$$

이것을 정리한 후 제곱근을 택하면 $\left|z-\dfrac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}\right|=\left|\dfrac{t(\alpha-\beta)}{1-t^2}\right|$ 와 같은 원의 방정식이 얻어진다. 이 원을 **아폴로니오스의 원**이라고 한다.

아폴로니오스의 원_

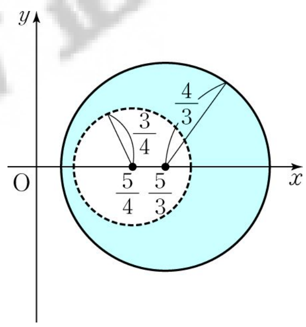
$|z-\alpha|:|z-\beta|=t:1$ $(\alpha\neq\beta,\,t\neq 1)$ 인 z 가 이루는 도형은 중심이 $\dfrac{\alpha-t^2\beta}{1-t^2}$ 이고 반지름의 길이가 $\left|\dfrac{t(\alpha-\beta)}{1-t^2}\right|$ 인 원이다.

[예제 2]

부등식 $2|z-1|<|z+1|<3|z-1|$ 을 만족시키는 복소수 z 의 영역을 복소평면 위에 나타내어라.

| 풀이 |

두 방정식 $|z+1|=2|z-1|$, $|z+1|=3|z-1|$ 은 각각 $\alpha=-1$, $\beta=1$, $t=2$ 와 $\alpha=-1$, $\beta=1$, $t=3$ 인 아폴로니오스의 원이다. 따라서 중심이 $\dfrac{5}{3}$, 반지름의 길이가 $\dfrac{4}{3}$ 인 원과 중심이 $\dfrac{5}{4}$, 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{4}$ 인 원이다. 그러므로 z 의 영역은 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선은 제외한다.)



[문제 3]

부등식 $1 < \left|\dfrac{z-2}{z+3i}\right| \leq 2$ 를 만족시키는 복소수 z 의 영역을 복소평면 위에 나타내어라.

[예제 3]

z가 원 $|z-2|=4$위를 움직일 때, $\dfrac{1}{z}$의 자취의 방정식을 구하여라.

| 풀이 |

$\omega = \dfrac{1}{z}$ 로 놓으면 $z = \dfrac{1}{\omega}$ 이므로 주어진 식은 $\left|\dfrac{1}{\omega}-2\right| = \left|\dfrac{2\omega-1}{\omega}\right| = 4$ 이다.

또, $\left|\omega - \dfrac{1}{2}\right| = 2|\omega|$ 는 $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$, $t = 2$ 인 아폴로니오스의 원이므로, 구하는 자취는 중심이 $-\dfrac{1}{6}$, 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{3}$ 인 원이다.

[과제 1]

z 가 다음의 각 원 위를 움직일 때, $\dfrac{z-1}{z+1}$ 의 자취의 방정식을 구하여라.

(1) $|z| = \dfrac{1}{2}$

(2) $|z| = 1$, $z \neq -1$

[과제 2]

z 가 다음의 직선 $\mathrm{Im}(z) = -1 (z \neq -i)$ 위를 움직일 때, $\dfrac{z-i}{z+i}$ 의 자취의 방정식을 구하여라.

[확인문제]

1. 복소평면에서 $|z-(1+2i)| : |z-(6+4i)| = 2:1$ 인 복소수 z 가 이루는 도형을 복소평면 위에 나타내어라.

Ⅰ. 단원명 : 정 수

Ⅱ. 단원의 개관

1. 단원의 학습목표

가. 합동의 개념을 이해하고, 약수와 배수의 성질을 이해한다.

나. 간단한 합동방정식과 정수방정식의 풀이를 이해하고 활용한다.

다. 잉여류의 연산에 대하여 알아보고, 오일러의 정리를 이해하고 활용한다.

2. 단원의 구성

가. 합동과 그 성질

나. 잉여류

Ⅲ. 단원 지도 계획

1. 연계 요소

보통 교과		전문 교과
합동과 그 성질, 잉여류	➡	합동과 그 성질, 잉여류

2. 연계 단원 지도 계획

중단원	소단원	학습 내용	차시
정수	합동과 그 성질	나눗셈 정리, 약수와 배수의 기본성질, 합동의 정의, 합동의 기본성질, 최대공약수의 성질	1~3
		서로소인 정수, 인수의 소거, 가우스 함수의 성질, p-지수, 유클리드 호젯법,	4~5
		일차방정식의 정수해의 존재성, 일차방정식의 정수해, 합동방정식의 해, 법m에 대한 역수, 중국인의 나머지 정리	6~8
	잉여류	군의 정의, 잉여류의 성질, 잉여류군, 기약잉여류군, 오일러ϕ-함수, 군의 기본성질	9~10
		부분군의 정의, 부분군일 필요충분조건, 순환부분군과 생성자의 정의, 순환부분군, 원소의 위수의 정의, 군과 원소의 위수, 오일러 정리, 페르마 정리, 윌슨정리, 법 p에 대한 -1의 제곱근	11~13

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	합동과 그 성질(1)	차시	1
학습목표	정수의 여러 가지 성질을 이해할 수 있다.				

- 정수전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대하여 각각 닫혀 있는지 판단하여라.
- 집합 $A=\{2n \mid n$ 는 정수$\}$는 사칙연산에 대하여 닫혀 있는지 판단하여라.
- 3 으로 나누면 1 이 남거나 5 로 나누면 3 이 남는 100 이하의 자연수는 모두 몇 개인가?

전문교과 학습내용

<합동과 그 성질(1)>

합동의 개념은 정수의 성질을 이해하는 가장 중요한 도구 중의 하나일 뿐만 아니라 암호에 응용되기도 한다.

여기에서 우리는 합동의 성질을 살펴보기로 하자.

우선, 우리가 잘 알고 있는 나눗셈 정리를 증명하여 보자.

앞으로, 정수 전체의 집합은 Z, 양의 정수 전체의 집합은 N으로 표시하기로 한다.

나눗셈 정리

임의로 주어진 양의 정수 a 와 정수 b 에 대하여 $b=qa+r \ (0 \leq r < a)$ 를 만족시키는 정수 q 와 r 가 유일하게 존재한다.

| 증명 |

집합 $S=\{b-na \mid n \in Z,\ b-na \geq 0\}$ 을 생각하자.

집합 S 는 공집합이 아니고 $S \subset N \cup \{0\}$ 이므로 S 에는 가장 작은 원소가 존재한다.

그 원소를 r 라 하면 r 는 S 에 속하므로 적당한 정수 q 에 대하여 $r=b-qa$ 의 꼴로 표시된다. 즉, $b=qa+r$ 이고 $r \geq 0$ 이다.

만약, $r \geq a$ 라 가정하면 $b-(q+1)a=r-a \geq 0$ 이므로 $b-(q+1)a \in S$ 이다.

그러나 $b-(q+1)a < r$ 이므로 r 가 S 의 가장 작은 원소라는 사실에 모순이다.

따라서 $r < a$ 이다.

이제, q , r 의 유일성을 보이기 위해 정수 q_1 과 r_1 이 $b=q_1a+r_1(0 \leq r_1 < a)$ 를 만족시킨다고 하자. 그러면 $q_1a+r_1=qa+r$ 로부터 $(q_1-q)a=r-r_1$ 이다.

만약, $q_1 \neq q$ 라고 하면 $|a| \leq |q_1 - q| \cdot |a| = |(q_1 - q)a| = |r - r_1| < |a|$ 가 되어 모순이다.

그러므로 $q_1 = q$ 이고 $r_1 = r$ 이다.

따라서 q 와 r 는 유일하게 존재한다.

이때, q 와 r 을 각각 b 을 a 로 나눈 **몫**과 **나머지**라고 부른다. 또, 두 정수 a, b 에 대하여 a 가 b 를 나눈다고 하는 것은 $b = ac$ 을 만족시키는 정수 c 가 존재할 때를 말하며, 기호 $\boldsymbol{a|b}$ 로 나타낸다. 이때, b 을 a 의 **배수**, a 을 b 의 **약수**라고 한다.

a가 b 을 나누지 않을 경우는 기호 $\boldsymbol{a \nmid b}$ 로 나타낸다.

[보기]

$-7|28$, $7 \nmid 30$, 모든 0 이 아닌 정수 a 에 대하여 $0 \nmid a$, 모든 정수 b 에 대하여 $b|0$ 이다.

0 이 아닌 정수 a 에 대하여 $a|b$ 는 b을 $|a|$ 로 나눈 나머지가 0 이라는 것과 동치인 것을 쉽게 알 수 있다.

약수와 배수에 관한 가장 기본적인 성질은 다음과 같다.

약수와 배수의 기본 성질

임의의 정수 a, b, c, d 에 대하여

[1] ± 1 은 a 의 약수이며, a 는 $\pm a$ 의 약수이다.

[2] a 가 1 의 약수이면, $a = \pm 1$ 이다.

[3] a 가 b 의 약수이고 c 가 d 의 약수이면, ac 는 bd 의 약수이다.

[4] a 가 b 의 약수이고 b 가 c 의 약수이면, a 는 c 의 약수이다.

[5] a 가 b 의 약수이고 b 가 a 의 약수이면, $a = \pm b$ 이다.

[6] a 가 b 의 약수이고 $b \neq 0$ 이면, $|a| \leq |b|$ 이다.

[7] a 가 b 와 c 의 약수이면, 임의의 정수 x, y 에 대하여 a 는 $bx + cy$ 의 약수이다.

| 증명 |

[1] $a = 1 \cdot a = (-1) \cdot (-a)$ 이므로 ± 1 은 a 의 약수이다.

[2] a 가 1 의 약수이므로 $1 = ac$ 인 정수 c 가 존재한다. 따라서 $a = c = 1$ 또는 $a = c = -1$

[3] a 가 b 의 약수이므로 $b=as$ 인 s 가 존재하고 c 가 d 의 약수이므로 $d=ct$ 인 t 가 존재한다. 따라서 $bd=(ac)(st)$ 이다. 즉, ac 는 bd 의 약수이다.

[4] a 가 b 의 약수이므로 $b=as$ 인 s 가 존재하고 b 가 c 의 약수이므로 $c=bt$ 인 t 가 존재한다. 따라서 $c=bt=a(st)$ 이다. 즉, a 는 c 의 약수이다.

[5] a 가 b 의 약수이므로 $b=as$ 인 s 가 존재하고 b 가 a 의 약수이므로 $a=bt$ 인 t 가 존재한다. 따라서 $a=bt=(as)t=a(st)$ 이다. 그러므로 $st=1$ 이다. 따라서 $s=t=1$ 또는 $s=t=-1$ 즉, $a=\pm b$ 이다.

[6] a 가 b 의 약수이므로 $b=at$ 인 t 가 존재하며, $b\neq 0$ 이므로 $t\neq 0$ 이다. 따라서, $|b|=|a||t|$ 이고 $|t|\geqq 1$ 이므로 $|b|\geqq|a|$ 이다.

[7] a 가 b 의 약수이므로 $b=as$ 인 s 가 존재하며 a 는 c 의 약수이므로 $c=at$ 인 t 가 존재한다. 따라서 임의의 x, y 에 대하여 $bx+cy=(as)x+(at)y=a(sx+ty)$ 이므로 a 는 $bx+cy$ 의 약수이다.

[예제 1]

임의의 홀수 n 에 대하여 $8|(n^2-1)$ 임을 증명하여라.

| 증명 |

$n=2k+1$ 꼴이므로 $n^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$ 이다.

한편, k 와 $k+1$ 중 하나는 짝수이므로 $4k(k+1)$ 은 8 의 배수이다.

따라서 모든 홀수의 제곱은 4 로 나누어 1 이 남고, 모든 짝수의 제곱은 4 의 배수이다. 이러한 성질들은 자명하지만 매우 유용하다.

[문제 1]

다음을 증명하여라.

(1) 4 로 나누어 3 이 남는 양의 정수는 두 정수의 제곱의 합이 될 수 없음을 증명하여라.

(2) 8 로 나누어 7 이 남는 양의 정수는 세 정수의 제곱의 합이 될 수 없음을 증명하여라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	합동과 그 성질(1)	차시	2~3
학습 목표	정수의 여러 가지 성질을 이해할 수 있다.				

전문교과 학습내용

<합동의 정의>

양의 정수 m 과 정수 a, b 에 대하여 m 이 $a-b$ 의 약수일 때, 즉 $m|(a-b)$ 일 때, a 와 b 를 법 m 에 대하여 합동이라 하고 , 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$a \equiv b \pmod{m}$$

a 와 b 가 법 m 에 대하여 합동이 아닌 것은 다음과 같이 나타낸다.

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

임의의 정수 a 를 양의 정수 m 으로 나누었을 때의 몫을 q, 나머지를 r 이라 하면 $a = qm + r\ (0 \le r < m)$ 이다. $a - r = qm$ 이므로 $m|(a-r)$, 즉 $a \equiv r \pmod{m}$ 이다. 그러므로 임의의 정수는 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 중 어떤 하나와 법 m 에 대하여 합동이다. 따라서 $a \equiv b \pmod{m}$ 은 a 와 b 을 각각 m 으로 나눈 나머지가 같다는 것을 의미한다. 합동의 가장 기본적인 성질은 다음과 같다.

합동의 기본 성질

임의의 정수 a, b, c, d 와 양의 정수 m, n, k 에 대하여

[1] $a \equiv a \pmod{m}$ 이다.

[2] $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $b \equiv a \pmod{m}$ 이다.

[3] $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $b \equiv c \pmod{m}$ 이면, $a \equiv c \pmod{m}$ 이다.

[4] $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 이면, $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$ (복부호동순), $ac \equiv bd \pmod{m}$ 이다.

[5] $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$ (복부호동순), $ac \equiv bd \pmod{m}$ 이다.

[6] $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ 이다.

[7] $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $n|m$ 이면, $a \equiv b \pmod{m}$ 이다.

[8] $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c > 0$ 이면, $ac \equiv bc \pmod{mc}$ 이다.

[9] $a \equiv b \pmod{m}$, $d|a$, $d|b$, $d|m$, $d > 0$ 이면, $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\mathrm{mod}\frac{m}{d}\right)$ 이다.

| 증명 |

[1] $a - a = 0$ 이고 $m \cdot 0 = 0$ 이므로 $m|0$ 이다. 따라서 $a \equiv a \pmod{m}$ 이다.

[2] $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이다. 또, $m|(a-b)$ 이므로 $m|(b-a)$ 이다.
따라서, $b \equiv a(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.

[3] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이고 $b \equiv c(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(b-c)$ 이다.
여기서 약수와 배수의 기본 성질 [7]에 의하여 $m|(a-b)+(b-c)=a-c$ 이다.
따라서, $a \equiv c(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.

[4] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이고 $c \equiv d(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(c-d)$ 이다.
따라서, $m|(a-b)\pm(c-d)=(a\pm c)-(b\pm d)$ 이므로 $a\pm c \equiv b\pm c(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.
또, 약수와 배수의 기본 성질 [7]에 의하여 $(a-b)c+(c-d)b$ 는 m 의 배수이다.
그런데 $(a-b)c+(c-d)b=ac-bd$ 이므로 $m|(ac-bd)$ 이다.
따라서, $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.

[5] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이므로 $m|(a-b)$ 이다.
또, $(a\pm c)-(b\pm c)=a-b$ 이므로 $m|(a\pm c)-(b\pm c)$ 이다.
즉, $a\pm c \equiv b\pm c(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.
또, $ac-bc=(a-b)c$ 이고 $m|(a-b)$ 이므로 $m|(a-b)c$ 이다.
즉, $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.

[6] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이다.
또, $k \geqq 2$ 일 때 $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1})$ 이므로
$m|(a^k-b^k)$이다. 따라서 $a^k \equiv b^k(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.

[7] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이다.
또, $n|m$ 이면 약수와 배수의 기본 성질 [4]에 의하여 $n|(a-b)$ 이다.
따라서, $a \equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ 이다.

[8] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이다. $c>0$ 이면 $mc>0$ 이고 $mc|(a-b)c=ac-bc$
이므로 $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\,mc)$ 이다.

[9] $a \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $m|(a-b)$ 이다.
$d|a$ 이면 $a=dd_1$, $d|b$ 이면 $b=dd_2$, $d|m$ 이면 $m=dd_3$ 이므로 $dd_3|d(d_1-d_2)$ 이다.
따라서, $d_3|d_1-d_2$ 이다. 그런데 $d_1=\frac{a}{d}$, $d_2=\frac{b}{d}$, $d_3=\frac{m}{d}$ 이므로 $\frac{m}{d}|\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$ 이다.
따라서, $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}\left(\mathrm{mod}\frac{m}{d}\right)$ 이다.

[예제 1]

$2^{20} \equiv 1(\mathrm{mod}\,41)$ 임을 보여라.

| 증명 |

$2^5 \equiv 32 \equiv -9 \pmod{41}$, $2^{10} \equiv 81 \equiv -1 \pmod{41}$ 이다. 따라서 $2^{20} \equiv 1 \pmod{41}$ 이다.

두 정수 a, b 에 대하여 $d|a, d|b$ 를 동시에 만족시키는 정수 d 를 a 와 b 의 공약수라 부르고, 공약수들 중에서 가장 큰 것이 존재하면 그것을 a 와 b 의 최대공약수라고 부르며, 기호로는 $\mathbf{gcd}(a, b)$ 로 나타낸다.

$\gcd(a, b) = 1$ 일 때, a 와 b 는 서로소라고 한다.

한편, 두 정수 a, b 에 대하여 $a|m, b|m$ 을 동시에 만족시키는 정수 m 을 a 와 b 의 공배수라 부르고, 공배수들 중에서 가장 작은 양의 공배수가 존재하면 그것을 a 와 b 의 최소공배수라고 부르며, 기호로는 **lcm(a, b)** 로 나타낸다.

최대공약수가 존재하려면 a 와 b 둘 중에서 적어도 하나는 0 이 아니어야 하고, 최소공배수가 존재하려면 a 와 b 가 둘 다 0 이 아니어야 함은 당연하다.

물론, $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$, $\mathrm{lcm}(a, b) = \mathrm{lcm}(b, a)$ 이다.

[보기]

$\gcd(\pm 6, \pm 15) = \gcd(6, 15) = 3$, $\mathrm{lcm}(\pm 6, \pm 15) = \mathrm{lcm}(6, 15) = 30$ 이다.

또, $a \neq 0$ 이고 $a|b$ 이면 $\gcd(a, b) = \gcd(a, 0) = |a|$ 이다.

최대공약수의 성질

임의의 두 정수 a, b 에 대하여 $d = \gcd(a, b)$ 이면, $ax + by = d$ 를 만족시키는 정수 x, y 가 존재한다.

| 증명 |

집합 $S = \{au + bv \mid u, v \in Z, au + bv > 0\}$ 을 생각하자.

집합 S 는 자연수의 집합의 부분집합이고 공집합이 아니며, 이 집합에 속하는 가장 작은 원소를 e 라 하면 적당한 정수 x, y 에 대하여 $e = ax + by$ 이다.

이제, e 가 최대공약수 d 와 같음을 보이면 된다. $e > 0$ 이므로 나눗셈 정리에 의하여 $a = qe + r (0 \leqq r < e)$ 를 만족시키는 정수 q 와 r 가 존재한다.

$r = a - qe = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy)$ 이므로, 만약 $r > 0$ 이라면 $r \in S$ 이고, $r < e$ 가 되어 e 가 S 의 가장 작은 원소라는 사실에 모순이 된다.

따라서 $r = 0$, 즉 $a = qe$ 가 되므로 $e|a$ 임을 알 수 있다.

같은 방법으로, $e|b$ 임을 알 수 있다. 그러므로 e 는 a 와 b 의 공약수이다.

한편, f 가 a 와 b 의 공약수이면 $f|(ax + by)$ 이고 $ax + by = e$ 이므로 $f|e$, 즉 $f \leqq e$

이다. 따라서 e 가 a 와 b 의 최대공약수이다.
즉, $e=d$ 이므로 $ax+by=d$ 인 x , y 가 존재한다.

[참고]

$\gcd(6, 15)=3=6\cdot(-2)+15\cdot1=6\cdot3+15\cdot(-1)$ 이다.

이 예로부터 정리를 만족시키는 정수 순서쌍 (x, y) 가 유일하게 결정되지는 않음을 알 수 있다. 사실은 그러한 정수 순서쌍은 무한히 많다.

한편, 정리의 증명으로부터 모든 공약수는 최대공약수의 약수라는 사실도 알 수 있다.

[예제 2]

27 , 23 의 최대공약수 d 를 구하고, d 를 $27x+23y$ 꼴로 나타내어라. (단 x , y 는 정수)

| 풀이 |

$\gcd(23, 27)=1$ 이다. 그리고 $27\cdot6+23\cdot(-7)=1$ 이다.

[과제 1]

$1!+2!+\cdots+1000! \equiv 25 \pmod{2^7}$ 임을 보여라.

[과제 2]

162 , 138 의 최대공약수 d 를 구하고, d 를 $162x+138y$ 꼴로 나타내어라.

[확인문제]

1. 모든 정수 n에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

⑴ $4 \nmid (n^2+2)$ ⑵ $6|n^3-n$

⑶ $30|n^5-n$ ⑷ $42|n^7-n$

2. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 0(\mathrm{mod}7)$임을 보여라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	합동과 그 성질(2)	차시	4~5
학습목표	가우스 함수의 성질, $p-$지수, 유클리드 호제법을 이해할 수 있다.				

- 다음 식의 그래프를 구하여라. $y=[x]$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대정수)
- 두수 3854 , 1558 의 최대공약수를 구하여라.
- 두 정수 a , b 에 대하여 a 와 b 가 서로소이면 $2a+3b$ 와 $a+2b$ 도 서로소임을 증명하여라.

전문교과 학습내용

< 합동과 그 성질(2)>

서로 소인 정수

정수 a 와 b 가 서로소이면 $ax+by=1$ 을 만족시키는 정수 x , y 가 존재하며, 그 역도 참이다.

| 증명 |

정수 a 와 b 가 서로소라고 하자. 그러면 $\gcd(a,b)=1$ 이므로 최대공약수의 성질에 의하여 $ax+cy=1$ 인 정수 x , y 가 존재한다. 또, 역으로 $d=\gcd(a,b)$ 라고 하면 약수와 배수의 기본 성질 [7]에 의하여 임의의 x , y 에 대하여 $d|ax+by$ 이다. 특히, $ax+by=1$ 도 d 의 배수이다. 여기서 d 는 1 의 양의 약수이므로 $d=1$ 이다.
따라서 a 와 b 는 서로소이다.

[예제 1]

세 정수 a , b , c 에 대하여 $a|c$, $b|c$ 이고 $\gcd(a,b)=1$ 이면 $ab|c$ 임을 증명하여라.

| 증명 |

$a|c$ 이고 $b|c$ 이므로 $c=ar$, $c=bs$ 인 정수 r , s 가 존재한다.
또, a 와 b 는 서로소이므로 $ax+by=1$ 인 정수 x , y 가 존재한다.
여기서 $r=r\cdot 1=r(ax+by)=rax+rby=bsx+rby=b(sx+ry)$, 즉 $b|r$ 이다.
따라서 $r=bt$ 인 정수 t 가 존재하므로 $c=abt$ 이다.
그러므로 $ab|c$ 이다.

[참고]

한 가지 주의할 것은 $ac \equiv bc \pmod{m}$ 일 때, 양변의 c 를 소거하여 $a \equiv b \pmod{m}$ 을 얻는 것이 일반적으로 불가능하다는 것이다.
예를 들어, $4 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{6}$ 이지만 $4 \not\equiv 1 \pmod{6}$ 이다.
다음은 합동식에서 양변의 같은 인수를 소거하는 방법에 관한 것이다.

인수의 소거

$ac \equiv bc \pmod{m}$, $\gcd(c\,,\, m) = d$ 이면 $a \equiv b\left(\mathrm{mod}\,\dfrac{m}{d}\right)$ 이다.

| 증명 |

c 와 m 의 최대공약수가 d 이므로 $c = c'd$, $m = m'd$ 인 c' , m' 이 존재하고,
이때 $\gcd(c'\,,\, m') = 1$ 이다. $ac \equiv bc \pmod{m}$ 이므로 $m | (ac - bc)$ 이며
$ac - bc = (a-b)c'd$ 이고 $m = m'd$ 이므로 $m' | (a-b)c'$ 이다. 그런데 m' 과 c' 은 서로소이므로 $a-b$ 는 m' 의 배수이다.
따라서 $a \equiv b \pmod{m'}$, $m' = \dfrac{m}{d}$ 이므로 $a \equiv b\left(\mathrm{mod}\dfrac{m}{d}\right)$ 이다.

[참고]
정리에서 c 와 m 이 서로소이면, 양변의 c 를 소거하여 $a \equiv b \pmod{m}$ 을 얻을 수 있다.

※ 임의의 실수 x 에 대하여 기호 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.
따라서 [ ]는 실수를 정의역으로 가지는 함수로서 함수값은 항상 정수이다.
[ ] 를 최대정수함수 또는 가우스함수라고 부른다.

[보기1]

$[1] = 1$, $[-2] = -2$, $\left[\dfrac{3}{4}\right] = 0$, $[-2.5] = -3$, $[\pi] = 3$ 이다.

가우스함수의 성질

임의의 실수 x , y 에 대하여
[1] $[x] \leq x < [x] + 1$ 이다.
[2] m 이 정수이면, $[x+m] = [x] + m$ 이다.
[3] $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$ 이다.
[4] $[x] + [-x] = \begin{cases} 0\,, & x \in Z \\ -1\,, & x \notin Z \end{cases}$

[5] m 이 양의 정수이면, $\left[\frac{[x]}{m}\right]=\left[\frac{x}{m}\right]$ 이다.

[6] $-[-x]$ 는 x 보다 작지 않은 최소의 정수이다.

[7] 양의 정수 m, n 에 대하여 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 은 1 에서 n 까지의 m 의 배수의 개수이다.

| 증명 |

$\alpha=x-[x]$, $\beta=y-[y]$ 로 놓으면, $0 \leqq \alpha<1$ 이고 $0 \leqq \beta<1$ 이다.

또, $l=[x]$, $k=[y]$ 로 놓자.

[1] $x=[x]+\alpha$ 이고 $0 \leqq \alpha<1$ 이므로 $[x] \leqq x<[x]+1$ 이다.

[2] m 이 정수이면 $x+m=l+m+a$ 이므로 $[x+m]=l+m=[x]+m$ 이다.

[3] $x+y=l+k+\alpha+\beta$ 이고 $0 \leqq \alpha+\beta<2$ 이므로

$[x+y]=l+k=[x]+[y]$ 또는 $[x+y]=l+k+1=[x]+[y]+1$ 이다.

따라서, $[x]+[y] \leqq [x+y] \leqq [x]+[y]+1$ 이다.

[4] $-x=-l-\alpha$ 에서 $\alpha=0$ 이면 $[-x]=-l$ 이고 $a \neq 0$ 이면 $[-x]=-l-1$ 이므로 자명하다.

[5] l 을 m 으로 나눈 몫을 q, 나머지를 r 라 하면 $l=qm+r$ 이며 $0 \leqq r<m$ 이다.

좌변은 $\left[\frac{[x]}{m}\right]=\left[\frac{l}{m}\right]=\left[q+\frac{r}{m}\right]=q+\left[\frac{r}{m}\right]=q$

한편, $0 \leqq r+\alpha<m$ 이므로, 우변도

$\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{l+\alpha}{m}\right]=\left[q+\frac{r+\alpha}{m}\right]=q+\left[\frac{r+\alpha}{m}\right]=q$. 따라서 $\left[\frac{[x]}{m}\right]=\left[\frac{x}{m}\right]$ 이다.

[6] [1]로부터 $-x-1<[-x] \leqq -x$, 즉 $x \leqq -[-x]<x+1$ 이므로 $-[-x]$ 는 x 보다 작지 않은 최소의 정수이다.

[7] $qm \leqq n<(q+1)m$ 을 만족시키는 양의 정수 q 가 존재한다. 1 과 n 사이의 m 의 배수는 $m, 2m, \cdots, qm$ 뿐이고 그 개수는 q 이다. 한편, $q \leqq \frac{n}{m}<q+1$ 이므로 $\left[\frac{n}{m}\right]=q$ 이다. 따라서 $\left[\frac{n}{m}\right]$ 은 1 과 n 사이의 m 의 배수의 개수이다.

※ 소수 p, 음이 아닌 정수 e, 양의 정수 n에 대하여, 기호 $\boldsymbol{p^e \| n}$ 은 $p^e | n$ 이지만, $p^{e+1} \nmid n$ 이라는 뜻이다. 이때, e 를 n 의 $\boldsymbol{p}$-지수라고 한다.

p -지수

p 를 소수라고 하자. 양의 정수 n 에 대하여 $n!$ 의 p -지수를 e 라고 하면

$e=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$ 이다. 여기서 우변의 합은 유한 합이다.

| 증명 |

n 개의 음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 의 합을 다음과 같이 구할 수 있다.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중 1 이상인 수들의 개수를 $f(1)$, 2 이상인 수들의 개수를 $f(2), \cdots, k$ 이상인 수들의 개수를 $f(k), \cdots$ 이라고 할 때, 다음이 성립한다.

$a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(k)+\cdots$

이제, a_i 를 각 $i=1, 2, \cdots, n$ 의 p-지수라고 하자. 그러면 임의의 양의 정수 k 에 대하여 $f(k)$ 는 1 과 n 사이의 양의 정수 중 p^k 의 배수인 것들의 개수가 되므로 $f(k)=\left[\frac{n}{p^k}\right]$ 이고, $n!$ 의 p-지수 e 는 각 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$ 의 p-지수의 합이므로 $e=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 이다.

따라서 위의 관찰로부터 $e=a_1+a_2+\cdots+a_n=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\cdots$ 이다.

[예제 2]

1000! 을 계산하면 끝 부분에 0 이 몇 개나 있는가?

| 풀이 |

1000! 을 소인수분해하면 2 와 5 를 하나씩 곱할 때마다 끝 부분에 0 이 하나씩 늘어나게 되므로, 1000! 의 2-지수와 5-지수 중 작은 것이 끝 부분에 나타나는 0의 개수이다. 5-지수가 당연히 작을 것이므로 1000! 의 5-지수를 계산하면 된다.

위의 정리에 의하여 $\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{5^2}\right]+\cdots=200+40+8+1=249$

즉, 1000! 의 끝 부분에 249 개의 0 이 나타난다.

유클리드 호제법

양의 정수 a, b 와 $b=qa+r$ 인 정수 q, r 에 대하여 $\gcd(a, b)=\gcd(a, r)$ 이다.

| 증명 |

$d=\gcd(a, b)$, $e=\gcd(a, r)$ 로 놓자. 약수와 배수의 기본 성질[7]에 의하여

$b-qa$ 도 d 의 배수이다. 따라서 d 는 a 와 r 의 공약수이므로 $d|e$ 이다.
한편, $e=\gcd(a\,,\,r)$ 이므로 e 는 $qa+r$ 의 약수이다. 그런데 $qa+r=b$ 이므로 $e|b$ 이다. 따라서 e 는 a 와 b 의 공약수이므로 $e|d$, 즉 $d=e$ 이다.

유클리드 호제법을 이용하여 두 양의 정수의 최대공약수를 구하여 보자.
두 양의 정수 $a\,,b$ 에 대하여 b 를 a 로 나누면 $b=q_1a+r_1\ (0\leq r_1<a)$ 를 만족시키는 정수 $q_1\,,\,r_1$ 이 존재한다.
만약, $r_1=0$ 이면 $a=\gcd(a\,,\,r_1)=\gcd(a\,,\,b)$.
$r_1\neq 0$ 이라 하고 a 를 r_1 로 나누면 $a=q_2r_1+r_2(0\leq r_2<r_1)$ 을 만족시키는 정수 $q_2\,,\,r_2$ 가 존재한다.
만약, $r_2=0$ 이면 $r_1=\gcd(r_1\,,\,r_2)=\gcd(a\,,\,r_1)=\gcd(a\,,\,b)$.
$r_2\neq 0$ 이면 r_1 을 r_2 로 나눈다.
이와 같은 과정을 되풀이하면 $b>r_1>r_2>\cdots\geq 0$ 이므로 유한 번 시행 후에 $r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n\ (0<r_n<r_{n-1}, r_{n-1}=q_{n+1}r_n)$ 을 얻게 될 것이다.
그러면 유클리드 호제법에 의하여
$r_n=\gcd(r_{n-1}\,,\,r_n)=\cdots=\gcd(r_1\,,\,r_2)=\gcd(a\,,\,r_1)=\gcd(a\,,\,b)$

[보기2]
$\gcd(162\,,\,138)$ 을 유클리드 호제법을 이용하여 구하여 보자.
앞의 과정을 다음과 같은 표에 대응시킬 수 있다.
따라서 $\gcd(162\,,\,138)=6$ 이다.

1	162	138	5
	-138	-120	
1	24	18	3
	-18	-18	
	6	0	

주어진 두 정수 $a\,,b$ 의 최대공약수 d 를 구하는 이러한 방법을 유클리드 호제법이라 한다. 유클리드 호제법을 이용하면 $ax+by=d$ 를 만족시키는 정수쌍 $(x\,,\,y)$ 도 얻을 수 있다. 최대공약수의 성질에 의하면, 그러한 정수쌍 $(x\,,\,y)$ 가 존재한다.
그러나 구체적으로 그러한 수를 구하는 방법에 대하여는 설명이 없었다.
정수쌍 $(x\,,\,y)$ 를 구하는 방법은 다음과 같다.

$d=\gcd(a, b)=r_n=r_{n-2}-q_n r_{n-1}=r_{n-2}-q_n(r_{n-3}-q_{n-1}r_{n-2})$

$=-q_n r_{n-3}+(1+q_n q_{n-1})r_{n-2}$

$=-q_n r_{n-3}+(1+q_n q_{n-1})(r_{n-4}-q_{n-2}r_{n-3})$

$=(1+q_n q_{n-1})r_{n-4}-[q_n+q_{n-2}(1+q_n q_{n-1})]r_{n-3}=\cdots$

이와 같은 과정을 되풀이하면 $d=ax+by$ 를 만족시키는 정수쌍 (x, y) 를 얻게 된다.

이 방법을 보기에 적용하여 보면

$$\begin{aligned}\gcd(162, 138)&=6=24-18=24-(138-5\cdot 24)\\&=6\cdot 24-138=6(162-138)-138=6\cdot 162-7\cdot 138\end{aligned}$$

[과제 1]

$a|bc$ 이고 $\gcd(a, b)=1$ 이면 $a|c$ 임을 증명하여라.

[과제 2]

다음을 증명하여라.

(1) $0\leq r\leq n$ 에 대하여 이항계수 ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 이 정수임을 증명하여라.

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_n\geq 0$ 인 정수에 대하여 $n=a_1+a_2+\cdots+a_r$ 이면, $\dfrac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_r!}$ 이 정수임을 증명하여라.

[확인문제]

1. 42823, 6409 의 최대공약수 d 를 구하고, d 를 $42823x+6409y$ 의 꼴로 나타내어라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	합동과 그 성질(3)	차시	6~8
학습목표	일차방정식의 정수해의 존재성 등 여러 가지 성질을 이해할 수 있다.				

- 방정식 $xy=3$ 을 풀어라. 단, x , y 는 양의 정수이다.
- 방정식 $xy-3x-3y+2=0$ 을 풀어라. 단, x , y 는 정수이다.
- 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 정수해의 좌표는 몇 개인가? (단 $0<x<100$)

전문교과 학습내용

<일차방정식의 정수해의 존재성>

a , b , c 가 정수이고, a 와 b 둘 중에서 적어도 하나는 0 이 아니라고 하자.
이때, $ax+by=c$ 를 만족시키는 정수 x , y 가 존재하기 위한 필요충분조건은
$\gcd(a, b)|c$ 이다.

| 증명 |

$ax+by=c$ 를 만족시키는 정수 x , y 가 존재한다고 가정하자.
$\gcd(a, b)=d$ 라고 하면 적당한 정수 r , s 에 대하여 $a=dr$, $b=ds$ 가 되므로
$c=(dr)x+(ds)y=d(rx+sy)$, 즉 $d|c$
역으로, $d|c$ 를 가정하면 적당한 정수 t 에 대하여 $c=dt$ 이다.
최대공약수의 성질에 의하여 $ax'+by'=d$ 를 만족시키는 정수 x' , y' 이 존재하므로

$$c=(ax'+by')t=a(x't)+b(b't)$$

따라서 $x=x't$, $y=y't$ 로 놓으면 $ax+by=c$ 를 만족시킨다.

일차방정식의 정수해

a , b , c 가 정수이고, a 와 b 둘 중에서 적어도 하나는 0 이 아니라고 하자.
두 정수 s , t 에 대하여 $as+bt=c$ 일 때, 방정식 $ax+by=c$ 의 모든 정수해는
$x=s+\frac{bk}{d}$, $y=t-\frac{ak}{d}$ 이다. 여기서 $d=\gcd(a, b)$ 이고 k 는 임의의 정수이다.

|증명|

$as+bt=c$ 이고 $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ 는 모두 정수이므로 임의의 정수 k 에 대하여

$x = s + \frac{bk}{d}$, $y = t - \frac{ak}{d}$ 가 주어진 방정식의 정수해가 됨은 당연하다.

이제, x' , y' 을 주어진 방정식의 임의의 정수해라고 하자.

$as + bt = c = ax' + by'$ 에서 $a(x' - s) = b(t - y')$ 이다.

$d = \gcd(a, b)$ 이므로 $a = a'd$, $b = b'd$ 로 놓으면, a' 과 b' 은 서로소이다.

$a'(x' - s) = b'(t - y')$ 으로부터 $a' \mid b'(t - y')$ 을 얻는다.

따라서 $a' \mid (t - y')$, 즉 적당한 정수 k에 대하여 $y' = t - a'k = t - \frac{ak}{d}$ 이고,

이것을 $a'(x' - s) = b'(t - y')$ 에 대입하면 $x' = s + b'k = s + \frac{bk}{d}$ 를 얻는다.

따라서 모든 정수해는 $x = s + \frac{bk}{d}$, $y = t - \frac{ak}{d}$ 의 꼴이다.

※ a 와 b 가 서로소이면 계수가 정수인 방정식 $ax + by = c$ 는 항상 해를 가짐을 쉽게 알 수 있다. 임의로 주어진 계수가 정수인 방정식 $ax + by = c$ 의 정수해를 모두 구하려면, 우선 $\gcd(a, b) = d \mid c$ 를 확인해 본다.

$d \nmid c$ 이면, 주어진 일차방정식은 해가 없음을 알 수 있다.

$d \mid c$ 이면, 유클리드 호제법을 이용하여 $as' + bt' = d$ 인 s' , t' 을 구한다.

그러면 $s = \frac{s'c}{d}$, $t = \frac{t'c}{d}$ 가 주어진 방정식의 한 정수해가 되고, 일차방정식의 정수에 관한 위의 정리를 이용하여 모든 정수해를 구할 수 있다.

[예제 1]

$162x + 138y = 24$ 의 정수해를 모두 구하여라.

| 풀이 |

$\gcd(162, 138) = 6 = 162 \cdot 6 + 138 \cdot (-7)$이므로

$24 = 162 \cdot 24 + 138 \cdot (-28)$이다.

일차방정식의 정수해에 의하여 구하는 정수해는 모든 정수 k에 대하여

$x = 24 + 23k, y = -28 - 27k$이다.

※ 다음은 합동방정식 $ax \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ 을 만족시키는 정수를 구하여 보자.

어떤 정수가 이 합동방정식의 해이면, 법 m 에 대하여 그것과 합동인 모든 정수도 해가 된다. 합동방정식에서는 이와 같이 법 m 에 대하여 합동인 모든 정수해를 하나의 해로 간주한다.

이제 , 합동방정식 $ax \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 의 해가 어떤 경우에 존재하는가를 생각하여 보자. 그러한 x 가 존재하려면 $m|(ax-b)$, 즉 $ax-b=my$ 를 만족시키는 정수 y 가 존재하여야 한다. 다시 말하면, $ax-my=b$ 를 만족시키는 정수 x, y 가 존재하여야 한다는 뜻이다.
따라서 일차방정식의 정수해의 존재성 정리에 의하여 합동방정식 $ax \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은 $\gcd(a, m)|b$ 이다.
특히, a 와 m 이 서로소이면 항상 해를 가진다.

합동방정식의 해
합동방정식 $ax \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 은 $d=\gcd(a, m)|b$ 일 때, 법 m에 대하여 정확히 d 개의 서로 다른 해를 가진다.

| 증명 |
방정식 $ax+my=b$ 의 한 해를 s, t 라 하면, 일반해는 임의의 $k \in Z$ 에 대하여
$x_k = s+\dfrac{mk}{d}$, $y_k = t-\dfrac{ak}{d}$ 꼴이다. 이때, x_k 가 바로 $ax \equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 를 만족시키는 모든 정수들이다. 임의의 k 를 d 로 나누면, $k=qd+r(0 \leqq r < d)$ 꼴이 되므로
$$x_k \equiv s+\frac{m(qd+r)}{d} \equiv s+\frac{mr}{d} \equiv x_r(\mathrm{mod}\,m)$$
그러므로 모든 x_k 는 각각 $x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}$ 중 하나와 법 m 에 대하여 합동이다.
한편, $0 \leqq i, j \leqq d-1$, $x_i \equiv x_j(\mathrm{mod}\,m)$ 이면 $\dfrac{im}{d} \equiv \dfrac{jm}{d}(\mathrm{mod}\,m)$ 이다.
$\gcd\left(\dfrac{m}{d}, m\right)=\dfrac{m}{d}$ 이므로, 합동의 기본 성질[9]에 의하여 $i \equiv j(\mathrm{mod}\,d)$ 이다.
따라서 $x_0, x_1, \cdots, x_{d-1}$ 은 모두 법 m 에 대하여 합동이 아니다.

[예제 2]
다음의 합동방정식의 해를 구하여라.
(1) $10x \equiv 7(\mathrm{mod}\,14)$ (2) $10x \equiv 6(\mathrm{mod}\,14)$ (3) $10x \equiv 5(\mathrm{mod}\,11)$

| 풀이 |
(1) $\gcd(10, 14)=2 \nmid 7$ 이므로 이 합동방정식의 해는 존재하지 않는다.
(2) $\gcd(10, 14)=2|6$ 이므로 이 합동방정식은 법 14 에 대하여 두 개의 서로 다른 해를 가진다. $x_0 \equiv 2(\mathrm{mod}\,14)$ 가 해이므로, 다른 한 해는
$$x_1 \equiv 2+\left(14 \cdot \frac{1}{2}\right) \equiv 9(\mathrm{mod}\,14) \text{ 이다.}$$

(3) $\gcd(10, 11)=1 | 5$ 이므로 이 합동방정식은 법 11 에 대하여 유일한 해를 가진다.
$x \equiv 6 \pmod{11}$ 이 해이다.

법 m 에 대한 역수

a 와 m 이 서로소일 때, 합동방정식 $ax \equiv 1 \pmod{m}$ 의 해를 a 의 법 m 에 대한 역수라고 부른다. 이 역수를 b 라고 하면 $ab \equiv ba \equiv 1 \pmod{m}$ 이고 이러한 b 는 법 m 에 대하여 유일하다.

중국인의 나머지정리

양의 정수 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 가 모두 서로소이면, 임의의 r 개의 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 에 대하여 r 개의 합동방정식 $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$, $\cdots$, $x \equiv a_r \pmod{m_r}$ 을 동시에 만족시키는 정수 a 가 존재하며, 그러한 a 는 법 $m = m_1 m_2 \cdots m_r$ 에 대하여 유일하다.

| 증명 |

각각의 $k = 1, 2, \cdots, r$ 에 대하여 $M_k = \dfrac{m}{m_k}$ 으로 놓으면, m_k 들은 모두 서로소이므로

$\gcd(M_k, m_k) = 1$ 이다.

따라서 $M_k A_k \equiv 1 \pmod{m_k}$ 를 만족시키는 정수 A_k 가 존재한다.

이 때, A_k 는 M_k 의 법 m_k 에 대한 역수이다.

이제, $a = a_1 M_1 A_1 + a_2 M_2 A_2 + \cdots + a_r M_r A_r$ 로 놓자.

각 k 에 대하여 h 가 k 와 같지 않으면, $m_k | M_h$ 이므로, $a \equiv a_k M_k A_k \equiv a_k \pmod{m_k}$ 이다.

즉, a 가 주어진 r 개의 합동방정식의 해이다.

한편, a 가 법 m 에 대하여 유일함을 증명하기 위하여 또 다른 정수 b 가 주어진 합동식들을 모두 만족시킨다고 하자.

그러면 모든 k 에 대하여 $a \equiv a_k \equiv b \pmod{m_k}$ 이므로 $m_k | (a-b)$ 이다. m_k 들이 서로소이므로 $m = m_1 m_2 \cdots m_r | (a-b)$, 즉 $a \equiv b \pmod{m}$ 이다.

따라서 a 는 법 m 에 대하여 유일하다.

[예제 2]

$x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}$을 동시에 만족시키는 정수를 모두 구하여라.

| 풀이 |

$m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ 에 대하여 중국인의 나머지정리를 적용하자.

$m=105$, $M_1=35$, $M_2=21$, $M_3=15$ 이므로,

$35A_1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $21A_2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$, $15A_3\equiv 1(\mathrm{mod}7)$ 을 만족시키는 정수 A_1 , A_2 , A_3 을 구해야 한다.

이 식들을 간단히 하면, $2A_1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $A_2\equiv 1(\mathrm{mod}5)$, $A_3\equiv 1(\mathrm{mod}7)$ 이므로

$A_1=2$, $A_2=1$, $A_3=1$. 따라서 $a=2\times35\times2+3\times21\times1+4\times15\times1=263$ 이다.

그러므로 $a\equiv 263\equiv 53(\mathrm{mod}\,105)$, 즉 임의의 정수 k 에 대하여 $x=53+105k$ 가 구하고자 하는 모든 정수이다.

한편, 계수가 정수인 방정식이 정수해를 가질 수 없음을 합동방정식을 이용하여 밝힐 수 있는 경우가 있다.

예를 들어, $x^2-4y^2=2$ 의 정수해가 존재한다면 임의의 양의 정수 m 에 대하여 합동방정식 $x^2-4y^2\equiv 2(\mathrm{mod}m)$ 도 해를 가져야 한다.

그러나 $m=4$ 에 대하여 $x^2\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 가 해를 가지지 못하므로 $x^2-4y^2=2$ 도 정수해를 가질 수 없다.

[과제 1]

$6x+9y=126$ 의 양의 정수해를 모두 구하여라.

[과제 2]

다음의 합동방정식의 해를 구하여라.

(1) $6x\equiv 3(\mathrm{mod}14)$ (2) $6x\equiv 4(\mathrm{mod}14)$ (3) $6x\equiv 5(\mathrm{mod}11)$

[과제 3]

(1) $x\equiv 2(\mathrm{mod}3)$, $x\equiv 4(\mathrm{mod}5)$, $x\equiv 6(\mathrm{mod}7)$ 을 동시에 만족시키는 가장 작은 양의 정수를 구하여라.

(2) $x\equiv 3(\mathrm{mod}5)$, $x\equiv 5(\mathrm{mod}7)$, $x\equiv 7(\mathrm{mod}11)$ 을 동시에 만족시키는 정수를 모두 구하여라.

[확인문제]

1. 다음을 만족시키는 정수를 구하여라.

(1) $x^2\equiv -1(\mathrm{mod}23)$ (2) $x^2+2x\equiv -2(\mathrm{mod}23)$

(3) $x^2\equiv -4(\mathrm{mod}41)$ (4) $x^2-6x+13\equiv 0(\mathrm{mod}41)$

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	잉여류(1)	차시	9~10
학습목표	군의 정의와 기본성질을 이해 할 수 있다.				

- 정수의 집합은 덧셈에 대하여 닫혀있는가?
- 유리수의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀있는가?
- 정수의 집합은 곱셈에 대한 역원이 존재하는가?

전문교과 학습내용

<잉여류(1)>

이항연산

집합 S상의 이항연산이란 S의 임의의 두 원소로 이루어진 순서쌍 (a, b)에 대하여 S의 원소를 하나씩 대응시키는 법칙이다.
이때, (a, b)에 대응되는 S의 원소를 $a*b$로 쓴다.
따라서 S상의 이항연산 $\star$는 다음과 같은 함수로 이해할 수 있다.
$*: S\times S \rightarrow S,\ (a, b) \mapsto a*b\in S$
여기서 $S\times S$는 모든 순서쌍 (a, b)들의 집합, 즉
$S\times S = \{(a, b) \mid a\in S,\ b\in S\}$ 이다.

군의 정의

연산 $\star$를 가지고 있는 공집합이 아닌 집합 G가 다음의 성질 $(G1)\sim(G3)$을 만족시킬 때, G를 $\star$에 대한 **군**이라고 한다.
$(G1)$ 모든 $a, b, c\in G$에 대하여 $(a*b)*c = a*(b*c)$ 이고,
$(G2)$ 모든 $a\in G$에 대하여 $e*a = a*e = a$를 만족시키는 $e\in G$가 존재하고,
$(G3)$ 임의의 $a\in G$에 대하여 $a'*a = a*a' = e$를 만족시키는 $a'\in G$가 존재한다.

특히 군 G가 다음과 같은 **교환법칙** $(G4)$를 만족시킬 때 G를 **가환군**이라고 한다.
$(G4)$ 모든 $a, b\in G$에 대하여 $a*b = b*a$ 이다.
가환군이 아닌 군을 **비가환군**이라고 한다.

[보기1]
Q, R, C를 각각 유리수의 집합 , 실수의 집합 , 복소수의 집합이라 할 때,
Z, Q, R, C 등이 모두 더하기 연산에 대한 군이 되며 $Q^+, Q^\times, R^+, R^\times, C^\times$

등은 모두 곱하기 연산에 대한 군이 된다. 이 군들은 모두 가환군이다.
여기서 X를 Z, Q, R 또는 C라고 할 때,
$X^{+}=\{x|x>0, x\in X\}$, $X^{\times}=\{x|x\neq 0, x\in X\}$ 로 정의되는 집합이다.

[예제 1]
집합 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$에 대하여 정의역과 공역이 X인 모든 일대일 대응인 함수의 집합 S_n이 함수의 합성 '$\circ$'에 대한 군이 됨을 증명하여라.
| 증명 |
일대일 대응인 두 함수의 합성함수도 역시 일대일 대응인 함수이다.
따라서 S_n의 임의의 두 원소를 합성하면 다시 S_n의 원소가 되므로 $\circ$는 S_n 상의 이항연산이다. 항등함수가 S_n의 항등원이 되고, 일대일 대응인 함수는 역함수를 가지며 역함수도 일대일 대응인 함수이므로 S_n의 임의의 원소는 역원을 가진다.
따라서 S_n은 함수의 합성 $\circ$ 에 대하여 군이 된다.

S_n처럼 유한 개의 원소를 가진 군을 유한군이라 하고, Z, Q, R, C처럼 무한개의 원소를 가진 군을 무한군이라고 한다.
유한군 G에 대하여 G의 원소의 개수를 G의 위수라 하고 $|G|$로 쓴다.

※ 양의 정수 m과 정수 a에 대하여 집합 $\overline{a}=\{n\in Z\,|\,n\equiv a(\mathrm{mod}\,m)\}$을 a의 법 m에 대한 잉여류라고 부른다. $\overline{a}$는 법 m이 달라지면 다른 집합이 되므로 $\overline{a(m)}$로 쓰기도 한다.

잉여류의 성질
양의 정수 m에 대하여 다음은 서로 동치이다.
[1] $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ [2] $\overline{a}=\overline{b}$ [3] $\overline{a}\cap\overline{b}=\varphi$

| 증명 |
[1] ⇒ [2], [2] ⇒ [3] , [3] ⇒ [1]을 증명하면, 세 명제가 서로 동치인 것이 증명된다.
[1] ⇒ [2]의 증명 : 먼저 $\overline{a}\subseteq\overline{b}$ 임을 증명하자. 임의의 $n\in\overline{a}$에 대하여 $n\equiv a(\mathrm{mod}\,m)$
이다. 가정에 의하여 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이므로, $n\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 이다. 따라서 $n\in\overline{b}$, 즉 $\overline{a}\subseteq\overline{b}$ 이다. 같은 방법으로, $\overline{b}\subseteq\overline{a}$ 임을 보일 수 있으므로 $\overline{a}=\overline{b}$ 이다 .
[2] ⇒ [3]의 증명 : $\overline{a}=\overline{b}$ 이면 $\overline{a}\cap\overline{b}=\overline{a}\cap\overline{a}=\overline{a}$ 이므로 [3]이 성립한다 .

[3] ⇒ [1]의 증명 : $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\phi$ 라 하자. $n\in\bar{a}\cap\bar{b}$ 이면, $n\in\bar{a}$ 이고 $n\in\bar{b}$ 이므로 $n\equiv a$, $n\equiv b(\mathrm{mod}m)$ 이다. 그러므로 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$ 이다.

따라서 주어진 법 m 에 대하여 각 정수는 $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\cdots$, $\overline{m-1}$ 중 어느 한 잉여류에 속하며 $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\cdots$, $\overline{m-1}$ 모두 집합으로서 서로소이다.

즉, i , $j\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$ 이고 $\bar{i}\neq\bar{j}$ 이면 $\bar{i}\cap\bar{j}=\phi$ 이다. 또한, 법 m 에 대한 잉여류 중 $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\cdots$, $\overline{m-1}$ 과 다른 잉여류는 존재하지 않는다.

이제, $Z_m=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{m-1}\}$ 로 놓고, 다음과 같은 Z_m 상의 이항연산을 생각하자.

임의의 두 잉여류 $\bar{i}$, $\bar{j}\in Z_m$ 에 대하여 더하기 연산과 곱하기 연산을 각각

$\bar{i}+\bar{j}=\overline{i+j}$ 로 정의하자.

이 두 연산이 Z_m 상에서 잘 정의된 이항연산이 되기 위해서는

$\bar{i}=\bar{s}$, $\bar{j}=\bar{t}$ 인 정수 s , t 에 대하여

$\overline{i+j}=\overline{s+t}$, $\overline{ij}=\overline{st}$ 가 성립해야 한다. 정수 s , t 에 대하여 $\bar{i}=\bar{s}$, $\bar{j}=\bar{t}$ 이면 합동식의 기본 성질에 의하여

$i\equiv s(\mathrm{mod}m)$, $j\equiv t(\mathrm{mod}m)$ 이므로 $i+j\equiv s+t(\mathrm{mod}m)$, $ij\equiv st(\mathrm{mod}m)$ 이다.

따라서 잉여류의 성질에 의하여 $\overline{i+j}=\overline{s+t}$, $\overline{ij}=\overline{st}$ 임을 알 수 있다.

그러므로 위의 두 연산은 Z_m 상에서 잘 정의된 이항연산이다.

뿐만 아니라, Z_m 이 더하기 연산에 대하여 가환군이 됨을 증명하자.

잉여류 군

Z_m 은 법 m 에 대한 잉여류의 더하기 연산에 대하여 가환군이 된다.

| 증명 |

$(\bar{i}+\bar{j})+\bar{k}=\overline{i+j}+\bar{k}=\overline{(i+j)+k}=\overline{i+(j+k)}=\bar{i}+\overline{j+k}=\bar{i}+(\bar{j}+\bar{k})$,

$\bar{i}+\bar{j}=\overline{i+j}=\overline{j+i}=\bar{j}+\bar{i}$ 이므로 결합법칙과 교환법칙이 성립한다.

$\bar{0}$ 가 항등원이고, 임의의 $\bar{i}$ 에 대한 역원이 $\overline{-i}$ 임은 분명하다.

따라서 Z_m 은 더하기 연산에 대하여 가환군이다.

양의 정수 m 에 대하여 Z_m 을 법 m 에 대한 잉여류 군이라 한다.

Z_m 의 위수는 물론 m 이다. 이제, $Z_m^*=\{\bar{a}\in Z_m \mid \gcd(a,m)=1\}$ 로 놓자.

양의 정수 m 에 대하여 Z_m^* 을 법 m 에 대한 기약잉여류 군이라 한다.

실제로 Z_m^* 가 곱셈에 관하여 가환군이 됨을 증명하여 보자.

기약잉여류 군

Z_m^* 은 법 m 에 대한 잉여류의 곱하기 연산에 대하여 가환군이 된다.

|증명|

$(\overline{i}\cdot\overline{j})\cdot\overline{k}=\overline{ij}\cdot\overline{k}=\overline{(ij)k}=\overline{i(jk)}=\overline{i}\cdot\overline{jk}=\overline{i}\cdot(\overline{j}\cdot\overline{k})$, $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i\cdot j}=\overline{j\cdot i}=\overline{j}\cdot\overline{i}$ 이므로 결합법칙과 교환법칙이 성립한다.

$\overline{1}$ 가 곱하기 연산에 대하여 항등원임은 분명하다.

이제, $\overline{a}\in Z_m^*$ 인 잉여류 $\overline{a}$ 를 생각하자.

$\overline{a}$ 에 대하여 $\gcd(a, m)=1$ 이다.

조건 $\gcd(a, m)=1$ 로부터 a 의 법 m 에 대한 역수 b 가 존재한다.

즉, $ab\equiv ba\equiv 1 \pmod m$ 인 정수 b 가 존재한다. 이제 $\overline{b}\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{1}$이므로 $\overline{b}$ 가 $\overline{a}$ 의 역원이며 $\gcd(b, m)=1$ 인 것은 분명하므로 $\overline{b}\in Z_m^*$ 이다 .

즉 , 임의의 원소 $\overline{a}$ 와 역원 $\overline{b}$ 가 존재한다.

따라서 Z_m^* 은 곱하기 연산에 대하여 가환군이 된다.

<참고>

Z_m^* 의 위수는 m 이하의 양의 정수 중에서 m 과 서로소인 수들의 개수와 같다.

오일러 φ-함수

Z_m^* 의 원소의 개수를 φ(m)이라 하자. 함수 $\phi: N\rightarrow N, m\mapsto\phi(m)$ 을 오일러 φ-함수라고 부른다.

[보기2]

$\phi(1)=1$, $\phi(2)=1$, $\phi(3)=2$, $\phi(4)=2$, $\phi(10)=4$, $\cdots$ 이다.

임의의 소수 p z 와 양의 정수 e 에 대하여 $\phi(p)=p-1$, $\phi(p^e)=p^{e-1}(p-1)$ 이다.

일반적으로, $m=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t}$ 를 m의 소인수분해라고 하면

$\phi(m)=p_1^{e_1-1}(p_1-1)p_2^{e_2-1}(p_2-1)\cdots p_t^{e_t-1}(p_t-1)$ 이다.

군의 기본성질_

군 G 의 이항연산을 $\star$ 라 하자. 그러면

[1] 항등원은 하나뿐이다.

[2] 임의의 $a\in G$ 에 대하여 그 역원은 하나뿐이다.

[3] 임의의 $a,b \in G$ 에 대하여 $(a')' = a, (a*b)' = b' * a'$ 이다 .

[4] $a*b = a*c$ 이면 $b = c$ 이다. (좌 소거법칙)

[5] $a*c = b*c$ 이면 $a = b$ 이다. (우 소거법칙)

| 증명 |

[1] $e_1, e_2 \in G$ 가 항등원이면 $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ 이므로 $e_1 = e_2$ 이다 .

따라서, 항등원은 하나뿐이다.

[2] a_1 , $a_2 \in G$ 가 a 의 역원이면

$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$ 이므로 $a_1 = a_2$ 이다.

따라서 역원은 하나뿐이다.

[3] $a * a' = a' * a = e$ 로부터 a' 의 역원 $(a')'$ 은 a 임을 알 수 있다. 또,

$$\begin{aligned}(b' * a') * (a * b) &= b' * (a' * (a * b)) = b' * ((a' * a) * b) \\ &= b' * (e * b) = b' * b = e\end{aligned}$$

이고, 같은 방법으로 $(a*b)*(b'*a') = e$ 이므로 $(a*b)$ 의 역원은 $b' * a'$ 이다.

[4] $a*b = a*c$ 의 왼쪽에서 a' 을 $\star$ 하면, $a' * (a*b) = a' * (a*c)$ 이다.

결합법칙을 적용하여 간단히 하면 $b = c$ 를 얻는다.

[5] $a*c = b*c$ 의 오른쪽에서 c' 을 $\star$ 하면, $(a*c)*c' = (b*c)*c'$ 이다.

결합법칙을 적용하여 간단히 하면 $a = b$ 를 얻는다.

[과제 1]

⑴ S_n 의 원소의 개수를 구하여라.

⑵ $n \geq 3$ 이면 S_n 이 비가환군임을 증명하여라.

확인 문제

1. 유리수의 집합은 곱셈에 대한 군이 되는가?

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	잉여류(2)	차시	11~13
학습목표	부분군의 정의, 오일러의 정리, 페르마의 정리를 이해 할수 있다.				

- 100 이하의 자연수 중에서 4 로 나누어 나머지가 3 인 원소들로 이루어진 집합을 구하여라.
- 3^{71} 의 일의 자리의 수는 얼마인가?

전문교과 학습내용
부분군의 정의 이항연산 $\star$에 대한 군 G의 부분집합 H가 $\star$에 대하여 여전히 군이 될 때, H를 G의 부분군이라 하고 $H \leqq G$로 쓴다. G자신과 $\{e\}$는 G의 자명한 부분군이라 불린다. [보기] 임의의 정수 n에 대하여 $nZ = \{nk \mid k \in Z\}$로 정의하면 nZ는 Z의 부분집합이며 nZ는 스스로 군이 되므로 nZ는 Z의 부분군이 된다. 즉, $nZ \leqq Z$이다. 또, $Z \leqq Q \leqq R \leqq C$, $Q^+ \leqq R^+$, $Q^\times \leqq R^\times \leqq C^\times$, $Q^+ \leqq Q^\times$, $R^+ \leqq R^\times$ 등도 정의로부터 분명하다. **부분군일 필요충분조건** 군 G의 이항연산을 $\star$라 하고, H를 G의 공집합이 아닌 부분집합이라고 하자. H가 G의 부분군이기 위한 필요충분조건은 임의의 $a, b \in H$에 대하여 $a * b' \in H$이다. ㅣ 증명 ㅣ 필요조건은 분명하다. 충분조건임을 증명하자. H의 원소들에 대하여도 결합법칙은 당연히 성립한다. $b = a$로 잡으면 $a * b' = a * a' = e \in H$이므로 H는 항등원 e를 포함하고 있다. $a = e$로 잡으면 $a * b' = e * b' = b' \in H$이므로 임의의 $b \in H$에 대하여 그 역원 b'도 H에 포함되어 있다. 그러므로 H는 $\star$에 대한 군이고, 따라서 H는 G의 부분군이다.

G가 $\star$에 대한 군이라 하고 $a \in G$라 하자.

$a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a * a$, $\cdots$, $a^n = a^{n-1} * a$ $(n \geq 1)$로 정의하고, n이 음의 정수이면 $a^n = (a')^{|n|}$으로 정의한다. 따라서 임의의 두 정수 m, n에 대하여 지수법칙 $a^m * a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$이 성립함은 당연하다. 또한, $a^{-1} = a'$이고 $(a^n)' = a^{-n}$이다.

순환부분군과 생성자의 정의

$a \in G$에 대하여 $< a >$를 G의 부분군 중에서 a를 포함하고 있는 가장 작은 부분군으로 정의한다. 따라서 어떤 부분군 H가 a를 포함하고 있으면 $< a >$는 H의 부분군이 된다. $< a >$를 a로 생성되는 G의 순환부분군이라 한다.

만약, $a \in G$가 존재하여 $G = < a >$일 때 G를 순환군이라 하며, a를 G의 생성자라 부른다.

순환부분군

$a \in G$에 대하여 $< a \geq \{a^n \mid n \in Z\}$이다.

| 증명 |

우변의 집합을 H라 하자.

$H \neq \phi$이고 H의 임의의 두 원소 a^i, a^j에 대하여 $a^i * (a^j)' = a^{i-j} \in H$이므로 H는 G의 부분군이고, 따라서 $< a >$는 H의 부분군이다.

한편, $< a >$가 G의 부분군이 되려면 모든 정수 n에 대하여 a^n을 원소로 가지고 있어야 하므로 $a^n \in < a >$이다. 즉, $H \subseteq < a >$.

따라서 $< a \geq H = \{a^n \mid n \in Z\}$이다.

원소의 위수의 정의

$a^d = e$를 만족시키는 양의 정수 d가 존재하면, 그 중 가장 작은 양의 정수 d를 a의 위수라 하고 $|a|$로 쓴다.

[예제 1]

$a \in G$에 대하여 a의 위수가 d일 때, G의 순환부분군 $< a >$의 위수를 구하여라.

| 풀이 |

모든 정수 k 와 각 $i=0, 1, \cdots, d-1$ 에 대하여

$a^{kd+i}=(a^d)^k * a^i = e^k * a^i = e * a^i = a^i$ 이므로 $<a \geq \{a^n \mid n=0, 1, 2, \cdots, d-1\}$ 이고, 따라서 $<a>$ 의 위수도 d 이다.

원소 a 의 위수를 d 라 하고, 적당한 n 에 대하여 $a^n=e$ 라 하자.

n 을 d 로 나누면 $n=qd+r\,(0 \leq r < d)$ 를 만족시키는 q 와 r 가 존재한다.

$r \neq 0$ 을 가정하면 $e=a^n=a^{qd+r}=(a^d)^q * a^r = e^q * a^r = e * a^r = a^r$ 으로서 d 가 a 의 위수임에 모순이 된다. 따라서 $r=0$ 이고, $d \mid n$ 임을 알 수 있다.

이제, 유한군 G 의 위수와 G 의 원소 a 의 위수와의 관계를 살펴보자.

군과 원소의 위수

유한 가환군 G 의 위수를 n 이라고 하면 임의의 $a \in G$ 에 대하여 a 의 위수는 n 의 약수이다.

| 증명 |

유한군 G 의 위수, 즉 원소의 개수가 n 개이므로, $G=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 이라 하자.

임의의 $a \in G$ 에 대하여 $H=\{a * a_1, a * a_2, \cdots, a * a_n\}$ 이라 하자.

그러면 H 의 임의의 원소 $a * a_i$ 는 군 G 의 원소이기도 하므로, H 는 G 의 부분집합이다. 또, $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 에 대하여 $a * a_i = a * a_j$ 이면 좌 소거법칙에 의하여 $a_i = a_j$ 이므로 $i=j$ 이다. 따라서 H 의 원소들은 모두 서로 다르다. 따라서 H 는 정확히 n 개의 원소를 가지고 있으며, $H \subseteq G$ 이므로 $H=G$ 이다. G 는 가환군이므로 다음의 등식을 얻는다. $a_1 * a_2 * \cdots * a_n = (a * a_1) * (a * a_2) * \cdots * (a * a_n)$

G 가 가환군인 것을 다시 이용하면, $a_1 * a_2 * \cdots * a_n = a^n * (a_1 * a_2 * \cdots * a_n)$ 이다.

그러므로 좌 소거법칙에 의하여 $e=a^n$ 이다.

따라서 원소 a의 위수를 d라 하면, d는 n의 약수이다.

위의 정리는 G 가 유한 비가환군인 경우에도 성립한다.

일반적으로, G 가 유한군이고 $H \leq G$ 이면 H 의 위수는 G 의 위수의 약수가 된다.

다음은 오일러 정리라고 불리는 매우 유용한 정리이다.

오일러 정리

양의 정수 m 과 정수 a 가 서로소이면 $a^{\phi(m)} \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, m)$ 이다.
(단, $\phi(m)$ 은 오일러 ϕ-함수이다.)

| 증명 |

법 m 에 대한 기약잉여류 군 Z_m^* 을 생각하자.

$\overline{a} \in Z_m^*$ 이므로 $\overline{a}$ 의 위수는 Z_m^* 의 위수인 $\phi(m)$ 의 약수이다.

따라서 $(\overline{a})^{\phi(m)} = \overline{1}$ 이고 이것은 $a^{\phi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ 과 동치이다.

페르마 정리

소수 p 가 정수 a 를 나누지 않으면 $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ 이다.

| 증명 |

p 가 소수이므로 $\phi(p) = p-1$ 이다. 따라서 오일러 정리에서 m 대신 p 를 대입하면 원하는 합동식 $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ 를 얻는다.

위의 정리로부터 모든 정수 a 에 대하여 $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$ 임을 알 수 있다.
즉, $p \nmid a$ 인 경우에는 정리로부터 $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$ 를 얻고, $p | a$ 인 경우에는 $a^p \equiv 0 \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$ 이다.

[예제 2]

3^{1283}의 끝 두 자릿수를 구하여라.

| 풀이 |

법 100 에 대하여 계산하면 3^{1283} 의 끝 두 자릿수를 알 수 있다. 3 과 100 은 서로소이고, $100 = 2^2 \cdot 5^2$ 이므로 $\phi(100) = 40$ 이다.
오일러 정리를 적용하면 $3^{40} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 100)$ 을 얻고,
$3^{1283} \equiv (3^{40})^{32} \cdot 3^3 \equiv 3^3 \equiv 27(\mathrm{mod}\, 100)$ 이므로, 3^{1283} 의 끝 두 자릿수는 27 이 된다.

윌슨 정리

p 가 소수이면, $(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ 이고, 그 역도 참이다.

| 증명 |

$p=2, 3$ 일 때는 분명하므로, $p>3$ 이라고 하자.

임의의 $a \in T = \{1, 2, \cdots, p-1\}$ 에 대하여 a 와 p 는 서로소이므로 법 p 에 대한 a 의 역수가 T 에 유일하게 존재한다. 이것을 a^* 라 하자.

만약, $a = a^*$ 이면 $aa^* \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ 로부터 $a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$,

즉 $a^2 - 1 \equiv (a+1)(a-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ 를 얻고, 따라서 $p | (a+1)$ 또는 $p | (a-1)$ 이다.

$a \in T$ 이므로 a 는 $p-1$ 또는 1 이어야 한다. $S = \{2, 3, \cdots, p-2\}$ 로 놓으면,

임의의 $a \in S$ 에 대하여 a 의 법 p 에 대한 역수 a^* 는 $a^* \in S$ 이고 $a \neq a^*$ 이다.

즉, S 의 모든 원소들을 $\frac{p-3}{2}$ 쌍의 (a, a^*) 들로 짝지을 수 있다.

따라서 S 의 원소들을 모두 곱하면 법 p 에 대하여 1 과 합동이 된다.

즉, $2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-2) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ 이므로, $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ 이다.

이제, 역의 증명을 위하여 $m \in N$ 에 대하여 $(m-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, m)$ 이지만 m 이 소수가 아니라고 가정하여 보자.

그러면 $d | m, 1 < d < m$ 을 만족시키는 정수 d 가 존재한다.

$d \leq m-1$ 이므로 $d | (m-1)!$ 이다. 주어진 조건으로부터 $m | ((m-1)!+1)$ 이고 $d | m$ 이므로 $d | ((m-1)!+1)$ 이다. 그런데 $d | (m-1)!$ 이므로 $d | 1$ 인데 이것은 $d > 1$ 에 모순이다. 그러므로 m 은 소수일 수 밖에 없다.

[예제 3]

$m \neq 4$ 인 합성수에 대하여 $m | (m-1)!$ 임을 보여라.

| 증명 |

m이 합성수이므로 $m = ab, 2 \leq a, b \leq m-1$ 을 만족시키는 양의 정수 a, b 가 존재한다. $a \neq b$ 이면, $m = ab | (m-1)!$ 임은 분명하다.

또, $a = b$ 이면 $a^2 = m$ 이고 $m \geq 6$ 이므로 $2a = 2\sqrt{m} < m$, 즉 $2a \leq m-1$ 이다.

따라서 $m = a^2 | (m-1)!$ 이다. ■

법 p 에 대한 -1 의 제곱근_

2 가 아닌 소수 p 에 대하여 이차 합동방정식 $x^2+1\equiv 0(\bmod p)$ 가 해를 가지기 위한 필요충분조건은 $p\equiv 1(\bmod 4)$ 이다.

| 증명 |

먼저, $p\equiv 1(\bmod 4)$ 가 필요조건임을 보이자.

a 를 합동방정식 $x^2+1\equiv 0(\bmod p)$ 의 해라고 하자. 그러면 $a^2\equiv -1(\bmod p)$ 이므로 $p\nmid a$ 이다. 따라서 페르마 정리에 의하여 $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ 이다.

그러므로 $1\equiv a^{p-1}\equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$ 이다.

p 는 홀수인 소수이므로 $\frac{p-1}{2}$ 은 정수이고 $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$ 이므로 $\frac{p-1}{2}$ 은 짝수이다.

따라서 $p-1$ 은 4 의 배수, 즉 $p\equiv 1(\bmod 4)$ 이다.

이제, $p\equiv 1(\bmod 4)$ 가 충분조건임을 보이자.

$(p-1)\neq 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot\cdots\cdot(p-2)\cdot(p-1)$ 에서

$$p-1\equiv -1(\bmod p)\,,\ p-2\equiv -2(\bmod p)\,,\ \cdots\ ,\ \frac{p+1}{2}\equiv -\frac{p-1}{2}(\bmod p)$$

이므로 $a=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ 로 놓으면 $(p-1)!\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot a^2(\bmod p)$ 이다.

한편, 윌슨 정리에 의하여 $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$ 이고, 또 가정에 의하여 $p-1$ 은 4 의 배수이므로 $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$ 이다. 따라서 $-1\equiv a^2(\bmod p)$ 이다.

즉, a 는 합동방정식 $x^2+1\equiv 0(\bmod p)$ 의 해이다.

위의 정리의 증명에서 소수 p 가 $p\equiv 1(\bmod 4)$ 를 만족시킬 때, $\pm\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ 이 이차 합동방정식 $x^2+1\equiv 0(\bmod p)$ 의 해, 즉 법 p 에 대한 -1 의 제곱근이 됨을 알 수 있다. 사실은 법 p 에 대하여 이 둘 이외의 다른 해는 없다. 한편, 법 p 에 대한 -1 의 제곱근은 $p\equiv 3(\bmod 4)$ 이면 존재하지 않으며, $p=2$ 이면 하나가 존재한다.

[예제 4]

$x^2+1\equiv 0(\bmod 29)$ 를 만족시키는 정수가 존재하는가?

존재한다면 그러한 정수를 모두 구하여라.

| 풀이 |

29 는 $29 \equiv 1 (\bmod 4)$ 인 소수이므로 $\pm(14)! (\bmod 29)$ 인 정수들을 모두 구하면 된다.

$14! \equiv 12 (\bmod 29)$ 이므로 구하는 정수들은 임의의 정수 k 에 대하여 $29k \pm 12$ 이다.

[과제 1]

$a \in G$ 에 대하여 $a^d = e$ 를 만족시키는 양의 정수 d 가 존재하지 않으면 임의의 서로 다른 정수 i, j 에 대하여 $a^i \neq a^j$ 이고, 따라서 a 로 생성되는 순환부분군 $<a>$ 는 무한군이 됨을 증명하여라.

[과제 2]

11^{2002} 의 끝 두 자릿수를 구하여라. 또, 끝 세 자릿수를 구하여라.

[과제 3]

양의 정수 n 과 $n+2$ 가 둘 다 소수이면 $n(n+2) | [4\{(n-1)!+1\}+n]$ 임을 보여라.

[과제 4]

(1) $x^2+1 \equiv 0 (\bmod 31)$을 만족시키는 정수를 모두 구하여라.

(2) $x^2+9 \equiv 0 (\bmod 29)$를 만족시키는 정수를 모두 구하여라.

[확인문제]

1. 모든 정수 a 에 대하여 $a^7 \equiv a (\bmod 42)$ 임을 보여라.

2. 임의의 $a, b \in Z$ 에 대하여 $ab(a^2-b^2)(a^2+b^2) \equiv 0 (\bmod 30)$ 임을 보여라.

3. 다음 정수의 끝 두 자릿수를 구하여라.

(1) 3^{404}　　(2) 7^{1209}

(3) 11^{2002}　　(4) 13^{2001}

Ⅰ. 단원명

공간도형

Ⅱ. 단원의 개관

1. 단원의 학습목표

가. 기하학의 역사와 배경을 이해한다.

나. 공리와 추론의 뜻과 성질을 이해한다.

다. 유클리드 평면기하학의 공리를 이해한다.

2. 단원의 구성

가. 기하학의 체계

나. 평면도형

Ⅲ. 단원 지도 계획

1. 연계 요소

보통 교과		전문 교과
평면의 결정조건, 이면각, 삼수선의 정리, 정사영, 공간좌표	➡	기하학의 역사, 공리와 추론, 유클리드 평면기하학의 공리, 평면도형의 성질, 직선과 삼각형, 원의 성질

2. 연계 단원 지도 계획

중단원	소단원	학습 내용	차시
기하	기하학의 세계	기하학의 역사	1~8
		공리와 추론	
		유클리드 평면기하학의 공리	

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	1
학습목표	1. 기하학의 역사와 배경을 이해한다. 2. 공간도형의 기본성질을 이해한다.				

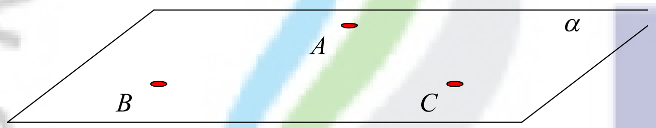
전문교과 학습내용
1. 기하학의 역사와 배경 고대 이집트인들은 도형에 관하여 관찰하고 실측하여, 그것에서 성립하는 법칙을 추정하는 귀납 추론에 의하여 도형들에 대한 여러 가지 원리들을 깨닫게 되었다. 그리스 인들은 이집트인들의 경험적인 수학을 통하여 기하학의 원리들을 익혔고 이러한 방식을 통하여 얻은 지식을 geometrein, 토지 측량술이라 불렀다. 지금의 geometry는 이 용어로부터 유래되었다. 그리스 인들은 이집트인과는 달리 시행착오에 의해서가 아니라 연역적 추론을 통해 논리적 필연성을 지닌 엄밀한 방식으로 기하학적 명제들을 이루려고 하였다. 우리가 눈으로 보는 선들은 그것이 아무리 곧다하더라도 직선에 가까운 것이지 직선이 아니고 현상의 세계에서도 결코 직선은 존재하지 않는다. 그리스 인들은 점이나 직선들을 이상적인 관념의 세계에서 추상적으로 다루었고, 이미 옳다고 인정된 법칙을 토대로 하여 새로운 법칙이 성립하는 것을 보이는 연역적 추론에 의하여 결론이 옳다는 것을 보였다. 즉, 그리스 기하는 추상화(abstraction)와 연역적 추론(deduction)으로 특징지을 수 있다. 그리스 인들은 이 추상적인 대상 위에 엄밀한 기하학의 법칙을 적용하였다. 그리스 인들이 도형의 성질을 연구하는 데 이용한 추론 방법은 이미 옳다고 인정하는 사실을 바탕으로 다른 새로운 사실을 이끌어 내는 연역법이었다. 탈레스(Thales)를 비롯한 그리스 인들은 기하학적 명제들이 시행착오가 아닌 연역적 추론에 의하여 이루어져야 한다고 생각하였다. 탈레스에 이어서 피타고라스(Pythagoras)와 그의 제자들은 기하학을 이론적으로 발전시켰다. 특히, 이들은 세 변의 길이가 3, 4, 5이면 직각삼각형이 될 뿐만 아니라 $3^2+4^2=5^2$ 이 된다는 사실을 발견하고, 일반적으로 세 변의 길이가 a, b, c 일 때 $a^2+b^2=c^2$ 이면 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이 된다는 것을 연역법으로 증명하여 지식을 논리적으로 체계화하는 계기를 마련하였다. 유클리드(Euclid)는 탈레스, 피타고라스, 히포크라테스, 플라톤 등을 거쳐 이론적으로 발전되어 온 그리스의 기하학적 지식을 총망라하였다. 전 13권으로 되어 있는 그의 저작 ‘원론(Elements)’에서는 평면과 공간에서의 도형의 관찰에 대한 논리적인 기초를 세웠다. 그는 기하를 정의, 공리를 전제로 하여 직관이 아닌 논리로 완전히 설명하려고 하였으며, 몇 개의 간단한 공리들로부터 복잡하고, 또 직관적으로 결코 명백하지 않은 465개의 명제들을 추론해 내었다. 이후 원론은 서양에서 가장 널리 읽혀지는 책이 되었으며, 기하학에 대한 그의 접근 방법은 거의 2000년 동안이나 기하학의 연구를 지배해 왔다. 한편, 근세에 이르러 대수학과 기하학을 결합한 사람은 철학자로 알려진 데카르트 (Descartes, R., 1596~1650)이다. 그는 공간에 좌표를 도입하여 기하학적인 도형인 직선, 원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등의 도형을 대수방

정식으로 표현하였다. 예를 들어, 평면 위의 한 점은 두 실수의 순서쌍 (a, b) 로 표시할 수 있다. 즉, 평면기하학에서의 한 점 P가 하나의 순서쌍 (a, b) 와 대응된다.
이 대응에 의하여 직선은 방정식 $ax+by+c=0\,(a^2+b^2\neq 0)$, 원은 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 을 만족하는 점 (x, y) 들의 집합으로 생각할 수 있다.
이와 같이, 평면 또는 공간의 점을 좌표로 표시하여 연구하는 기하학을 해석기하학이라 하며, 이는 오일러 등에 의하여 상당한 발전을 하게 되었다.
이로부터 기하학적 도형을 연구하는 데 대수학의 계산 법칙을 이용할 수 있게 되었으며, 현대에 이르러 기하학은 대수학뿐만 아니라 미분, 적분을 비롯한 수학의 거의 모든 이론들을 이용하여 그 내용을 풍부히 하고 있다.

§1. 공간도형의 기본성질

▣ 공간도형의 기본성질 ▣

1. 한 직선 위에 있지 않는 서로 다른 세 점을 포함하는(지나는) 평면은 오직 한 개 존재한다.
2. 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면에 포함된다.
3. 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면, 이 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

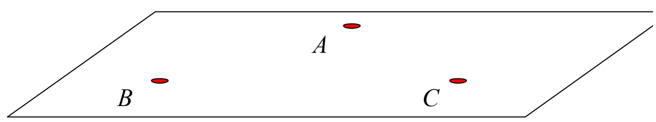


☞ 공간도형의 기본성질은 아무런 증명이 없이 옳다고 인정하기로 하고 추론의 근거로 삼는다. (이와 같은 명제를 공리라 한다.)
☞ 특별한 단서가 없는 한 공간의 기본도형인 점, 선, 면은 다음과 같이 나타내자.
점 : $A, B, C, \cdots, P, Q, R, \cdots$ 등의 영문 대문자
선 : $AB, BC, \cdots$ 등과 같은 두 점의 기호나 $a, b, c, \cdots$ 등의 영문 소문자
면 : $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \pi, \cdots$ 등의 그리스 문자

§2. 평면의 결정조건

▣ 평면의 결정조건 ▣

다음 각 경우에 평면이 오직 한 개로 결정된다.
(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점(*by* 공간도형의 기본성질)
(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
(3) 만나는 두 직선
(4) 평행한 두 직선



(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	2
학습목표	1. 직선과 점의 결정조건과 직선과 직선의 위치관계를 이해한다. 1. 공리와 추론의 뜻과 성질을 이해한다.				

§3. 직선의 결정조건

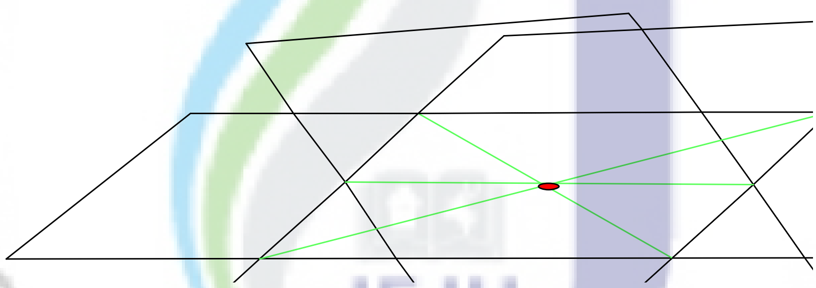
▣ 직선의 결정조건 ▣

(1) 서로 만나는 서로 다른 두 평면은 오직 하나의 직선을 결정한다.
(2) 서로 다른 두 점은 단 하나의 직선을 결정한다.

§4. 점의 결정조건

▣ 점의 결정조건 ▣

(1) 교선이 평행하지 않은 서로 다른 세 평면은 단 하나의 점을 결정한다.
(2) 평면과 그 평면에 포함되지 않는 직선이 만나면 단 하나의 점을 결정한다.
(3) 서로 만나는 두 직선은 단 하나의 점을 결정한다.



§5. 두 직선의 위치관계

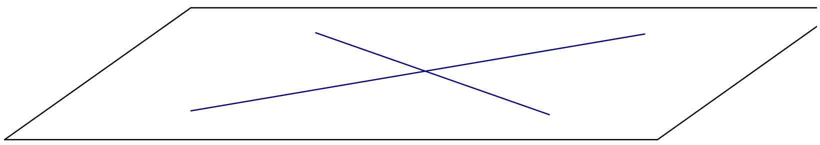
☞ 두 직선 a, b가 평행할 때, $a // b$로 나타낸다.

▣ 두 직선의 위치 관계 ▣

1. 만난다.
2. 평행하다.
3. 꼬인 위치에 있다.

1, 2 } - 한 평면위에 있다. } - 만나는 경우

3 - 한 평면위에 있지 않다. } -만나지 않는 경우



전문교과 학습내용

2. 공리와 추론

도형을 연구하는데 있어 추론하는 방법에는 이미 옳다고 인정하는 사실을 바탕으로 다른 새로운 사실을 이끌어 내는 **연역법**과 특수한 사실을 전제로 하여 일반적인 진리 내지 원리를 추론하는 **귀납법**이 있다.

연역적 추론은 전제가 참이고, 그 형식이 정당하다면 언제나 참이다. 그러나 귀납적 추론은 전제가 사실과 일치하고 참일지라도, 그 결론은 참일 수 있는 개연성이 있을 뿐이어서 항상 참이라고 할 수 없다.

어떤 명제 A가 참이라는 것을 연역적인 추론으로 증명하려면, 이미 참으로 인정된 명제 B로부터 A를 논리적으로 추론할 수 있다는 것을 보이는 증명이 있어야 한다. 그러나 B를 참으로 인정할 수 없다면 다시 다른 명제 C로부터 B를 논리적으로 추론할 수 있다는 것을 보이는 증명이 있어야 하고, 이렇게 하여 결국은 논리적 증명 없이 참이라고 인정할 수 있는 명제에 이를 때까지 이 과정을 반복해야 한다. 이때, 논리적 증명 없이 참이라고 인정할 수 있는 명제를 **공리**(axiom)라고 한다. 만약 이러한 공리가 존재하지 않는다면, 연역적 추론에 의하여 어떠한 명제도 증명할 수 없게 된다. 공리적 방법(axiomatic method)이란 최소한의 공리들을 바탕으로 추론에 의하여 공리들이 함축하고 있는 명제를 증명해 가는 과정이다.

유클리드 기하학은 공리적 방법에 의존한다. 또한, 논의에 사용되는 단어나 기호는 서로 뜻이 통할 수 있도록 설명되고 정확하게 규정되어야 하고, 이것을 정의라고 한다. 유클리드는 모든 용어를 반드시 먼저 정의하고 사용하였다. 예를 들면, 유클리드의 원론에서는 점, 선, 면들을 다음과 같이 정의하였다.

• 점이란 부분을 갖지 않는 것이다.

• 선은 폭이 없이 길이만 있는 것이다.

• 면은 길이와 폭만이 있는 것이다.

[문제 1]

유클리드는 모든 용어를 반드시 먼저 정의하고 사용하였다. 이것의 의미와 문제점에 관하여 논의하여 보아라.

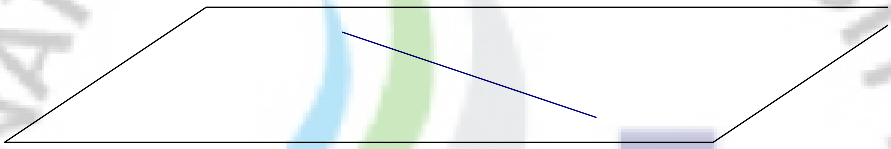
우리는 우리가 사용하는 모든 용어를 정의할 수 없다. 왜냐하면, 한 용어를 설명하기 위해서는 다른 용어를 사용해야 하고, 다시 이 용어를 설명하기 위해서는 다른 용어가 필요함으로 결과적으로 끝없이 용어를 정의해야 하는 악순환에 빠지게 되기 때문이다. 그러므로 연역적인 방법으로 이론을 전개하기 위해서는 정의되지 않고 남겨 두는 용어가 필요하게 된다. 이때, 정의되지 않고 남겨 두는 용어를 **무정의 용어**라 부른다. 이러한 무정의 용어에 대한 의미는 공리계 내에서의 관계에 의하여 파악된다.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	3
학습목표	1. 평면과 직선, 평면과 평면의 위치관계를 이해한다. 2. 유클리드 평면기하학의 공리를 이해한다.				

§6. 평면과 직선의 위치관계

▣ 평면과 직선의 위치관계 ▣

1. 한 점에서 만난다. - 평면과 직선이 단 하나의 공유점을 갖는 경우
2. 평행하다. (만나지 않는다.) - 평면과 직선이 공유점을 갖지 않는 경우
3. 평면이 직선을 포함한다. - 평면과 직선이 둘 이상의 공유점을 갖는 경우



☞ 공간에서 직선과 평면이 공유점을 갖지 않을 때 직선 l 과 평면 α 는 평행하다고 하고, 기호로 l α 로 나타낸다.

§7. 두 평면의 위치관계

▣ 두 평면의 위치관계 ▣

1. 한 직선을 공유한다. (만난다.) - 두 평면 α, β 가 공유점을 갖는 경우
2. 평행하다. (만나지 않는다.) -두 평면 α, β 가 공유점을 갖지 않는 경우

☞ 두 평면 α, β 가 공유점을 가지면 한 직선 a 를 공유하고, 이 때 이 직선 a 를 **교선**이라 한다. 만약 공유점을 갖지 않으면 두 평면 α, β 는 평행하다고 하고, 기호로 α β 로 나타낸다.

전문교과 학습내용

3. 유클리드 평면기하학의 공리

유클리드는 그의 기하학을 다음과 같은 기본적인 다섯 개의 공리 위에 건설하였다.

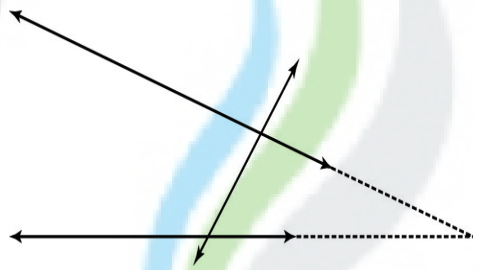
[공리 1] 임의의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 유일하게 존재한다.

[공리 2] 직선은 무한히 연장할 수 있다.

[공리 3] 임의의 점을 중심으로 임의의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.

[공리 4] 모든 직각은 같다.

[공리 5] 한 평면 위의 한 직선이 그 평면 위의 두 직선과 만날 때 같은 쪽에 있는 내각의 크기의 합이 180° 보다 작으면 이 두 직선은 그 쪽에서 만난다.



역사적으로, 이 중 처음 4개의 공리는 수학자들에 의하여 쉽게 받아들여졌지만 다섯 번째의 공리는 쉽게 받아들여지지 않았다. 이 다섯 번째의 공리를 **평행공리**라 부르고, 다음과 같이 표현하기도 한다.

[유클리드의 평행공리]

한 직선 l과 l 위에 있지 않은 한 점P에 대하여P를 지나 직선 l과 평행인 직선 m이 유일하게 존재한다.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	4
학습목표	1. 이면각과 수직에 관한 정리를 알고, 삼수선 정리를 이해한다. 2. 평면도형에서의 합동변환을 이해한다.				

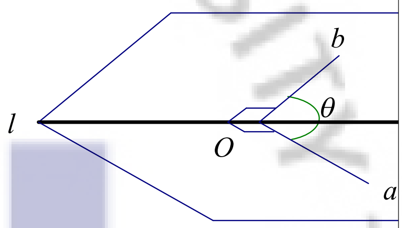
§8. 이면각

▣ 이면각의 정의 ▣

직선 l 을 공유하는 두 평면 α, β 가 이루는 각을 이면각이라 하고, 교선 l 을 이면각의 변, 반평면 α, β 를 각각 이면각의 면이라 한다.

▣ 이면각의 크기 ▣

두 평면 α, β 의 교선 l 위의 한 점 O 에서 두 평면 α, β 에 내린 수선을 a, b 라 하면 a, b 가 이루는 각을 이면각의 크기(두 평면이 이루는 각)라고 한다.



§9. 수직에 관한 정리

▣ 수직에 관한 정리 ▣

직선 l 과 평면 α, 점 O 에 대하여

(1) l 이 α 위의 O 를 지나고, O 에서 만나는 α 위의 두 직선 a, b 에 수직이면, $l \perp \alpha$ 이다.

(2) l 과 α 가 수직이면, l 은 α 위의 모든 직선과 수직이 된다.

(3) l 이 α 에 수직일 때, l 을 포함하는 모든 평면은 α 에 수직이 된다.

(4) 한 점 P 를 지나고 한 평면 α 에 수직인 직선은 단 하나뿐이다.

(5) 한 점 P 를 지나고 한 직선 l 에 수직인 평면은 단 하나뿐이다.

(6) 한 평면에 수직인 두 직선과 한 직선에 수직인 두 평면은 서로 평행하다.

(7) 한 평면에 수직인 두 평면의 교선은 처음 평면에 수직이다.

☞ 직선 l 이 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선 a, b 와 수직이면 $l \perp \alpha$ 이다.

[전문교과 학습내용]

전문교과 학습내용
4-1. 평면도형에서의 합동변환

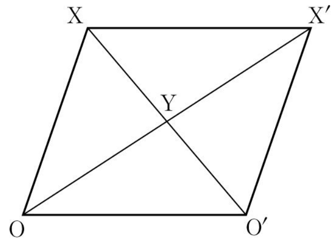
평면도형을 공부하는데 있어서 도형을 어떻게 분류하느냐 하는 것은 매우 중요한 문제이다. 우리는 도형의 합동과 닮음의 관계를 이용하여 도형을 분류하고자 한다. 일반적으로, 여러 평면기하학에서 합동과 닮음은 평면 위에 정의된 변환과 밀접한 관계를 가지고 있다.

이제, 유클리드 평면기하학에서의 변환에 대하여 알아보자. 유클리드 기하학의 합동공리는 평면 위의 두 점 O 와 O' 이 주어져 있을 때 임의의 점 X 에서 출발하는 임의의 반직선에 대하여 선분 OO' 과 XX' 이 합동이 되게 하는X 에서 출발하는 반직선 위의 점 X' 이 오직 하나 존재함을 말하고 있다. 이때, 두 선분 OO' 과 XX' 의 길이는 같다고 말한다. 일반적으로, 모든 선분을 자신과 합동인 선분으로 옮기는 변환을 **합동변환**이라 부른다. 따라서 합동변환은 두 점 사이의 길이를 보존하는 사상이다.

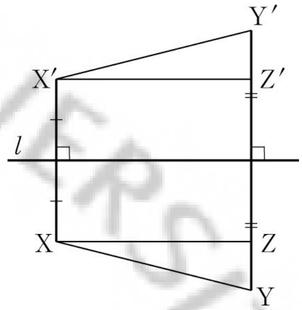
[도형의 합동의 정의]
평면 위의 두 도형에 대하여 어느 하나가 다른 것의 적당한 합동변환에 의한 상으로 표현될 때, 두 도형을 서로 합동이라 부른다.

합동변환은 도형의 성질을 알아보는 데 매우 중요한 역할을 한다.
평면에 두 점 O 와 O' 을 고정한 후 임의의 점 X 에 대하여 점 X 를 지나고 직선 OO' 과 평행인 직선 위의 점 X' 을 택하여 선분 OO' 과 XX' 이 서로 방향이 같고 합동이 되도록 한다. 이때, 이 변환을 **평행이동**이라 부른다.
정의에 의하여 평행이동은 합동변환임을 쉽게 알 수 있다.
특히,$\mathrm{O}=\mathrm{O}'$ 인 경우 평행이동은 모든 점을 자신으로 보내게 되므로 이 평행이동을 **항등변환**이라 부른다. 실제로, 평행이동에서의 X' 은 사각형 $\mathrm{OO'X'X}$ 가 평행사변형이 되도록 하는 점이다.

평행사변형에서 다음의 정리가 성립함을 합동을 이용하여 쉽게 보일 수 있다.



[평행사변형의 대각 정리]
평행사변형에서 서로 마주 보는 변의 길이와 마주 보는 각의 크기는 서로 같다.



평면 위에 직선 l 을 생각하자. 임의의 점 X 에 대하여 X′ 을 직선 l 이 선분 XX′ 의 수직이등분선이 되도록 택한다. 이와 같이, X 를 X′ 으로 보내는 변환을 직선 l 에 관한 **대칭이동**이라 부르고, l 을 대칭축, X′ 을 직선 l 에 관한 X 의 대칭점이라 부른다.
점 X′ 과 Y′ 을 각각 직선 l 에 관한 점 X 와 Y 의 대칭점이라 하자. 이때, 점 X 와 X′ 에서 각각 직선 l 과 평행인 선을 그어 그들과 직선 YY′ 의 교점을 각각 Z 와 Z′ 이라 하면, $\triangle XZY$ 와 $\triangle X'Z'Y'$ 은 합동이고, $\overline{XY}=\overline{X'Y'}$ 이다.
그러므로 대칭변환은 합동변환이다.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	5
학습목표	1. 삼수선 정리와 정사영을 이해한다. 2. 평면도형에서의 합동변환을 이해한다.				

§10. 삼수선의 정리

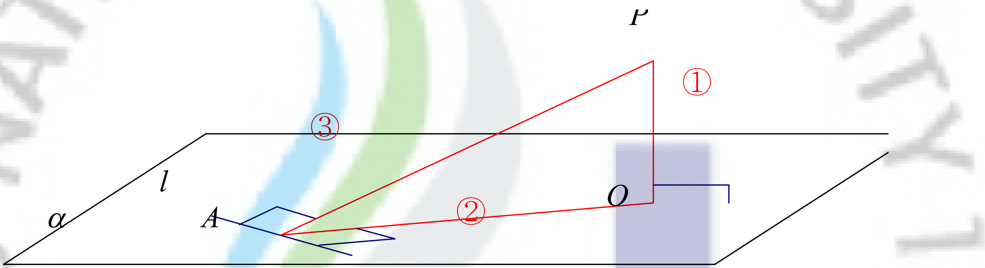
▣ 삼수선의 정리 ▣

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 와 평면 α 위의 두 점 O, A 와 점 A 를 지나는 평면 α 위의 직선 l 에 대하여

(1) $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$, $\overleftrightarrow{OA}\perp l$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{PA}\perp l$

(2) $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$, $\overleftrightarrow{PA}\perp l$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{OA}\perp l$

(3) $\overleftrightarrow{PA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{OA}$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$



§11. 정사영

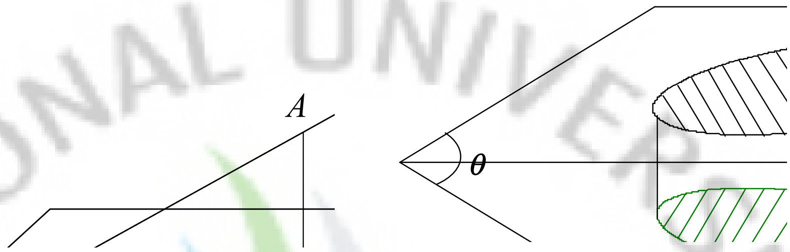
▣ 정사영의 정의 ▣

평면 α 밖의 한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 P' 이라 할 때, P' 을 P 의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 또한 도형 F 에 속하는 모든 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어지는 도형 F' 을 F 의 α 위로의 정사영이라 한다.

☞ 공간도형에서 최단거리를 구하는 문제인 경우 전개도를 생각하여 해결하기도 한다. 따라서, 정사영뿐만이 아니라 전개도를 이용하여 문제를 해결하는 방법도 익혀둘 필요성이 있다.

▣ 정사영의 정리 ▣

1. 선분 $\overline{AB}$ 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $\overline{A'B'}$ 라 하고, 선분 $\overline{AB}$ 와 평면 α 가 이루는 각을 θ 라 하면, $\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$ ⋯ ①
2. 넓이가 S 인 다각형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S' 이고, 이 다각형과 평면 α 가 이루는 예각을 θ 라 할 때, $S' = S\cos\theta$ ⋯ ②



전문교과 학습내용

(계속) 대칭변환은 도형의 성질을 밝히는데 유용하다. 다음의 예제를 보자.

[예제 1]

삼각형 ABC 가 $\angle A = 2\angle B$ 를 만족한다. $\angle C$ 의 이등분선과 선분 AB 와의 교점을 D 라 할 때, $\overline{BC} \equiv \overline{AC} + \overline{AD}$ 가 성립함을 보여라.

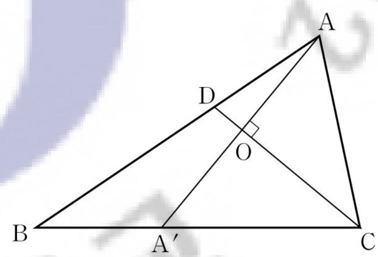
| 증명 |

선분 CD 에 관한 점 A 의 대칭점을 A′ 이라 하고,

선분 AA′ 과 CD 의 교점을 O 라 하자.

$\triangle AOC \equiv \triangle A'OC$ 이므로 $\angle ACO = \angle A'CO$ 이다.

이때, 선분 CD 는 $\angle C$ 의 이등분선이므로 점 A′ 이 선분 BC 위에 있음을 알 수 있다.



또, $\triangle ADC \equiv \triangle A'DC$ 이므로 $\overline{AD} \equiv \overline{A'D}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C}$, $\angle A \equiv DA'C$ 이다.

한편, $2\angle B = \angle A \equiv \angle DA'C \equiv \angle B + \angle BDA'$ 이므로 $\angle B \equiv \angle BDA'$ 이고, 따라서 $\triangle BA'D$ 가 이등변삼각형이다.

이상으로부터 $\overline{BC} \equiv \overline{AC} + \overline{AD}$ 가 성립함을 알 수 있다. >> 증명끝

[문제 1]

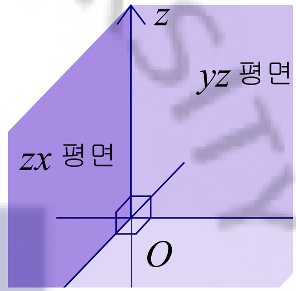
사각형 ABCD 에서 선분 AB 와 CD 가 평행이고 $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{AD}$ 이면 $\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = 4\overline{AB}^2$ 이 성립함을 보여라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	6
학습목표	1. 직교좌표계를 알고, 좌표공간을 이해한다. 2. 평면도형에서의 회전변환을 이해한다.				

§1. 직교 좌표계

▣ 직교 좌표계 ▣

직선 위에서 점은 하나의 실수로 나타내어지고, 평면 위에서 점은 두 실수의 순서쌍인 평면 좌표로 나타낼 수 있다. 이를 확장하여 공간에서의 좌표를 정의하자. 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 기준 축으로 도입하고, 이들 세수직선을 각각 x축, y축, z축이라 하고, 이들을 통틀어 직교좌표계 또는 좌표축이라 하고, 점 O를 원점이라 한다. 또, x축과 y축, y축과 z축, z축과 x축으로 정해지는 평면을 각각 xy평면, yz평면, zx평면이라 하며, 이들을 통틀어 좌표평면이라 한다.

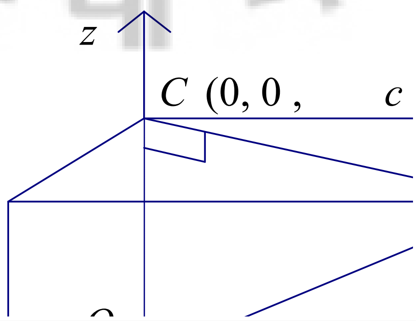


☞ 직선 위의 점은 수직선 위의 실수 x로 나타내고, 평면 위의 점은 좌표평면의 실수의 순서쌍 (x, y)로 나타내며 공간상의 점은 좌표공간의 실수의 순서쌍 (x, y, z)로 나타낸다.

§2. 좌표 공간과 공간 좌표

▣ 좌표 공간과 공간 좌표 ▣

좌표축이 정해진 공간을 좌표공간이라 하고, 좌표공간상의 한 점 P에서 각 좌표축에 내린 수선의 발의 좌표를 각각 a, b, c라 할 때, (a, b, c)를 점 P의 공간 좌표라 하고, $P(a, b, c)$로 나타낸다. 이 때, a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라 부른다. 특히 원점 O의 좌표는 $O(0, 0, 0)$이다.



4-2. 평면도형에서의 회전변환

평면 위의 한 점 O 를 고정한 후 임의의 점 X 에 대하여 X' 을 선분 OX 와 OX' 이 서로 합동이고 $\angle XOX'$ 이 일정한 각 α 를 이루도록 택한다. 이와 같이, X 를 X' 으로 보내는 변환을 **회전이동**이라 부르고, O 를 회전의 중심, α를 회전각이라 부른다. 특히, $\alpha = 180°$ 인 경우 이 회전이동을 **점대칭**이라 부르고, 회전중심 O 를 **대칭중심** 이라 부른다.

[문제 2]
회전변환이 합동변환임을 보여라.

[예제 2]
$\triangle ABC$ 에서 각 변을 한 변으로 하는 세 정삼각형 BPC, CQA, ARB 를 $\triangle ABC$ 의 바깥쪽에 그린다. 이때, $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$ 임을 보여라.

| 증명 |
두 선분 AP 와 BQ 의 교점을 F 라 하고 F 를 중심으로 하는 $60°$ 회전이동을 생각하면, $\triangle ABQ$ 와 $\triangle ARC$ 가 서로 합동임을 알 수 있다. >> 증명끝

[문제 3]
평행사변형의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형을 그리면, 이들의 중심을 연결한 사각형은 평행사변형임을 보여라.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	7
학습목표	1. 분점과 두 점 사이의 거리를 구하고, 구의 방정식을 안다. 1. 평면도형에서의 닮음변환을 이해한다.				

§3. 선분의 내분점과 외분점

▣ 선분의 내분점과 외분점 ▣

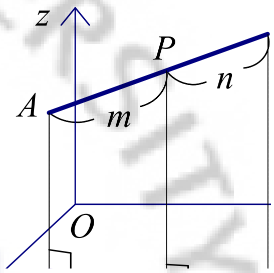
두 점 $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ 을 이은 선분을

1. $m:n\ (m>0, n>0)$로 내분한 점의 좌표

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

2. $m:n\ (m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분한 점의 좌표

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$



공간상의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분을 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y, z)를 구하여 보자.

세 점 A, B, P의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', P'이라 하면, 그 좌표는 각각 $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), (x, y, 0)$ 이고,

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=m:n$ 이다.

따라서 xy 평면 위에서 선분 $A'B'$ 의 내분점의 좌표를 생각하면

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ 이다.

마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz 평면(또는 zx 평면) 위로의 정사영과

좌표평면에서의 선분의 내분점의 좌표를 구하면 $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$ 임을 알 수 있다.

따라서 구하려는 P의 좌표는

$$(x, y, z)=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \blacksquare$$

§4. 두 점 사이의 거리

■ 두 점 사이의 거리 ■

[1] 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$

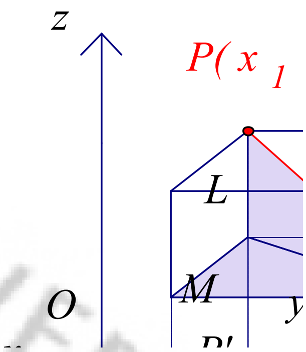
사이의 거리는

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

[2] 원점 $O(0, 0, 0)$ 에서

점 $P(x_1, y_1, z_1)$ 까지 거리는

$$\overline{OP} = \sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$$



§5. 구의 방정식

■ 구의 방정식 ■

[1] 정점 $C(a, b, c)$ 에서 일정(r) 한 거리에 있는

동점 $P(x, y, z)$ 의 자취 ⇒

중심 $C(a, b, c)$ 이고, 반지름 r 인 구의 방정식

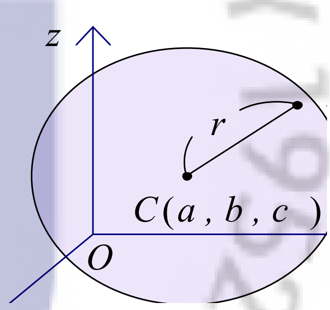
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

[2] 중심 $O(0, 0, 0)$ 이고, 반지름 r 인 구의 방정식

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

[3] 구의 방정식의 일반형은

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

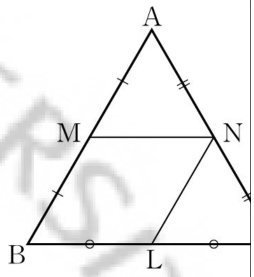


☞ 공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취(또는 집합)를 구 또는 구면이라 하고 이 정점을 **구의 중심**, 일정한 거리를 **구의 반지름의 길이**라 한다.

전문교과 학습내용
4-3. 평면도형에서의 닮음변환 k 를 양의 실수라 하고 평면 위의 임의의 선분을 길이가 k 배인 선분으로 옮기고, 또한 한 점에서 만나는 임의의 두 선분이 이루는 각을 보존하는 변환을 **닮음변환**이라 부른다. 이때, 닮음변환에 의하여 옮겨질 수 있는 도형들을 서로 닮은꼴이라 하고, 닮음변환에서의 상수 k 를 두 도형의 닮음비라 부른다. 두 도형이 서로 닮은꼴일 때, ‘$\sim$’으로 표시한다.

[삼각형의 중점연결 정리]
삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변에 평행이다. 역으로, 한 변의 중점을 지나고 이웃하는 변에 평행인 직선은 다른 변을 이등분한다.

| 증명 |
아래 그림과 같이 삼각형 ABC 에서 선분 AB , AC 의 중점을 각각 M , N 이라 하면, $\overline{AM} : \overline{AB} = \overline{AN} : \overline{AC} = 1 : 2$ 이고 $\angle A$ 는 공통이므로 $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ 은 닮은 삼각형이다. 따라서 대응하는 각의 크기가 모두 같으므로 $\angle AMN = \angle ABC$.
그러므로 두 변 MN , BC 는 서로 평행하다.



역으로, 변 AB 의 중점 M 을 지나 변 BC 에 평행한 직선과 변 AC 와의 교점을 N 이라 하고, 또한 점 N 을 지나 변 AB 에 평행한 직선과 변 BC 와의 교점을 L 이라 하자.
사각형 MBLN 이 평행사변형이므로
$\overline{AM} \equiv \overline{MB} \equiv \overline{NL}$ 이므로 ASA 합동에 의하여 $\triangle AMN \equiv \triangle NLC$ 이다.
그러므로 $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$ 이고 점 N 은 변 AC 의 중점이다. >> 증명끝

[문제 4]
서로 평행인 세 직선 l_1, l_2, l_3 이 있다. 이들과 평행이 아닌 두 직선 m, n 을 생각하고 이들과 세 직선과의 교점을 각각 A , B , C 와 D , E , F 라 할 때,
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ 가 성립함을 보여라.

[문제 5]
평면 위의 한 점 C 에서 교차하는 두 직선 l 과 m 이 있다. 직선 l 과 m 위에서 각각 C 가 아닌 두 점 A , D 와 B , E 를 택할 때 선분 AB 와 선분 DE 가 평행하기 위한 필요충분조건은 $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$ 이다.

(수학)과 교수·학습 과정안					
학년	2	단원	기하학의 세계	차시	8
학습목표	1. 평면도형에서의 닮음변환을 이해한다.				

전문교과 학습내용

(계속)

공간에서 한 직선 위에 있지 않는 세 점은 항상 하나의 평면을 결정하므로,

이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 항상 한 평면 위에 놓이게 된다.

또한, 다각형은 항상 몇 개의 삼각형으로 나눌 수 있으므로 삼각형은 평면도형 중 가장 기본이 되는 것이다.

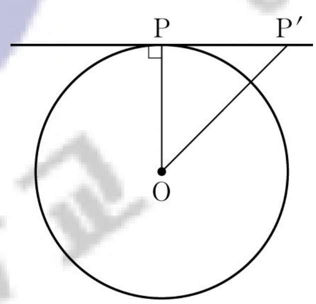
삼각형과 같이 중요한 평면도형인 원에 대하여 기본적인 개념을 알아보자.

직선 l 이 원 O 와 한 점에서 만날 때, 직선 l 을 원 O 의 접선이라 하고 접하는 점을 **접점**이라 한다.

[원의 접선]

원의 접선은 원의 중심과 접점을 연결한 선분에 수직이다. 또한, 역도 성립한다.

| 증명 |



점 P 에서의 접선과 OP 가 수직이 아니라고 가정하면, P 는 O 에서 접선에 내린 수선의 발이 아닌 점이다.

이때, 이 수선에 대한 P 의 대칭점 P′ 은 P 와는 다른 점이고, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ 이다.

그러므로 P′ 은 원 위의 점이 되고, 또한 동시에 직선 OP 위의 점이므로 접선의 정의에 모순이다.

역으로, 점 P 를 지나고 OP 에 수직인 직선 l 이 원과 P 가 아닌 다른 점P′에서 만난다고 하자. 이때, 원의 정의에 의하여 $\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$ 이므로 P = P′ 이다.

>> 증명끝

위의 정리로부터 주어진 원주 위의 점에서의 접선을 항상 그을 수 있고,
또 그 점에서의 접선은 유일함을 알 수 있다.

원의 접선을 이용하여 다음과 같이 다각형과 원이 접한다는 개념을 정의할 수 있다.

두 원이 한 점에서 만날 때 이 원들은 서로 **접한다**고 부른다. 또, 다각형의 각 변이 원의 접선일 때 이 다각형과 원은 서로 접한다고 부른다.
원과 다각형은 평면을 두 부분, **내부**와 **외부**로 구분한다.
원의 이러한 기본적인 성질에 의하여 원에 접하는 다각형은 항상 원의 내부에 놓이거나 또는 원을 포함하고 있다.
다각형이 원을 포함하고 있을 때 우리는 그 원을 다각형의 내접원이라 부르고, 원이 다각형을 포함하고 있을 때 원을 다각형의 외접원이라 부른다.

다음 정리들을 앞으로 우리가 자주 사용할 것이다.
⑴ 한 원에서 크기가 같은 두 중심각에 대한 현의 길이는 같다. (역도 성립)

⑵ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분한다. (역도 성립)

⑶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

⑷ 지름을 한 변으로 하는 내접삼각형은 항상 직각삼각형이다.

Ⅰ. 단원명

행렬과 행렬식

Ⅱ. 단원의 개관

1. 단원의 학습목표

가. 역행렬과 가우스 소거법을 이해하고 이를 활용한 연립일차방정식의 해를 구할 수 있다.

나. 행렬식을 이용한 크라머법칙을 이해하고 이를 활용하여 연립방정식의 해를 구할 수 있다.

다. 고유값과 고유벡터의 뜻을 이해하고 이를 활용하여 행렬을 대각화할 수 있다.

라. 일차변환의 뜻을 이해하고 이를 활용한 여러 가지 도형의 변환 문제를 해결할 수 있다.

2. 단원의 구성

가. 역행렬, 가우스 소거법　　나. 행렬식, 크라머의 법칙

다. 고유값, 고유벡터　　라. 일차변환

Ⅲ. 단원 지도 계획

1. 연계 요소

보통 교과		전문 교과
행렬의 뜻, 행렬의 성질, 연산, 역행렬, 연립방정식의 풀이	➡	역행렬, 가우스 소거법, 행렬식, 크라머의 법칙, 고유값, 고유벡터, 일차변환

2. 연계 단원 지도 계획

중단원	소단원	학습 내용	차시
행렬과 행렬식	역행렬, 가우스 소거법	가우스 소거법	1/8
	역행렬, 가우스 소거법	기본행변환을 알고 이를 활용한 역행렬 구하기	2/8
	행렬식과 크라머의 법칙	크라머의 법칙의 이해	3/8
	역행렬, 가우스 소거법	크라머의 법칙을 활용한 연립방정식 해 구하기	4/8
	고유값과 고유벡터	고유값과 고유벡터의 정의와 대각화	5/8
	고유값과 고유벡터	고유값과 고유벡터 구하고, 행렬을 대각화하기	6/8
	일차변환	일차변환의 정의와 이해	7/8
	일차변환	도형의 일차변환	8/8

(수학 I)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	행렬	차시	1
학습목표	◦ 가우스 소거법을 이해한다.				

■ 역행렬

정사각행렬 A에 대하여 $AX=XA=E$(단, E는 단위행렬)를 만족하는 행렬 X가 존재할 때, 이 행렬 X를 A의 **역행렬**이라 하고, A^{-1}로 나타낸다. 즉,

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E$$

▣ 역행렬 ▣

이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

i) $ad-bc\neq 0$일 때 A^{-1}가 존재하고, 역행렬은 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ii) $ad-bc=0$일 때 A^{-1}는 존재하지 않는다.

■ 역행렬의 성질

▣ 역행렬의 성질 ▣

i) $(A^{-1})^{-1}=A$

ii) $E^{-1}=E$

iii) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

iv) $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$ (n은 양의 정수)

v) $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$ ($k\neq 0$ 인 실수)

☞ 역행렬의 기타 주요 성질

i) $AB=E$ 이면 $B=A^{-1}$, $A=B^{-1}$

ii) $A=A^{-1}$ 이면 $A^{2}=E$

iii) $AX=B$ 이면 $X=A^{-1}B$, $YA=B$ 이면 $Y=BA^{-1}$

iv) $A=PBP^{-1}$ 일 때 $A^{n}=(PBP^{-1})^{n}=PB^{n}P^{-1}$ 이다.

전문교과 학습내용
행렬을 이용한 풀이법은 미지수가 2개인 경우뿐만 아니라, 미지수의 개수가 n개인 경우에도 적용할 수 있는 방법이며, 이 방법을 이용하면 미지수의 개수에 관계없이

연립일차방정식의 일반적인 해법과 법칙을 구할 수 있다.

여기서는 미지수가 3개인 경우의 예를 통하여 풀이법을 살펴보고자 한다.

일반적인 경우도 같은 방법으로 하면 된다.

연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=5 & \cdots\cdots ① \\ 4x-6y=-2 & \cdots\cdots ② \\ -2x=7y+2z=9 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ 을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

②식에서 ①식을 이용하여 x 항을 소거하려면, ②+(−2)×① 하면 된다.

그 결과를 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

이것은 각 행렬의 3행에 1행을 더하여 얻은 행렬과 같다.

다음은 ③식에서 x 를 소거하려면, ③+①을 하면 되는데, 이것을 행렬로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

이것은 각 행렬의 3행에 1행을 더하여 얻은 행렬과 같다.

여기서 세 번째 식에서 y 항을 소거하려면, 2행을 3행에 더하면 된다.

이것을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하고자 하는 해는 세 번째 행에서 $z=2$ 이다.

이것을 두 번째 행에서 얻는 방정식 $-8y-2z=-12$ 에 대입하여 y 를 구하면

$y=1$ 이다. 마지막으로 $y=1$ 과 $z=2$ 를 $2x+y+z=5$ 에 대입하면 $x=1$ 이다.

미지수를 소거하여 미지수의 개수가 적은 연립방정식으로 바꿀 때 사용하는 기본적인 연산을 소개하면 다음과 같다.

① 두 방정식의 위치를 서로 교환한다.

② 방정식의 양변에 0이 아닌 상수를 곱한다.

③ 한 방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 다른 방정식에 더한다.

이와 같이 세 가지 연산을 적당히 사용하여 풀고자 하는 연립방정식에서 미지수를 소거하여 간단한 모양으로 연립방정식을 변형시켜서 연립방정식을 푸는 방법을

가우스 소거법이라고 한다.

(수학Ⅰ)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	행렬	차시	2
학습목표	◦ 기본행변환을 이해하고 이를 이용하여 역행렬을 구할 수 있다.				

전문교과 학습내용

연립방정식에서 미지수를 소거하는 과정을 행렬로 나타내어 보자.

계수와 우변의 상수로 만든 3×4행렬의 왼쪽에 행렬 $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$을 곱하면, 즉

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\0&8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\4&-6&0&:&-2\\-2&7&2&:&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\0&-8&-2&:&-12\\-2&7&2&:&9\end{pmatrix}$$

위 식의 우변 행렬의 2행은 ②$+(-2)\times$①을 하여 얻은 방정식의 계수와 우변의 상수가 같음을 알 수 있다. 또, 위의 우변의 행렬에 행렬 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$을 곱하면

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\0&-8&-2&:&-12\\-2&7&2&:&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\0&-8&-2&:&-12\\0&8&3&:&14\end{pmatrix}$$

위 식의 우변의 행렬의 3행은 ③+①을 하여 얻은 방정식의 계수와 우변의 상수와 같음을 알 수 있다. 다음은 y를 소거하기 위하여 변형된 ③의 식에서 ②의 식을 더하는 것을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\0&-8&-2&:&-12\\-2&7&2&:&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&:&5\\0&-8&-2&:&-12\\0&0&1&:&2\end{pmatrix}$$

일반적으로, i 번째 방정식에 α를 곱하여 j 번째 방정식에 더하는 것은 단위행렬에서 $(j\,,\,i)$ 원소만 α로 바꾸어서 만든 행렬, 즉

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}1\;0\cdots\;0\;\cdots0\cdots0\\ \cdots\\ 0\;0\cdots\;1\;\cdots0\cdots0\\ \cdots\\ 0\;0\cdots\;\alpha\;\cdots1\cdots0\\ \cdots\\ 0\;0\cdots\;0\;\cdots0\cdots1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i\text{행}\\ \\ \leftarrow j\text{행}\\ \\ \\ \end{array}$$

을 계수와 상수로 만든 행렬의 왼쪽에 곱하는 것과 같다.

또, i번째 방정식과 j번째 방정식을 서로 교환하는 것은 단위행렬에서 i행과 j행을 서로 교환하여 만든 행렬

$$P_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1\,0\cdots\;0\;\cdots 0\cdots 0 \\ \cdots \\ 0\,0\cdots\;0\;\cdots 1\cdots 0 \\ \cdots \\ 0\,0\cdots\;1\;\cdots 0\cdots 0 \\ \cdots \\ 0\,0\cdots\;0\;\cdots 0\cdots 1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{행} \\ \\ \leftarrow j\text{행} \\ \\ \end{array}$$

을 계수와 상수로 만든 행렬의 왼쪽에 곱하는 것과 같으며 i번째 방정식을 $\alpha(\alpha\neq 0)$배 하는 것은 단위행렬에서 i행에서 1대신 α를 바꾸어 놓아 만든 행렬

$$M_i=\begin{pmatrix} 1\,0\cdots\;0\;\cdots 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0\,0\cdots\;\alpha\;\cdots 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0\,0\cdots\;0\;\cdots 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{행} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

을 계수와 상수로 만든 행렬의 왼쪽에 곱하는 것과 같다.

따라서 미지수를 소거할 때 사용하는 연산을 행렬로 바꾸면, 계수와 상수로써 만든 $m\times(n+1)$ 행렬의 왼쪽에 위에 소개한 행렬 E_{ij}, P_{ij}, M_{ij}를 기본행렬이라고 부른다.

이와 같은 기본행렬을 곱하는 경우는 다음과 같다.

① ' 한 행에 0이 아닌 상수를 곱한다.

② ' 한 행에 어떤 수를 곱한 것을 다른 행에 더한다.

③ ' 두 행을 바꾸어 놓는다.

이것을 행렬의 **기본행 변환**이라고 한다.

n차 정사각행렬 A에 대하여 $AX=XA=E$인 정사각행렬 X가 존재할 때,

행렬 A를 **가역**이라고 한다.

행렬의 기본 변형, 즉 기본 행렬을 주어진 행렬의 왼쪽에 적당히 곱하여 단위행렬로 변환할 수 있는 행렬은 모두 가역행렬이며, 주어진 행렬의 왼쪽에 곱해진 모든 기본행렬들의 곱이 그 행렬의 역행렬이다.

[예제]

다음 행렬을 행렬이 기본 변형만을 사용하여 단위행렬로 변환시키고, 또 역행렬을 구하여라.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

[풀이]

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&0\\-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

각 단계에서 사용한 기본 변형은 차례대로 92행)+(-2)×(1행), (3행)+(1행), (2행)× $\frac{1}{2}$, (3행)+(-1)×(2행), (3행)× $\frac{1}{2}$, (1행)+(-2)×(3행), (1행)+(2행)이며, 이에 대응되는 기본 행렬은 같은 순서로

$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$이다.

따라서 구하고자 하는 역행렬은 차례대로 왼쪽으로 곱하여

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&\frac{1}{2}&0\\1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

[문제]

다음 행렬을 행렬의 기본 변형만을 사용하여 단위행렬로 변환시키고, 또 역행렬을 구하여라.

1) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&0&6\\-4&2&0\end{pmatrix}$

(수학Ⅰ)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	행렬	차시	2
학습목표	크라머의 법칙을 활용하여 연립방정식 해를 구할 수 있다.				

■ 일반적으로, 연립일차방정식

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ …… ①를 행렬을 이용하여 나타내어 보자.

행렬이 같을 조건에 의하여 연립일차방정식 ①은 $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ …… ② 로 나타낼 수 있다. 그런데 ②의 좌변은

$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ……③와 같이 쓸 수 있으므로, 연립일차방정식 ①은

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ …… ④와 같이 행렬을 써서 나타낼 수 있다.

위의 ③에서 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 라고 하면 ③은 $AX=B$가 된다.

따라서, 연립일차방정식 ①을 푼다는 것은 ④를 만족시키는 X를 구하는 것과 같다.

여기서, $ad-bc\neq 0$ 이면 A는 역행렬 A^{-1}를 가지므로 $X=A^{-1}B$를 얻는다.

[예제 1] 다음 연립일차방정식을 역행렬을 이용하여 풀어라.

$\begin{cases} 2x-1y=8 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

[풀이] 주어진 연립일차방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 라고 놓으면, $D=2\times 2-(-1)\times 3=7\neq 0$ 이므로

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, 따라서 $x=3$, $y=-2$

다음에는 $ad-bc=0$ 인 경우에 <보기1>, <보기2>를 생각하자.

<보기1> 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ 에서 $x-2y=3$ 의 양변에 2 배 하면 방정식 $2x-4y=6$ 이 되므로, 이 연립방정식은 한 개의 방정식 $x-2y=3$ 과 동치이다.

따라서 주어진 연립방정식은 무수히 많은 해를 가진다.

<보기2> 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=-3 \cdots\cdots ① \\ 2x-4y=-6 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 에서 ①을 2 배하면 $2x-4y=-6$ 이 되므로, 주어진 연립 방정식 ①과 ②를 동시에 만족시키는 해는 없다.

위의 두 보기의 연립방정식을 행렬을 써서 $AX=B$ 인 꼴로 나타내었을 때,

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ 이다. 여기서, $1\times(-4)-(-2)\times 2=0$ 이므로 A 는 역행렬을 가지지 않는다.

일반적으로, 행렬 A 가 역행렬을 가지지 않을 때는 연립방정식 $AX=B$ 는 해를 무수히 많이 가지는 경우와 하나도 없는 경우가 있다.

전문교과 학습내용

■ **행렬식을 이용한 크라머의 법칙**

이차 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $ad-bc$를 행렬 A의 행렬식이라 하고, 이 수를 $\det(A)$ 또는 $|A|$로 나타낸다.

<보기>

1) 기본행렬 $E_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 행렬식은 모두 1이고, 1행과 2행을 서로 교환하여 만든 기본행렬 $P_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$의 행렬식은 -1이다.

$$\det(E_{12})=1 \ , \ \det(E_{21})=1 \ , \ \det(P_{12})=-1$$

2) $\det\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}=\alpha\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}=\alpha\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3) $\det\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}$

4) 행을 서로 교환하여 만든 행렬의 행렬식은 절대값은 같고 부호가 다른 수이다.

$\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

따라서, 1행과 2행이 같은 행렬의 행렬식은 0이다. 즉,

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$이므로 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}=0$

[문제 1]

이차 행렬에 대하여 어느 한 행에 상수를 곱하여 다른 행에 더하여도 행렬식은 변하지 않음을 증명하여라.

<3차 행렬의 행렬식 정의>

3차 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$에 대하여 A의 행렬식

$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 그리고 n차 행렬

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 에 대하여 i행과 j열을 제외하고 만든 $(n-1)$차 행렬의 행렬식을 A_{ij}이라 하자.

n차 행렬 A의 행렬식은 $(n-1)$차 행렬의 행렬식 A_{1j}를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$|A|=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+\ldots+(-1)^{i+1}a_{1i}A_{1i}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$

[예제 1]

다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

[풀이]

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=-16$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

[문제 2]다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

[성질 1] 어느 한 행이 상수 α배로 되어 있으면, 상수 α를 행렬식 밖으로 빼낼 수 있다.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[증명]

3차 행렬인 경우만 증명하자.

일반적인 경우의 행렬식은 귀납법으로 증명하면 된다.

3차 행렬인 경우도 1행이 상수배인 경우만 증명하자.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \alpha a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) = \alpha\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[성질 2] 어느 한 행이 두 행벡터의 합의 모양으로 되어 있는 행렬의 행렬식은 두 행렬로 나누어서 만든 행렬식의 합과 같다. 즉,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{in} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[증명]

3차 행렬의 경우 2행이 두 행벡터의 합으로 되어 있는 경우만 증명하자. 일반적인 경우의 증명은 귀납법으로 증명하면 된다.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}+b_{21} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}+a_{11}\begin{vmatrix}b_{22} & b_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

[성질 3] 어느 두 행을 교환하여 만든 행렬의 행렬식은 절댓값은 같고 부호만 서로 다르다. 즉,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn}\\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn}\\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

[증명]

3차 행렬에서 1행과 2행을 교환한 행렬의 행렬식만 증명하자.

나머지 일반적인 경우는 귀납법으로 증명할 수 있다.

$$\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})-a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$

$$=-a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})-a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=-\left(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\right)=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

n차 행렬에 대하여 위의 [성질 1], [성질 2], [성질 3]을 사용하여 어느 한 행에 상수를 곱하여 다른 행에 더하여도 행렬식은 변하지 않으며, 두 행이 같거나 한 행이 다른 행의 상수배로 되어 있는 행렬의 행렬식은 0임을 증명할 수 있다.

[참고]

행렬의 행의 기본 변형에 대하여 성립하는 행렬식의 모든 성질은 열에 관하여도 그대로 성립한다. 특히, 행렬식도 열에 관하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$|A|=a_{11}A_{11}-a_{21}A_{21}+\dots+(-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1}+\dots+(-1)^{n+1}a_{n1}A_{n1}$$

[문제 3]

다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

두 n차 행렬 A, B의 곱 AB의 행렬식과 A, B의 행렬식과의 관계를 알아보자.

[성질 4] $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

[증명]

2차 행렬인 경우만 증명하여 보자.

$$\det\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= 0 + b_{11}b_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + b_{12}b_{21}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + 0$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

특히, 행렬 A가 가역인 행렬이면, 역행렬이 존재하여 $AA^{-1} = I$이다. 따라서 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 이다.

[문제 4] 일반적으로 $|A+B| \neq |A| + |B|$임을 예를 들어 보여라.

[문제 5] 3차 행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) $a_{11}A_{21} - a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$ (2) $a_{11}A_{31} - a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$

문제 5에서와 같이 행렬식의 정의와 행렬식의 성질을 이용하면 다음 식을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

따라서 $|A| \neq 0$이면 행렬 A는 역행렬을 가지며, 역행렬은

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$ 이다.

[예제 2]

3차 행렬 $A=(a_{ij})$에서 $b_1A_{11}-b_2A_{21}+b_3A_{31}$은 행렬 A의 1열을 b_1, b_2, b_3으로 대치하여 만든 행렬의 행렬식과 같음을 보여라.

[증명]

$$b_1A_{11}-b_2A_{21}+b_3A_{31}=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

마지막 등호는 행렬을 1열에 관하여 표현할 수 있기 때문에 성립한다.

[문제 6]

3차 행렬 $A=(a_{ij})$에서 $-b_1A_{12}+b_2A_{22}-b_3A_{32}$와 $b_1A_{13}-b_2A_{23}+b_3A_{33}$은 각각 행렬 A의 2열과 3열을 b_1, b_2, b_3으로 대치하여 만든 행렬의 행렬식과 같음을 보여라.

역행렬을 이용하여 다음의 방정식을 풀어 보자.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 4x+9y+6z=7 \\ -2x+7z=12 \end{cases}$$

계수 행렬을 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$이라 할 때, $|A|=1$이므로 A는 역행렬을 가진다.

또, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$라 할 때, 이 연립일차방정식은 $AX=B$로 나타낼 수 있다.

계수행렬 A가 역행렬을 가지므로, $X=A^{-1}B$이다. 그런데

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$ 이므로,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}-7A_{21}+12A_{31} \\ -A_{12}+7A_{22}-12A_{32} \\ A_{13}-7A_{23}+12A_{33} \end{pmatrix}$$ 이다.

$x=A_{11}-7A_{21}+12A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 6 \\ 12 & 0 & 7 \end{vmatrix}=1$ 이고, 이 행렬식은 계수행렬 A의 1열을 B로 바꾸어 만든 행렬의 행렬식이다.

또, $y=-A_{12}+7A_{22}-12A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 12 & 7 \end{vmatrix}=-1$ 이고, 이 행렬식도 계수행렬 A의 2열을 B로 바꾸어 만든 행렬의 행렬식이다.

$z=A_{13}-7A_{23}+12A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \\ -2 & 0 & 12 \end{vmatrix}=2$ 이고, 이 행렬식도 계수행렬 A의 3열을 B로 바꾸어 만든 행렬의 행렬식이다.

위의 사실을 종합하여 정리하면 다음과 같이 말할 수 있다. 즉, 구하는 해는 순서대로 계수행렬의 열을 하나씩 B로 바꾸어 만든 행렬의 행렬식을 계수행렬의 행렬식으로 나눈 값과 같다.

이것을 **크라머의 법칙**이라 하고, 수식으로 나타내면 다음과 같다.

계수로 된 행렬, 미지수로 된 행렬 그리고 상수로 된 행렬을 각각

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ 이라 하고

$|A|\neq 0$ 이라 할 때, n개의 미지수에 관한 연립일차방정식 $AX=B$ 의 해는

$$x_i=\frac{(A \text{ 의 } i \text{ 열을 } B \text{ 로 바꾸어 만든 행렬의 행렬식})}{|A|}$$ 이다.

[문제 7] 다음 연립방정식을 크라머의 법칙을 이용하여 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x+2y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x+y-z=-5 \\ -2x+2y+z=4 \\ x-2y+2z=-8 \end{cases}$

▣ 확인문제

1. 다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 행렬 A에서 $i \neq j$일 때 A의 i행과 j행이 같으면 $|A|=0$임을 보여라.

3. 크라머의 법칙을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+2y+z=6 \\ x+2y+3z=9 \end{cases}$$

(수학Ⅰ)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	행렬	차시	3
학습목표	고유값과 고유벡터 구하고, 행렬을 대각화할 수 있다.				

연립방정식 $\begin{cases} kx+2y=0 \\ x-y=kx \end{cases}$ 가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지도록 k 의 값을 정하여라.

[풀이]

주어진 연립방정식은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{cases} kx+2y=0 \\ (1-k)x-y=0 \end{cases}$$

이 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix} k & 2 \\ 1-k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… ①

(i) $D=-k-2(1-k)=k-2\neq 0$ 이면 $A=\begin{pmatrix} k & 2 \\ 1-k & -1 \end{pmatrix}$ 은 역행렬 A^{-1} 를 가진다.

A^{-1} 를 ①의 양변의 왼쪽에 곱하면 $A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

따라서, $D\neq 0$ 이면 주어진 연립방정식의 해는 $x=0,\ y=0$ 뿐이다.

(ii) $D=k-2=0$ 즉, $k=2$ 일 때는 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 이 되고,

이 연립방정식은 무수히 많은 해를 가진다. $k=2$

전문교과 학습내용
■ 고유값과 고유벡터 <고유값과 고유벡터 정의> n 차 정사각행렬 A , $n\times 1$ 행렬 X 와 실수 λ 에 대하여, 방정식 $AX=\lambda X$ 를 만족하는 O 이 아닌 해 X 와 λ 가 존재할 때, 이러한 λ 를 행렬 A 의 **고유값(eigenvalue)**이라 하고, O 이 아닌 $n\times 1$ 행렬 X 를 가로로 쓴 벡터를 고유값 λ 에 대한 **고유벡터(eigenvector)**라고 한다. 고유값과 고유벡터를 구하는 방법을 알아보자. 방정식 $AX=\lambda X$ 의 해와 $(A-\lambda I)X=O$ 의 해는 같다. $(A-\lambda I)X=O$ 은 실수 λ 에 대하여 $A-\lambda I$ 가 역행렬을 가지지 않을 때, $\det(A-\lambda I)=0$ 이다. 따라서, 고유값을 구하는 문제는 방정식 $\det(A-\lambda I)=0$ 의 근이 되는 실수 λ 를 구하는 문제로 귀착된다.

<특성다항식의 정의>

λ에 관한 n차 다항식 $\det(A-\lambda I)$를 행렬 A의 **특성다항식**이라고 한다.

※ 고유값은 특성다항식의 실근이다. 특성다항식이 허근을 가지는 경우에 그 허근은 고유값이 될 수 없다. 왜냐하면, 행렬의 각 원소도 실수이고 벡터도 실수이므로 λ가 허수이면 $AX=\lambda X$를 만족시키는 X가 존재할 수 없기 때문이다.

따라서 특성다항식의 실수인 근, 즉 실근만이 고유값이 된다.

<보기> $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 2차 행렬의 특성다항식은 $\lambda^2-4\lambda+3$ 이고

물론 특성다항식의 두 근은 $\lambda=1$, $\lambda=3$ 이며 둘 다 고유값이다. $\lambda=1$ 에 대한 고유벡터는 $\overrightarrow{v_1}=(1,-1)$ 이고 $\lambda=3$ 에 대한 고유벡터는 $\overrightarrow{v_2}=(1,1)$ 이다.

또, 두 고유벡터는 서로 수직임을 알 수 있다.

<참고>

행렬과 벡터의 각 원소를 복소수까지 허용하면, 특성다항식의 모든 근은 고유값이 된다.

[예제 1] 다음 두 행렬의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[풀이]

(1) 특성다항식은 λ^2-1 이고 근은 $\lambda=1$, $\lambda=-1$ 이다. 모두 실근이므로 고유값이다.

$\lambda=1$ 에 대한 고유벡터는 $\overrightarrow{v_1}=(1,1)$ 이고, $\lambda=-1$ 에 대한 고유벡터는 $\overrightarrow{v_2}=(1,-1)$ 이다.

(2) 특성다항식은 $(1-\lambda)(\lambda^2+1)$ 이며 근은 $\lambda=1$, $\lambda=\pm i$ 이다.

$\lambda=1$ 에 대한 고유벡터는 $\vec{v}=(0,0,1)$ 이다.

그러나 $\lambda=\pm i$ 인 경우에는 $AX=\pm iX$를 만족시키는 O이 아닌 벡터는 존재하지 않으므로 $\lambda=\pm i$ 는 고유값이 아니다.

[문제 1]

다음 세 행렬의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

대각선을 제외한 모든 자리의 원소가 0인 행렬을 **대각행렬**이라고 한다.
따라서, 대각행렬의 행렬식은 대각선에 있는 원소들의 곱이고, 고유값은 대각선에 있는 원소들이며 고유벡터는 축에 평행인 벡터들이다.

n차 정사각행렬 A의 왼쪽과 오른쪽에 각각 어떤 행렬 P^{-1}과 P를 곱하여 $P^{-1}AP = D$가 대각행렬일 때, 행렬 A를 **대각화**할 수 있다고 한다.

대각행렬 D의 대각선에 있는 원소를 1행 1열의 원소부터 차례로 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 이라 하자.

$$\det(A) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}AP) = \det(D) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

또, $\overrightarrow{e_i}$ 를 i 번째 원소만 1이고 나머지는 모두 0인 n 차원 벡터는 고유벡터이므로 $D\overrightarrow{e_i} = \alpha_i\overrightarrow{e_i}$ 이다.

$P^{-1}AP = D$ 이므로 $\overrightarrow{e_i}$ 를 $n \times 1$행렬로 생각하여 $\overrightarrow{e_i}$ 를 식의 오른쪽에 곱하면 $(P^{-1}AP)\overrightarrow{e_i} = D\overrightarrow{e_i} = \alpha_i\overrightarrow{e_i}$ 이며, 이를 변형하면 $A(P\overrightarrow{e_i}) = \alpha_i(P\overrightarrow{e_i})$ 를 얻게 된다.

여기서 $P\overrightarrow{e_i}$ 는 행렬 P 의 i 열이므로 O 벡터는 될 수 없다.

따라서, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 은 행렬 A 의 고유값이며 대응하는 고유벡터는 $P\overrightarrow{e_1}, P\overrightarrow{e_2}, \cdots, P\overrightarrow{e_n}$ 이다.

[문제 2] $P^{-1}AP$ 가 대각행렬일 때, A 의 고유벡터 $P\overrightarrow{e_1}, P\overrightarrow{e_2}, \cdots, P\overrightarrow{e_n}$ 은 일차독립임을 증명하여라.

이상을 정리하면, n 차 정사각행렬 A 가 대각화가 가능하면, A 는 n 개의 일차독립인 고유벡터를 가진다. 따라서 n개의 일차독립인 고유벡터를 가지는 것은 n차 정사각행렬 A가 대각화 가능할 필요조건이다.
그러면 이 조건이 대각화 가능할 충분조건이기도 함을 증명하여 보자.
즉, n 차 정사각행렬 A 가 n 개의 일차독립인 고유벡터를 가지면, A 는 대각화 가능한 행렬임을 증명하자.

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ 이 일차독립인 A 의 고유벡터라 하고 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$을 대응하는 고유값이라 하자.
즉, $A\overrightarrow{v_i} = \alpha_i\overrightarrow{v_i}$ 라 하자. $\overrightarrow{v_1}$ 을 1열, $\overrightarrow{v_2}$ 를 2열, $\cdots$, $\overrightarrow{v_n}$ 을 n 열로 하여 만든 행렬을 P 라 하자.

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$ 이 일차독립이므로 행렬 P 의 행렬식은 0이 될 수 없으므로,

P 는 역행렬을 가지게 된다.

또, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 을 1행 1열의 자리부터 차례로 대각선의 원소로 가지는 대각행렬을 D 라 하면, $A\vec{v_i} = \alpha_i \vec{v_i}$ 로부터 $AP = PD$ 임을 쉽게 확인할 수 있다.

마지막으로, P의 역행렬이 존재하므로, P^{-1} 를 왼쪽에 곱하여 $P^{-1}AP = D$ 이므로 A 는 대각화 가능한 행렬이다.

[예제 2] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 를 대각화하여라.

[풀이]

행렬 A 의 고유값은 각각 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 이고, $\lambda_1 = 1$ 에 대한 고유벡터는 $\vec{v_1} = (1, -1)$ 이고 $\lambda_2 = 3$ 에 대한 고유벡터는 $\vec{v_2} = (1, 1)$ 이다.

따라서, $\vec{v_1} = (1, -1)$ 을 1열, $\vec{v_2} = (1, 1)$ 을 2열로 하는 행렬을 구하면 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, 이 행렬은 분명히 역행렬을 가지며, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이고

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 이다.

[문제 3] 다음 행렬을 대각화하여라.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 의 특성다항식은 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ 이다. 이 다항식에 λ 대신에 행렬 A 를 대입하고 계수와 상수에는 항등행렬 I가 숨어 있는 것으로 해석하여 식을 만들어 보자.

$f(A) = (A - I)(A - 3I)$ 라 하자.

또, $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$, $A - I = P(D - I)P^{-1}$, $A - 3I = P(D - 3I)P^{-1}$이므로

$f(A) = (A - I)(A - 3I) = P(D - I)P^{-1} \cdot P(D - 3I)P^{-1} = P(D - I)(D - 3I)P^{-1}$

$$= P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

일반적으로, 다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 에서 x 대신에 정사각행렬 A, a_i 대신에 $a_i I$를 대입하여 만든 다음과 같은 행렬을 $f(A)$ 라 하자.

즉, $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$

이 때, 다항식 $f(x)$ 가 행렬 A의 특성다항식이면, $f(A) = O$ 이다.

이것을 **케일리-해밀턴의 공식**이라고 한다.

케일리-해밀턴의 공식을 대각화 가능한 행렬인 경우에만 증명하여 보자.

이 경우의 증명은 본질적으로 앞에서 생각해 본 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$인 경우의 증명과 똑같다.

[증명]

행렬 A가 대각화 가능하므로 $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 인 행렬 P가 존재하고,

λ_i 는 A 의 고유값이다. 그러면 A 의 특성다항식은 D 의 특성다항식과 같고 특성다항식은 $f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\ldots(\lambda_n - x)$ 이다.

따라서 $f(A) = (\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A)\ldots(\lambda_n I - A)$

$= P(\lambda_1 I - D)P^{-1} \cdot P(\lambda_2 I - D)P^{-1} \cdot \ldots \cdot P(\lambda_n I - D)P^{-1}$

$= P(\lambda_1 I - D)(\lambda_2 I - D) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n I - D)P^{-1}$

$$= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 - \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} \lambda_n - \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_n - \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

[예제 3] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, A^n을 구하여라.

[풀이]

행렬 A의 특성다항식은 $f(x) = (x-1)(x-3)$ 이므로 $(A - I)(A - 3I) = O$ 이다.

따라서, $x^n = q(x)(x-1)(x-3) + ax + b$ 라 하면,

$A^n = q(A)(A - I)(A - 3I) + aA + bI$ 에서

$(A-I)(A-3I)=0$ 이므로, $A^n = aA+bI$ 이다.

그런데 나머지정리에 의하여 $\begin{cases} 1 = a+b \\ 3^n = 3a+b \end{cases}$ 이다.

연립방정식을 풀면, $a = \dfrac{3^n-1}{2}$, $b = \dfrac{3-3^n}{2}$ 이다. 즉 $A^n = \dfrac{3^n-1}{2}A + \dfrac{3-3^n}{2}I$ 이다.

[문제 4] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, A^n 을 구하여라.

[문제 5] $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $A^4 - 3A^3 + A - 4I$ 를 구하여라.

▣ 확인문제

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ 을 대각화하여라.

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^n 을 구하여라.

(수학Ⅰ)과 교수·학습 과정안					
학년	1	단원	행렬	차시	4
학습목표	일차변화의 뜻과 도형의 변화를 이해하고, 이를 이용한 문제를 해결할 수 있다.				

■ 일차변환의 정의

> 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를 $P'(x',y')$ 으로 옮기는 변환을 f 라 할 때
>
> $f:(x,y)\to(x',y')$ $P(x,y)\xrightarrow{f}P'(x',y')$ 으로의 변환이
>
> $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 로 표시될 때 변환 f 를 일차변환이라 한다.
>
> (즉, x', y' 이 상수항이 없는 x,y의 일차 동차식)

1 변환 : 좌표 평면상의 각 점을 좌표 평면상의 각 점으로 하나씩 대응시키는 함수

※ 점의 변환 : 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를 그 평면 위 의 점 $P'(x',y')$ 으로 이동시키는 규약을 그 평면 위에서의 점의 변환이라 한다.

♣ 좌표평면 위의 모든 점을 R^2 이라 할 때 평행이동, 대칭이동 등은 R^2 의 점을 R^2 의 점으로 옮기는 대응이다. 이와 같은 대응 또는 함수를 변환이라 한다.

2 일차변환

좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를 $P'(x',y')$ 으로 옮기는 변환을 f 라 할 때

$f:(x,y)\to(x',y')$, $P(x,y)\xrightarrow{f}P'(x',y')$ 으로의 변환이 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 로 표시될 때 변환 f 를 일차변환이라 한다. (즉, x', y' 이 상수항이 없는 x,y의 일차 동차식)

☞ 위의 정리에서 $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (a,b,c,d 는 상수)으로 놓으면

$X'=AX$ 로 나타내어지며

이 때, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 일차변환 f 를 나타내는 행렬, 또는 일차변환 f 의 행렬이라고 하며 간단히 일차변환 A 라고도 한다.

☞ (x',y') 를 (x,y)의 상, (x,y)를 (x',y') 의 원상이라 한다.

♣ 일차변환을 행렬로 생각할 때에는 점의 좌표, 벡터의 성분을 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 와 같이 세로로 쓰면 편리하다.

□ 여러 가지 일차변환의 행렬

1 항등변환
2 닮음변환
3 대칭변환

◆ 여러 가지 일차변환의 행렬

일차변환 $f : X \rightarrow AX$ 에서 즉, 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때

1 항등변환 $f : (x, y) \rightarrow (x, y)$: 임의의 점P에 그 자신을 대응 시키는 변환

이때 f 의 행렬은 $A=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: 단위행렬 즉, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

☞ $\begin{cases} x'=1 \cdot x+0 \cdot y \\ y'=0 \cdot x+1 \cdot y \end{cases}$ 이므로 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 닮음변환 $f : (x, y) \rightarrow (kx, ky)$ $(k \neq 0)$: 원점을 중심으로 하는 k 배의 닮음변환

이때 f 의 행렬은 $A=kE=k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

☞ $\begin{cases} x'=k \cdot x+0 \cdot y \\ y'=0 \cdot x+k \cdot y \end{cases}$ 이므로 $A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(1) $0< k< 1$ 이면 축소변환

(2) $k=1$ 이면 항등변환

(3) $k> 1$ 이면 확대변환

3 대칭변환 : 좌표평면에서 대칭이동에 의한 변환

- 좌표평면 위의 점을 직선 또는 점에 대하여 대칭 이동한 변환

(1) x축에 대한 대칭이동 ⇔ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) y축에 대한 대칭이동 ⇔ $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 원점에 대한 대칭이동 ⇔ $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $y=x$ 에 대한 대칭이동 ⇔ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

전문교과 학습내용

<일차변환>

일차변환의 정의

함수 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 임의의 n 차원 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 와 스칼라 α 에 대하여

(1) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

(2) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$ 를 만족시킬 때, 함수 T를 **일차변환**이라고 한다.

※ 일차변환에 의하여 두 벡터의 합의 함수값은 함수값의 합과 같고 스칼라 곱은 일차변환에 의하여 변하지 않는다. 즉, 일차변환은 덧셈과 스칼라 곱을 변하지 않게 하는 함수이다.

※ 일차변환 T를 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 또는 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$인 경우만 생각하기로 하자. 그리고 행렬과 벡터를 곱할 때에는 2차원 또는 3차원 벡터를 2×1 또는 3×1행렬로 생각하여 벡터를 행렬의 오른쪽에 곱하는 것으로 생각하기로 하자.

<보기>

1) 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 를 $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ 로 보내는 함수를 T라 하면, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$는 일차변환이다.

2) 3차 행렬 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 과 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 에 대하여 $T(X) = AX$ 로 정의하면, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$도 일차변환이다.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$를 임의의 일차변환이라고 하자. 또, 벡터 (x_1, x_2) 를 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 나타내자. T는 일차변환이므로 $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다.

그런데 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 놓으면

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ 이다.

즉, 일차변환 T에 의하여 결정되는 행렬은 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$을 1열, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$을 2열로 하여 만든 행렬이다. 3차원 유클리드 공간에서 정의된 일차변환 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$도 어떤 행렬에 의하여 만들어지는 일차변환으로 나타낼 수 있다.

이때의 행렬은 $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$을 각각 1열, 2열, 3열로 하여 만든 행렬인 것을 위와 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있다.

[예제 1] 2차원 유클리드 공간에서 임의의 벡터를 θ만큼 회전시킨 벡터로 보내는 함수는 일차변환임을 증명하고, 이 일차변환을 나타내는 행렬을 구하여라.

[풀이]

θ만큼 회전시키는 함수를 R_θ 라 하자. 그러면, 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 평행사변형을 만든다고 할 때, 이들을 함수 R_θ에 의하여 θ만큼 회전시킨 두 벡터 $R_\theta(\vec{u})$, $R_\theta(\vec{v})$가 만드는 평행사변형은 처음 평행사변형과 합동이다.

따라서, 처음 평행사변형의 대각선은 R_θ에 의하여 대각선으로 회전된다.

또, 스칼라곱은 회전에는 영향을 미치지 않는다. 즉, 임의의 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$와 스칼라 α에 대하여 $R_\theta(\vec{u}+\vec{v}) = R_\theta(\vec{u}) + R_\theta(\vec{v})$, $R_\theta(\alpha\vec{u}) = \alpha R_\theta(\vec{u})$ 이므로 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 은 일차변환이다.

그런데 x 축의 단위벡터 $(1, 0)$ 을 θ 만큼 회전시킨 벡터의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 이고 y 축의 단위벡터 $(0, 1)$ 을 θ 만큼 회전시킨 벡터의 좌표는 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 이므로, 구하고자 하는 행렬은 $R_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $R_\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ 를 각 1열과 2열로 하는 행렬 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 이다.

[문제 1] 다음 함수가 일차변환인 것을 증명하고, 일차변환을 나타내는 행렬을 구하여라.

(1) 2차원 유클리드 공간에서 각 벡터를 x축에 대칭인 벡터로 보내는 함수

(2) 2차원 유클리드 공간에서 각 벡터를 직선 $y = x$에 대칭인 벡터로 보내는 함

(3) 3차원 유클리드 공간에서 각 벡터를 y축을 회전축으로 하여 θ만큼 회전시킨 벡터로 보내는 함수

행렬 $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$에 의하여 유도되는 일차변환 $T(X) = AX$를 생각하자.

우리는 이미 행렬 A의 고유값은 1과 3이고 이들 고유값에 대한 고유벡터는 각각 $(1, -1)$ 과 $(1, 1)$ 임을 알고 있다. 그런데 두 고유벡터는 서로 직교하며 일차독립이다.

임의의 평면벡터를 두 고유벡터의 일차결합으로 나타내면,

$(x,y) = \dfrac{x-y}{2}(1\,,\,-1) + \dfrac{x+y}{2}(1\,,\,1)$ 이다.

$$T(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x+y}{2} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

그러므로 $|\,T(X)\,|^2 = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 \cdot 2 + \left\{\dfrac{3(x+y)}{2}\right\}^3 \cdot 2 = 5(x^2+y^2) + 8xy$ 이다.

크기가 1인 벡터 X 중에서 $|T(X)|$는 $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최대이고 최대값은 3이며,

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최소이며 최소값은 1이다.

그런데 최대값과 최소값을 취하는 벡터는 단위 고유벡터임을 알 수 있고,
최대값과 최소값은 고유값 중에서 최대, 최소인 것을 확인할 수 있다.

행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 의하여 유도되는 일차변환은 고유값이 큰 고유벡터의 방향으로 가장 크게, 그리고 고유값이 작은 고유벡터의 방향으로 가장 작게 변환한다고 말할 수 있다.

[문제 2] 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$로 유도되는 일차변환 $T(X) = AX$에 대하여, 단위벡터 X 중에서 $|T(X)|$의 최대값, 최소값을 구하고, 그 때의 단위벡터를 구하여라.

※ 일반적으로, n차 정사각행렬 $A = (a_{ij})$ 의 원소 사이에 모든 i , j 에 대하여, $a_{ji} = a_{ij}$ 인 행렬을 **대칭행렬**이라고 한다. n차 대칭행렬은 n개의 서로 수직인 고유벡터를 가지며, 일차변환 $T(x) = Ax$ 는 고유값 중에서 절대값이 최대인 고유값에 대한 고유벡터의 방향으로 가장 크게 변화하며 고유값의 절대값이 가장 작은 고유값에 대응하는 고유벡터의 방향으로 가장 적게 변화한다는 사실이 알려져 있다.
즉, 고유값 α_i가 $|\alpha_1| \leqq \cdots \leqq |\alpha_n|$ 이고 α_i 에 대응하는 고유벡터를 $\overrightarrow{v_i}$ 라 할 때, 임의의 단위벡터 $\overrightarrow{x}$ 에 하여 $|\alpha_1| \leqq |\,T(\overrightarrow{x})\,| \leqq |\alpha_n|$, $|\,T(\overrightarrow{v_n})\,| = |\alpha_n|$, $|\,T(\overrightarrow{v_1})\,| = |\alpha_1|$이다.

■ **확인문제**

행렬 $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 으로 유도되는 일차변환 $T(X) = AX$ 에 대하여, 단위벡터 X 중에서 $|T(X)|$ 가 최댓값, 최솟값을 취하는 단위벡터를 구하고, 그 때의 단위벡터를 구하여라.