碩士學位請求論文

區間計算을 使用한 NEWTON 方法에 관한 研究

指導教授 金 道 鉉

69629
제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 根 時

1992年 8月

區間計算을 使用한 NEWTON 方法에 관한 研究

指導敎授 金 道 鉉

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1992年 6月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 金 根 時

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

金根時의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1992年 7月 日

審査委員長 이 성 주 印

審 査 委 員 梁 永 五 印

審 査 委 員 김 도 현 印

〈抄 錄〉

區間計算을 使用한 NEWTON 方法에 관한 硏究

金 根 時

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 金 道 鉉

본 論文에서는 一變數 函數의 根을 區間으로 接近하는 方法에 關해 硏究하고 특히 導函數가 必要한 Newton 方法에 대해 考察해 보았다.

區間計算은 科學, 工學等에 나타나는 問題의 計算 過程에 重要한 適用을 갖고 있으며, 區間計算을 사용 했을때의 效率性은 不正確한 데이타를 컴퓨터에 正確하게 入力할 수 있고 또한 願하는 만큼 方程式의 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

이 方法은 不正確한 係數를 갖는 函數의 根을 求하는데 緊要하게 사용될 것이다.

제주대학교 중앙도서관

目　　次

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

1. 序　　論

科學的인 作業중에서 자주 일어나는 問題點의 하나는 高次 代數方程式이나 分數方程式, 三角函數나 指數函數를 포함하는 超越方程式等의 方程式 $f(x) = 0$의 根을 求하는 일이다. 그런데 方程式 $f(x) = 0$의 根을 正確히 求할 수 있는 경우는 매우 드문 일이나 원하는 만큼 正確한 近似解를 求할 수는 있다. 方程式의 根을 求하는 問題는 數學에서 가장 오래된 問題들 중의 하나일 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용해서 近似解를 찾는 數値解析學 分野에서 가장 基本的인 問題들 중의 하나이며 現在에도 이 分野에 대한 硏究가 繼續되고 있다.

제주대학교 중앙도서관

方程式의 近似解를 求하는 數値的 方法에는 3百年前 뉴우톤에 의해서 만들어진 Newton-Raphson 方法에서 부터 最近에 開發된 多項式函數에 關한 Quotient Differerce 方法에 이르기까지 폭넓은 範圍로 되어 있는데 이들 方法의 共通되는 점은 中間値 定理를 이용하여 根이 存在하는 것을 確認한 後 그 區間內에 있는 任意의 한 點을 近似解로 取해 適當한 方法을 反復함으로써 참 根에 接近시켜 간다는 것이다.

本 論文에서는 方程式의 根을 찾기 위하여 導函數를 이용하여 精密度를 높여가는 方法인 Newton 方法을 區間計算 (Interval computation)을 使用하여 變形 시킴으

로써 願하는 近似解를 求하고 여러가지 問題點을 提起 하고자 한다. 區間計算을 이용했을 때의 效率性은 컴퓨터에 正確한 初期 데이타를 入力할 수 있고 또한 願하는 만큼 正確한 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

本 論文의 2章에서는 實數 區間에서 4개의 二項演算 +,-,·,: 와 距離를 定義하고 基本的인 性質들을 살펴본다.

3章에서는 區間計算을 이용한 連續 實函數 f에 대해 考察해 본다.

4章에서는 旣存的인 Newton 方法을 區間을 이용하여 變形했을 때의 性質들을 調査하고 한 個의 例를 PASCAL - SC 를 使用하여 프로그램해서 그 結果를 確認했다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

2. 實數區間計算

지금부터 實數 集合은 $\mathbb{R}$로 表示하고, $\mathbb{R}$의 元素는 小文字 $a, b, \cdots, y, z$로서 表示한다.

$$A = [a_1, a_2] = \{t | \ a_1 \leq t \leq a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

와 같은 형의 實數의 部分集合을 閉區間으로 부른다. 모든 閉區間의 集合은 $I(\mathbb{R})$로 表示하고 $I(\mathbb{R})$ 의 元素는 大文字 $A, B, \cdots, Y, Z$로서 表示한다. 實數 $x \in \mathbb{R}$ 는 $I(\mathbb{R})$ 에서의 특수한 元素 $[x, x]$ 로 생각 할수 있으며 그것을 點 區間으로 부른다.

<u>定 義 2.1.</u> $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ 를 實數 集合 $\mathbb{R}$에서 二項演算 이라하자. 만약 A, $B \in I(\mathbb{R})$ 이면, $A*B = \{z = a*b | \ a \in A, b \in B\}$ 를 $I(\mathbb{R})$ 에서 二項演算이라고 定義한다. ∎

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

나눗셈의 경우에서는 $0 \notin B$로 하자. 區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ 에서 演算은 다음과 같이 明確히 計算 되어질 수 있다.

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] = A + [-1, -1] \cdot B$$

$$A \cdot B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}],$$

$$A : B = [a_1, a_2] \cdot [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$$

이것은 $f(x, y) = x * y$, $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ 인 $z = f(x, y)$ 가 Compact set 에서 連續函數 라는 事實에서 起因된다.

<u>定 義 2.2.</u> 만약 $r(x)$가 $\mathbb{R}$에서 連續 一項演算 이면,

$$r(X) = [\min r(x), \max r(x)] \qquad 단, x \in X$$

는 $I(\mathbb{R})$상에서 一項演算 으로 定義한다.■

$I(\mathbb{R})$ 에서 一項演算에 대한 例를 보면, $X^k (k \in \mathbb{R}), e^X, \ln X, \sin X, \cos X$等이다.

<u>定 理 2.3.</u> A, B, C 를 $I(\mathbb{R})$의 元素라 하면 다음 性質이 成立한다.

제주대학교 중앙도서관 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

(1) $A + B = B + A \quad A \cdot B = B \cdot A$ (交換法則)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (結合法則)

(3) $X = [0, 0]$ 과 $Y = [1, 1]$ 은 덧셈과 곱셈에 關한 項等元이다.즉, 모든 $A \in I(\mathbb{R})$ 에 對하여,

$$A = X + A = A + X \Leftrightarrow X = [0, 0]$$

$$A = Y \cdot A = A \cdot Y \Leftrightarrow Y = [1, 1],$$

(4) $a_1 \neq a_2$ 인 任意의 元素 $A = [a_1, a_2] \in I(\mathbb{R})$은 + 와 · 에 對한 逆元을

갖지 않는다. 그럼에도 불구하고 다음이 成立한다.

$$0 \in A - A, \quad 1 \in A : A,$$

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C \quad \text{(部分的인 分配法則)}$$

(5) 任意의 實數 a에 對하여, $a(B+C) = aB + aC$

모든 $b \in B$, $c \in C$에 對하여 $bc \geq 0$ 이면, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$. ■

<u>**定 理 2.4.**</u> $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(\mathbb{R})$ (단,$k = 1,2$)이고 $A^{(k)} \subset B^{(K)}$ (단,$k = 1,2$) 이라 하면, 演算 $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ 에 對하여

$$A^{(1)} * A^{(2)} \subset B^{(1)} * B^{(2)}$$

이 成立 한다. ■

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

定義 2.2 의 一項演算 $r(X)$는 다음의 類似한 性質을 갖는다.

$$X \subset Y \Rightarrow r(X) \subset r(Y)$$

$$x \in X \Rightarrow r(x) \in r(X).$$

지금 實數區間의 集合 $I(\mathbb{R})$에서 距離의 槪念을 紹介 한다.

<u>**定 義 2.5.**</u> 두개의 區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in I(\mathbb{R})$ 사이의 距離는

다음과 같이 定義 한다.

$$q(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|,\ |a_2 - b_2|\}. \quad \blacksquare$$

定 理 2.6. 定義 2.5의 距離를 갖는 距離空間 $(I(\mathbb{R}), q)$는 完備性 (Complete) 이다. ■

(이것은 區間들의 모든 Cauchy 數列은 한 區間 으로 收斂 한다는 것이다.)

定 理 2.7. $A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \cdots$ 인 區間들의 數列 $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 區間 $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 에 收斂한다. ■

定 理 2.8. 定義 2.1에 紹介한 區間 사이의 演算 $+, -, \cdot, :$ 은 連續이다. ■

定 義 2.9. $I(\mathbb{R})$에 속하는 任意의 區間 $A = [a_1, a_2]$ 의 절대값은 다음과 같이 定義 한다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$|A| = q(A, [0,0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}. \quad \blacksquare$$

定 義 2.10. 區間 $A = [a_1, a_2]$의 나비(폭)는

$$d(A) = a_2 - a_1 \geq 0$$

으로 定義 한다. ■

點 區間의 集合은 $\{A \in I(\mathbb{R}) |\ d(A) = 0\}$ 로 表示 될 수 있다. 위의 定義로 부터 다음의 性質을 얻을 수 있다.

$$A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$$

$$d(A \pm B) = d(A) + d(B).$$

<u>定 理 2.11.</u> $I(\mathbb{R})$에 속하는 任意의 區間 A, B 에 對하여 다음 性質이 成立된다.

(1) $d(A) = |A - A|$,

(2) $A \subset B \Rightarrow \frac{1}{2}(d(B) - d(A)) \leq q(A, B) \leq d(B) - d(A)$. ■

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

3. 區間값과 實函數의 値域

이 節에서는 連續 實函數 f에 對해 考察해 본다. f로 부터 表現 되는 어떤 式 $f(x)$는 獨立變數에 對한 函數 f의 값을 決定하는 計算過程이다. f로 부터 表現되는 모든 式은 有限個의 演算과 被演算數로 構成 됐다고 생각 할 수 있다. 만약 f로 부터 表現되는 어떤 式이 常數 $a^{(0)},\cdots,a^{(m)}$을 갖는 다면 ,이것을 $f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$로 쓰기로 한다. 여러가지 問題들을 간단히 하기 위하여, 각 常數 $a^{(k)}$,$(0\le k\le m)$는 한 式에서 오직 한 번만 나타난다고 假定 한다.

(例): 函數 g에 대한 2개의 式은

제주대학교 중앙도서관

$$g^{(1)}(x;a)=\frac{ax}{1-x},\quad x\neq 1,x\neq 0,$$

$$g^{(2)}(x;a)=\frac{a}{\frac{1}{x}-1},\quad x\neq 1,x\neq 0$$

이다.

다음의 式

$$W(f,X;A(0),...,A(m))$$

$$=\{f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})\mid x\in X,\ a^{(k)}\in A^{(k)},\ 0\le k\le m\}$$

$$= [\min_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \le k \le m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}), \quad \max_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \le k \le m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})]$$

는 $x \in X$와 $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $0 \le k \le m$ 가 서로 獨立일때 그 函數 f의 모든 값들의 區間을 나타낼 것이다. 이 定義는 f의 式과 獨立이다.

(例) : 앞 例에서의 函數 g와 $A = [0,1]$,$X = [2,3]$ 에 對하여

$$W(g^{(1)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{ax}{1-x} | \; 2 \le x \le 3, 0 \le a \le 1\} = [-2, 0]$$

$$W(g^{(2)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{a}{\frac{1}{x} - 1} | \; 2 \le x, 0 \le a \le 1\} = [-2, 0]$$

따라서,

$$W(g^{(1)}, X; A) = W(g^{(2)}, X; A)$$

그러나,

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$g^{(1)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,1][2,3]}{1 - [2,3]} = [-3, 0]$$

$$g^{(2)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,3]}{\frac{1}{[2,3]} - 1} = [-2, 0]$$

이므로

$$g^{(1)}(X; A) \neq g^{(2)}(X; A)$$

어떤 實函數 f의 區間計算은 다음과 같이 定義 한다. 어떤 式이 函數 f로 주어

졌다고 하자. 이 式에서 區間으로 바꾼 모든 被演算數와 區間演算으로바꾼 모든 演算은 式 $f(X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$ 로 表現된다. 만약 모든 被演算數가 定義 2.1과 定義 2.2에서 定義된 演算의 定義域 안에 있다면,이것은 f에 대한 區間計算 또는 區間 算術計算 이라 부른다.

定 理 3.1. f를 實變數$x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$ 인 連續函數라 하고, f에 對한 어떤 式을

$$f(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이라 하자. 區間 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)},B^{(0)},\cdots,B^{(m)}$ 에 對한 區間計算을

$$f(Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)};B^{(0)},\cdots,B^{(m)})$$

으로 定義 하면 다음이 成立 한다.

(a) 모든 $X^{(k)}\subset Y^{(k)},\ A^{(j)}\subset B^{(j)},\ 1\le k\le n,\ 0\le j\le m$ 에 對하여,

$$W(f,X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})\subset f(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$$

(b) 모든 $X^{(k)}\subset Z^{(k)}\subset Y^{(k)},A^{(j)}\subset C^{(j)}\subset B^{(j)},1\le k\le n,\ 0\le j\le m$에 對하여,

$$f(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})\subset f(Z^{(1)},\cdots,Z^{(n)};C^{(1)},\cdots,C^{(m)})$$

이 성립한다. ■

(例) : 函數 f를 $f(x;a)=a-\frac{x}{1+x}$, $(x\neq-1)$이라 하고, $X=[-\frac{1}{2},1]$,

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$Z = [-\frac{1}{2}, 2]$,$A = C = [2,3]$을 選擇하면, 다음 關係를 얻는다.

$$W(f,[-\frac{1}{2},1];[2,3]) = [\frac{3}{2},4] \subset f([-\frac{1}{2},1];[2,3]) = [0,4]$$

$$f([-\frac{1}{2},1];[2,3]) = [0,4] \subset f([-\frac{1}{2},2];[2,3]) = [-2,4].$$

定理 3.1(a)에서 항상 等式을 얻을 수 있는 경우는 각각의 數 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$, $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$가 식 $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$에서 오직 한 번만 나타날 때이다.

<u>定 理 3.2.</u> p 를 다음 式으로 定義하는 實變數 x에 對한 多項式 이라 하자.

$$p(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$
$$= (\cdots((a^{(m)}x + (m-1))^{n_{m-1}} + a^{(m-2)})^{n_{m-2}} + \cdots + a^{(1)})^{n_1} + a^{(0)},$$

단, $n_v \le 2,\ 1 \le v \le m-1.$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

만약,그 式에서 나타난 冪들 (powers) 이

$$X^{(k)} = [\min_{x\in X} x^{(k)}, \max_{x\in X} x^{(k)}]$$

와 같이 計算 되어 진다면,

$$W(p,X;a^{(0)},\cdots,a^{(m)}) = p(X;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이 된다. ■

(주 의): 一般的으로, $X^2 \neq X\cdot X$가 된다.

定理 3.1의 一般的인 內容과 위에서 記述된 特別한 경우와 더불어 區間計算에 의한 어떤 函數 f의 値域에 對한 近似置의 性質에 關한 內容에 關心이 있다. 그러므로 一變數 函數인 경우에는 다음과 같이 體系化 시킬 수 있다.

<u>**定 理 3.3.**</u> f를 實變數 x의 實函數라 하고, $f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$ 를 f의 任意의 式이라 하자. 새로운 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

은 各各에 나타난 實變數 x를 새로운 變數 $x^{(k)}$, $1\le k\le n$, 로 代置 하므로써 定義된다. Y 와 $A^{(0)},\cdots,A^{(m)}\in I(\mathbb{R})$ 에 對하여, 區間計算 $f(Y;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$ 가 存在 한다고 하자. 또한 다음 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이 區間 Y에 있는 各 變數 $x^{(k)}$에 對하여 任意의 $x^{(j)}\in Y$, $1\le j\le n$, $j\ne k$, $a^{(j)}\in A^{(j)}$, $0\le j\le m$ 에 對한 Lipschitz 條件을 滿足 한다고 하자. 그 밖의 記法 (notation) 은 定理 3.1에서와 같다. 그러면 $X\subset Y$ 에 대하여 다음이 成立한다.

$$q(W(f,X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}),f(X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}))\le r\cdot d(X),\ r\ge 0. \quad \blacksquare$$

<u>**定 理 3.4.**</u> f가 實變數 x의 實函數 이고 $f(x)$를 f에 對한 任意의 式 이라고 하자. 定理 3.3의 모든 假定이 成立 됬다고 하면,任意의 $X\subset Y$ 에 對하여,

$$d(f(X)) \leq \rho \cdot d(X), \quad \rho \geq 0$$

이 成立 한다. ■

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

4. NEWTON 方法의 區間 變更

旣存的인 Newton - Raphson (혹은 Newton) 方法은 $f(x) = 0$의 根을 求하는 數値解析的 方法中에서 가장 훌륭하고 잘 알려진 方法인데 $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ 에 의해서 定義된 다. 이 節에서는 Newton 方法에 對한 區間 變更을 했을때 나타나는 여러가지 性質과 問題點을 調査한다. 이를 위하여 주어진 區間 $X_{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ 에서 하나의 根을 갖는 連續函數 f를 생각 한다.즉,어떤 $\xi \in X^{(0)}$에 대하여 $f(\xi) = 0$.

$X^{(0)}$ 의 境界點에서

$$(1) \qquad f(x_1^{(0)}) < 0, \qquad f(x_2^{(0)}) > 0$$

이라 하고, 또한 m_1, m_2 를 差分像 (divided differences)

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(2) \qquad 0 < m_1 \leq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x)}{x - \xi} \leq m_2 < \infty, \ \xi \neq x \in X^{(0)}$$

에 對하여 境界라 하자. 이러한 境界는 區間 $M = [m_1, m_2] \in I(\mathbb{R})$로 나타난다. (만약, $f(x_1^{(0)}) > 0, f(x_2^{(0)}) < 0$ 이고 $m_2 < 0$ 임을 假定하면 같은 表現이 역시 可能하다.) 위의 假定하에서 f가 $X^{(0)}$에서 다른 根을 갖지 않은 다는 것은 明確하다.

根 ξ를 包含하는 初期區間 $X^{(0)}$에서 出發하여 다음과 같이 反復的으로 새로운 區間 $X^{(k)} (k \geq 1)$를 計算한다. 즉, $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$ 에 對하여

(3) $$X^{(k+1)} = \left\{ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{M} \right\} \cap X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

反復法 (3) 은 다음과 같이 區間演算을 사용 하지 않고 쓸수도 있다.

(3') $$x_1^{(k+1)} = \begin{cases} \max\{x_1^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단}, f(m(X^{(k)})) \geq 0) \\ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단}, f(m(X^{(k)})) \leq 0) \end{cases}$$

$$x_2^{(k+1)} = \begin{cases} m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단}\ ,\ f(m(X^{(k)})) \geq 0) \\ \min\{x_2^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단},\ f(m(X^{(k)})) \leq 0) \end{cases}$$

두개의 公式 (3) 과 (3')에서 記法 m는 $I(\mathbb{R})$에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 函數이고 中點

(4) $$m(X) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

가 가끔 사용 된다. 이제 反復的인 計算에 따라 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 에 對한 가장 重要한 性質을 定理 하고자 한다.

<u>定 理 4.1.</u> f를 連續函數라 하고 , ξ 를 區間 $X^{(0)}$에서 f의 根 이라 하자. (1)은 成立하고 , (2)는 區間 $M = [m_1, m_2]$, $m_1 > 0$에 對하여 明確하다고 하자.그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 (3)에 따라 計算하며 다음의 性質을 갖는다.

(5) $$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

제주대학교 중앙도서관

(6) $$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi,$$

또한 그 數列은 有限的인 몇 段階를 거친후 點 $[\xi, \xi]$ 에 收斂 한다.

(7) $$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)}).$$

(證 明): (5) : (2)와 定理 2.4 에서 부터 다음을 얻는다.

$$\xi = m(X^{(0)}) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{f(m(X^{(0)}))/m(X^{(0)})}$$

$$\in \left\{ f(m(X^{(0)})) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{M} \right\} \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

$k > 1$ 에 對한 證明은 歸納法을 사용 함으로써 成立된다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

(6),(7) : $f(m(X^{(k)})) > 0$임을 假定 하자. 만약, $f(m(X^{(k)})) \geq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$ 이 成立 하면, (3')을 사용 하여

$$d(X^{(k+1)}) = x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)}$$

$$= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - x_1^{(k)}$$

$$\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right) - \frac{(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1}{m_2}$$

$$= \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right) \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\leq d(X^{(k)}) \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right).$$

을 얻는다. 만약, $f(m(X^{(k)})) \leq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$ 이면,(3')을 사용 하여

$$d(X^{(k+1)}) = x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)}$$

$$= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - m(X^{(k)}) + \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}$$

$$= \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right) \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\leq d(X^{(k)}) \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right).$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$f(m(X^{(k)})) < 0$ 인 경우에는 같은 方法으로 證明이 된다. 그러나 만약, $f(m(x^{(k)})) = 0$ 이면 $m(X^{(k)}) = \xi$, 따라서 $X^{(k+i)} = \xi,\ i \geq 1,\ d(X^{(k+1)}) = 0$ 이 되므로서 (7)이 證明 된다. 또한, $m_1 \leq m_2$ 이므로

$$d(X^{(k+1)}) \leq \gamma^{k+1} d(X^{(0)}), \quad 0 \leq \gamma = (1 - \frac{m_1}{m_2}) < 1,$$

을 얻게 되는데, 이것은 다음 式과 같은 것이다.

$$\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)}) = 0.$$

(5)의 $\xi \in X^{(k)}$, $k \geq 0$ 이고 $\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)}) = 0$ 이므로 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi$ 이다. (6)의 첫번째 부분은 (3)에 대한 결과이다. ■

따라서, 定理 4.1은 주어진 假定하에서 反復區間 $X^{(k)}, (k \geq 0)$의 各各은 원하는 根을 포함하고 k가 한없이 커지면 f의 根 ξ 에 收斂 한다는 것을 保障해 주고 있다.

우리는 지금 부터 特別히 選擇된 點 m을 固定 하고 다음의 따름定理를 얻는다.

따름定理 4.2. 定理 4.1 과 같은 記法과 假定에 덧붙여

$$m(X^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right),\ k \geq 0,$$

이 주어지면, 反復的인 計算에 의하여 얻어진 數列$\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 에 對하여 不等式

$$d(X^{(k+1)}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)})$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

은 (7)에서 改善된 것이다.

(證 明): $m(X^{(k)}) = \frac{1}{2}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)})$ 로 부터

(8) $$m(X^{(k)}) - x_1^{(k)} = \frac{1}{2} d(X^{(k)}).$$

를 얻는다. 이것을 (7)의 證明 過程에 代入하면 (8)을 얻을 수 있다. ■

만약, $m(X^{(k)})$ 에 對한 中點이 選擇 되어 진다면 ,그것은 모든 反復段階에서 包含되는 나비(폭)는 적어도 二等分 된다는 事實이 保障된다. 差分像 (3)을 境界로 하는

區間 M는 定理 4.1은 물론 따름定理 4.2에서 둘다 必要하다. 만약, 函數 f가 連續的으로 微分可能 하면 ($x \in X^{(0)}$에 對하여 $f'(x) \neq 0$이면) 平均値 定理를 사용하여

$$M = [\inf_{y \in X^{(0)}} f'(y), \sup_{y \in X^{(0)}} f'(y)]$$

와 같이 選擇 되어질 수도 있다. 一般的으로 이 區間의 擴大集合 (Superset)으로 어림 잡을 수 있는데, 例를 들면 f'의 區間값 즉, $M = f'(X^{(0)})$로 計算한다. (3)의 方法을 사용하기 위하여 f의 差分像에 對한 境界의 固定된 點 m_1,m_2를 必要로 했다. 이러한 節次는 Newton 方法의 區間計算에서도 必要하다. 지금부터 만약, f가 連續的으로 微分可能 하고 導函數 f'이 區間計算 $f'(X)$를 갖는다면 普通의 Newton 方法을 區間計算을 사용하여 變形시켜 본다. (3)에서 M을

(9) $$M^{(k)} = f'(X^{(k)})$$

로 代置 한다. 만약,境界

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$0 < l_1 \leq f'(x) \leq l_2, \quad x \in X^{(0)}$$

를 안다면 $m_1 > 0$ 이고 式

(10) $$M^{(k)} = [m_1^{(k)}, m_2(k)] = f'(X^{(k)}) \cap L, \; L = [l_1, l_2].$$

를 사용 할 수 있다는 것을 保障 하게 된다. 따라서 $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$에 대하여 다음 式을 얻게된다.

(11) $$X^{(k+1)} = \{m(X^{(k)}) - f(m(X^{(k)}))/M^{(k)}\} \cap X^{(k)},\ k \geq 0.$$

(11)을 사용하면 區間들로 이루어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 定理 4.1 과 비슷한 內容으로 證明 할 수 있도록 만들어 진다.

<u>定 理 4.3.</u> f를 連續的으로 微分可能한 函數 이고, f이 區間 $X^{(0)}$에서 定理 3.4의 假定을 滿足 한다고 하자.또한 關係式 (1)이 $X^{(0)}$에서 成立된다고 하자. $X^{(0)}$에 있는 f의 根은 ξ로 나타내고, 區間 $M^{(k)}$는 (9)또는 (10)에 의하여 定義 된다. 그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는

$$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi,$$

제주대학교 중앙도서관 JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

을 滿足 하거나, 그 數列은 몇번의 有限的인 段階를 거친後에 $[\xi, \xi]$에 收斂한다.

(12) $$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)})$$

$$\leq \beta(d(X^{(k)}))^2, \quad \beta \geq 0.$$

(證 明): $x \in X^{(k)}$에 對하여 다음이 成立한다.

$$\frac{f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\eta) \in M^{(k)},\ \eta = x + \theta(\xi - x), \quad (0 < \theta < 1).$$

그러므로 $M^{(k)}$에 對한 類似한 決定은 定理 4.1에서와 같이 證明 되어 진다.定理 4.1 의 證明에서와 같이

$$d(X^{(k+1)}) \le \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)}) = \frac{m_2^{(k)} - m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} d(X^{(k)})$$

를 얻고 定理 3.4를 이용하여

$$d(X^{(k+1)}) \le \frac{d(M^{(k)}}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)}) \le \frac{d(f'(X^{(k)})}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)})$$

$$\le \frac{c}{m_1^{(0)}} (d(X^{(k)}))^2, \qquad \frac{c}{m_1^{(0)}} \ge 0$$

를 얻는다. ■

여기서 이 反復을 더 많이 修訂 하게 되고, 이를 爲하여 $f(m(X^{(k)})) > 0$ 또는 $f(m(X^{(k)})) < 0$에 依存 하여 願하는 根은 반드시 각각 區間 $[x_1^{(k)}, m(X^{(k)})]$또는 $[m(X^{(k)}), x_2^{(k)}]$ 안에 반드시 있어야 한다는 것을 알게 된다. 만약 $f(m(X^{(k)})) = 0$ 이면 , $m(X^{(k)}) = \xi$ 와 그 反復은 끝나게 된다. 따라서 그것은 (11)에서부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(13) \qquad Y^{(k)} = \begin{cases} [x_1^{(k)}, m(X^{(k)})] & (f(m(X^{(k)})) > 0) \\ [m(X^{(k)}, x_2^{(k)}] & (f(m(X^{(k)})) < 0) \\ X^{(k)} & (f(m(X^{(k)})) = 0). \end{cases}$$

에 대하여,

$$M^{(k)} = f'(Y^{(k)}) \cap L, \quad L = [l_1, l_2].$$

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

그러면 $f'(Y^{(k)}) \subset f'(X^{(k)})$이고 $d(Y^{(k)}) \leq d(X^{(k)})$ 가 되며, $m_1^{(k)} > 0$ 이다.定理 4.3은 역시 (13)의 選擇에 대해 明確하다.方法 (11)을 위해 $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$의 選擇에 關하여는 따름定理 4.2의 內容과 비슷한 內容을 갖게 된다.

이제 하나의 例題를 通하여 區間을 이용한 Newton 反復法을 明確하게 하고자 한다.

(例題): 函數$f(x) = x^2(\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}\sin x) - \sqrt{3}/19$는 區間 $X^{(0)} = [0.1, 1]$에서 根 ξ 를 갖는다. 導函數 $f'(x) = x(\frac{4}{3}x^2 + \sqrt{2}(2\sin x + cosx))$는 $l_1 \leq f'(x) \leq l_2$, $x \in X^{(0)}$ 를 取함에 의하여 $X^{(0)}$ 에서 推定되어 진다.(10)을 사용해서 얻어진 反復區間 $X^{(k)}$, $k \geq 0$ 와 (13)을 사용해서 求한 反復區間 $Y^{(k)}$, $k \geq 0$은 過程 (11)에 따라서 컴퓨터로 計算했다. 그 結果는 표 1-1과 표 1-2에서 보여 진다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

(표 1-1)

$X^{(k)}$	
[0.100000000000,	0.520000000000]
[0.340000000000,	0.520000000000]
[0.370000000000,	0.410000000000]
[0.392200000000,	0.392600000000]
[0.392379490000,	0.392379530000]
[0.392379507136,	0.392379507138]

(표 1-2)

$Y^{(k)}$		$d(X^{(k)})/d(Y^{(k)})$
[0.100000000000,	0.520000000000]	0.929283714640
[0.340000000000,	0.520000000000]	0.825576541375
[0.370000000000,	0.410000000000]	0.389006237630
[0.392200000000,	0.392600000000]	0.017633860914
[0.392379490000,	0.392379530000]	0.000180266987
[0.392379507136,	0.392379507138]	0.000149913799

(例題에 대한 PROGRAM)

```
program quad_conv_1(input,output);
$include sf.lwc
$include interval.lwc

var
    X0,X1,M,L : interval;
    exit : boolean;
    tol : real;
    cnt,Max_It :integer;
(*************************************************************************)
funtion fx (x:interval):interval;
  begin
    fx:=x*x*(intpt(1/3)*x*x+intpt(sqrt(2))*isin(x))-intpt(sqrt(3)/19);
  end;
(*************************************************************************)
funtion fpx(x:interval):interval;
  begin
    fpx:=x*(intpt(4/3)*x*x+intpt(sqrt(2))*(intpt(2)*isin(x)+x*icos(x)));
  end;
(*************************************************************************)
funtion dia(x:interval):real;
  begin
    dia :=abs(x.sup - x.inf);
  end;
(*************************************************************************)
```

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

```
funtion median(x:interval):real;
  begin
    median :=x.sup+x.inf)/2;
  end;
(**********************************************************************)
begin
  write('input the initial interval         >>>>> ');iread(input,X0);
  write('input the Tolerance                >>>>> ');readln(tol);
  write('input the Maximum iteration number >>>>> ');readln(Max_It);
  exit := false;
  L := fpx(X0);
  cnt := 0;
  write('The initial interval         >>>>> ');iwrite(output,X0);writeln;
  write('The Tolerance                >>>>> ');writeln(tol);
  write('The Maximum iteration number >>>>> ');writeln(Max_It);
  writeln;
  writeln;
  writeln('*****************************************************');
  writeln('    N                  Nth Iterated interval ');
  writeln('*****************************************************');

 while not (exit = true)
   do begin
     cnt := cnt + 1;
     M  := fpx(X0) ** L;
   if (median(X0) in X0)
   then X1 :=(intpt(median(X0))-fx(intpt(median(X0)))/ M )** X0
   else begin
     writeln('*****  This iteration is invalid  *****');
     exit := true ;
   end;
   write(cnt :4,'    '); iwrite(output,X1); writeln;
   if cnt > Max_It
     then begin
   exit := true;
   writeln ('*****************************************************');
   writeln ('   The Maximum iteration number is exceeded !!!! ');
   end;
   if dia(X1) < tol
   then begin
     writeln ('*****************************************************');
     exit := true;
   end;
   else X0 := X1;
  end;
```

제주대학교 중앙도서관

```
 writeln ; write('      Solution      >>>>>>> '); iwrite (output,X1);
 writeln;
end.
```

```
The initial interval         >>>>> [        1.0E - 01,      1.0E + 00    ]
The Tolerance                >>>>>    1.00000000000E - 10
The Maximum iteration number >>>>>    30


**********************************************************************
       N                    Nth  Iterated  interval
**********************************************************************
       1     [            1.0E-01,                 5.2E-01   ]
       2     [            3.4E-01,                 5.2E-01   ]
       3     [            3.7E-01,                 4.1E-01   ]
       4     [          3.922E-01,               3.926E-01   ]
       5     [      3.9237949E-01,           3.9237953E-01   ]
       6     [ 3.92379507136E-01,       3.92379507138E-01   ]
**********************************************************************

     Solution    >>>>>>>  [ 3.92379507136E-01, 3.92379507138E-01 ]
```

```
program quad_conv_1(input,output);
$include sf .lwc
$include interval.lwc

var
     X0,X1,Y0,Y1,Mx,My,Lx,Ly  :  interval;
     exit :boolean;
     temp,tol  :  real;
     cnt,Max_It  :  integer;
(************************************************************************)
function fx(x:interval):interval;
  begin
    fx:=x*x*(intpt(1/3)*x*x+intpt(sqrt(2))*isin(x)) -intpt(sqrt(3)/19);
  end;
(************************************************************************)
function  f(x:real):real;
  begin
    f :=x*x*(x*x/3 +sqrt(2)*sin(x)) -sqrt(3)/19;
  end;
```

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

```
(*************************************************************************)
function fpx(x:interval):interval;
  begin
    fpx:=x*(intpt(4/3)*x*x+intpt(sqrt(2))*(intpt(2)*isin(x)+x*icos(x)));
  end;
(*************************************************************************)
function dia(x:interval):real;
  begin
    dia :=abs(x.sup - x.inf);
  end;
(*************************************************************************)
function median (x:interval):real;
  begin
    median:=(x.sup + x.inf)/2;
  end;
(*************************************************************************)
function Y(x:interval):interval;
  var
      cmp,tmed : real;
  begin
    tmed := median(x);
    cmp := f(tmed);
    Y := x;
    if cmp > 0
    then Y := intval (x.inf,tmed);
    if cmp < 0
    then Y := intval (tmed,x.sup);
  end;
(*************************************************************************)

begin
  write('Input the initial interval          >>>>> ');iread(input,X0);
  write('Input the Tolerance                 >>>>> ');readln(tol);
  write('Input the Maximum iteration number >>>>> ');readln(Max_It);
  exit := false;
  Lx := fpx(X0);
  Y0 := Y(X0);
  Ly := fpx(Y0);
  cnt := 0;
  write('Thr initial interval          >>>>> ');iwrite(output,X0);writeln;
  write('The Tolerance                 >>>>> ');writeln(tol);
  write('The Maximum iteration number >>>>> ');writeln(Max_It);
  writeln;
  writeln;
  writeln('***********************************************************');
```

제주대학교 중앙도서관

```
writeln('      N              Nth Iterated interval);     Compare');
writeln('************************************************************);
while not (exit = true)
do begin
  cnt := cnt + 1;
  if cnt <> 1
  then Y0 := Y(X0);
  Mx := fpx(X0) **Lx;
  My := fpx(Y0) **Ly;
  if ( median (X0) in X0)
  then begin
    X1 := (intpt(median(X0)) - fx(intpt(median(X0))) / Mx ) ** X0;
    Y1 := (intpt(median(Y0)) - fx(intpt(median(Y0))) / My ) ** Y0;
  end
  else begin
    writeln(' *****  This iteration is invalid  ***** ');
    exit := true;
  end;
  temp := dia(X1)/ dia(Y0);
  write(cnt:4, '    ');iwrite(output,Y1);writeln('     ',temp);
  if cnt > Max_It
  then begin
    exit : = true;
    writeln('*********************************************************);
    writeln('   The Maximum iteration number is exceeded!!!!');
  end;
  if dia(Y1) < tol
  then begin
    writeln('*********************************************************);
    exit := true;
  end

   else begin
     X0 := X1;
     Y0 := Y1;
   end;
  end;
  writeln;write('          Solution     >>>>>>>  '); iwrite(output,Y1);
  writeln;
end.
```

제주대학교 중앙도서관

```
The initial interval          >>>>> [         1.0E-01,             1.0E+00 ]
The Tolerance                 >>>>>     1.00000000000E-10
```

```
The Maximum iteration number >>>>>        30

****************************************************************************
 N                  Nth Iterated interval                      Compare
****************************************************************************
 1  [             3.5E-01,             5.5E-01  ]  9.29283714640E-01
 2  [             3.7E-01,             4.1E-01  ]  8.25576541375E-01
 3  [            3.91E-01,            3.94E-01  ]  3.89006237630E-01
 4  [           3.921E-01,           3.928E-01  ]  1.76338609142E-02
 5  [       3.9237949E-01,       3.9237954E-01  ]  1.80266987285E-04
 6  [  3.92379507135E-01,  3.92379507138E-01  ]  1.49913799565E-04
****************************************************************************

      Solution     >>>>>>>  [ 3.92379507135E-01, 3.92379507138E-01 ]
```

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

5. 結　論

이상에서 살펴본 바와같이 區間計算을 사용하여 方程式의 解를 求하는 過程을 綜合해 보면 다음과 같은 結果를 얻는다.

1. 區間 計算은 科學, 工學등에 나타나는 問題의 計算 過程에 重要한 適用을 갖지만 傳統的인 컴퓨터 演算裝置의 限界와 通常的인 프로그램 言語의 限界 때문에 널리 通用되고 있지는 않다.

2. 區間 計算을 實驗, 觀察등에서 얻어지는 不正確한 데이타를 區間을 이용 함으로써 正確하게 入力시킬 수 있고 무리수와 같은 데이타를 컴퓨터에 正確하게 入力시켜 願하는 近似解를 찾는데 도움을 준다.

3. 區間計算 問題는 固定點 反復法, Newton 方法과 같은 傳統的인 反復計算 過程을 區間을 사용한 數學 問題의 解를 求하는 問題로 變形시킬 수 있다.

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

4. 反復計算 方法 중 區間 計算을 이용한 Newton 方法은 迅速하게 根에 接近해 간다는 事實을 確認했다.

參 考 文 獻

1. 송만석,장건수, 수치해석학, 김영사, 1986.

2. 이경환,송문섭, 수치해석, 희중당, 1984.

3. Gotz Alefeld , Introduction to Interval Computation , Academic Press , 1983 .

4. L.W.ehrlich , A modified Newton method for polynomials,1967.

5. E.Hansen, Interval forms of Newton's Method ,1978 .

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

〈Abstract〉

A Study on Newton Method with Interval Analysis

Kim , Keun-Si

Mathematics Education Major
Graduate School of Education
Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Kim, Do-Hyun

In general, interval arithmetic has a number of significant applications in scientific, engineering and statistical computation.

In this thesis, we shall consider a method for including zeros of a real function of one real variable x. Among the many methods for root-finding, we shall study especially the Newton method which uses derivatives.

It can be used to find zeros of the function, including non-accuracy coefficients.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in June, 1992.