碩士學位 請求論文

區間 計算을 利用한 固定點 反復法과 二次 收斂法에 關한 研究

指導教授 金 道 鉉

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

高 連 順

1994 年 8 月 日

區間 計算을 利用한 固定點 反復法과 二次 收斂法에 關한 研究

指導教授 金 道 鉉

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

1994 年 6 月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 高 連 順

高連順의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1994 年 7 月 日

審査委員長 양 성 [illegible]

審 査 委 員 김 도 현

審 査 委 員 김 철 수

〈 초 록 〉

구간 계산을 이용한 고정점 반복법과 이차 수렴법에 관한 연구

고 연 순

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 김 도 현

本 論文에서는, 區間計算을 이용하여 實變數 函數의 根을 계산하는 방법에 관해 연구한다. 또한, 도함수가 필요치 않은 固定點 反復法과 도함수를 이용한 二次 收斂法에 대해 고찰해보고, 효율성을 비교해본다.

區間計算을 이용한 방법은 부정확한 係數를 갖는 함수의 根을 구하는데 有用할 것이며, 특히 代數的으로 풀 수 없는 代數方程式의 近似解를 찾는데 편리할 것이다.

목　차

1. 서 론

수치해석에서 중점으로 다루는 문제는 效率性과 正確性이다. 수학적으로는 완전히 해결된 문제도 실제로 컴퓨터를 써서 해를 구하려면 그 方法이 문제가 될 수 있다. 즉, 방정식의 根이 존재함이 수학적으로 證明되도, 실제로 그 根을 구하려고 할 때 解決方法에서 문제점이 발생한다.

방정식의 근을 구할 때 2차 방정식은 우리가 알고 있는 근의 공식을 사용하여 근을 구할 수 있다. 3차, 4차 방정식의 경우도 근을 구하는 공식이 있으나 복잡하고, 5차 이상의 방정식에는 일반적으로 근을 구하는 공식이 없다. 따라서, 方程式 $f(x) = 0$ 의 根을 구함에 있어서, 근을 구하는 공식이 존재하지 않음이 알려져 있는 5차 이상의 代數方程式 및 근을 구하는 것이 불가능한 函數에서 수치해석을 이용한 계산방법은 최후의 수단이다. 그러므로 근이 존재하는 것을 확인한 후 적당한 방법을 반복함으로써 참근에 接近시키는 방법을 생각해 본다. 이 과정에서 效率性과 正確性이 가장 중요하다.

구간계산을 이용한 방법에서, 이미 區間 二等分法과 二次 收斂法의 비교는 二次收斂法이 속도가 빠르므로 효율성이 높다는 것이 밝혀졌다. 이제 방정식의 근을 찾기 위하여 固定點 反復法과 Newton 方法을 區間計算(Interval Computation)을 사용하여 변형시킴으로써 원하는 근사해를 구하여 두 방법의 효율성을 比較해 보고 문제점을 提起하고자 한다. 구간계산을 이용했을 때의 효율성은 實驗, 觀察등에서 얻어지는 부정확한 데이타를 정확하게 입력시킬 수 있고, 무리수와 같은 데이타를 컴퓨터에 정확하게 입력시켜 원하는 근사해를 찾는데 도움을 준다.

2장에서는 구간계산에서의 二項演算 $+, -, \cdot, /$ 등을 定義하고 여러가지 性質을 살펴본다.

3장에서는 구간계산을 이용한 連續 實函數 f 에 대해 考察해 본다.

4장에서는 구간을 이용한 二次 收斂法과 固定點 反復法의 性質을 조사한다.

5장에서는 실제로 例題를 들어 PASCAL-SC를 이용하여 프로그램해서 그 결과를 比較함으로써 두 방법의 效率性을 알아본다.

그리고, 두 방법을 사용함에 있어서의 문제점을 提示한다.

2. 실수구간계산

지금부터 實數 集合은 $\mathbb{R}$로 表示하고, $\mathbb{R}$의 元素는 小文字 $a, b, \cdots, y, z$로서 表示한다.

$$A = [a_1, a_2] = \{t \mid a_1 \le t \le a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

와 같은 형의 實數의 部分集合을 閉區間으로 부른다. 모든 閉區間의 集合은 $I(\mathbb{R})$로 表示하고 $I(\mathbb{R})$의 元素는 大文字 $A, B, \cdots, Y, Z$로서 表示한다. 實數 $x \in \mathbb{R}$는 $I(\mathbb{R})$에서의 특수한 元素 $[x, x]$로 생각할 수 있으며 그것을 點 區間으로 부른다.

<u>定 義 2.1.</u> $* \in \{+, -, \cdot, /\}$를 實數集合 $\mathbb{R}$에서 二項演算이라 하자. 만약 $A, B \in I(\mathbb{R})$이면, $A * B = \{z = a * b \mid a \in A, b \in B\}$를 $I(\mathbb{R})$에서 二項演算이라고 定義한다. ■

區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$에서 演算은 다음과 같이 計算된다.

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$

$$A \cdot B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}, \ \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}],$$

$$A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right] \quad (\text{단, } 0 \notin B)$$

<u>定 義 2.2.</u> 만약 $r(x)$가 $\mathbb{R}$에서 連續 一項演算이면,

$$r(X) = [\min r(x), \max r(x)] \qquad \text{단, } \ x \in X$$

를 $I(\mathbb{R})$ 상에서 一項演算으로 定義한다. ■

$I(\mathbb{R})$ 에서 一項演算에 對한 例를 보면, $X^k(k \in \mathbb{R})$, e^X, $\ln X$, $\sin X$, $\cos X$ 等 이다.

<u>定 理 2.3.</u> A, B, C 를 $I(\mathbb{R})$ 의 元素라 하면 다음 性質이 成立한다.

(1) $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (交換法則)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (結合法則)

(3) $X = [0, 0]$ 과 $Y = [1, 1]$ 은 덧셈과 곱셈에 關한 項等元이다. 즉, 모든 $A \in I(\mathbb{R})$ 에 對하여,

$$A = X + A = A + X \Leftrightarrow X = [0, 0],$$

$$A = Y \cdot A = A \cdot Y \Leftrightarrow Y = [1, 1].$$

(4) $a_1 \neq a_2$ 인 任意의 元素 $A = [a_1, a_2] \in I(\mathbb{R})$ 은 $+$와 $\cdot$에 對한 逆元을 갖지 않는다. 그러나 다음이 成立한다.

$$0 \in A - A, \quad 1 \in A/A,$$

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{部分的인 分配法則})$$

(5) 任意의 實數 a에 對하여, $a(B + C) = aB + aC$

모든 $b \in B$, $c \in C$ 에 대하여 $bc \geq 0$ 이면, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. ■

<u>定 理 2.4.</u> $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(\mathbb{R})$ (단, $k = 1, 2$)이고 $A^{(k)} \subset B^{(k)}$ (단, $k = 1, 2$)이라 하면, 演算 $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ 에 對하여

$$A^{(1)} * A^{(2)} \subset B^{(1)} * B^{(2)}$$

이 成立한다. ■

또한, 一項演算 $r(X)$ 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$X \subset Y \Rightarrow r(X) \subset r(Y)$$

$$x \in X \Rightarrow r(x) \in r(X).$$

定 理 2.5. 두개의 區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ (단, $A, B \in I(\mathbb{R})$) 사이의 距離는 다음과 같이 定義한다.

$$q(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \quad ■$$

定 理 2.6. 定理 2.5의 距離를 갖는 距離空間 $(I(\mathbb{R}), q)$ 는 完備性(complete)이다. ■

(이것은 區間들의 모든 Cauchy 數列은 한 區間으로 收斂한다는 것이다.)

定 理 2.7. $A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \cdots$ 인 區間들의 數列 $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 區間 $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 에 收斂한다. ■

定 理 2.8. 定義 2.1에 紹介한 區間사이의 演算 $+, -, \cdot, /$ 은 連續이다. ■

定 理 2.9. $I(\mathbb{R})$ 에 속하는 任意의 區間 $A = [a_1, a_2]$ 의 절대값은 다음과 같이 定義 한다.

$$|A| = q(A, [0, 0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}. \quad ■$$

定 理 2.10. 區間 $A = [a_1, a_2]$ 의 나비(폭)는

$$d(A) = a_2 - a_1 \geq 0$$

으로 定義한다. ■

點區間의 集合은 $\{A \in I(\mathbb{R}) | \, d(A) = 0\}$ 로 表示된다. 위의 定義로 부터 다음의 性質을 얻을 수 있다.

$$A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$$

$$d(A \pm B) = d(A) + d(B).$$

定 理 2.11. $I(\mathbb{R})$ 에 속하는 任意의 區間 A, B 에 對하여 다음 性質이 成立한다.

(1) $d(A) = |A - A|$,

(2) $A \subset B \Rightarrow \frac{1}{2}(d(B) - d(A)) \leq q(A, B) \leq d(B) - d(A)$. ■

3. 구간값과 실함수의 치역

이 節에서는 連續 實函數 f 에 대해 考察해 본다. f 로 부터 表現되는 어떤 式 $f(x)$ 는 獨立變數에 대한 函數 f 의 값을 決定하는 計算過程이다. f 로 부터 表現되는 모든 式은 有限個의 演算과 被演算數로 構成된다. 만약 f 로 부터 表現되는 어떤 式이 常數 $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$ 을 갖는 다면, 이것을 $f(x\,;\,a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$ 로 쓰기로 한다. 여기에서 각각의 常數 $a^{(k)}$ $(0 \le k \le m)$ 는 한 式에서 오직 한 번만 나타난다고 假定한다.

(例) : 함수 f에 대한 2개의 式은

$$f^{(1)}(x;a) = \frac{ax}{1-x}, \quad x \neq 1, x \neq 0,$$

$$f^{(2)}(x;a) = \frac{a}{\frac{1}{x}-1}, \quad x \neq 1, x \neq 0$$

이다.

다음의 式

$$\begin{aligned} & W(f, X; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)}) \\ &= \{f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) \mid x \in X,\ a^{(k)} \in A^{(k)},\ 0 \le k \le m\} \\ &= [\min_{\substack{x\in X \\ a^{(k)}\in A^{(k)}, 0\le k\le m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}),\ \max_{\substack{x\in X \\ a^{(k)}\in A^{(k)}, 0\le k\le m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})] \end{aligned}$$

는 $x \in X$ 와 $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $0 \le k \le m$ 가 서로 獨立일 때 그 函數 f의 모든 값들을 包含하는 區間을 나타낼 것이다. 이 定義는 f의 式과 獨立이다.

(例) :　　앞 例에서의 函數 f 와 $A = [0,1]$, $X = [2,3]$ 에 對하여

$$W(f^{(1)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{ax}{1-x} \mid 2 \leq x \leq 3,\ 0 \leq a \leq 1\} = [-2,0]$$

$$W(f^{(2)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{a}{\frac{1}{x}-1} \mid 2 \leq x \leq 3,\ 0 \leq a \leq 1\} = [-2,0]$$

따라서,

$$W(f^{(1)}, X; A) = W(f^{(2)}, X; A)$$

그러나,

$$f^{(1)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,1][2,3]}{1-[2,3]} = [-3,0]$$

$$f^{(2)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,1]}{\frac{1}{[2,3]}-1} = [-2,0]$$

이므로

$$f^{(1)}(X; A) \neq f^{(2)}(X; A)$$

어떤 實函數 f 의 區間計算은 다음과 같이 定義한다. 어떤 式이 函數 f 로 주어졌다고 하자. 이 식에서 구간으로 바꾼 모든 被演算數와 區間演算으로 바꾼 모든 演算은 式 $f(X\,;\,A^{(0)}, \cdots, A^{(m)})$ 로 表現된다. 만약 모든 被演算數가 定義 2.1과 定義 2.2에서 定義된 演算의 定義域 안에 있다면, 이것은 f 에 對한 區間計算 또는 區間 算術計算이라 부른다.

<u>定 理 3.1.</u> f를 實變數 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ 인 連續函數라 하고, f에 대한 어떤 式을

$$f(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$

이라 하자. 區間 $Y^{(1)}, \cdots, Y^{(n)}$, $B^{(0)}, \cdots, B^{(m)}$ 에 對한 區間計算을

$$f(Y^{(1)}, \cdots, Y^{(n)}; B^{(0)}, \cdots, B^{(m)})$$

으로 定義하면 다음이 成立한다.

(a) 모든 $X^{(k)} \subset Y^{(k)}$, $A^{(j)} \subset B^{(j)}$, $1 \le k \le n$, $0 \le j \le m$ 에 對하여,

$$W(f, X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)}) \subset f(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)})$$

(b) 모든 $X^{(k)} \subset Y^{(k)}, A^{(j)} \subset B^{(j)}$, $1 \le k \le n$, $0 \le j \le m$ 에 對하여,

$$f(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)}) \subset f(Y^{(1)}, \cdots, Y^{(n)}; B^{(0)}, \cdots, B^{(m)})$$

이 成立한다. ■

(例) : 函數 f를 $f(x\,;a) = a - \dfrac{x}{1+x}$, $(x \neq -1)$이라 하고, $X = [-\frac{1}{2}, 1]$,$Y = [-\frac{1}{2}, 2]$, $A = B = [2,3]$ 을 選擇하면, 다음의 關係를 얻는다.

$$W(f, [-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [\frac{3}{2}, 4] \subset f([-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [0, 4]$$

$$f([-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [0,4] \subset f([-\frac{1}{2}, 2]; [2,3]) = [-2, 4].$$

定理 3.1 (a)에서 항상 等式을 얻을 수 있는 경우는 각각의 數 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$, $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$가 식 $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$에서 오직 한 번만 나타날 때이다.

<u>**定 理 3.2.**</u> p를 다음 式으로 定義하는 實變數 x에 대한 多項式이라 하자.

$$p(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$
$$= (\cdots((a^{(m)}x + a^{(m-1)})^{n_{m-1}} + a^{(m-2)})^{n_{m-2}} + \cdots + a^{(1)})^{n_1} + a^{(0)},$$
$$\text{단, } n_v \geq 2,\ 1 \leq v \leq m-1.$$

만약, 그 式에서 나타난 冪들 (powers)이

$$X^k = [\min_{x \in X} x^k, \max_{x \in X} x^k]$$

와 같이 計算되어 진다면,

$$W(p, X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) = p(X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$

이 된다. ■

(주의) : 一般的으로, $X^2 \neq X \cdot X$가 된다.

定理 3.1 의 一般的인 內容과 定理 3.2 에서 記述된 特別한 경우와 더불어 區間計算을 한 어떤 函數 f에 對한 近似置의 性質에 關心이 있다. 그러므로, 一變數 函數인 경우에는 다음과 같이 體系化시킬 수 있다.

定理 3.3. f 를 實變數 x 의 實函數라 하고, $f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$ 를 f 의 任意의 式이라 하자. 새로운 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

은 各各에 나타난 實變數 x 를 새로운 變數 $x^{(k)}$, $1\le k\le n$ 로 代置하므로써 定義된다. Y와 $A^{(0)},\cdots,A^{(m)}\in I(\mathbb{R})$ 에 대하여, 區間計算 $f(Y;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$ 가 存在한다고 하자. 또한 다음 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이 區間 Y 에 있는 各 變數 $x^{(k)}$ 에 對하여 任意의 $x^{(j)}\in Y$, $1\le j\le n$, $j\ne k$, $a^{(j)}\in A^{(j)}$, $0\le j\le m$ 에 對한 Lipschitz 條件을 滿足한다고 하자. 그 밖의 記法(notation)은 定理 3.1 에서와 같다. 그러면 $X\subset Y$에 對하여 다음이 成立한다.

$$q(W(f,X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}),f(X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}))\le r\cdot d(X),\ \ r\ge 0. \quad \blacksquare$$

定理 3.4. f 가 實變數 x 의 實函數이고 $f(x)$ 를 f 에 對한 任意의 式이라고 하자. 定理 3.3 의 모든 假定이 成立된다고 하면, 任意의 $X\subset Y$ 에 對하여,

$$d(f(X))\le\rho\cdot d(X),\quad \rho\ge 0$$

이 成立한다. $\blacksquare$

4. 이차 수렴법과 고정점 반복법

4.1 이차 수렴법

주어진 區間 $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ 에서 하나의 根을 갖는 連續函數 f 를 생각한다. 즉, 어떤 $\xi \in X^{(0)}$ 에 對하여 $f(\xi) = 0$.

$X^{(0)}$ 의 境界點에서

$$f(x_1^{(0)}) < 0, \qquad f(x_2^{(0)}) > 0 \tag{1}$$

이라 하고, 또한 m_1, m_2 를 差分像(divided differences)

$$0 < m_1 \leq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x)}{x - \xi} \leq m_2 < \infty, \ \xi \neq x \in X^{(0)} \tag{2}$$

에 對하여 境界라 하자. 이러한 境界는 區間 $M = [m_1, m_2] \in I(\mathbb{R})$ 로 나타난다. (만약. $f(x_1^{(0)}) > 0, f(x_2^{(0)}) < 0$ 이고 $m_2 < 0$ 임을 假定하면 같은 表現이 역시 可能하다.) 위의 假定하에서 f 가 $X^{(0)}$ 에서 다른 根을 갖지 않는다는 것은 明確하다.

根 ξ 를 包含하는 初期區間 $X^{(0)}$ 에서 出發하여 다음과 같이 反復的으로 새로운 區間 $X^{(k)} (k \geq 1)$ 를 計算한다. 즉, $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$ 에 對하여

$$X^{(k+1)} = \left\{ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{M} \right\} \cap X^{(k)}, \quad k \geq 0 \tag{3}$$

反復法 (3) 은 다음과 같이 區間 演算을 사용하지 않고 쓸 수도 있다.

(3′)

$$x_1^{(k+1)} = \begin{cases} \max\{x_1^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단, } f(m(X^{(k)})) \geq 0) \\ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단, } f(m(X^{(k)})) \leq 0) \end{cases}$$

$$x_2^{(k+1)} = \begin{cases} m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단, } f(m(X^{(k)})) \geq 0\ ) \\ \min\{x_2^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단, } f(m(X^{(k)})) \leq 0\ ) \end{cases}$$

두 개의 公式 (3) 과 (3′)에서 記法 m 는 $I(\mathbb{R})$ 에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 函數이고, 주로 中點

$$m(X) = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{4}$$

로 사용한다. 이제 反復的인 計算에 따라 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 에 대한 가장 重要한 性質을 定理하고자 한다.

<u>定 理 4.1.1.</u> f 를 連續函數라 하고, ξ 를 區間 $X^{(0)}$ 에서 f 의 根이라 하자. (1)은 成立하고, 區間 $M = [m_1, m_2]$, $m_1 > 0$ 는 (2)에서 얻어진다고 하자. 그러면, 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 (3)에 따라 計算하며,

$$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0, \tag{5}$$

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \quad \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi, \tag{6}$$

를 滿足하거나, 그 數列은 有限的인 몇 段階를 거친 후 點 $[\xi, \xi]$ 에 收斂한다. 그리고 다음 不等式이 成立한다.

$$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)}). \tag{7}$$

따라서, 定理 4.1.1 은 주어진 假定하에서 反復區間 $X^{(k)}, (k \geq 0)$의 各各은 원하는 根을 包含하고 k가 한없이 커지면 f의 根 ξ에 收斂한다는 것을 保障해주고 있다.

우리는 지금부터 特別히 選擇된 點 m을 固定하고 다음의 따름定理를 얻는다.

<u>따름定理 4.1.2.</u> 定理 4.1.1 의 假定을 滿足하고

$$m(X^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right),\ k \geq 0$$

이라 하면 反復的인 計算에 의하여 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 에 對하여 不等式

$$d(X^{(k+1)}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)})$$

가 成立한다.

만약, $m(X^{(k)})$에 對한 中點이 選擇되어진다면, 그것은 모든 反復段階에서 包含되는 나비(폭)는 적어도 二等分된다는 事實이 保障된다. 差分像 (3)을 境界로 하는 區間 M은 定理 4.1.1은 물론 따름定理 4.1.2 에서 둘 다 必要하다. 만약, 函數 f가 連續的으로 微分可能하면 ($x \in X^{(0)}$에 對하여 $f'(x) \neq 0$ 이면) 平均値 定理를 使用하여

$$M = [\inf_{y \in X^{(0)}} f'(y),\ \sup_{y \in X^{(0)}} f'(y)]$$

와 같이 選擇되어질 수도 있다. 一般的으로 이 區間의 擴大集合(Superset)으로 어림잡을 수 있는데, 例를 들면 f'의 區間값 즉, $M = f'(X^{(0)})$로 計算한다. (3)의

方法을 使用하기 위하여 f의 差分像에 對한 境界의 固定된 點 m_1, m_2를 必要로 했다. 이러한 節次는 Newton 方法의 區間計算에서도 必要하다. 지금부터 만약, f가 連續的으로 微分可能하고 導函數 f'이 區間計算 $f'(X)$를 갖는다면 普通의 Newton 方法을 區間計算을 使用하여 變形시켜본다. (3)에서 M을

$$M^{(k)} = f'(X^{(k)}) \tag{8}$$

로 代置한다. 만약, 境界

$$0 < l_1 \leq f'(x) \leq l_2, \quad x \in X^{(o)}$$

를 안다면 $m_1 > 0$이고 式

$$M^{(k)} = [m_1^{(k)}, m_2^{(k)}] = f'(X^{(k)}) \cap L, \ L = [l_1, l_2] \tag{9}$$

를 使用할 수 있다는 것을 保障하게 된다. 따라서 $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$ 에 對하여 다음 式을 얻게 된다.

$$X^{(k+1)} = \{m(X^{(k)}) - f(m(X^{(k)}))/M^{(k)}\} \cap X^{(k)}, \ k \geq 0. \tag{10}$$

<u>定 理 4.1.3.</u> f는 連續的으로 微分可能한 函數이고, 關係式 (1)이 $X^{(0)}$에서 成立된다고 하자. $X^{(0)}$에 있는 f의 根은 ξ로 나타내고, 區間 $M^{(k)}$는 (8) 또는 (9)에 의하여 定義된다.

그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는

$$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0, \tag{11}$$

(12) $$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi$$

를 滿足하거나, 그 數列은 몇 번의 有限的인 段階를 거친 後에 $[\xi, \xi]$ 에 收斂한다. 그리고 다음 不等式이 成立한다.

(13) $$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &\le \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)}) \\ &\le \beta(d(X^{(k)}))^2, \quad \beta \ge 0. \end{aligned}$$

(證 明) : (11) : $x \in X^{(k)}$ 에 對하여 다음이 成立한다.

$$\frac{f(x)}{x-\xi} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\eta) \in M^{(k)}, \ \eta = x + \theta(\xi - x), \quad (0 < \theta < 1).$$

그러므로, 定理 2.4로 부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \xi &= m(X^{(0)}) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{f(m(X^{(0)}))/(m(X^{(0)}) - \xi)} \\ &\in \left\{ m(X^{(0)}) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{M^{(0)}} \right\} \cap X^{(0)} = X^{(1)}. \end{aligned}$$

$k > 1$ 에 對한 證明은 歸納法을 使用함으로써 成立된다.

(12),(13) : $f(m(X^{(k+1)})) > 0$ 임을 假定하자.

만약 $f(m(X^{(k)})) \geq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1^{(k)}$ 가 成立하면, (3′)을 應用하여

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\ &= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2^{(k)}} - x_1^{(k)} \\ &\leq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}) - \frac{(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} \\ &= (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}) \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) \\ &\leq d(X^{(k)}) \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) \\ &= \frac{m_2^{(k)} - m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} d(X^{(k)}) \end{aligned}$$

를 얻는다.

만약, $f(m(X^{(k)})) \leq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1^{(k)}$ 이면, (3′)을 應用하여 다음이 滿足된다.

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\ &= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2^{(k)}} - m(X^{(k)}) + \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1^{(k)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1^{(k)}}\left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) \\
&\le (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})\left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) \\
&\le d(X^{(k)})\left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) \\
&= \frac{m_2^{(k)} - m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} d(X^{(k)}).
\end{aligned}
$$

$f(m(X^{(k)})) < 0$ 인 경우에는 같은 方法으로 證明된다.

그러나, 만약 $f(m(X^{(k)})) = 0$ 이면 $m(X^{(k)}) = \xi$ 이고, $X^{(k+i)} = \xi,\ i \geq 1$, $d(X^{(k+1)}) = 0$ 이 되므로 (13)이 證明된다. 또한, $m_1^{(k)} < m_2^{(k)}$ 이므로

$$d(X^{(k+1)}) \le \gamma^{(k+1)} d(X^{(0)}), \quad 0 \le \gamma = \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) < 1$$

을 얻게 되는데, 이것은 다음 式과 같은 것이다.

$$\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)}) = 0.$$

(11)에서 $\xi \in X^{(k)}, k \geq 0$ 이고 $\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)}) = 0$ 이므로 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi$ 이다.

(12)의 첫번째 부분은 (3)에 對한 結果이다.

또한, 定理 3.4를 利用하여

$$
\begin{aligned}
d(X^{(k+1)}) &\le \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)}) \\
&= \frac{m_2^{(k)} - m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} d(X^{(k)}) \\
&\le \frac{d(M^{(k)})}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)}) \\
&= \frac{d(f'(X^{(k)}) \cap L)}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)}) \\
&\le \frac{d(f'(X^{(k)}))}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)}) \\
&\le \frac{c}{m_1^{(0)}} (d(X^{(k)}))^2 \\
&= \beta d(X^{(k)})^2, \quad \beta = \frac{c}{m_1^{(0)}} \ge 0
\end{aligned}
$$

를 얻는다. ■

4.2 고정점 반복법 (Fixed point iteration)

어떤 函數 g 에 對하여 $g(x) = x$ 로 表現되는 方程式에서의 根을 찾는 方法에 대해 살펴보고자 한다. 이러한 方程式의 根을 函數 g 에서의 固定點(Fixed point)이라 한다. 만약 주어진 임의의 函數 g 에서 固定點을 찾을 수 있다면, 根을 찾는 모든 問題들은 解決이 可能하게 된다. 例를 들어, $f(x) = 0$ 의 根을 찾는 問題는 $g(x) = x - f(x)$ 일 때, $g(x) = x$, $g(X) = X$ 의 固定點과 一致하게 된다. 그러므로, 解決해야 할 課題는 函數가 固定點을 언제 가지는가를 決定하는 것이며, 固定點 또는 固定點 區間들이 어떻게 決定될 수 있는가 하는 것들이다.

§1. 점 반복법 (Point iteration)

다음 定理는 固定點의 存在性(existence)과 唯一性(uniqueness)에 대한 充分條件을 提示한다.

<u>**定 理 4.2.1.**</u> 임의의 $x \in [a,b]$ 에 對하여 $g \in C[a,b]$, $g(x) \in [a,b]$ 라고 하면, 函數 g 는 區間 $[a,b]$ 에서 固定點을 가진다.

더구나, $g'(x)$ 가 區間 (a,b) 위에서 存在하고, 모든 $x \in (a,b)$ 에 對하여

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

이라고 假定하면, 函數 g 는 區間 $[a,b]$ 에서 唯一한 固定點 ξ 를 가진다. ■

<u>**定 理 4.2.2.**</u> 函數 g 를 區間 $[a,b]$ 에서 정의된 連續函數라 하고 임의의 $x \in [a,b]$ 에 對하여 $g(x) \in [a,b]$ 라 하자. 또한, 모든 $x \in (a,b)$ 에 대해

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

을 滿足하는 g' 가 區間 (a, b) 에서 存在한다고 하자.

만약, $p^{(0)}$ 를 區間 $[a, b]$ 에서의 임의의 數라고 하면,

$$p^{(n)} = g(p^{(n-1)}), \quad n \geq 1$$

로 定義되는 數列은 區間 $[a, b]$ 에 있는 唯一한 固定點 ξ 로 收斂할 것이다. ■

§2. 구간 반복법 (Interval iteration)

다음은 函數의 區間計算에 대한 基礎的인 固定點 定理이다.

<u>**定 理 4.2.3.**</u> 函數 f 는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$ 을 滿足하는 $X^{(0)}$ 에서의 連續函數라 하자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \geq 0$$

로 주어지는 反復法이

$$X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

를 滿足하면, 다음의 結果를 얻는다.

(1) 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 $X = f(X)$를 갖는

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X$$

를 滿足한다.

(2) $x = f(x)$ 를 滿足하는 各各의 $x \in X^{(0)}$ 는 X 에 包含된다. 즉,

$$\{x | x \in X^{(0)}, \ x = f(x)\} \subset X$$

가 成立한다.

(證 明)

(1) : 假定 $X^{(1)} \subset X^{(0)}$로 부터 다음이 滿足된다.

$$X^{(2)} = f(X^{(1)}) \subset f(X^{(0)}) = X^{(1)} \subset X^{(0)}.$$

그러므로 數學的 歸納法에 의해,

$$\cdots \subset X^{(3)} \subset X^{(2)} \subset X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

를 보일 수 있다. 定理 2.7로 부터 數列은 하나의 元素 $X \in I(\mathbb{R})$로 收斂함을 알 수 있다.

이제, 區間計算의 連續性은

$$X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \lim_{k\to\infty} f(X^{(k)}) = f(X)$$

를 意味한다.

(2) : $x \in X^{(0)}$는 $x = f(x)$를 滿足한다고 하자. 定理 2.4에 의해 다음을 滿足시킨다.

$$x = f(x) \in f(X^{(0)}) = X^{(1)}.$$

$$x = f(x) \in f(X^{(1)}) = X^{(2)}.$$

그러므로, 一般的으로 數學的 歸納法에 의하여

$$x \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

를 滿足하며 結果的으로 $x \in X$ 이다. ■

이제, 기초적인 固定點 定理인 定理 4.2.3을 약간 수정한 또 하나의 固定點 定理를 證明한다.

<u>定 理 4.2.4.</u> 函數 f 는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$ 를 滿足하는 $X^{(0)}$ 에서의 連續函數라 하자. 다음의 反復法을 생각해보자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \quad k \geq 0.$$

方程式 $\tilde{x} = f(\tilde{x})$ 를 滿足하는 $\tilde{x} \in X^{(0)}$ 가 적어도 하나는 存在한다고 假定하면, 다음의 結果를 얻는다.

(1) 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 $X = f(X) \cap X$ 를 갖는

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X$$

를 滿足한다.

(2) 方程式 $x = f(x)$ 를 滿足하는 各各의 $x \in X^{(0)}$ 는 X 에 包含된다. 즉,

$$\{x | x \in X^{(0)}, \ x = f(x)\} \subset X.$$

(證 明)

(1) : $\tilde{x} \in X^{(0)}$ 이므로 다음이 成立한다.

$$\tilde{x} \in f(X^{(0)}) \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

數學的 歸納法을 이용하여,

$$\tilde{x} \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

를 얻을 수 있다. 區間들의 共通部分은 항상 공집합이 아니므로, 定理 2.7에 의해 數列 $X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \cdots$는 X로 收斂한다. 따라서,

$$X = \lim_{k\to\infty} X^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} f(X^{(k)}) \cap (X^{(k)}) = f(X) \cap (X)$$

가 成立한다.

(2) : $x = f(x)$인 $x \in X^{(0)}$를 假定하면 다음이 成立한다.

$$x = f(x) \in f(X^{(0)}) \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

또한, 數學的 歸納法에 의하여

$$x \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

이며, 結果的으로 $x \in X$이다. ■

定理 4.2.3과 定理 4.2.4의 假定에서 存在하는 固定點은 반드시 唯一한 것은 아니다. 이것은 다음의 간단한 例에서 보여지고 있다.

(예) : 方程式 $X = X \cdot X \cdot X$ (단, $X \in I(\mathbb{R})$)을 생각해 보자. 이 式은 $I(\mathbb{R})$의 元素인 다음의 區間들에서 明白하게 滿足된다.

$$X = [-1, 1],\ [1, 1],\ [-1, -1],\ [0, 1],\ [-1, 0],\ [0, 0].$$

다음의 定理들은 固定點의 唯一性을 보여준다.

<u>定 理 4.2.5.</u> 函數 f 는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$ 을 滿足하는 $X^{(0)}$ 에서의 連續函數라고 하자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \geq 0$$

과

$r < 1$ 일 때 모든 $X, Y \subset X^{(0)}$ 에 對하여

$$q(f(X), f(Y)) \leq r \cdot q(X, Y)$$

임을 고려해보면, $X = f(X)$ 는 唯一한 固定點 $X^* \in I(\mathbb{R})$ 을 가진다. 뿐만 아니라, 이 反復法은 X^* 에 收斂한다.

(證 明) : 임의의 $k, m \geq 1$ 에 對하여 數列

$$\lim_{k \to \infty} r^k = 0, \quad \{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$$

이 코오시수열(Cauchy sequence)이므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
q(X^{(k+m)}, X^{(k)}) &\leq q(X^{(k+m)}, X^{(k+m-1)}) + \cdots + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\
&= q(f(X^{(k+m-1)}), f(X^{(k+m-2)})) + \cdot + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\
&\leq r^{(m-1)} \cdot q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) + \cdots + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} r^j \ q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\
&\leq (\frac{1}{1-r}) \cdot r^k \cdot q(X^{(1)}, X^{(0)}).
\end{aligned}$$

$I(\mathbb{R})$ 이 完備性(Complete)이므로,

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*, \quad X^* = f(X^*).$$

가 成立한다.

固定點의 唯一性(Uniqueness)은 다음으로부터 얻어진다.

$$q(X^*, Y^*) = q(f(X^*), f(Y^*)) \le r \cdot q(X^*, Y^*),$$

$$X^* \ne Y^*, \quad X^* = f(X^*), \quad Y^* = f(Y^*).$$

이 때, $r < 1$ 이므로 이 不等式은 矛盾이다. ■

<u>定 理 4.2.6.</u> 函數 f 는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$ 을 滿足하는 $X^{(0)}$ 에 있는 實變數 x 를 갖는 連續 實函數라고 하자. $f(x)$ 는 函數 f 의 式이다. 또한, $x \in X^{(0)}$ 에 對하여 $X^{(0)}$ 에서 $f'(x)$ 가 存在하고,

$$|f'(x)| \le k < 1, \quad x \in X^{(0)}$$

라고 假定하자.

이 때,

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \ge 0$$

$$X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

이고

$$d(f(X)) \le \rho \cdot d(X), \quad 0 \le \rho < 1$$

이 $X \subset X^{(0)}$ 에 對하여 明白하다고 하면, 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 다음의 性質을 갖는다.

(1) f 는 $X^{(0)}$ 에서 唯一한 固定點 ξ 를 갖는다.

(2) $\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0.$

(3) $X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots$ 는 $\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi$ 를 滿足한다.

(證 明)

(1) : 定理 4.2.1 에 의해 明白하다.

(2) : 定理 4.2.2 에 의해 明白하다.

(3) : $d(f(X)) \leq \rho \cdot d(X), \quad d(X^{(k+1)}) \leq \rho \cdot d(X^{(k)})$ 이므로

$$d(X^{(k+1)}) \leq \rho^{(k+1)} \cdot d(X^{(0)}).$$

이것은 다음을 意味한다.

$$\lim_{k \to \infty} d(X^{(k+1)}) = 0.$$

이미 어떤 k_0 에 대하여 $X^{(k_0+i)} = \xi,\ i \geq 1$ 임에도 불구하고 (2)는 $\xi \in X^{(k)},\ k \geq 0$ 임을 意味하므로

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi$$

가 成立한다. ■

(例 題) : 函數 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ 은 區間 $X^{(0)} = [1, 1.5]$ 에서 唯一한 根 ξ 를 가진다.

$$x = \frac{20}{(x^2 + 2x + 10)}$$

은 $x = g(x)$ 의 形式중의 하나이다. 函數

$$g(x) = \frac{20}{(x^2 + 2x + 10)}$$

은 定理 4.2.6의 條件을 滿足한다.

그러므로 다음이 成立한다.

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = [\xi, \xi], \quad k \geq 0.$$

[$\because$ • $|g'(x)| = \left| \frac{-20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2} \right| < \frac{x+1}{4} \leq \frac{2.5}{4} < 1, \quad x \in X^{(0)}$.

• 函數 g 는 $X^{(0)}$ 에서 減少한다.

• 만일 函數 g 가 微分可能하고 g' 이 有界이면, g 는 絶對連續(Absolutely continuous)이다.

• 임의의 $x, y \in X$ 에 對하여

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$$

를 滿足하는 常數 M 이 存在할 必要充分條件은 函數 g 가 絶對收斂 (Absolutely continuous)하고 $|g'| \leq M$ 이다.]

5. 응 용

이 장에서는 例題를 통하여 二次收斂法(Quadratically Convergent Method)과 固定點 反復法(Fixed-point iteration)의 性能을 比較해보고자 한다.

(例 題)　　$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

a)　이차수렴법

函數 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ 은 區間 $\mathbb{X}^{(0)} = [1, 1.5]$ 에서 唯一한 해 ξ 를 갖고 있다. 導函數 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ 에 對한 區間値 $f'(\mathbb{X})$ 는 모든 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}^{(0)}$ 에 대해 $0 \notin f'(\mathbb{X})$ 를 滿足한다. (8)과 (10)을 利用하여 우리는 $\mathbb{X}^{(k)} (k \geq 0)$ 를 얻을 수 있다. 이것들은 (4)를 利用하여 計算되었다. 프로그램 exam1.src에 의해 다음의 計算結果를 얻어낸다.

```
*****************************************************************
  N                    Nth Iterated interval
*****************************************************************
  1 [            1.35E+00,                  1.40E+00]
  2 [          1.3687E+00,                1.3689E+00]
  3 [    1.3688081075E+00,          1.3688081082E+00]
  4 [   1.36880810781E+00,         1.36880810783E+00]
*****************************************************************
Solution   >>>>>  [1.36880810781E+00,  1.36880810783E+00]
```

b)　고정점 반복법

a)에서와 마찬가지로 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ 은 區間 $\mathbb{X}^{(0)} = [1, 1.5]$ 에서 唯一한 해 ξ 를 갖고 있다. 앞의 例題에서 살펴본 바와 같이, 函數 $f(x) = x^3 + 2x^2 +$

$10x-20$은 $x=g(x), |g'(x)| \le k < 1$ 을 滿足하는 函數 $g(x) = \frac{20}{(x^2+2x+10)}$ 을 찾을 수 있으므로 固定點 反復法이 可能하다. 그 過程들은 이미 앞에서 言及했으므로 그 計算結果만을 보여주도록 하겠다. 프로그램 exam2.src에 의한 계산의 結果는 다음과 같다.

```
****************************************************************
  N                          Nth  Iterated  interval
****************************************************************
  1  [          1.3E+00,                1.5E+00]
  2  [         1.31E+00,               1.40E+00]
  3  [         1.35E+00,               1.40E+00]
  4  [         1.35E+00,               1.38E+00]
  5  [        1.366E+00,              1.374E+00]
  6  [        1.366E+00,              1.370E+00]
  7  [        1.368E+00,              1.370E+00]
  8  [       1.3683E+00,             1.3691E+00]
  9  [       1.3687E+00,             1.3691E+00]
  10 [       1.3687E+00,             1.3689E+00]
  11 [      1.36879E+00,            1.36885E+00]
  12 [      1.36879E+00,            1.36882E+00]
  13 [      1.36880E+00,            1.36882E+00]
  14 [     1.368804E+00,           1.368810E+00]
  15 [     1.368807E+00,           1.368810E+00]
  16 [    1.3688074E+00,          1.3688085E+00]
  17 [    1.3688079E+00,          1.3688085E+00]
  18 [    1.3688079E+00,          1.3688082E+00]
  19 [   1.36880808E+00,         1.36880817E+00]
  20 [   1.36880808E+00,         1.36880812E+00]
  21 [   1.36880810E+00,         1.36880812E+00]
  22 [  1.368808102E+00,        1.368808111E+00]
  23 [  1.368808106E+00,        1.368808111E+00]
  24 [  1.368808106E+00,        1.368808109E+00]
  25 [ 1.3688081076E+00,       1.3688081083E+00]
  26 [ 1.3688081076E+00,       1.3688081080E+00]
  27 [ 1.3688081077E+00,       1.3688081080E+00]
  28 [ 1.36880810777E+00,     1.36880810785E+00]
****************************************************************
Solution      >>>>>  [ 1.36880810777E+00,  1.36880810785]
```

例題에서 보았듯이 函數의 近似해를 구함에 있어서 二次收斂法과 固定點 反復法 사이에는 많은 性能의 差異를 보이고 있다. 위의 例題에서는 二次收斂法이 固定點反復法보다 훨씬 빠른 속도로 해에 接近하고 있음을 볼 수 있다. 固定點 反復法은 k의 값에 상관없이 函數 $x = g(x)$의 類型에 따라 구간값이 좁혀지고 있지 만, 二次收斂法에서는 k가 증가할수록 m_1과 m_2의 比率이 1에 가까와지므로 $(k+1)$의 구간폭은 固定點 反復法에 비해 상당히 좁혀진다. 그러므로, 二次收斂法이 固定點 反復法에 비해 性能이 높게 나타나고 있다.

예제 프로그램 I

```
PROGRAM  QUAD_exam1(input,output,lst);
$INCLUDE SF.LWC
$INCLUDE INTERVAL.LWC

VAR
  X0,X1,M,L:interval;
  exit:boolean;
  Tol:REAL; lst:text;
  cnt,Max_It:integer;
(****************************************************************************)
FUNCTION fx(x:interval):interval;
  begin
    fx:=x*x*x + intpt(2)*x*x + intpt(10)*x - intpt(20);
  end;
(****************************************************************************)
function fpx(x:interval):interval;
  begin
    fpx:=intpt(3)*x*x + intpt(4)*x + intpt(10);
  end;
(****************************************************************************)
function dia(x:interval):real;
  begin
    dia:=abs(x.sup - x.inf);
  end;
(****************************************************************************)
function median(x:interval):real;
  begin
    median:=(x.sup + x.inf)/2;
  end;
(****************************************************************************)
BEGIN    {OF MAIN}
  rewrite(lst,'c:exam1.dat');
  write('Input the initial interval   >>>>>');iread(input,X0);
  write('Input the Tolerance          >>>>>');readln(Tol);
```

```
write('Input the Maximum iteration number >>>>>');readln(Max_It);
exit:=false;
L:=fpx(X0);
cnt:=0;
write(lst,'The initial interval     >>>>>');iwrite(lst,X0);
writeln(lst);
write(lst,'The Tolerance            >>>>>');writeln(lst,Tol);
write(lst,'The Maximum iteration number >>>>>');writeln(lst,Max_It);
writeln(lst);
writeln(lst);
writeln(lst,'****************************************************');
writeln(lst,'    N                    Nth Iterated interval');
writeln(lst,'****************************************************');
while not(exit=true)
do begin
  cnt:=cnt + 1;
  M:=fpx(X0)**L;
  X1:=(intpt(median(X0)) - fx(intpt(median(X0)))/M)**X0;
  write(lst,cnt:4,'');iwrite(lst,X1);writeln(lst);
  if cnt>Max_It
  then begin
    exit := true;
    writeln(lst,'XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX');
    writeln(lst,'  The Maximum iteration number is exceeded!!!');
  end;
  if dia(X1) < Tol
  then begin
    writeln(lst,'****************************************************');
    exit := true;
  end
  else X0:=X1;
end;
writeln(lst);write(lst,'  Solution   >>>>>'); iwrite(lst,X1);
end.
```

```
The initial interval            >>>>> [1.0E+00,  1.5E+00]
The Tolerance                   >>>>> 1.00000000000E-10
The Maximum iteration number    >>>>>  30
****************************************************************
   N                         Nth  Iterated  interval
****************************************************************
   1 [             1.35E+00,                 1.40E+00]
   2 [           1.3687E+00,               1.3689E+00]
   3 [    1.3688081075E+00,          1.3688081082E+00]
   4 [   1.36880810781E+00,         1.36880810783E+00]
****************************************************************
Solution    >>>>>  [1.36880810781E+00,  1.36880810783E+00]
```

예제 프로그램 II

```
PROGRAM  QUAD_exam2(input,output,lst);
$INCLUDE SF.LWC
$INCLUDE INTERVAL.LWC

VAR
  X0,X1:interval;
  exit:boolean;
  Tol:REAL;  lst:text;
  cnt,Max_It:integer;
(**************************************************************************)
FUNCTION fx(x:interval):interval;
  begin
    fx := intpt(20)/(x*x + intpt(2)*x +intpt(10) );
  end;
(**************************************************************************)
FUNCTION dia(x:interval):real;
  begin
    dia := abs(x.sup - x.inf);
  end;
```

```
(*************************************************************************)
BEGIN       {OF MAIN}
  rewrite(lst,'c:exam2.dat');
  write('Input the initial interval  >>>>>');iread(input,X0);
  write('Input the Tolerance         >>>>>');readln(Tol);
  write('Input the Maximum iteration number >>>>>');readln(Max_It);
  exit := false;
  cnt := 0;
  write(lst,'The initial interval      >>>>>');iwrite(lst,X0);
  writeln(lst);
  write(lst,'The Tolerance             >>>>>');writeln(lst,Tol);
  write(lst,'The Maximum iteration number >>>>>');writeln(lst,Max_It);
  writeln(lst);
  writeln(lst);
  writeln(lst,'**************************************************');
  writeln(lst,'    N                Nth  Iterated  interval     ');
  writeln(lst,'**************************************************');
  while not(exit = true)
  do begin
    cnt := cnt + 1;
    X1 := fx(X0)**X0;
    write(lst,cnt:4,' ');iwrite(lst,X1);writeln(lst);
    if cnt > Max_It
    then begin
      exit := true;
      writeln(lst,'XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX');
      writeln(lst,'  The Maximum iteration number is exceeded !!!');
    end;
    if dia(X1)<Tol
    then begin
      writeln(lst,'**************************************************');
      exit := true;
    end
    else X0 := X1;
  end;
  writeln(lst);write(lst, '  Solution    >>>>> ');iwrite(lst,X1);
  writeln(lst);
  end.
```

```
The initial interval              >>>>> [1.0E+00,  1.5E+00]
The Tolerance                     >>>>> 1.00000000000E-10
The Maximum iteration number       >>>>>  30

************************************************************
   N                      Nth  Iterated  interval
************************************************************
   1  [           1.3E+00,                 1.5E+00]
   2  [          1.31E+00,                1.40E+00]
   3  [          1.35E+00,                1.40E+00]
   4  [          1.35E+00,                1.38E+00]
   5  [         1.366E+00,               1.374E+00]
   6  [         1.366E+00,               1.370E+00]
   7  [         1.368E+00,               1.370E+00]
   8  [        1.3683E+00,              1.3691E+00]
   9  [        1.3687E+00,              1.3691E+00]
  10  [        1.3687E+00,              1.3689E+00]
  11  [       1.36879E+00,             1.36885E+00]
  12  [       1.36879E+00,             1.36882E+00]
  13  [       1.36880E+00,             1.36882E+00]
  14  [      1.368804E+00,            1.368810E+00]
  15  [      1.368807E+00,            1.368810E+00]
  16  [     1.3688074E+00,           1.3688085E+00]
  17  [     1.3688079E+00,           1.3688085E+00]
  18  [     1.3688079E+00,           1.3688082E+00]
  19  [    1.36880808E+00,          1.36880817E+00]
  20  [    1.36880808E+00,          1.36880812E+00]
  21  [    1.36880810E+00,          1.36880812E+00]
  22  [   1.368808102E+00,         1.368808111E+00]
  23  [   1.368808106E+00,         1.368808111E+00]
  24  [   1.368808106E+00,         1.368808109E+00]
  25  [  1.3688081076E+00,        1.3688081083E+00]
  26  [  1.3688081076E+00,        1.3688081080E+00]
  27  [  1.3688081077E+00,        1.3688081080E+00]
  28  [ 1.36880810777E+00,       1.36880810785E+00]
************************************************************

Solution       >>>>>  [ 1.36880810777E+00,   1.36880810785]
```

6. 결 론

本文에서 다룬 區間 計算은 적절한 初期値를 잡고 近似解를 구하는데 重要하게 使用된다. 區間 計算을 使用했을 때의 效率性은 無理數와 有限素數로 表現될 수 없는 分數와 같은 數를 正確하게 컴퓨터에 入力시켜서 원하는 만큼 正確한 方程式의 近似解를 찾을 수 있는데 있다. 이와 같은 區間 計算을 利用한 二次 收斂法과 固定點 反復法의 性能 比較는 5장에서 例題를 通해 確認한 것처럼 二次 收斂法이 固定點 反復法보다 收斂速度가 빠르다는 사실을 알 수 있다.

그러나, 이 方法들을 使用함에 있어서 몇가지 問題點이 있었다.

첫째, 初期區間을 設定할 때 단 하나의 根만을 包含해야 하는 假定에 의해 그 區間을 어떻게 신속히 찾아낼 수 있는가 하는 것이다.

둘째, 특히 固定點 反復法에서 $f(x) = 0$일 때 $|g'(x)| \leq k < 1$을 滿足하는 $x = g(x)$인 函數 $g(x)$의 表現式을 적절하게 찾을 수 있는가 하는 것이다.

이러한 問題點들이 解決된다면, 많은 例題를 통해 두 方法의 性能 比較를 할 수 있으며, 區間計算을 사용한 方程式의 近似解를 구함에 있어서도 매우 有用할 것이다.

참고문헌

1. 송만석, 장건수, 수치해석학, 김영사, 1986.

2. 이경환, 송문섭, 수치해석, 희중당, 1984.

3. 홍준표, 이경이, 컴퓨터수치해석연습, 문운당, 1991.

4. Götz Alefeld, Jürgen Herzberger, Introductions to Interval Computation, Academic Press, 1983.

5. H.Ratschek, J.Rokne, Computer Methods for the Range of Functions, Halsted Press, 1984.

6. K.Nickel, The contraction mapping fixed point theorem in interval analysis. MRC Technical Summary Rep.No.1334, Madison, Wisconsin, 1973.

<Abstract>

A STUDY ON FIXED POINT ITERATION AND QUADRATICALLY CONVERGENT METHOD USING THE INTERVAL COMPUTATIONS

Ko, Yeon-Soon

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Kim, Do-Hyun

Root-finding problem is one of the most basic problem in numerical analysis.

In this thesis, we shall consider a method for including zeros of real function of one real variable x. We can use the interval computations to find zeros of the function. Among the many methods for root-finding, we shall study especially fixed point iteration and quadratically convergent method.

It can be used to find zeros of the function with non-accuracy coefficients and an approximation of solution in algebraic equations.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1994.

감사의 글

본 논문이 완성되기까지 세심한 학문지도를 해주신 김도현 교수님께 진심으로 감사 드립니다.

그리고, 학위과정을 무사히 마칠 수 있도록 깊은 관심과 충고, 조언을 아끼지 않으신 수학교육과 교수님들과, 항상 따뜻한 격려와 함께 용기를 주시고 든든한 울타리가 되주신 수학과 교수님들께 깊은 감사를 드립니다. 특히, 가장 힘들었던 시기에 충고와 격려로 큰 힘이 되주신 양성호 교수님, 김철수 교수님께 감사드립니다.

대학원 과정에서 그동안 함께 고생하고 많은 도움을 주신 김종석 선생님, 송임권 선생님, 문영봉 선생님께 감사드리며 기쁨을 함께 나누고자 합니다.

여러가지로 배려해주신 직장동료들, 그리고 부모님과 가족들에게 감사드립니다.

이 조그마한 기쁨을 모든 분들과 함께 나누고 싶습니다. 감사합니다.

1994년 8월