

碩士學位論文

拘束條件에 의한 構造物의 構造解析
技法에 關한 研究

指導教授 徐 日 教



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

濟州大學校 産業大學院

建設環境工學科

梁 起 禎

2004

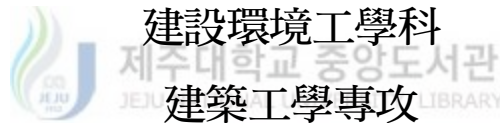
拘束條件에 의한 構造物의 構造解析 技法에 關한 研究

指導教授 徐 日 教

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함.

2004年 月 日

濟州大學校 産業大學院



梁 起 禎

梁起禎의 工學 碩士學位 論文을 認准함.

2004年 月 日

委員長 _____ 印

委 員 _____ 印

委 員 _____ 印

목 차

목 차	i
abstract	ii
I. 서 론	1
1. 연구 배경	1
2. 연구 목적	3
3. 기존의 연구	4
4. 연구 내용	5
II. 구속조건을 고려한 평형방정식	7
1. Lagrange와 Hamilton의 이론	7
2. 구속 조건과 일반화 좌표	8
3. 평형방정식	9
4. 구속 력	14
5. 구조물의 분해 및 합성	17
6. 소 결	18
III. 구속된 구조물의 정적 해석	19
1. 구속조건을 고려한 연속계	19
2. 기하학적으로 불규칙한 유공 보	22
3. 소 결	26
IV. 동적 특성 및 실시간 시스템 인식	27
1. 구속된 구조물의 특성 평가	27
2. 시스템 인식법	30
3. 소 결	36
V. 결 론	38
참고문헌	40

Abstract

This study derives an explicit matrix form of equilibrium equations of structural systems subjected to constraints like compatibility conditions or linear displacement relations. The equation is obtained by minimizing a quadratic form of the variation in unconstrained and constrained displacements with respect to all constrained displacements which satisfy the constraints. And the physical meaning of constraint forces to be required to satisfy constraints is investigated. Based on the governing equation, the static behavior of continuous systems subjected to constraints. And using the displacement compatibility at each interface between substructures and modifying the previous results this study determines the equilibrium equation of the global structure with floating substructures. And this study provided an analytical method for real-time system identification by utilizing fundamental linear algebra and minimizing a quadratic form of the differences in physical properties calculated from the initially given properties and the next expected properties. The validity of the proposed method depends on the selected weighting matrix. Although it was observed that the proposed method gives reasonable values by the proper selection of the weighting matrix, the deficiency of this method like the proper selection of weighting matrix with time needs to be improved.

1. 서론

1. 연구 배경

구조물의 구조 해석은 구조물의 평형방정식이나 운동방정식과 구속 조건을 부여한 적절한 모델링에 의해 수행된다. 이때에 정적인 구속 조건은 지점 조건, 기하학적인(geometric) 조건, 적합조건(compatibility condition) 등을 포함한다. 또한 구속 조건이 부여되었을 경우에 이 구속 조건을 만족하기 위한 추가적인 힘이 필요하며 결과적으로 이 힘의 명확한 산정만이 주어진 조건을 만족하게 될 것이다. 예를 들어 부정정 구조물의 해석에서 구조물의 기하학적인 조건을 충족하기 위한 힘의 산정을 들 수 있다. 매트릭스 구조 해석이나 기타의 부정정 구조 해석법에 의해 해를 구할 수 있으나, 일반적으로 그 힘을 산정하기 위해서는 강성 행렬의 결정과 미지의 반력인 구속력을 산정하는 두 단계로 구분된다.

그럼에도 불구하고 기하학적으로 복잡한 구조물이나 응력이 교란되는 깊은 보와 같은 해석에서는 보다 간편하고 정확한 응력 해석법을 요구한다. 즉, 이러한 구조물일 경우에 많은 구속 조건들을 충족하여야 함에 불구하고 기존의 구조 해석법이나 라그랑지 승수법(lagrange multiplier method)들에 의한 접근 방법은 많은 계산량이나 수치해석에 의존해야만 한다.

또 한 예로서, 구조물이 기하학적으로 복잡할 경우에, 그 구조물을 여러 개의 하부 구조물들(substructures)로 분할하여, 이산계(discrete system)에 의해 이들 각 하부 구조물의 평형 방정식을 결정하고 이를 합성함으로써 전체 구조물에 대한 평형 방정식을 얻는 방법을 취한다. 예로서 구조물과 지반으로 이루어진 전체 구조물에 대한 정적 거동의 평가나 비행기의 날개와 본체에 의한 구조체를 들 수 있다. 구조물과 지반에 의

한 전체 구조물에 대해 구조물, 근접 지반, 그리고 원거리 지반으로 각각 구분하고 이들이 접촉하는 부분에 적합 조건을 부여함으로써 전체 구조물의 평형 방정식을 얻게 된다. 이러한 경우에도 각 하부 구조물의 접합점에서 적합조건을 충족하기 위한 구속력의 결정을 요한다. 이 경우에도 기존의 수치해석법들에 의한 접근은 계산량이나 그 정확성이 떨어지는 우려가 있을 수 있다.

구조물은 외부의 환경과 접하고 있으므로, 지진이나 각종 외부 하중은 부재에 손상을 입힌다. 국부적인 부재의 손상에 의한 부재 내력의 저하라도 구조물 전체의 파괴와 연관될 수 있으므로 손상 부위를 사전에 파악하여 적절한 보수 및 보강에 의해 내력을 회복시킴으로서 구조물의 적절한 유지관리가 행해질 수 있을 것이다. 이러한 측면에서 최근에는 구조물들에 대한 손상 부위를 추적하는 시스템 인식(system identification)에 대한 역할의 중요성이 대두되고 있다.

구조물이나 기계적 장치의 물리적인 현상을 설명하는 방정식의 수는 결정하고자 하는 미지수보다 일반적으로 작으므로 일반화된 역행렬 (generalized inverse matrix)을 사용하거나 최적화의 과정으로 가중 행렬을 사용하여 물리적인 현상을 묘사하게 된다. 즉, 자연 현상들을 명확히 설명할 수 있는 방정식의 수가 작기 때문이다. 따라서, 진동의 최적 제어(optimum control)에서나 신경망(neural network), 혹은 퍼지 제어(fuzzy control) 등에는 가중 행렬의 결정이 그 알고리즘의 효율성과 깊은 관련이 있게 되며, 이와 같은 가중 행렬과 관련된다.

구조물의 유지관리 측면에서 계측 시스템의 도입은 구조물의 내구성을 증진시키고 육안에 의한 구조물의 손상 부위를 발견하는 대신에 계측 장비들에 의한 손상 부위의 추적과 보수 및 보강 등이 적절히 행해질 것이다. 특히 최근의 건축물들은 초고층화 및 장경간화하는 추세에 있으므로 계측 장비의 도입은 필수적이며, 이와 동시에 시스템의 인식(system identification)에 대한 중요성이 증가하고 있음에도 불구하고 가중 행렬의 결정에 문제의 중요성이 있다.

이상에서 보는 바와 같이 기하학적인 조건을 충족시키기 위한 구속력의 산정이나 구조물의 물리적인 특성에 추적은 구조물의 거동과 측정된 데이터에 의한 구속조건의 충족을 요한다. 그러나 구속조건을 만족하는 결과를 위한 대부분의 접근 방법은 수치 해석에 의하며, 정역학의 경우에 후크(Hook), 동역학의 경우 뉴우턴(Newton)의 법칙 이후에 이러한 구속 조건이 고려된 정·동역학적인 접근 방법에 대한 연구들이 있었다. 그러나 현재까지 이에 대한 명확한 수식들이 제시되지 않은 바, 주로 수치해석에 의한다. 반면에 여러 수치해석법이 제시되었음에도 불구하고 이 방법에 의해 물리적인 특성을 규명하는 데에는 어려움이 있다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 구속조건이 주어질 경우에 명확한 형태의 수식을 제시하고 그 타당성을 검증한다.

2. 연구 목적

구조물의 정적 혹은 동적 거동을 제어하는 추가적인 구속조건들이 부여될 경우에 이를 묘사하고자 하는 많은 노력이 있었다. 구속조건이 부여될 경우에 이를 충족하기 위한 구속력의 결정이 구속된 거동을 결정하는 중요한 열쇠가 된다. 그러나 대부분의 방법은 수치해석에 의하며, 명확한 형태의 수식을 제시하지 못하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 구속조건이 부여되었을 경우에 명확한 형태의 평형방정식을 제시하는데 그 목적이 있다. 특히, 이 연구에서는 연속체(continuous system)의 거동과 불안정한 구조물을 안정 구조물에 접합될 경우에 그 해석 방법을 제시하게 된다. 일반적으로 대형 구조물의 구조 해석에서는 구조물을 여러 개의 하부 구조물로 분할하고 이를 합성하는 과정을 취하므로 불안정한 구조물의 합성하는데 어려움을 극복하는 방법이 될 것이다. 그리고, 동적 특성의 평가에서 일반화된 역행렬의 풀이 방법을 사용하여 구속조건이 부여될 경우에 구조물의 모드 형상을 결정하는 방법을 제시한다.

구조물에 지진이나 바람과 같은 동하중의 작용에 의해 구조물은 손상을 입게 됨에도 불구하고 구조물의 물성치인 강성, 질량 및 감쇠값들은 일정한 것으로 해석을 행한다. 그러나 실제로 구조물은 손상을 입고 그 물성치들은 실시간으로 다른 값을 나타내게 될 것이다. 따라서, 본 연구에서는 시스템 인식에 관한 문제로 측정된 값들을 사용하고 최소자승법(Least square method)을 사용하여 주어진 구조물의 물성치를 실시간으로 측정하는 방법을 제시한다. 이 방법은 가중 행렬을 일정하게 가정하고 있으므로 이에 대한 연구는 보다 행해질 필요가 있다.

3. 기존의 연구

하부 구조물로의 분할과 결합에 관하여 정적 축약법, 라그란지 승수법, 페널티법(penalty method)을 주로 사용하였으며, 그 연구의 대부분은 동적 시스템에 대한 동적특성을 규명하는 연구들이다. 1996년 Yang, Kuo, Liang¹⁾은 진동수 영역에서 구조물, 근접 지반과 원거리 지반에 대한 각각의 방정식을 산정하고 이를 정적 축약(static condensation)에 의해 결합시키는 방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 강체 진동 모드(rigid-body mode)를 고려할 수 없는 한계가 있다. 즉, 주어진 강성 행렬이 전계수 행렬(full rank matrix)이 아닐 경우에 정적 축약을 행할 수 없다.

1997년 Park, Justino, Felippa^{2),3)}는 구조해석을 위한 유한 요소 분할 및 합성법(finite element tearing and interconnection method, FETI)을 제안하였다. 이 방법은 라그란지 승수를 사용하였으며, 강체 거동을 명확히 설명할 수 없는 한계가 있다. 강체 거동에 대한 설명을 위해 1997년 Felippa와 Park⁴⁾은 direct flexibility method를 제시하였다. 이 방법은 자유-자유인 구조체의 유연성 행렬을 결정하는 방법으로 유연성 행렬이 전계수가 아닌 행렬이므로 그 타당성의 검증을 필요로 한다. 1998년에 Farhat, Lacour, Rixen⁵⁾은 구조체 내에 지정된 변위의 구속 조건이

부여될 경우에 FETI법을 확대 적용하는 방법을 수치 해석에 의해 제시하고 있다. 이상과 같은 연구들의 대부분은 명확한 형태의 수식 전개라고 보다는 수치 해석에 의하므로 복잡한 형태의 구조물일 경우에 이들 제시법들은 점점 더 복잡한 중간 과정을 요할 것이다.

2002년 은희창, 양근혁, 정현수⁶⁾는 여러 개의 하부 구조물로 이루어진 전체 구조물의 정적 평형 방정식을 유도하였다. 이 방법은 접촉면에서 발생하는 힘과 기타 모든 절점에서의 변위를 결정할 수 있으나, 강제 거동을 나타내는 하부 구조는 제시된 평형 방정식의 수정없이 적용하기 어렵다.

4. 연구 내용

본 연구는 크게 두 개의 영역으로 구분된다. 먼저, 정적인 상태에서 구속조건이 부여되었을 경우에 그 거동을 지배하는 방정식을 유도하고 그 적용에 의한 제시된 방법의 효율성을 입증하고자 다음의 연구가 포함된다.

(1) 구속조건 부여 전후의 포텐셜 에너지에 차이를 최소화하여 구속된 시스템의 평형방정식의 제시

(2) 제시된 구속력을 변형에너지의 원리로부터 그 의미 분석

(3) 이산계로 주어진 방정식을 그 활용에서 연속체의 활용으로 확대 적용

(4) 복잡한 구조물의 해석에 있어서 여러 하부구조물의 분해 및 합성 과정에 적용. 특히 하부 구조물이 불안정할 경우에 그 합성 방법의 제시

이상의 연구 내용을 연구의 제 1영역에 포함하며, 연구의 제 2영역에서는 구속조건을 고려한 동적인 거동에 대한 연구로서 다음의 내용을 포함할 것이다.

(1) 구속조건이 부여될 경우에 구조물의 동적인 특성인 모드 형상을 결정하는 방법의 제시

(2) 동적 외부 하중이 작용하는 동안 발생하는 시스템의 물리적인 특성을 결정하는 방법으로서, 건축물의 손상에 의한 실제의 물성치와 최초 건축물의 물성치와의 오차에 의한 목적 함수를 최소화함으로서 실시간 건축물의 물성치 결정

(3) 제시된 방법은 가중행렬에 영향 비교

이상의 연구를 통하여 구속조건에 의한 구조물의 정적 그리고 동적인 거동을 지배하는 방정식을 제시하고 그 타당성을 여러 적용을 통하여 입증한다.



II. 구속조건을 고려한 평형방정식

1. Lagrange와 Hamilton의 이론

단일 입자 또는 입자 계들은 일반적으로 시간과 공간에서 이들 계들의 운동을 결정하는 세 가지 형태의 조건을 만족하고 있다. 즉 운동방정식을 통해 계에 작용한 힘으로 표현되는 동역학적 조건과 보통 입자들의 위치 좌표나 속도 좌표의 초기 값 또는 어떤 보존되는 동역학적 양들로 표현되는 초기 조건들이다. 초기 조건에 의해 운동방정식의 무수히 많은 가능한 해들로부터 실제의 궤도가 선정된다. 뉴우턴의 법칙은 이들 두 형태의 조건들만을 만족하는 계의 거동을 연구하는데 전적으로 적합하다. (이 조건을 만족하는 것 이외에는 삼차원 공간에서 자유롭게 움직이는) 입자가 닫혀지게 되는 경우가 때때로 나타났었다. 이러한 경우에는 3차원 공간의 어떤 부분 공간 내에서 입자의 그 특수한 운동은 힘의 법칙의 동역학적 대칭성으로부터 나왔었다.

만일 계가 선형적으로 기하학적인 조건 또는 구속조건을 만족한다면 전적으로 새로운 상황이 일어난다. 이들은 힘 법칙과 상관없이 입자들의 좌표에 가해지는 조건들이다. 예를 들면 구면 진자의 동작은 구의 표면에서만 움직일 수 있도록 되어 있다. 기하학적인 조건들은 계의 입자들을 구속 조건들이 없었을 때 입자에 작용하는 모든 내력 및 외력의 벡터합의 방향과는 다른 방향으로 가속시키게 할 수 있다. 계가 구속조건을 받을 때는 소위 구속력이라는 부가적인 힘이 나타난다.

모든 구속력과 더불어 계의 작용하는 다른 힘들이 알려진다면 뉴우턴의 운동방정식을 사용하기 위해서는 먼저 구속 조건의 방정식과 계에 가해진 힘들로부터 구속력을 계산하여야 한다. 어떤 상황에서는 운동방정식도 필요로 한다. 구속력을 포함하지 않는 운동방정식을 만들기 위한 직접적이

고도 오히려 간편한 방법이 존재한다. 더욱이 힘이라는 개념이 전적으로 제거된다. 라그랑지에 의해서 도입된 이 이론은 구속 조건이 없는 계에도 똑같이 적용된다.

2. 구속 조건과 일반화 좌표

n 개의 입자들로 된 한 계를 고려하자. 이것은 각각 좌표계에서는 $3n$ 개의 시간의 함수인 위치좌표와 속도 좌표로 나타낼 수 있다.

$$x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n \quad (2.2)$$

$3n$ 개의 좌표 (2.1)은 $3n$ 차원 좌표 공간의 요소라 말할 수 있으며, $3n$ 차원 좌표 공간의 어떤 점도 실제 공간에서의 계의 배위를 나타낸다고 할 수 있다.

만일 계가 어떤 구속 조건도 받지 않는다면 입자들은 3차원 공간에서 자유롭게 움직이며 좌표들은 모두 서로 독립이다. 그러나 구속조건이 계에 가해지고 있으면 좌표들은 모두가 서로 독립은 아니며 이들은 임의의 값을 갖게 되지 않을 수 있다.

구속 조건은 다음과 같이 구별하여 정의된다. 구속조건들이 좌표들 사이에 대수적 관계식이 존재한다면 호로노믹(holonomic)하다고 말하며, 다음과 같은 관계 조건을 갖는다.

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0 \quad (2.3)$$

구속조건이 (2.3)의 형식으로 쓸 수 없을 때에도 비호로노믹(nonholonomic)하다고 한다. 가장 흔한 비호로노믹한 구속 조건은 부등

식 형식으로 표현된다. 또는 이들은 좌표의 미분을 포함할 때도 있다.

구속 조건의 다른 분류는 구속 조건이 시간함수냐 아니냐에 따라 이루어진다. 첫 번째 종류의 구속 조건은 레오노믹(rhenomic)하고 두 번째 종류의 구속 조건은 스크러노믹(sclernomic)하다고 말한다. 비호로노믹 구속 조건을 갖는 문제를 푸는 일반적인 방법은 존재하지 않는다. 만일 비호로노믹한 조건들이 미분방정식으로 표현되었다면 이들 미분방정식들은 운동방정식의 계와 연립하여 풀어야만 한다. 고전역학 대부분의 문제는 현대물리학의 대부분의 문제와 더불어 단지 호로노믹한 구속조건만을 가지고 있다고 본다. 본 연구에서는 호로노믹한 경우만을 고려하기로 한다.

c 개의 독립된 호로노믹한 구속 조건을 만족하는 계를 고려하자. 그러면 (2.3) 형식의 c 개의 독립된 방정식은 다음으로 표현된다.

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, c, \quad (2.4)$$

각 방정식은 임의의 한 좌표를 나머지 $3n - 1$ 개의 좌표들로 풀 수 있다. 그러면 $3n$ 개의 원래 좌표 중 임의의 c 개를 소거할 수 있으며 따라서 독립 좌표의 수는 $f = 3n - c$ 개가 된다. 이 f 를 계의 자유도라 부른다. 이것은 계에 비호로노믹한 구속 조건을 가하였을 때 얻는 자유도 보다는 더 크다.

3. 평형방정식

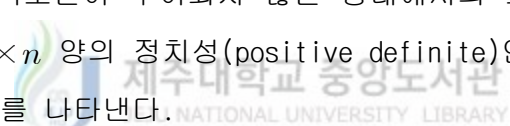
외부에서 작용하는 하중에 의한 구조물의 해석은 평형방정식과 구속조건으로 구성되는 수학적 모델링에 의한다. 구속조건은 구조물의 지지조건, 기하학적인 조건, 그리고 대형 구조물을 여러 개의 합성 구조물로 분해 및 합성하기 위한 접촉면에서의 적합조건 등을 들 수 있다. 구조 해석의 결과들이 구속조건을 만족한다 할지라도 구속된 궤도의 만족 여부는 구속력의 명확한 산정에 근거한다. 기존의 연구들은 주로 라그랑지 승수

에 의한 수치해석법을 사용하여 구속력을 결정하였다.

본 연구에서는 구조물의 포텐셜 에너지 원리를 사용하여 구속 조건이 부여된 구조물의 평형방정식을 제시한다. 그 방정식은 구속조건을 만족하는 모든 변위들 중에서 구속된 변위와 구속되지 않은 변위 사이의 변위량을 최소화하여 얻어지며, 구속력 또한 변화량을 최소로 하는 구속력을 실제의 구속력으로 유도하였다.

n 개의 변위인 $\tilde{u} = [\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_n]^T$ 로 묘사되는 구조물에서 포텐셜 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{2} \tilde{u}^T K \tilde{u} - \tilde{u}^T F \quad (2.5)$$

여기서, $\tilde{\pi}$ 는 구속조건이 부여되지 않은 상태에서의 포텐셜 에너지를 나타내며, K 는 $n \times n$ 양의 정칙성(positive definite)인 강성행렬을, F 는 $n \times 1$ 외력 벡터를 나타낸다. 

이 구조물에 다음과 같은 m 개의 선형인 구속조건이 부여되었다고 가정하자.

$$\phi_i(u) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n \quad (2.6)$$

여기서, 벡터 $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ 는 구조물의 구속조건을 만족하는 실제의 변위를 나타내며, c_i 는 상수를 나타낸다. 이 구속조건은 또한 다음의 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$Au = b, \quad (2.7)$$

여기서, A 는 $m \times n$ 실수의 행렬을, b 는 $m \times 1$ 벡터를 나타낸다.

구속조건의 부여로 인한 구조물의 실제 포텐셜 에너지는 다음으로 나타낼 수 있다.

$$\pi = \frac{1}{2}u^T K u - u^T F. \quad (2.8)$$

포텐셜 에너지 식(2.5)와 (2.6)을 변위 벡터 \tilde{u} 와 u 에 관하여 극대화하면 다음의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$F = K \tilde{u} \quad (2.9a)$$

$$F = K u. \quad (2.9b)$$

식 (2.9a)와 (2.9b)는 각각 구속조건이 부여 전후의 힘의 평형을 묘사한다.

실제의 변위 벡터와 구속조건이 부여되지 않은 상태에서의 변위 관계를 $u = \tilde{u} + \Delta u$ 로서 정의하고 식 (2.5)를 식 (2.8)로부터 빼면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\Delta \pi = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \Delta u)^T K (\tilde{u} + \Delta u) - (\tilde{u} + \Delta u)^T F - \frac{1}{2}\tilde{u}^T K \tilde{u} + \tilde{u}^T F \quad (2.10)$$

식 (2.10)은 구속조건에 의해 발생하는 포텐셜 에너지의 변화량을 나타낸다. 식 (2.9b)와 (2.7)에 $u = \tilde{u} + \Delta u$ 관계를 대입하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$F = K\tilde{u} + K\Delta u \quad (2.11a)$$

$$A(\tilde{u} + \Delta u) = b \quad (2.11b)$$

강성과 구속조건의 부여로 인해 발생한 변위 차의 곱으로 표현되는 식 (2.11a)의 두 번째 항은 구속조건을 만족하기 위해 필요한 구속력이라고 정의한다. 구속된 거동을 묘사하는 핵심 열쇠는 이 구속력을 결정하는 것이다. 구속력을 F^e 라 정의하면 식 (2.11)은 다음으로 쓸 수 있다.

$$F = K\tilde{u} + F^e. \quad (2.12)$$

구속된 구조물의 평형방정식을 유도하기 위하여 식 (2.11b)를 다음과 같이 수정하였다.

$$A\Delta u = b - A\tilde{u} \quad (2.13)$$

식 (2.13)을 식 (2.10)에 사용하면 식 (2.13)은 다음으로 표현된다.

$$AK^{-1/2}K^{1/2}\Delta u = b - A\tilde{u} \quad (2.14)$$

일반화된 역행렬의 기본적인 성질과 풀이로부터 $K^{1/2}\Delta u$ 에 관한 식 (2.14)의 풀이는 다음과 같다.

$$K^{1/2}\Delta u = (AK^{-1/2})^+(b - A\tilde{u}) + [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y \quad (2.15)$$

여기서, ‘+’ 는 일반화된 역행렬을 나타내며, y 는 임의의 벡터를 나타

낸다.

$\Delta\pi$ 를 Δu 에 관하여 최소화를 행하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\frac{d(\Delta\pi)}{d(\Delta u)} = K(\tilde{u} + \Delta u) - F = 0. \quad (2.16)$$

식 (2.16)을 식 (2.15)에 사용하기 위하여 식 (2.16)을 다음과 같이 변형하였다.

$$K^{1/2}\Delta u = F - K^{1/2}\tilde{u}. \quad (2.17)$$

식 (2.15)와 (2.17)로 부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$(AK^{-1/2})^+(b - A\tilde{u}) + [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y = F - K^{1/2}\tilde{u}. \quad (2.18)$$

$Q = [I - (AKL^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]$ 이라 하고 식 (2.18)을 y 에 관하여 풀고 일반화된 역행렬의 기본 성질을 사용하면 다음을 얻는다.

$$y = (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})z, \quad (2.19)$$

여기서, z 는 임의의 벡터를 나타낸다.

식 (2.19)를 식 (2.18)에 대입하고 그 결과를 정리하면 다음의 방정식을 얻는다.

$$K^{1/2}\Delta u = (AK^{-1/2})^+(b - A\tilde{u}) \quad (2.20)$$

그리하여 구속조건 부여 전후에 변위 변화량은 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta u = K^{-1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A\tilde{u}) \quad (2.21a)$$

그리고 식 (2.21a)의 양 변에 K 를 곱하면 구속력은 다음으로 계산된다.

$$F^c = K\Delta u = K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A\tilde{u}) \quad (2.21b)$$

식 (2.21)을 식 (2.12)에 사용하면 구속된 구조물의 평형방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$F = K\tilde{u} + K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A\tilde{u}) \quad (2.22a)$$

$$u = \tilde{u} + K^{-1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A\tilde{u}) \quad (2.22b)$$



식 (22)에서와 같이 구속된 상태에 거동은 구속되지 않은 상태에 거동과 구속으로 인한 영향의 합으로 표현됨을 알 수 있다. 이 결과는 은 희창 외 2인에 의해 유도된 결과와 일치한다.

4. 구속력

구속력은 주어진 구속조건을 만족하여야 한다. 구속력을 주어진 구속조건을 만족하는 모든 힘들중 최소의 값이다 가정하여 구속력은 다음과 같이 유도된다. 식 (2.12)를 식 (2.10)에 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} (F + F^c)^T K^{-1} (F + F^c)^T - (F^c)^T \tilde{u} - \frac{1}{2} F^T K^{-1} F$$

(2.23)

식(2.23)을 Δu 대신에 구속력 벡터 F^c 에 관하여 최소화하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{d(\Delta u)}{dF^c} = K^{-1}(F + F^c) - \tilde{u} \quad (2.24)$$

식 (2.24)를 0이라 하면 결과적으로 다음의 식을 얻게 된다.

$$F^c = 0 \quad (2.25)$$

또한, 식 (2.11b)는 다음으로 쓸 수 있다.

$$(AK^{-1/2})K^{-1/2}(F + F^c) = b \quad (2.26)$$

식 (2.26)을 구속력 벡터 F^c 에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$F^c = -F + K^{1/2}(AK^{-1/2})b + K^{1/2}[I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]s \quad (2.27)$$

여기서 벡터 s 는 임의의 벡터를 나타내며, 이로부터 구속조건을 만족하는 구속력은 무한하다고 볼 수 있다. 식 (2.25)을 식 (2.27)에 사용하고 벡터 s 에 관해 그 결과를 풀면 다음의 식을 얻는다.

$$s = [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})][K^{-1/2}F - (AK^{-1/2})^+b] + (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})r \quad (2.28)$$

여기서, r 은 임의 벡터를 나타낸다.

식 (2.28)을 식 (2.27)에 대입하고 정리하면 구속력은 다음으로 유도된다.

$$F^c = K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A\tilde{u}) \quad (2.29)$$

이 식은 식 (2.21b) 와 일치하며, 이로부터 구속력은 주어진 구속조건을 만족하는 모든 힘들 중에서 최소의 힘으로 설명됨을 알 수 있다. 구속력은 또한 구속되지 않은 상태와 구속된 상태의 탄성에너지로부터도 유도된다.

식 (2.9a)로 표현되는 하중-처짐 관계를 갖는 선형의 스프링을 고려하자. 식 (2.12)로부터 구속되지 않은 상태와 구속된 상태에 도식적인 관계를 Fig. 1로부터 알 수 있다. 탄성에너지 U_u 는 다음으로 나타낼 수 있다.



$$U_u = \frac{1}{2} \tilde{u}^T K \tilde{u} \quad (2.30)$$

식 (2.12)로부터 구속조건이 부여된 상태에 탄성에너지는 다음으로 표현된다.

$$U_c = \frac{1}{2} \tilde{u}^T K \tilde{u} + \int_u F^c du \quad (2.31)$$

구속되지 않은 상태와 구속된 상태에서의 변형에너지 차이는 다음으로 주어진다.

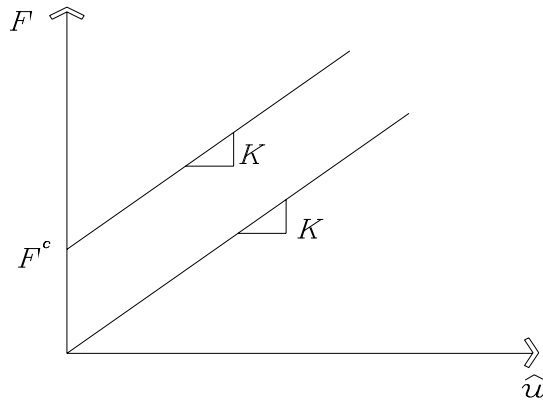


Fig. 1 Elastic energies at unconstrained and constrained states

$$\Delta U = \int_u F du = 0 \quad (2.32)$$



이 관계는 식 (2.25)의 조건하에서 만족되며, 이로부터 동일한 구속력이 유도될 것이다. 이 유도로부터 구속력은 구속된 상태에 탄성에너지는 구속되지 않은 상태에 탄성에너지로 수렴하는 데에 필요한 에너지로부터 요구되는 함임을 알 수 있다.

5. 구조물의 분해 및 합성

대형의 구조물은 여러 개의 하부 구조물로서 분해하고 이를 합성하는 구조 해석 방법을 취한다. 이때에 하부 구조물들의 합성에서는 접합면에서의 적합조건에 의해 합성되며, 이를 위해 접합면에서의 구속력의 산정을 요한다. 그러나 분해된 하부 구조물의 일부가 불안정한 구조물일 경우 즉, 자유-자유인 구조물일 경우에는 이를 합성하는데 어려움이 있다. 즉, 강성 행렬이 전계수(full-rank)가 아닌 반정치성(semi-positive

definite)의 행렬이다.

이 경우는 식 (2.22)를 수정하여 유도가 가능하며 그 결과는 현 두식에 의해 얻어진 결과와 동일하다. 따라서, 본 연구에서는 식 (2.22)의 효율성을 검증하는 방법으로서 이러한 합성 방법을 고려하였다.

6. 소결

구속조건이 주어질 경우에 그 평형방정식을 결정하는 지배방정식을 포텐셜 에너지를 사용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 구속조건이 부여되기 전후의 포텐셜 에너지의 변화량을 이때의 변위 차이에 관하여 최소화하여 새로운 형태의 평형방정식을 유도하였으며, 이를 검증하였다.

(2) 변위 차이량을 대신하여 구속력에 관하여 최소화를 실시하여 구속조건을 만족하는 구속력을 결정하였다. 이때에 구속력은 구속조건을 만족하는 모든 힘들 중에서 가장 작은 값임을 알 수 있었다.

(3) 구속력은 구속조건에 의해 나타나는 변형에너지의 차이를 최소화하는데 필요한 힘임을 유도하였다.

III. 구속된 구조물의 정적 해석

1. 구속조건을 고려한 연속계

전장에서 유도된 구속된 시스템에 대한 정적 거동은 이산계에 국한되어 적용이 가능하며, 구속조건이 부여된 연속계에 대하여는 배제되어 있다. 그러나 연속계는 적절한 방법인 유한요소 해석 등에 의하여 이산계로 전환이 가능하나, 본 연구에서는 연속계에 대하여 확대 적용하는 방법을 제시하였다.

Fig. 2에서와 같이 등분포하중을 받는 단순지지보를 중앙에서 스프링에 의해서 지지되는 구조물의 정적 거동을 고려하자. 이 구조물을 단순지지보와 스프링의 두 구조물로 분해하여 고려하고 이를 합성하는 방법을 취하였다. Fig. 2(b)에 분해된 두 개의 구조물을 볼 수 있다. 이 하부 구조물은 보의 중앙부와 스프링의 변위가 일치하여야 하는 적합조건을 만족하여야 한다. 따라서, 이 구속조건을 이용하여 두 개의 구조물은 합성될 것이다.

먼저, 단순지지보의 거동을 묘사하고자 이 보의 포텐셜 에너지를 다음으로 표현하였다.

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^L [w''(x)]^2 dx - \int_0^L q_0 w dx \quad (3.1)$$

여기서, q_0 는 단순지지보에 작용하는 등분포하중의 크기를 나타내며, w 는 보의 처짐을 나타낸다. 이 보의 처짐을 나타내는 곡선을 다음으로 가정하였다.

$$w(x) = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.2)$$

여기서, a 는 처짐의 진폭을 나타내며 식 (3.2)를 식 (3.1)에 대입하여 a 에 관하여 극대화하면 다음과 같이 진폭을 얻을 수 있다.

$$a = \frac{4q_0 L^4}{\pi^5 EI}. \quad (3.3)$$

그리하여 처짐 곡선은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(x) = \frac{4q_0 L^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.4)$$



(a)



(b)

Fig. 2: Continuous beam with a linear spring; (a) a combined structure, (b) subsystems separated to a beam and a spring

식 (3.4)는 등분포하중 q_0 의 작용 하에 처짐을 나타낸다.

보는 무한대의 자유도를 갖는 연속계이며, 스프링은 단자유도계로서 이루어져 있다. 비록 구속된 거동을 묘사하는 지배방정식이 이산 좌표계에 의해 표현된다 할지라도 주어진 시스템은 연속계를 포함하고 있다. 여기서 연속계를 단자유도의 이산계로서 가정을 하고 이 보와 스프링의 적합조건을 부여함으로써 전체 시스템의 평형방정식을 유도할 수 있을 것이다. 스프링에 의한 평형방정식과 두 하부 구조물의 적합 조건은 각각 다음으로 쓸 수 있다.

$$kw_a = 0 \quad (3.5)$$

$$w(x = \frac{L}{2}) = w_a \quad (3.6)$$

여기서, w_a 는 중앙부에서의 처짐을 나타낸다. 식 (3.4), (3.5), (3.6)을 사용하여 다음 방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w(x) \\ w_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4q_0L^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\frac{4L^4}{\pi^5 EI} + \frac{1}{k}} \begin{bmatrix} \frac{4L^4}{\pi^5 EI} \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4q_0L^4}{\pi^5 EI + 4kL^4} \sin \frac{\pi x}{L} \\ \frac{4q_0L^4}{\pi^5 EI + 4kL^4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

식 (3.7)로부터 보 중앙 스패에서의 처짐은 다음으로 계산된다.

$$w(x = \frac{L}{2}) = \frac{4q_0L^4}{\pi^5 EI + \pi kL^4} = w_a \quad (3.8)$$

이 적용은 앞서 제시된 방정식을 연속계로 확대 적용된 것으로 제시된 방법이 연속계에도 적용이 가능함을 볼 수 있다. 이 적용은 횡력에 저항하는 슬래브의 다이아프램 등의 거동을 해석할 수 있는 기본 식들로 사용될 수 있을 것이다.

2. 기하학적으로 불규칙한 유공 보

기하학적으로 불규칙한 구조물은 여러 개의 하부 구조물로 분해하고 이를 합성하여 구조 해석을 실시하는 것이 바람직할 것이다. Fig. 3은 기하학적으로 불규칙할 뿐만 아니라 보의 내부에 개구부를 설치하였으며, 내부의 응력 상태는 교란된(disturbed state) 보로서 볼 수 있다. 이 보의 내부 응력 상태를 결정하기 위하여 평면응력(plane stress)의 상태에서 유한 요소 해석을 실시하였다.

먼저, Fig. 3(a)의 보를 (b)의 두 개로 분할하였다. 이때에 하부 구조물 1은 정적으로 불안정한 상태에 있으며, 하부 구조물 2는 정적으로 안정 상태에 있다. 불안정한 상태의 하부 구조물 1의 평형방정식에서 강성행렬은 전계수를 취하고 있지 않으므로 그 변위를 결정하기 어렵다. 따라서, 그 평형방정식을 변형하고 적합조건을 사용하여 정적으로 안정한 하부구조물 2에 합성함으로써 전체 구조물에 대한 평형방정식 및 변위를 결정할 수 있다.

Fig. 3(a)를 (b)와 같이 두 개의 영역으로 구분할 경우에 각 하부 구조물의 평형 방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_d \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

여기서, u_b 와 u_c 는 두 하부 구조물과의 접촉면에서의 변위들을 나타내며, 적합 조건으로서 $u_b = u_c$ 가 된다. 또한 식 (3.9b)의 강성 행렬은 전계수 행렬이 아니다. 그러므로 정적 축약법에 의해 변위를 결정할 수 없다. 식 (3.9)에서 변위 벡터 $[u_a \ u_b \ u_c \ u_d]^T$ 에 대한 강성 행렬을 대각 행렬과 비대각 행렬의 합으로 표현하여 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ 0 \\ f_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & K_{ab} & 0 & 0 \\ K_{ba} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{cd} \\ 0 & 0 & K_{dc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

식 (3.10)은 경계면에서의 적합 조건을 부여하지 않은 평형 방정식으로 적합 조건의 부여와 더불어 변위는 다른 값을 취하게 된다. 접촉면에서의 변위가 동일하다는 구속 조건은 식 (2.7)을 사용하여 다음과 같은 행렬의 형태로 표현할 수 있다.

$$[0 \ I \ -I \ 0] \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

여기서 I 는 접촉면에서의 미지 변위 벡터의 차원과 동일한 행과 열의 단위 행렬을 나타내며, 계수 행렬 B 는 식 (3.11)의 첫 번째 행렬이 된다. 식 (3.10)으로부터 적합 조건이 부여되지 않은 상태에서의 변위 벡터는 다음으로 계산된다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_{M1}^{-1} (\mathbf{f}_M + \mathbf{K}_{M2} \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.12)$$

식 (3.12)와 계수 행렬 B를 사용하면 적합 조건에 의해 합병된 전체 구조물의 평형 방정식은 다음이 된다.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2} (\mathbf{B} \mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{K}_{M1}^{-1} (\mathbf{f}_M + \mathbf{K}_{M2} \bar{\mathbf{u}})] \quad (3.13)$$

따라서 적합 조건을 만족하는 실제의 변위 벡터는 다음으로 유도 된다.

$$\mathbf{K}_M^* \mathbf{u} = \mathbf{F}_M^* \quad (3.14)$$

여기서,

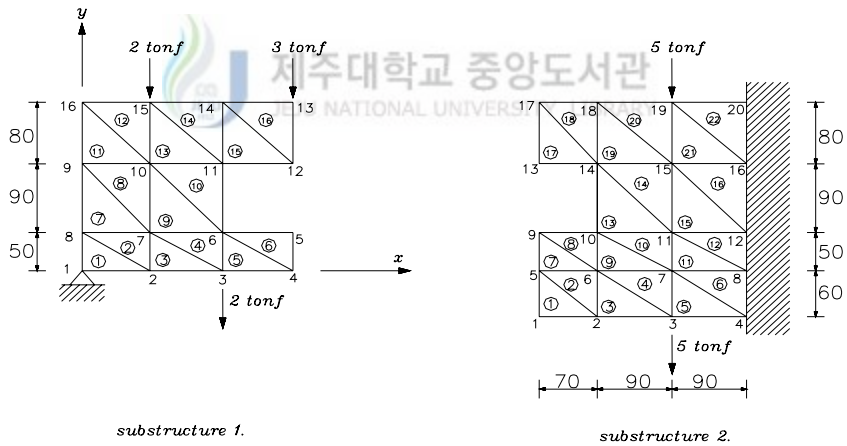
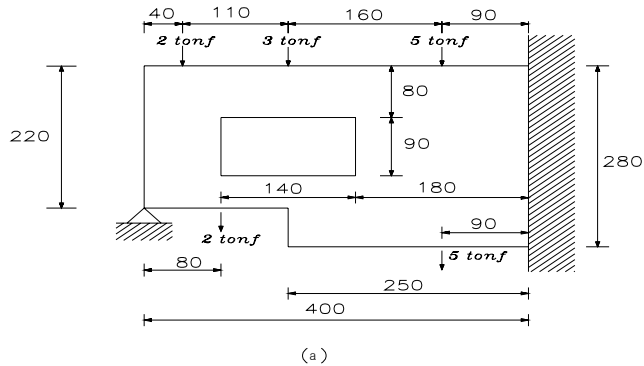
$$\mathbf{K}_M^* = [\mathbf{I} - \{\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2} (\mathbf{B} \mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{B}\} \mathbf{K}_{M1}^{-1} \mathbf{K}_{M2}]$$

$$\mathbf{F}_M^* = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2} (\mathbf{B} \mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{B}] \mathbf{K}_{M1}^{-1} \mathbf{f}_M$$

식 (3.15)에서 경계면에서의 변위 벡터 \mathbf{u}_b 와 \mathbf{u}_c 는 동일하므로 식 (3.15)에서 이들 두 개의 변위 벡터를 별도로 계산할 필요가 없이 한 개만을 필요로 한다. 그러나 식 중에 일반화된 역행렬의 결정을 요함으로 이들 변위의 각각에 대한 식을 결정하는데 어려움이 있다. 그럼에도 불구하고 이 방법에 의하면 라그란지 승수와 같은 수치 해석과는 달리 명확히 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 향후에 일반화된 역행렬에 대한 많은 연구나 결과들에 의해 이를 분리하는 방법을 고려하여야 할 것이다.

수치 해석의 결과를 얻기 위하여 다음의 물성치를 사용하였다.

$$E = 2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2, \quad \nu = 0.3 \quad (3.15)$$



(b)

Fig. 3: A beam fixed at an end and simply supported at the other end (unit: mm); (a) an entire structure, (b) two subdivided structures

이 해석의 결과, 접합점에서의 변위가 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 따라서, 이 해석을 근거로 여러 개의 정적으로 불안정하거나 안정한 구조

물을 그 접합점에서의 적합조건을 사용하여 용이하게 합성시킬 수 있음을 알 수 있었다. 이는 기존에 정적으로 불안정한 구조물을 합성하는데 어려움을 극복할 수 있는 방법으로서 향후 그 활용가치가 크리라 판단된다.

3. 소결

이 장에서는 구속조건을 고려한 정적 구조 해석을 이산계에서 연속계로 그리고 구조물의 분할 및 합성 시에 불안정한 구조물의 합성을 포함하는 광범위한 방법을 제시 및 적용을 보여 다음과 같은 결론을 얻었다,

(1) 2장에서 제시된 구속조건을 고려한 평형방정식은 이산계에 대한 행렬의 형태로 제시하고 있으나, 이를 연속계에서도 그 활용가치가 있음 보였다.

(2) 연속계에 적용성을 통하여 향후 여러 구조 해석에 그 활용성이 기대된다.

(3) 대형 복합 구조물의 구조 해석은 여러 개의 하부 구조물로 분할하고 이를 합성하는 형태를 취하는 바, 하부 구조물의 일부가 불안정한 구조물일 경우에 2장에서의 평형방정식을 수정하여 적용할 수 있음을 보였다. 이 방법은 명확한 형태의 방정식으로 기존의 수치해석을 근거로 하지 않는다.



IV. 동적 특성 및 실시간 시스템 인식

1. 구속된 구조물의 동적 특성 평가

구속조건이 주어질 경우에 그 구조물의 동적인 특성을 묘사하는 방법을 고려하였다. $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ 으로 그 거동이 묘사되는 시스템의 운동 방정식은 다음으로 표현될 수 있다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t) \quad (4.1)$$

여기서, M, C, K 는 각각 $n \times n$ 질량, 감쇠 및 강성 행렬이며, $P(t)$ 는 $n \times 1$ 외력 벡터이다. 이 구조물의 동적인 거동을 다음으로 가정하자.

$$u = xe^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

여기서, x 는 모드 좌표를, ω 는 진동수를, $i = \sqrt{-1}$ 을 각각 나타낸다.

무감쇠 및 자유진동을 가정하여 식 (4.2)를 식 (4.1)에 대입하고 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$(-i\omega^2 M + K)x e^{i\omega t} = 0 \quad (4.3)$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ 이므로 식 (4.3)을 충족하기 위하여는 다음을 만족하여야 할 것이다.

$$(-iw^2M + K)x = 0 \quad (4.4)$$

구조물의 동적 특성인 진동수나 모드 형상은 식 (4.4)와 같은 고유치 해석을 실시하여 얻을 수 있다.

만약 이 구조물에 다음과 같은 m 개의 구속조건이 부여되었다고 가정하자.

$$Au = b \quad (4.5)$$

여기서, A 는 $m \times n$ 상수 행렬을 나타낸다. 즉, 구조물 내 각 변위 상호간의 변위를 제어하고 있다.

식 (4.2)를 식 (4.5)에 사용하고 $b = 0$ 이라 하면 다음의 수식을 얻는다.



$$Axe^{i\omega t} = 0 \quad (4.6)$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ 이므로 식 (4.6)은 다음의 식을 만족하여야 할 것이다.

$$Ax = 0 \quad (4.7)$$

식 (4.7)을 일반화된 역행렬을 사용하여 x 에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$x = (I - A^+A)g \quad (4.8)$$

여기서, g 는 임의의 벡터를 나타낸다. 식 (4.8)을 식 (4.4)에 사용하고 이를 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(iw^2M + K)(I - A^+A)g = 0 \quad (4.9)$$

식 (4.9)는 구속조건이 주어질 경우에 새로운 형태의 고유치 해석을 나타내게 된다. 이를 사용하여 Fig. 4의 3자유도 시스템의 동적인 특성을 결정하였다.

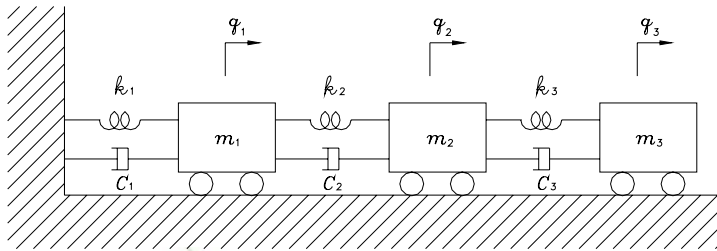


Fig. 4: 3 degrees of freedom system

이 구조물의 동적인 거동은 식 (4.1)과 같은 형태의 운동방정식에 의해 그 동적인 특성을 결정할 수 있다. 그러나 이 구조물에 다음과 같은 조건에 의해 구속되었다고 가정하면 그 거동은 구속될 것이다.

$$q_1 + lq_2 + hq_3 = 0 \quad (4.10)$$

여기서, l 과 h 는 상수를 나타내며, 식 (4.10)을 식 (4.5)의 행렬 형태로 표현하면 계수 행렬 $A = [1 \ l \ h]$ 로 된다. 이를 식 (4.9)에 사용하면 주어진 구속조건을 고려한 구조물의 동적인 특성을 결정할 수 있다.

2. 시스템 인식법

건축물은 외력의 작용하에 손상을 입으면 이에 따라 구조물의 강성 및 감쇠에 변화가 나타나며, 이들 변화된 물리적인 특성에 의한 건축물의 응답 변위, 속도 및 가속도들이 측정된다. 이때, 손상에 의한 예상되는 물성치와 최초의 물성치로부터 계산된 물성치와의 차에 의한 이차형을 최소로 하여 실시간 시스템의 물성치를 계산하게 된다.

지진이 작용하는 경우, n 자유도 구조물의 운동방정식은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\{1\}\ddot{u}_g \quad (4.11)$$

여기서, 점은 시간에 관한 미분을 나타내며, M , C , K 는 $n \times n$ 질량, 감쇠 및 강성 행렬을 각각 나타내며, $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$ 이며, \ddot{u}_g 는 지진 가속도를, 그리고 $\{1\}$ 은 모든 성분이 1인 $n \times 1$ 열벡터를 나타낸다. 식 (4.11)로부터 관측된 지진가속도에 따른 건축물의 응답 변위, 속도 및 가속도를 측정하여 건축물의 동적 특성치의 변화를 결정하고자 한다. 이는 다음과 같은 수식에 의해 표현될 수 있다.

$$R\alpha = b \quad (4.12)$$

여기서, 건축물의 질량은 외력의 작용에도 불구하고 일정한 값을 갖는다고 가정하고, R 은 측정된 건축물의 응답 변위 및 속도 성분에 의한 $n \times 2n$ 계수 행렬을, α 는 건축물의 강성 및 감쇠 성분에 의한 $2n \times 1$ 벡터를, 벡터 b 또한 측정값으로서 $b = -M(\{1\}\ddot{u}_g + \ddot{u})$ 으로 정의된다.

외력이 작용하는 동안 건축물에 손상이 발생한다고 가정하면 건축물의 강성과 감쇠 성분은 시간에 종속될 것이다. 최초에 건축물의 강성 및 감쇠 성분을 α_0 라 한다면 식 (4.12)에 주어진 강성 및 감쇠 성분 벡터 α 와

의 차이에 의한 이차형의 목적함수를 최소로 만족하는 값이 시간의 변화에 따른 건축물의 특성치가 될 것이다. 목적함수는 다음으로 정의된다.

$$P = [\alpha - \alpha_0]^T W [\alpha - \alpha_0] \quad (4.13)$$

여기서, W 는 양의정치성(positive definite) 가중 행렬(weighting matrix)이다. 최초의 건축물의 강성 및 감쇠 성분 벡터 α_0 은 평형 조건을 충족하는 상태에서 얻어진 값으로 외력이 작용하는 동안 이들 성분의 변동을 나타내는 α 와의 차이에 의한 식 (4.13)의 최소화는 계산된 값이 평형 상태로의 수용을 의미하게 된다.

식 (4.12)를 벡터 α 에 관해 일반화된 역행렬을 사용한 해는 다음으로 된다.

$$W^{1/2}\alpha = (RW^{-1/2})^+b + [I - (RW^{-1/2})^+(RW^{-1/2})]y \quad (4.14)$$

여기서, y 는 임의의 벡터를, I 는 단위 행렬을, ‘+’는 일반화된 역행렬 (generalized inverse matrix)을 나타낸다. 임의의 벡터 y 를 결정함으로써 실시간 시스템의 동적 특성치를 결정할 수 있을 것이다.

$Q = [I - (RW^{-1/2})^+(RW^{-1/2})]$ 를 식 (4.14)에 사용하고 그 결과를 목적함수 (4.13)에 대입하면 목적함수의 최소화는 다음의 식을 만족하여야 한다.

$$W^{1/2}\alpha - W^{1/2}\alpha_0 = W^{1/2}[R^+b + (I - R^+R)y] - W^{1/2}\alpha_0 = 0 \quad (4.15)$$

식 (4.15)를 만족하는 임의의 벡터 y 에 관한 풀이는 다음으로 얻어진다.

$$y = Q^+[W^{1/2}\alpha_0 - (RW^{-1/2})^+b] + [I - Q^+Q]z \quad (4.16)$$

여기서, z 는 임의의 벡터이다. 식 (4.16)을 식 (4.14)에 대입하고,

$QQ^+Q=Q$ 와 $QQ^+=Q$ 를 사용하고, 그 결과를 정리하면 벡터 α 는 다음으로 계산된다.

$$\alpha = \alpha_0 + W^{-1/2}(RW^{-1/2})^+(b - R\alpha_0) \quad (4.17)$$

식 (4.17)은 지진의 작용동안 건축물에 손상과 더불어 동적인 성질들의 시간에 따른 변화 추이를 나타내며, 우변의 첫 번째 항은 최초 건축물의 물성치로부터 계산되는 개선된(updated) 값을 나타내며, 두 번째 항은 예상되는 물성치와 개선된 물성치의 차와 가중 행렬과의 곱으로 표현되는 외력의 작용동안 변화되는 강성 및 감쇠의 손상 정도를 나타냄을 알 수 있다. 그러나 식 (4.17)에서 동적 물성치는 시간에 따라 변함에도 불구하고 고려하는 가중행렬은 일정하며, 가중 행렬의 크기에 의해 인식 정도의 변화 폭이 크리라 판단된다. 따라서 시스템의 인식 정도는 가중 행렬의 선정에 크게 영향을 받음을 알 수 있다. 다음에서는 식 (4.17)의 타당성과 가중 행렬에 대한 결과를 비교한다.

식 (4.17)의 사용성 및 타당성을 나타내며, 가중 행렬의 영향을 평가하게 될 것이다. 3층 건물의 자유 물체도로 표현되는 Fig.4의 건물에 대해 변위 벡터 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 로 그 거동이 묘사되는 3자유도 시스템을 고려하자. 이 건축물의 운동방정식은 다음으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (4.18)$$

최초 건축물의 동적 물성치는 다음으로 설계되었다고 가정하자.

$$m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 3, k_1 = 100, k_2 = 90, k_3 = 100, c_1 = 0.3, c_2 = 0.24, c_3 = 0.27 \quad (4.19)$$

만약 이 건축물에 Fig. 5와 같은 1940년 El Centro 지진에 의해 부재들이 손상을 입고 다음과 같이 강성과 감쇠 성분에 변화가 발생하였다고 가정하자.

$$\begin{aligned} k_1 &= 100 \exp(-0.01t), k_2 = 90 \exp(-0.01t), k_3 = k_1 \\ c_1 &= 0.3 \exp(-0.01t), c_2 = 0.8c_1, c_3 = 0.9c_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Fig. 5의 지진동 하에 고려하는 3층 건축물의 응답 변위, 속도, 가속도 성분을 측정하였다 하면 식 (4.18)은 식 (4.12)의 형태로 표현된다. 여기서,



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\alpha = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T \quad (4.21)$$

또한 행렬 R은 6×6 행렬로 전계수(full rank)의 측정된 변위 및 속도에 의한 계수 행렬이다.

이들을 계수 행렬 및 벡터와 다음의 가중 행렬을 사용하여 실시간으로 시스템의 물성치를 계산한 결과를 그림 3에 나타내고 있다.

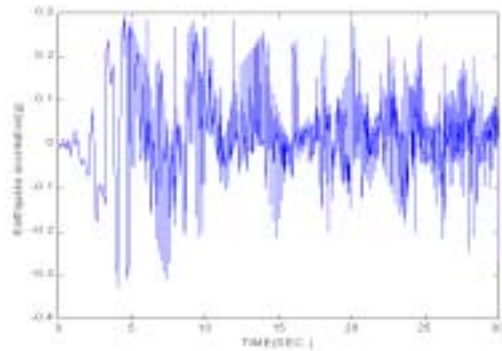


Fig.5: El-Centro earthquake

$$W = \text{diag}(30 \ 20 \ 10 \ 30000 \ 2000 \ 1000) \quad (4.22)$$

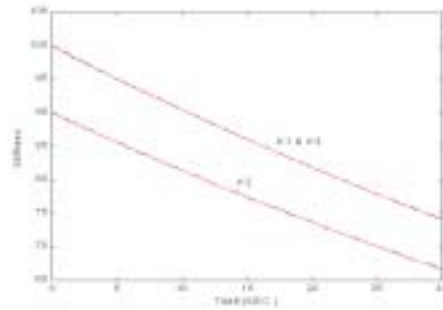
Fig. 6(a)는 식 (4.20)으로 주어진 강성과 손상과 더불어 저하하는 강성을 식 (4.17)에 의해 계산된 값을 비교하고 있다. 이 그림에서 보는 바와 같이 예측이 적절하게 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 5(b)는 감쇠에 대한 비교를 나타내고 있는데, 이 값은 실제 값에서 변동이 있음을 볼 수 있다. 감쇠 c_1 은 적절하게 예측되고 있으나, 특히 c_2 는 오차가 크게 있음을 볼 수 있다. 이는 절점 2에서의 감쇠는 절점 1과 3의 영향이 공존하고 있으므로 나타난 것으로 판단된다.

Fig. 6(c)와 (d)는 다음으로 정의되는 예측값과 실제값의 오차 크기를 나타내고 있다.

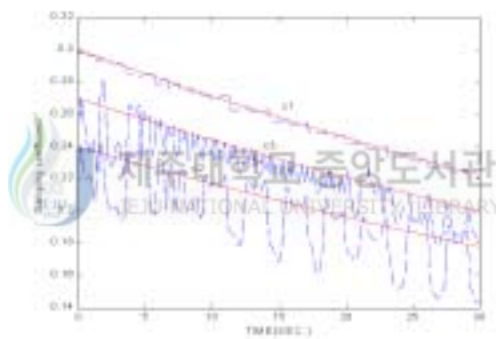
$$\text{Magnitude of errors} = \left[\frac{u - \bar{u}}{u} \right]^2, \quad (4.23)$$

여기서, u 는 실제의 물성치 변화를 \bar{u} 는 식 (4.17)에 의해 계산된 예측값을 나타낸다. 이 그림들에서도 감쇠에 대한 예측의 변동 폭이 있음을 볼 수 있다. 이러한 예측 값들은 가중 행렬의 크기와 밀접한 관계가 있으며, 따라서 가중 행렬의 결정 방법과 국부적인 물성치 변동을 줄이는 방

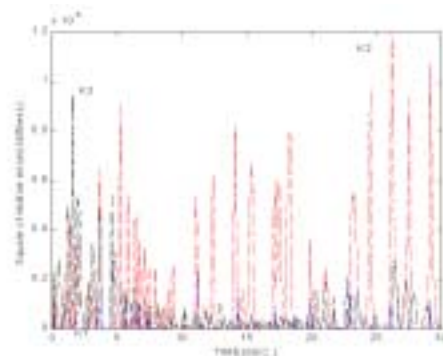
법 등에 대하여, 다른 방법들을 응용 및 적용하는 등의 보다 세심한 연구가 필요하다고 판단된다



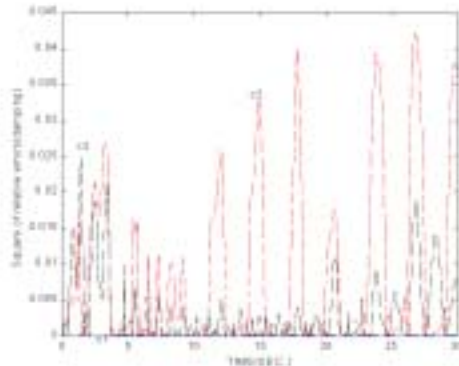
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6: System identification under earthquake; (a) comparison of measured and calculated stiffness, (b) comparison of measured and calculated damping, (c) magnitude of errors of calculated stiffness, (d) magnitude of errors of calculated damping

3. 소결



구조물의 동적 거동에 영향을 미치는 구속조건이 부여되었을 경우에 그 동적인 특성을 결정하는 방법을 일반화된 역행렬을 사용하여 결정하였다. 그리고 외력에 의해 구조물의 동적인 성질들의 열화를 또한 일반화된 역행렬을 사용하여 결정하였으며, 이 연구를 통하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 구속조건이 부여되었을 경우에 구조물의 고유 해석을 위한 방법을 제시하였으며, 이로부터 동적 특성을 명확히 결정할 수 있을 것이다.

(2) 구조물 최초의 물성치와 실시간으로 추적되는 실제 물성치 간의 차이에 의한 이차형의 목적 함수를 최소화하여 실시간 시스템 인식의 추적 방법을 수식으로 제안하였으며, 그 적용은 매우 간편하며, 용이함을 보였다.

(3) 제시된 방법은 가정된 가중 행렬에 영향을 받았다. 또한 적절한 가

중 행렬의 선정은 제시된 방법의 타당성과 관련되나, 실제로 적절한 가중 행렬의 선정 자체에 어려움이 있다.

(4) 대부분의 물리적인 현상은 주어진 식 만에 의해 설명될 수 없으므로 가중 행렬을 사용하게 된다. 본 연구에서도 가중 행렬을 사용하였으나, 이를 구체적으로 규명할 수 없었으며, 이에 대해 실시간으로 변동하는 가중 행렬의 설정이 필요하며, 이는 향후의 연구과제로 남긴다.



V. 결론

구속조건이 부여되었을 경우에 구조물의 정적으로나 동적인 특성들이 변화된다. 이러한 특성의 변화를 결정하는 많은 연구들이 있었음에도 불구하고 명확한 형태의 식을 제시한 연구들은 거의 없으며, 따라서, 본 연구에서는 이들을 명확히 결정하는 방법을 제시하였으며, 다음과 같은 결론을 유도과 적용 과정을 통하여 얻을 수 있었다.

(1) 구속조건이 부여되기 전후의 포텐셜 에너지의 변화량을 이때의 변위 차이에 관하여 최소화하여 새로운 형태의 평형방정식을 유도하였으며, 이를 검증하였다.

(2) 변위 차이량을 대신하여 구속력에 관하여 최소화를 실시하여 구속조건을 만족하는 구속력을 결정하였다. 이때에 구속력은 구속조건을 만족하는 모든 힘들 중에서 가장 작은 값을 알 수 있었다.

(3) 구속력은 구속조건에 의해 나타나는 변형에너지의 차이를 최소화하는데 필요한 힘임을 유도하였다.

(4) 2장에서 제시된 구속조건을 고려한 평형방정식은 이산계에 대한 행렬의 형태로 제시하고 있으나, 이를 연속계에서도 그 활용가치가 있음 보였다.

(5) 연속계에 적용성을 통하여 향후 여러 구조 해석에 그 활용성이 기대된다.

(6) 대형 복합 구조물의 구조 해석은 여러 개의 하부 구조물로 분할하고 이를 합성하는 형태를 취하는 바, 하부 구조물의 일부가 불안정한 구조물일 경우에 2장에서의 평형방정식을 수정하여 적용할 수 있음을 보였다. 이 방법은 명확한 형태의 방정식으로 기존의 수치해석을 근거로 하지 않는다.

(7) 구속조건이 부여되었을 경우에 구조물의 고유 해석을 위한 방법을 제시하였으며, 이로부터 동적 특성을 명확히 결정할 수 있을 것이다.

(8) 구조물 최초의 물성치와 실시간으로 추적되는 실제 물성치 간의 차이에 의한 이차형의 목적 함수를 최소화하여 실시간 시스템 인식의 추적 방법을 수식으로 제안하였으며, 그 적용은 매우 간편하며, 용이함을 보였다.

(9) 제시된 방법은 가정된 가중 행렬에 영향을 받았다. 또한 적절한 가중 행렬의 선정은 제시된 방법의 타당성과 관련되나, 실제로 적절한 가중 행렬의 선정 자체에 어려움이 있다.

(10) 대부분의 물리적인 현상은 주어진 식 만에 의해 설명될 수 없으므로 가중 행렬을 사용하게 된다. 본 연구에서도 가중 행렬을 사용하였으나, 이를 구체적으로 규명할 수 없었으며, 이에 대해 실시간으로 변동하는 가중 행렬의 설정이 필요하며, 이는 향후의 연구과제로 남긴다.



참 고 문 헌

1. Yang, Y.B., Kuo, S.R., and Liang, M.T., "A Simplified Procedure for Formulation of Soil-Structure Interaction Problems," *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 4, 1996, pp. 513-520.
2. Park, K.C., Justino, M.R., and Felippa, C.A., "An Algebraically Partitioned FETI Method for Parallel Structural Analysis: Algorithm Description," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp. 2717-2737.
3. Justino, M.R., Park K.C., and Felippa, C.A., "An Algebraically Partitioned FETI Method for Parallel Structural Analysis: Performance Evaluation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp. 2739-2758.
4. Felippa, C.A. and Park, K.C., "A Direct Flexibility Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 149, 1997, pp. 319-337.
5. Farhat, C., Lacour, C, and Rixen, D., "Incorporation of Linear Multipoint Constraints in Substructural Based Iterative Solvers. Part 1: A Numerically Scalable Algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 1998, pp. 997-1016.
6. 은 희창, 양 근혁, 정 현수, "구속된 시스템의 정적 평형에 관한 연구," *대한건축학회 논문집*, 2002. 10,
7. Masri. S. F., Miller, R. K., and saud, A. F.(1987a) "Identification nonlinear vibrating structures: part1 - applications." *J. Appl. Mech.* 54, 918-922
8. Masri. S. F., Miller, R. K., and saud, A. F.(1987b) "Identtification

nonlinear vibrating structures: partII - applications." J. Appl. Mech.
54, 923-929

9. Hoshiya. M. and Saito, E. 'Structure identification by extended
Kalman filter', J. Eng. Mech. ASCE 1984, 110(12), 1757-1770

10. Kalman, R. E. and Bucy, R. S. 'New results in linear filtering and
prediction theory', J. Basic Engng, ASME 1961, 83, 95-108

