碩士學位請求論文

區間二等分法과 二次 收斂法에 關한 研究

指導教授 金 益 贊

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

洪 澤 龍

1993年 8月

區間二等分法과 二次 收斂法에 關한 研究

指導敎授 金 益 贊

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1993年 6月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 洪 澤 龍

洪澤龍의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1993年 7月 日

審査委員長 玄進五

審 査 委 員 金益贊

審 査 委 員 金道鉉

目　次

< 抄 錄 >

區間 二等分法과 二次 收斂法에 關한 硏究

洪 澤 龍

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 金 益 贊

본 論文에서는 一變數 函數의 근을 區間으로 接近하는 方法에 關해 硏究하고 특히 이등분법과 導函數가 必要한 Newton 方法에 대해 고찰해 보았다.

區間計算은 科學, 工學 等에 나타나는 問題의 計算 過程에 重要한 適用을 갖고 있으며, 區間計算을 사용 했을때의 效率性은 不正確한 데이타를 컴퓨터에 正確하게 入力할 수 있고 또한 願하는 만큼 方程式의 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

이 方法은 不正確한 係數를 갖는 函數의 根을 求하는데 緊要하게 사용될 것이다.

1. 序　　論

科學이나 工學에서 자주 일어나는 問題는 方程式 $f(x) = 0$의 根을 구하는 일이다. 5次 以上의 代數方程式의 根을 구하는 公式은 存在하지 않음이 잘 알려져있고 三角函數나 指數函數등 超越函數가 포함되어 있는 方程式의 根을 구하는 問題 또한 不可能한 경우가 많다. 一般的으로 方程式의 解를 정확한 數値로 구할 수 있는 公式은 대단히 간단한 경우에만 있을 뿐이다. 수치해법은 이들 문제를 푸는데 있어서 최후 手段이라 할 수 있다.

方程式의 近似解를 求하는 數値的 方法에는 3百年前 뉴우톤에 의해서 만들어진 Newton-Raphson 方法에서 부터 最近에 開發된 多項式函數에 關한 Quotient Difference 方法에 이르기까지 폭넓은 範圍로 되어 있는데 이들 方法의 共通되는 점은 中間置 定理를 이용하여 根이 存在하는 것을 確認한 後 그 區間內에 있는 任意의 한 點을 近似解로 取해 適當한 方法을 反復함으로써 참 根에 接近시켜 간다는 것이다.

本 論文에서는 方程式의 根을 찾기 위하여 이등분법과 Newton 方法을 區間計算(Interval computation)을 使用하여 變形 시킴으로써 願하는 近似解를 求하고 여러가지 問題點을 提起 하고자 한다. 區間計算을 이용 했을 때의 效率性은 실험, 관찰 등에서 얻어지는 부정확한 데이타를 정확하게 입력시킬 수 있고 무리수와 같은 데이타를 컴퓨터에 정확하게 입력시켜 원하는 근사해를 찾는데 도움을 준다.

本 論文의 2章에서는 實數 區間에서 4개의 二項演算 +,-,·,/ 와 距離를 定義하고 基本的인 性質들을 살펴본다.

3章에서는 區間計算을 이용한 連續 實函數 f에 대해 考察해 본다.

4章에서는 旣存的인 이등분법과 Newton 方法을 區間을 이용하여 變形했을 때의 性質들을 調査하고 성능을 비교했다.

5장에서는 한개의 예를 PASCAL-SC를 이용하여 프로그램해서 그 결과들을 확인 분석했다.

2. 實數區間計算

지금부터 實數 集合은 $\mathbb{R}$로 表示하고, $\mathbb{R}$의 元素는 小文字 $a, b, \cdots, y, z$로서 表示한다.

$$A = [a_1, a_2] = \{t |\ a_1 \le t \le a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

와 같은 형의 實數의 部分集合을 閉區間으로 부른다. 모든 閉區間의 集合은 $I(\mathbb{R})$로 表示하고 $I(\mathbb{R})$의 元素는 大文字 $A, B, \cdots, Y, Z$로서 表示한다. 實數 $x \in \mathbb{R}$는 $I(\mathbb{R})$에서의 특수한 元素 $[x, x]$로 생각할 수 있으며 그것을 點 區間으로 부른다.

<u>定 義 2.1.</u> $* \in \{+, -, \cdot, /\}$를 實數集合 $\mathbb{R}$에서 二項演算이라 하자. 만약 $A, B \in I(\mathbb{R})$이면, $A * B = \{z = a * b | a \in A, b \in B\}$를 $I(\mathbb{R})$ 에서 二項演算이라고 定義한다. ■

나눗셈의 경우에서는 $0 \notin B$로 하자. 區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$에서 演算은 다음과 같이 明確히 計算 되어질 수 있다.

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] = A + [-1, -1] \cdot B,$$

$$A \cdot B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\},\ \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}],$$

$$A / B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right]$$

<u>定 義 2.2.</u> 만약 $r(x)$가 $\mathbb{R}$에서 連續 一項演算 이면,

$$r(X) = [\min r(x), \max r(x)] \qquad 단, \quad x \in X$$

는 $I(\mathbb{R})$상에서 一項演算 으로 定義한다.■

$I(\mathbb{R})$에서 一項演算에 대한 例를 보면, $X^k(k \in \mathbb{R})$, e^X, $\ln X$, $\sin X$, $\cos X$ 等이다.

<u>定 理 2.3.</u> A, B, C 를 $I(\mathbb{R})$의 元素라 하면 다음 性質이 成立한다.

(1) $A + B = B + A \quad A \cdot B = B \cdot A$ (交換法則)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C), \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (結合法則)

(3) $X = [0,0]$과 $Y = [1,1]$은 덧셈과 곱셈에 關한 項等元이다. 즉, 모든 $A \in I(\mathbb{R})$에 對하여,

$$A = X + A = A + X \Leftrightarrow X = [0,0]$$

$$A = Y \cdot A = A \cdot Y \Leftrightarrow Y = [1,1],$$

(4) $a_1 \neq a_2$인 任意의 元素 $A = [a_1, a_2] \in I(\mathbb{R})$은 $+$ 와 $\cdot$에 對한 逆元을 갖지 않는다. 그럼에도 불구하고 다음이 成立한다.

$$0 \in A - A, \quad 1 \in A/A,$$

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C \quad \text{(部分的인 分配法則)}$$

(5) 任意의 實數 a에 對하여, $a(B + C) = aB + aC$

모든 $b \in B$, $c \in C$에 對하여 $bc \geq 0$ 이면, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. ■

<u>定 理 2.4.</u> $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(\mathbb{R})$ (단, $k = 1, 2$)이고 $A^{(k)} \subset B^{(K)}$ (단, $+k = 1, 2$)이라 하면, 演算 $* \in \{+, -, \cdot, /\}$에 對하여

$$A^{(1)} * A^{(2)} \subset B^{(1)} * B^{(2)}$$

이 成立 한다. ■

定義 2.2 의 一項演算 $r(X)$는 다음의 類似한 性質을 갖는다.

$$X \subset Y \Rightarrow r(X) \subset r(Y)$$

$$x \in X \Rightarrow r(x) \in r(X).$$

지금 實數區間의 集合 $I(\mathbb{R})$에서 距離의 槪念을 紹介한다.

定 義 2.5. 두개의 區間 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in I(\mathbb{R})$사이의 距離는 다음과 같이 定義 한다.

$$q(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|,\ |a_2 - b_2|\}. \quad ■$$

定 理 2.6. 定義 2.5의 距離를 갖는 距離空間 $(I(\mathbb{R}, q)$는 完備性(Complete)이다. ■

(이것은 區間들의 모든 Cauchy 數列은 한 區間 으로 收斂 한다는 것이다.)

定 理 2.7. $A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \cdots$인 區間들의 數列 $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 區間 $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$에 收斂한다. ■

定 理 2.8. 定義 2.1에 紹介한 區間 사이의 演算 $+, -, \cdot, /$은 連續이다. ■

定 義 2.9. $I(\mathbb{R})$에 속하는 任意의 區間 $A = [a_1, a_2]$의 절대값은 다음과 같이 定義 한다.

$$|A| = q(A, [0, 0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}. \quad ■$$

定 義 2.10. 區間 $A = [a_1, a_2]$의 나비(폭)는

$$d(A) = a_2 - a_1 \geq 0$$

으로 定義한다. ■

點區間의 集合은 $\{A \in I(\mathbb{R}) | \, d(A) = 0\}$로 表示 될 수 있다. 위의 定義로 부터 다음의 性質을 얻을 수 있다.

$$A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$$

$$d(A \pm B) = d(A) + d(B).$$

定 理 2.11. $I(\mathbb{R})$에 속하는 任意의 區間 A, B에 對하여 다음 性質이 成立된다.

(1) $d(A) = |A - A|$,

(2) $A \subset B \Rightarrow \frac{1}{2}(d(B) - d(A)) \leq q(A, B) \leq d(B) - d(A)$. ■

3. 區間값과 實函數의 値域

이 節에서는 連續 實函數 f에 對해 考察해 본다. f로 부터 表現 되는 어떤 式 $f(x)$는 獨立變數에 對한 函數 f의 값을 決定하는 計算過程이다. f로 부터 表現되는 모든 式은 有限個의 演算과 被演算數로 構成 된다고 생각 할 수 있다. 만약 f로 부터 表現되는 어떤 式이 常數 $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$을 갖는 다면, 이것을 $f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$로 쓰기로 한다. 여러가지 問題들을 간단히 하기 위하여, 각 常數 $a^{(k)}$ $(0 \leq k \leq m)$는 한 式에서 오직 한 번만 나타난다고 假定 한다.

(例): 函數 g에 대한 2개의 式은

$$g^{(1)}(x; a) = \frac{ax}{1-x}, \quad x \neq 1, x \neq 0,$$

$$g^{(2)}(x; a) = \frac{a}{\frac{1}{x} - 1}, \quad x \neq 1, x \neq 0$$

이다.

다음의 式

$$W(f, X; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)})$$
$$= \{f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) \mid x \in X,\ a^{(k)} \in A^{(k)},\ 0 \leq k \leq m\}$$
$$= [\min_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \leq k \leq m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}), \max_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \leq k \leq m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})]$$

는 $x \in X$와 $a^{(k)} \in A^{(k)}$, $0 \leq k \leq m$가 서로 獨立일때 그 函數 f의 모든 값들의 區間을 나타낼 것이다. 이 定義는 f의 式과 獨立이다.

(例):   앞 例에서의 函數 g와 $A = [0,1]$, $X = [2,3]$에 對하여

$$W(g^{(1)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{ax}{1-x} \mid 2 \le x \le 3,\ 0 \le a \le 1\} = [-2, 0]$$

$$W(g^{(2)}, [2,3]; [0,1]) = \{\frac{a}{\frac{1}{x}-1} \mid 2 \le x \le 3,\ 0 \le a \le 1\} = [-2, 0]$$

따라서,

$$W(g^{(1)}, X; A) = W(g^{(2)}, X; A)$$

그러나,

$$g^{(1)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,1][2,3]}{1-[2,3]} = [-3, 0]$$

$$g^{(2)}([2,3]; [0,1]) = \frac{[0,3]}{\frac{1}{[2,3]}-1} = [-2, 0]$$

이므로

$$g^{(1)}(X; A) \ne g^{(2)}(X; A)$$

어떤 實函數 f의 區間計算은 다음과 같이 定義 한다. 어떤 式이 函數 f로 주어 졌다고 하자. 이 式에서 區間으로 바꾼 모든 被演算數와 區間 演算으로 바꾼 모든 演算은 式 $f(X; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)})$ 로 表現된다. 만약 모든 被演算數가 定義 2.1과 定義 2.2에서 定義된 演算의 定義域 안에 있다면, 이것은 f에 대한 區間計算 또는 區間算術計算이라 부른다.

定理 3.1. f를 實變數 $x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$인 連續函數라 하고, f에 對한 어떤 式을

$$f(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이라 하자. 區間 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)},B^{(0)},\cdots,B^{(m)}$ 에 對한 區間計算을

$$f(Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)};B^{(0)},\cdots,B^{(m)})$$

으로 定義 하면 다음이 成立 한다.

(a) 모든 $X^{(k)}\subset Y^{(k)}$, $A^{(j)}\subset B^{(j)}$, $1\leq k\leq n$, $0\leq j\leq m$ 에 對하여,

$$W(f,X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})\subset f(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$$

(b) 모든 $X^{(k)}\subset Z^{(k)}\subset Y^{(k)},A^{(j)}\subset C^{(j)}\subset B^{(j)}$, $1\leq k\leq n$, $0\leq j\leq m$에 對하여,

$$f(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})\subset f(Z^{(1)},\cdots,Z^{(n)};C^{(0)},\cdots,C^{(m)})$$

이 성립한다. ■

(例) : 函數 f를 $f(x\,;a)=a-\dfrac{x}{1+x}$, $(x\neq -1)$이라 하고, $X=[-\frac{1}{2},1]$, $Z=[-\frac{1}{2},2]$, $A=C=[2,3]$을 選擇하면, 다음 關係를 얻는다.

$$W(f,[-\frac{1}{2},1]\ ;\ [2,3])=[\frac{3}{2},4]\subset f([-\frac{1}{2},1]\ ;\ [2,3])=[0,4]$$

$$f([-\frac{1}{2},1]\ ;\ [2,3])=[0,4]\subset f([-\frac{1}{2},2];[2,3])=[-2,4].$$

定理 3.1 (a) 에서 항상 等式을 얻을 수 있는 경우는 각각의 數 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$, $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$가 식 $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$에서 오직 한 번만 나타날 때이다.

__定 理 3.2.__ p를 다음 式으로 定義하는 實變數 x에 對한 多項式 이라 하자.

$$p(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$

$$= (\cdots((a^{(m)}x + (m-1))^{n_{m-1}} + a^{(m-2)})^{n_{m-2}} + \cdots + a^{(1)})^{n_1} + a^{(0)},$$

$$\text{단}, n_v \leq 2,\ 1 \leq v \leq m-1.$$

만약, 그 式에서 나타난 冪들 (powers) 이

$$X^{(k)} = [\min_{x \in X} x^{(k)}, \max_{x \in X} x^{(k)}]$$

와 같이 計算 되어 진다면,

$$W(p, X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) = p(X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$

이 된다. ■

(주 의): 一般的으로, $X^2 \neq X \cdot X$가 된다.

定理 3.1 의 一般的인 內容과 위에서 記述된 特別한 경우와 더불어 區間計算에 의한 어떤 函數 f의 置域에 對한 近似置의 性質에 關한 內容에 關心이 있다. 그러므로 一變數 函數인 경우에는 다음과 같이 體系化 시킬 수 있다.

定 理 3.3. f 를 實變數 x의 實函數라 하고, $f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$를 f의 任意의 式이라 하자. 새로운 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

은 各各에 나타난 實變數 x를 새로운 變數 $x^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, 로 代置 하므로써 定義된다. Y 와 $A^{(0)},\cdots,A^{(m)} \in I(\mathbb{R})$에 對하여, 區間計算 $f(Y;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$가 存在 한다고 하자. 또한 다음 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이 區間 Y에 있는 各 變數 $x^{(k)}$에 對하여 任意의 $x^{(j)} \in Y$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$, $a^{(j)} \in A^{(j)}$, $0 \leq j \leq m$에 對한 Lipschitz 條件을 滿足 한다고 하자. 그 밖의 記法(notation) 은 定理 3.1 에서와 같다. 그러면 $X \subset Y$ 에 대하여 다음이 成立한다.

$$q(W(f,X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}),f(X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})) \leq r \cdot d(X),\ \ r \geq 0. \ \blacksquare$$

定 理 3.4. f가 實變數 x의 實函數 이고 $f(x)$를 f에 對한 任意의 式 이라고 하자. 定理 3.3 의 모든 假定이 成立 된다고 하면, 任意의 $X \subset Y$ 에 對하여,

$$d(f(X)) \leq \rho \cdot d(X), \quad \rho \geq 0$$

이 成立 한다. ■

4. 區間 二等分法과 二次 收斂法

4.1 區間 二等分法

一變數인 경우, 二等分法은 中間値 定理에 基礎를 두고 있다. 區間 $[a,b]$에서 定義되고 $f(a)$와 $f(b)$가 서로 다른 符號를 가진 連續函數 f가 주어졌다고 가정하자. 그러면 中間値 定理에 의해 $a < p < b$이면서 $f(p) = 0$를 滿足하는 p가 存在하게 된다. 問題 解決의 單純性을 위해 區間 $[a,b]$사이에 $f(x) = 0$을 滿足하는 x가 唯一하게 存在한다고 가정하자.

區間 二等分法의 方法은 初期 區間 $[a,b]$를 二等分해서 그 중에 解를 包含하는 區間을 구한다. 이 方法을 繼續的으로 수행하면 된다.

우선 $\mathbb{X}_0 = [a,b]$라고 놓고, $m_0 = (\mathbb{X}_0.\sup + \mathbb{X}_0.\inf)/2$라고 하자. 이때 $\mathbb{X}$와 $\mathbb{Y}$를 각각

$$\mathbb{X} = \frac{\mathbb{X}_0}{2} + \frac{\mathbb{X}_0.\inf}{2}, \qquad \mathbb{Y} = \frac{\mathbb{X}_0}{2} + \frac{\mathbb{X}_0.\sup}{2}$$ 라고 하자.

그러면 $\mathbb{X} = [a, m_0]$, 그리고 $\mathbb{Y} = [m_0, b]$가 된다. 만약 $0 \in f(\mathbb{X})$이면 $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$가 되고 아니면 $0 \in f(\mathbb{Y})$이면 $\mathbb{X}_1 = \mathbb{Y}$ 가 된다. 마찬가지 方法으로 이 過程을 繼續하면 $\mathbb{X}_{n-1}$를 구한 수 있고 $\mathbb{X}_n$은 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_{n-1} + \mathbb{X}_{n-1}.\inf)/2$아니면 $\mathbb{Y} = (\mathbb{X}_{n-1} + \mathbb{X}_{n-1}.sup)/2$가 될 것이다. 그리고 각 $\mathbb{X}_n$에 대해 $0 \in f(\mathbb{X}_n)$을 滿足하게 된다. 물론 이때 $f(x)$의 表現式은 定理 3.2 를 滿足하겠끔 하는 것으로 택한다.

그러면 $\mathbb{X}_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$이 되고 $\mathbb{X}_0$이 폐구간이기 때문에 $\lim_{n\to\infty} \cap \mathbb{X}_n = p$가 성립한다. 그러므로 우리는 정해(exact solution)에 충분히 가까운 區間解를 찾을 수 있다.

4.2 二次 收斂法

주어진 區間 $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ 에서 하나의 根을 갖는 連續函數 f 를 생각한다. 즉,어떤 $\xi \in X^{(0)}$ 에 대하여 $f(\xi) = 0$.

$X^{(0)}$ 의 境界點에서

$$f(x_1^{(0)}) < 0, \qquad f(x_2^{(0)}) > 0 \tag{1}$$

이라 하고, 또한 m_1, m_2 를 差分像(divided differences)

$$0 < m_1 \le \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x)}{x - \xi} \le m_2 < \infty, \; \xi \ne x \in X^{(0)} \tag{2}$$

에 對하여 境界라 하자. 이러한 境界는 區間 $M = [m_1, m_2] \in I(\mathbb{R})$ 로 나타난다. (만약, $f(x_1^{(0)}) > 0, f(x_2^{(0)}) < 0$ 이고 $m_2 < 0$ 임을 假定하면 같은 表現이 역시 可能하다.) 위의 假定하에서 f 가 $X^{(0)}$ 에서 다른 根을갖지 않는 다는 것은 明確하다.

根 ξ 를 包含하는 初期區間 $X^{(0)}$ 에서 出發하여 다음과 같이 反復的으로 새로운 區間 $X^{(k)} (k \ge 1)$ 를 計算한다. 즉, $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$ 에 對하여

$$X^{(k+1)} = \left\{ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{M} \right\} \cap X^{(k)}, \quad k \ge 0 \tag{3}$$

反復法 (3) 은 다음과 같이 區間 演算을 사용 하지 않고 쓸 수도 있다.

$$x_1^{(k+1)} = \begin{cases} \max\{x_1^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (단, f(m(X^{(k)})) \ge 0) \\ m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (단, f(m(X^{(k)})) \le 0) \end{cases} \tag{3'}$$

$$x_2^{(k+1)} = \begin{cases} m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단 }, f(m(X^{(k)})) \geq 0) \\ \min\{x_2^{(k)}, m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단}, f(m(X^{(k)})) \leq 0) \end{cases}$$

두개의 公式 (3)과 (3') 에서 記法 m 는 $I(\mathbb{R})$ 에서 $\mathbb{R}$ 로가는 函數이고 中點

(4) $$m(X) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

가 가끔 사용 된다. 이제 反復的인 計算에 따라 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 에 對한 가장 重要한 性質을 定理 하고자 한다.

<u>定 理 4.1.</u> f 를 連續函數라 하고, ξ 를 區間 $X^{(0)}$ 에서 f 의 根 이라 하자. (1)은 成立하고 , (2)는 區間 $M = [m_1, m_2]$, $m_1 > 0$ 에서 成立한다고 하자. 그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 (3)에 따라 計算하며,

(5) $$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

(6) $$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \quad \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi,$$

를 滿足하거나, 그 數列은 有限的인 몇 段階를 거친후 點 $[\xi, \xi]$에 收斂 한다. 그리고 다음 不等式이 成立한다.

(7) $$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)}).$$

(證 明): (5) : (2)와 定理 2.4 에서 부터 다음을 얻는다.

$$\xi = m(X^{(0)}) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{f(m(X^{(0)}))/m(X^{(0)})}$$

$$\in \left\{ f(m(X^{(0)})) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{M} \right\} \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

$k > 1$에 對한 證明은 歸納法을 사용 함으로써 成立된다.

(6),(7) : $f(m(X^{(k)})) > 0$임을 假定 하자.

만약, $f(m(X^{(k)})) \geq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$ 이 成立 하면, (3')을 사용 하여

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\ &= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - x_1^{(k)} \\ &\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)} \right) - \frac{(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1}{m_2} \\ &= \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)} \right) \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \\ &\leq d(X^{(k)}) \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right). \end{aligned}$$

을 얻는다. 만약, $f(m(X^{(k)})) \leq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$ 이면,(3')을 사용 하여

$$
\begin{aligned}
d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\
&= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - m(X^{(k)}) + \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1} \\
&= \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\
&\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right) \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\
&\leq d(X^{(k)})\ (1 - \frac{m_1}{m_2}).
\end{aligned}
$$

$f(m(X^{(k)})) < 0$인 경우에는 같은 方法으로 證明이 된다. 그러나 만약, $f(m(x^{(k)})) = 0$이면 $m(X^{(k)}) = \xi$, 따라서 $X^{(k+i)} = \xi$, $i \geq 1$, $d(X^{(k+1)}) = 0$이 되므로서 (7)이 證明 된다. 또한, $m_1 \leq m_2$ 이므로

$$d(X^{(k+1)}) \leq \gamma^{k+1} d(X^{(0)}),\ 0 \leq \gamma = (1 - \frac{m_1}{m_2}) < 1,$$

을 얻게 되는데, 이것은 다음 式과 같은 것이다.

$$\lim_{k \to \infty} d(X^{(k+1)}) = 0.$$

(5)의 $\xi \in X^{(k)}$, $k \geq 0$ 이고 $\lim_{k \to \infty} d(X^{(k+1)}) = 0$이므로 $\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi$이다.

(6)의 첫번째 부분은 (3)에 대한 결과이다. ■

따라서, 定理 4.1 은 주어진 假定하에서 反復區間 $X^{(k)},(k \geq 0)$의 各各은 원하는 根을 포함하고 k 가 한없이 커지면 f의 根 ξ에 收斂한다는 것을 保障해 주고 있다.

우리는 지금 부터 特別히 選擇된 點 m을 固定 하고 다음의 따름定理를 얻는다.

<u>따름定理 4.2.</u> 定理 4.1의 가정을 만족하고

$$m(X^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right),\ k \geq 0,$$

이라 하면 反復的인 計算에 의하여 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$에 對하여 不等式

$$d(X^{(k+1)}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)})$$

가 성립한다. (證 明): $m(X^{(k)}) = \frac{1}{2}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)})$로 부터

(8) $$m(X^{(k)}) - x_1^{(k)} = \frac{1}{2}d(X^{(k)}).$$

를 얻는다. 이것을 (7)의 證明 過程에 代入하면 (8)을 얻을 수 있다. ■

만약, $m(X^{(k)})$ 에 對한 中點이 選擇 되어 진다면 ,그것은 모든 反復段階에서 包含되는 나비(폭)는 적어도 二等分 된다는 事實이 保障된다. 差分像 (3)을 境界로 하는 區間 M는 定理 4.1은 물론 따름定理 4.2에서 둘다 必要하다. 만약, 函數 f가 連續的으로 微分可能 하면 ($x \in X^{(0)}$에 對하여 $f'(x) \neq 0$이면) 平均値 定理를 사용하여

$$M = [\inf_{y \in X^{(0)}} f'(y),\ \sup_{y \in X^{(0)}} f'(y)]$$

와 같이 選擇 되어질 수도 있다. 一般的으로 이 區間의 擴大集合 (Superset) 으로 어림 잡을 수 있는데, 例를 들면 f'의 區間값 즉, $M = f'(X^{(0)})$로 計算한다. (3)의 方法을 사용하기 위하여 f의 差分像에 對한 境界의 固定된 點 m_1, m_2를 必要로 했다. 이러한 節次는 Newton 方法의 區間 計算에서도 必要하다. 지금부터 만약, f가 連續的으로 微分可能 하고 導函數 f'이 區間計算 $f'(X)$를 갖는다면 普通의 Newton 方法을 區間 計算을 사용하여 變形시켜 본다. (3)에서 M을

$$M^{(k)} = f'(X^{(k)}). \tag{9}$$

로 代置 한다. 만약,境界

$$0 < l_1 \leq f'(x) \leq l_2, \quad x \in X^{(0)}$$

를 안다면 $m_1 > 0$이고 式

$$M^{(k)} = [m_1^{(k)}, m_2(k)] = f'(X^{(k)}) \cap L,\ L = [l_1, l_2]. \tag{10}$$

를 사용 할 수 있다는 것을 保障 하게 된다. 따라서 $m(X^{(k)}) \in X^{(k)}$에 대하여 다음 式을 얻게된다.

$$X^{(k+1)} = \{m(X^{(k)}) - f(m(X^{(k)}))/M^{(k)}\} \cap X^{(k)},\ k \geq 0. \tag{11}$$

(11)을 사용하면 區間들로 이루어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는 定理 4.1 과 비슷한 內容으로 證明 할 수 있도록 만들어 진다.

定理 4.3. f는 連續的으로 微分 可能한 函數 이고, 區間 $X^{(0)}$에서 定理 3.4의 假定을 滿足 한다고 하자. 또한 關係式 (1)이 $X^{(0)}$에서 成立된다고 하자. $X^{(0)}$에 있는

f의 根은 ξ 로 나타내고,區間 $M^{(k)}$ 는 (9)또는 (10)에 의하여 定義 된다. 그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 는

$$\xi \in X^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots, \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \xi,$$

을 滿足 하거나, 그 數列은 몇번의 有限的인 段階를 거친 後에 $[\xi, \xi]$에 收斂한다. 그리고 다음 부등식이 성립한다.

$$(12) \qquad d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)})$$

$$\leq \beta(d(X^{(k)}))^2, \quad \beta \geq 0.$$

(證 明): $x \in X^{(k)}$에 對하여 다음이 成立한다.

$$\frac{f(x)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\eta) \in M^{(k)}, \ \eta = x + \theta(\xi - x), \quad (0 < \theta < 1).$$

그러므로 $M^{(k)}$에 對한 수립성의 증명은 定理 4.1에서와 같다. 그리고 定理 4.1 의 證明에서와 같이

$$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right) d(X^{(k)}) = \frac{m_2^{(k)} - m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}} d(X^{(k)})$$

를 얻고 定理 3.4를 이용하여

$$d(X^{(k+1)}) \leq \frac{d(M^{(k)})}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)}) \leq \frac{d(f'(X^{(k)}))}{m_1^{(0)}} d(X^{(k)})$$

$$\leq \frac{c}{m_1^{(0)}} (d(X^{(k)}))^2, \qquad \frac{c}{m_1^{(0)}} \geq 0$$

를 얻는다. ■

5. 應　　用

이 장에서는 例題를 갖고서 二次收斂法(Quadratically Convergent Method)과 區間二等分法(Interval Bisection Method)의 性能을 比較해 보도록 하겠다.

예제)　　$f(x) = x^{10} - x - 1$

a)　2차수렴법

函數 $f(x) = x(x^9 - 1) - 1$은 區間 $\mathbb{X}_0 = [1, 1.5]$에서 唯一한 해 ξ를 갖고있다. 導函數 $f'(x) = 10x^9 - 1$에 대한 區間値 $f'(\mathbb{X})$는 모든 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}_0$ 에 대해 $0 \notin f'(\mathbb{X})$를 滿足한다. (11)과 (9)를 이용하여 우리는 $\mathbb{X}_k(k \leq 0)$를 얻을 수 있다. 이것들은 (4)를 利用하여서 計算되있다. 프로그램 exam1.src에 의해 다음의 계산 결과를 얻어낸다.

```
************************************************************
  N                         Nthe Iterated interval
************************************************************
  1 [            1.0E+00,             1.3E+00]
  2 [           1.01E+00,            1.11E+00]
  3 [           1.07E+00,            1.09E+00]
  4 [         1.0756E+00,          1.0760E+00]
  5 [     1.07576603E+00,      1.07576610E+00]
  6 [ 1.07576606608E+00,   1.07576606609E+00]
************************************************************
  Solution  >>>>>[  1.07576606608E+00,  1.07576606609E+00]
```

b)　구간 이등분법

a)에서와 마찬가지로 函數 $f(x) = x(x^9 - 1) - 1$은 區間 $\mathbb{X}_0 = [1, 1.5]$에서 유일한 해 ξ를 갖고있다. $f(x)$의 表現式은 정리 3.2를 따르도록 했다. $0 \in f(\mathbb{X}_0)$을 滿足하기 때문에 區間 二等分法을 反復 施行할 수 있다. 그 過程들은 이미 앞에서 言及했기 때문에 여기서는 더이상 言及하지 않고 그 計算 結果만을 보여주도록 하겠다.

프로그램 $exam1_b.src$에 의한 計算의 結果는 표와 같다.

```
**************************************************************
 N                          Nth Iterated interval
**************************************************************
  1 [              1.0E+00,              1.3E+00]
  2 [              1.0E+00,              1.2E+00]
  3 [             1.06E+00,             1.13E+00]
  4 [             1.06E+00,             1.10E+00]
  5 [             1.06E+00,             1.08E+00]
  6 [            1.070E+00,            1.079E+00]
  7 [            1.074E+00,            1.079E+00]
  8 [            1.074E+00,            1.077E+00]
  9 [           1.0751E+00,           1.0762E+00]
 10 [           1.0756E+00,           1.0762E+00]
 11 [           1.0756E+00,           1.0760E+00]
 12 [           1.0756E+00,           1.0759E+00]
 13 [          1.07574E+00,          1.07581E+00]
 14 [          1.07574E+00,          1.07578E+00]
 15 [          1.07575E+00,          1.07578E+00]
 16 [         1.075759E+00,         1.075768E+00]
 17 [         1.075763E+00,         1.075768E+00]
 18 [         1.075765E+00,         1.075768E+00]
 19 [        1.0757656E+00,        1.0757666E+00]
 20 [        1.0757656E+00,        1.0757661E+00]
 21 [        1.0757658E+00,        1.0757661E+00]
 22 [        1.0757659E+00,        1.0757661E+00]
 23 [       1.07576602E+00,       1.07576609E+00]
 24 [       1.07576605E+00,       1.07576609E+00]
 25 [       1.07576605E+00,       1.07576608E+00]
 26 [      1.075766064E+00,      1.075766072E+00]
 27 [      1.075766064E+00,      1.075766068E+00]
 28 [      1.075766064E+00,      1.075766067E+00]
 29 [     1.0757660651E+00,     1.0757660661E+00]
 30 [     1.0757660656E+00,     1.0757660661E+00]
 31 [     1.0757660658E+00,     1.0757660661E+00]
 32 [     1.0757660659E+00,     1.0757660661E+00]
 33 [    1.07576606604E+00,    1.07576606610E+00]
**************************************************************
 Solution     >>>>>[  1.07576606604E+00,   1.07576606610E+00]
```

예제에서 보았듯이 二次收斂法과 區間二等分法 사이에는 많은 性能의 差異를 보이고 있다. 이러한 理由는 (12)에 나와 있는 式에 의해 쉽게 理解할 수 있다. 區間二等分法에서 $(k+1)$의 區間 폭은 k의 값에 상관없이 항상 $\mathbb{X}_k$의 1/2 이지만 二次收斂法에서는 k가 증가할수록 m_1 과 m_2의 比率이 1에 가까워지므로 $(k+1)$의 폭은 區間二等分法에 비해서 상당히 좁혀진다.

예제 프로그램

```
PROGRAM QUAD_exam1(input,output,lst);(exam1.src)
$INCLUDE SF.LWC
$INCLUDE INTERVAL.LWC

VAR
     X0,X1,M,L:interval;
     exit:boolean;
     Tol:REAL; lst:text;
     cnt,Max_It:integer;
(**********************************************************************)
FUNCTION fx(x:interval):interval;
  var
       ii:integer;
       tp:interval;
  begin
     tp:=intpt(1);
     for ii:=1 to 9 do
       tp:=tp*x;
     fx:=x*(tp-intpt(1))-intpt(1);
  end;
(**********************************************************************)
function fpx(x:interval):interval;
  var
       ii:integer;
       tp:interval;
  begin
     tp:=intpt(1);
     for ii:=1 to 9 do
       tp:=tp*x;
     fpx:=intpt(10)*tp-intpt(1);
  end;
(**********************************************************************)
function dia(x:interval):real;
  begin
     dia:=abs(x.sup-x.inf);
  end;
```

```
(*****************************************************************************)
function median(x:interval):real;
  begin
    median:=(x.sup+x.inf)/2;
  end;
(*****************************************************************************)
BEGIN                  {OF MAIN}
  rewrite(lst,'c:exam2.dat');
  write('Input the initial interval        >>>>>');iread(input,X0);
  write('Input the Tolerance               >>>>>');readln(Tol);
  write('Input the Maximum iteration num >>>>>');readln(Max_It);
  exit:=false;
  L:=fpx(X0);
  cnt:=0;
  write(lst,'The initial interval            >>>>>');iwrite(lst,X0);
  writeln(lst);
  write(lst,'The Tolerance                   >>>>>');writeln(lst,Tol);
  write(lst,'The Maximum iteration number    >>>>>');writeln(lst,Max_It);
  writeln(lst);
  writeln(lst);
  writeln(lst,'*********************************************************');
  writeln(lst,'   N                            Nth Iterated interval');
  writeln(lst,'*********************************************************');
  while  not (exit=true)
  do begin
    cnt:=cnt+1;
    M:=fpx(X0)**L;
    X1:=(intpt(median(X0))-fx(intpt(median(X0)))/M)**X0;
    write(lst,cnt:4,'  ');iwrite(lst,X1);writeln(lst);
    if cnt> Max_It
    then begin
      exit:=true;
      writeln(lst,'XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
      writeln(lst,'  The Maximum iteration number is exceeded!!!');
    end;
    if dia(X1)< Tol
    then begin
```

```
      writeln(lst,'*****************************************************
      exit:=true;
    end
    else X0:=X1;
  end;
  writeln(lst);write(lst,'      Solution  >>>>>');iwrite(lst,X1);
  writeln(lst);
end.
```

```
The initial interval          >>>>>[            1.0E+00,            1.5E+00]
The Tolerance                 >>>>> 1.00000000000E-10
The Maximum iteration number  >>>>>    30


*********************************************************
   N                        Nth Iterated interval
*********************************************************
   1 [             1.0E+00,             1.3E+00]
   2 [            1.01E+00,            1.11E+00]
   3 [            1.07E+00,            1.09E+00]
   4 [          1.0756E+00,          1.0760E+00]
   5 [      1.07576603E+00,      1.07576610E+00]
   6 [  1.07576606608E+00,  1.07576606609E+00]
**********************************************************

     Solution  >>>>>[  1.07576606608E+00,  1.07576606609E+00]
```



```
program bisection(input,output,lst);(examl_b.src)
$include sf.lwc
$include interval.lwc
var
    X0,X1,X2:interval;
    exit:boolean;
    tol:real;lst:text;
    cnt,Max_it:integer;
    (*****************************************************************)
```

```
function fx(x:interval):interval;
  var
      ii:integer;
      tp:interval;
  begin
    tp:=intpt(1);
    for ii:=1 to 9 do
      tp:=tp*x;
    fx:=x*(tp-intpt(1))-intpt(1);
  end;
  (*****************************************************************)
function dia(x:interval):real;
  begin
    dia:=abs(x.sup-x.inf);
  end;
  (*****************************************************************)
function median(x:interval):real;
  begin
    median:=(x.sup+x.inf)/2;
  end;
  (*****************************************************************)
begin    {of main}
  rewrite(lst,'c:exam2_b.dat');
  write('Input the initial interval            >>>>>');iread(input,X0);
  write('Input the Tolerance                   >>>>>');readln(tol);
  write('Input the Maximum iteration number    >>>>>');readln(Max_it);
  exit:=false;
  cnt:=0;
  write(lst,'The initial interval                 >>>>>');iwrite(lst,X0);
  writeln(lst);
  write(lst,'The tolerance                        >>>>>');writeln(lst,tol);
  write(lst,'The Maximum iteration number         >>>>>');writeln(lst,Max_it);
  writeln(lst);
  writeln(lst);
  writeln(lst,'**************************************************************');
  writeln(lst,'  N                      Nth Iterated interval        ');
  writeln(lst,'**************************************************************');
```

```
    while not (exit=true)
    do
    begin    {of while}
      cnt:=cnt+1;
      if (0 in fx(X0)) then
      begin {of if}
        X1:=X0/intpt(2)+intpt(X0.inf/2);
        X2:=X0/intpt(2)+intpt(X0.sup/2);
      end  {of if}
      else
      begin  {of else}
        writeln(lst,'**** This iteration is invalid  ****');
        exit:=true;
      end;  {of else}
      if (0 in fx(X1)**fx(X0)) then X0:=X1
      else if (0 in fx(X2)**fx(X0)) then X0:=X2
      else
      begin
        writeln(lst,'*** This iteration has wrong interval ***');
        exit:=true;
      end;
      write(lst,cnt:4,'  ');iwrite(lst,X0);writeln(lst);
      if cnt>Max_it
      then begin
        exit:=true;
        writeln(lst,'XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX');
        writeln(lst,'      The Maximum iteration number is exceeded!!!');
      end;
      if dia(X1)<tol
      then begin
        writeln(lst,'*********************************************************');
        exit:=true;
      end;

  end;    {of while}
  writeln;write(lst,'       Solution     >>>>>');iwrite(lst,X0);
  writeln(lst);
end.      {of main}
The initial interval                   >>>>>[                 1.0E+00,
1.5E+00]
```

```
The tolerance                          >>>>> 1.00000000000E-10
The Maximum iteration number           >>>>>    50
************************************************************
 N                            Nth Iterated interval
************************************************************
  1 [              1.0E+00,              1.3E+00]
  2 [              1.0E+00,              1.2E+00]
  3 [             1.06E+00,             1.13E+00]
  4 [             1.06E+00,             1.10E+00]
  5 [             1.06E+00,             1.08E+00]
  6 [            1.070E+00,            1.079E+00]
  7 [            1.074E+00,            1.079E+00]
  8 [            1.074E+00,            1.077E+00]
  9 [           1.0751E+00,           1.0762E+00]
 10 [           1.0756E+00,           1.0762E+00]
 11 [           1.0756E+00,           1.0760E+00]
 12 [           1.0756E+00,           1.0759E+00]
 13 [          1.07574E+00,          1.07581E+00]
 14 [          1.07574E+00,          1.07578E+00]
 15 [          1.07575E+00,          1.07578E+00]
 16 [         1.075759E+00,         1.075768E+00]
 17 [         1.075763E+00,         1.075768E+00]
 18 [         1.075765E+00,         1.075768E+00]
 19 [        1.0757656E+00,        1.0757666E+00]
 20 [        1.0757656E+00,        1.0757661E+00]
 21 [        1.0757658E+00,        1.0757661E+00]
 22 [        1.0757659E+00,        1.0757661E+00]
 23 [       1.07576602E+00,       1.07576609E+00]
 24 [       1.07576605E+00,       1.07576609E+00]
 25 [       1.07576605E+00,       1.07576608E+00]
 26 [      1.075766064E+00,      1.075766072E+00]
 27 [      1.075766064E+00,      1.075766068E+00]
 28 [      1.075766064E+00,      1.075766067E+00]
 29 [     1.0757660651E+00,     1.0757660661E+00]
 30 [     1.0757660656E+00,     1.0757660661E+00]
 31 [     1.0757660658E+00,     1.0757660661E+00]
 32 [     1.0757660659E+00,     1.0757660661E+00]
 33 [    1.07576606604E+00,    1.07576606610E+00]
************************************************************
      Solution     >>>>>[  1.07576606604E+00,  1.07576606610E+00]
```

6. 結　論

區間 計算은 自然現實에 나타나는 問題를 解決하는 데 重要한 適用을 갖고 있으며, 區間 計算을 使用했을 때의 效率性은 無理數와 有限素數로 表現될 수 없는 分數와 같은 數를 正確하게 컴퓨터에 入力시켜 원하는 만큼 正確한 方程式의 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

區間 計算을 利用한 二等分法과 Newton方法의 性能 比較는 5장에서 例題를 通해 確認한 것처럼 二次收斂法이 區間二等法보다 收斂 速度가 빠르다는 사실을 알 수있다. 그러나 이 方法들을 使用함에 있어서 어느 程度 制約點들이 있었다. 初期區間을 設定함에 있어서 단하나의 解만을 포함해야만 하는 假定과 函數의 表現式에 있어서 우리가 원하는 만큼의 表現式을 찾을 수 있느냐는 問題點들이 있다. 이러한 問題點을 解決할 수 있다면 많은 例題를 통해 두 方法의 性能 比較는 물론 區間 計算을 使用한 固定點 反復法과의 性能 比較도 자세히 할 수 있을 것이다.

參考文獻

1. 송만석, 장건수, 수치해석학, 김영사, 1986

2. 이경환, 송문섭, 수치해석, 희중당, 1984

3. 김근시, 김도현, 구간계산을 사용한 Newton방법에 관한 연구, 과학교육 제9권, 1992.

4. Gotz Alefeld, Introductions to Interval Computation Academic Press, 1983.

<Abstract>

A STUDY ON INTERVAL BISECTION METHOD AND QUADRATICALLY CONVERGENT METHOD

Hong, Taek-Young

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Kim, Ik-Chen

In general, interval arithmetic has a number if significant applications in scientific, engineering and statistical computation.

In this thesis, we shall consider a method for including zeros of real function of one real variable x. Among the many methods for root-finding, we shall study especially Bisection Method and newton method which use derivatives.

It can be used to find zeros of the function, including non-accuracy doefficients.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1993 .

感謝의 글

본 論文이 完成될 수 있도록 硏究에 바쁘신 가운데서도 恒常 세심한 配慮와 指導를 해주신 金道鉉敎授님과 金益贊敎授님, 그리고 그동안 깊은 關心과 忠告와 激勵를 아끼지 않았던 數學敎育科 · 數學科의 모든 敎授님들께 眞心으로 感謝드립니다.

아울러, 學位 過程을 마칠 수 있도록 物心兩面으로 協助해 주고 激勵해 주신 濟州第一中學校 校長 · 校監先生님을 비롯한 여러 同僚 先生님께 感謝드리며, 많은 어려움 속에서도 끊임없는 忍耐와 사랑으로 內助해 준 全聖玉씨와 健康하고 씩씩하게 자라는 東奕 · 東鎬 그리고 父母님과 이 조그마한 成就의 기쁨을 함께 나누고자 합니다. 感謝합니다.

1993年 8月

洪 澤 龍