

碩士學位論文

국소푸리에 변환을 이용한 파동 스펙트럼 분석



濟州大學校 大學院

土木海洋工學科

高定佑

2010年 2月

# 국소푸리에 변환을 이용한 파동 스펙트럼 분석

指導教授 李秉杰

高定佑

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

2010年 月

高定佑의 工學 碩士學位 論文으로 認准함

審査委員長 \_\_\_\_\_ 印

委員 \_\_\_\_\_ 印

委員 \_\_\_\_\_ 印

濟州大學校 大學院

2010年 2月

The study of spectrum analysis based on  
Short-Time Fourier Transform from using Matlab

Ko Jung-Woo  
(Supervised by professor Byung-Gul Lee)

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the  
degree of Master of Engineering

2010.

This thesis has been examined and approved

Thesis director, Namhyeong Kim, Prof. of Civil Engineering

Thesis director, Byung-Gul Lee, Prof. of Civil Engineering

Thesis director, Dong Wook Lee, Prof. of Civil Engineering

*FEBRUARY. 2010*

Department of Civil & Ocean Engineering

GRADUATE SCHOOL

JEJU NATIONAL UNIVERSITY

- 목 차 -

|  |    |
|--|----|
| 목 차 .....                                | i  |
| List of Figures .....                    | iv |
| Summary .....                            | vi |
| <br>                                     |    |
| 제 1 장 서 론.....                           | 1  |
| 1.1 연구 배경 및 목적.....                      | 1  |
| 1.2 연구 내용.....                           | 2  |
| <br>                                     |    |
| 제 2 장 이론적 배경.....                        | 3  |
| 2.1 시계열분석(time series analysis)의 의미..... | 3  |
| 2.1.1 신호의 주기적 특성에 따른 분류.....             | 3  |
| 2.1.2 신호의 대칭성에 따른 분류.....                | 4  |
| 2.1.3 신호의 발생 패턴에 따른 분류.....              | 4  |
| 2.1.4 샘플링.....                           | 4  |
| 2.1.5 기본적인 이산 (시간)신호.....                | 8  |
| 2.1.5.1 (단위) 계단함수 (step function).....   | 8  |
| 2.1.5.2 (단위) 구형(rectangular) 펄스.....     | 9  |
| 2.1.5.3 (단위) 임펄스(impuse)함수.....          | 9  |
| 2.1.6 이산시스템의 convolution 표현.....         | 11 |
| 2.2 Fourier 해석.....                      | 14 |
| 2.2.1 Fourier 급수와 계수.....                | 14 |
| 2.2.2 Fourier 급수의 위상각 형태와 복소 표현 .....    | 16 |
| 2.2.3 페이지 신호.....                        | 18 |
| 2.2.4 스펙트럼.....                          | 20 |
| 2.2.5 Power Spectral Density(PSD).....   | 21 |
| 2.2.6 임펄스 샘플링.....                       | 21 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>제3장 Matlab을 이용한 시계열 이산자료의 주파수 변환의 방법</b> .....     | 23        |
| 3.1 이산자료의 주파수 변환.....                                 | 23        |
| 3.2 시간데이터의 주파수 변환.....                                | 23        |
| 3.3 Fourier 급수 $a_0$ .....                            | 24        |
| 3.4 Fourier 급수 $a_n, b_n$ .....                       | 24        |
| 3.5 Fourier 급수와 주파수 표현의 해석.....                       | 25        |
| 3.6 연속스펙트럼들(continuous spectrums).....                | 27        |
| 3.6.1 진폭스펙트럼(amplitude spectrum).....                 | 27        |
| 3.6.2 위상스펙트럼(phase spectrum).....                     | 27        |
| 3.6.3 파워 스펙트럼(power spectrum).....                    | 28        |
| <b>제4장 Short-Time Fourier Transform(STFT) .....</b>   | <b>29</b> |
| 4.1 국소푸리에 변환(Short-Time fourier Transform; STFT)..... | 29        |
| 4.2 국소푸리에 변환 적용.....                                  | 32        |
| 4.3 해양에 존재하는 파에 적용한 STFT(풍파분석).....                   | 34        |
| 4.4 해양에 존재하는 파의 분석(조석분석).....                         | 39        |
| <b>제5장 실제해양의 파동에 STFT 적용</b> .....                    | <b>42</b> |
| <b>제6장 결론</b> .....                                   | <b>44</b> |
| <b>참고문헌</b> .....                                     | <b>46</b> |
| <b>감사의 글</b> .....                                    | <b>47</b> |

- List of Figures -

|  |    |
|--|----|
| (Figure.1) ideal signal .....  | 6  |
| (Figure.2) ideal signal of different sampling time i .....   | 6  |
| (Figure.3) ideal signal of different sampling time ii .....  | 7  |
| (Figure.4) Alising.....  | 7  |
| (Figure.5) (단위) 계단함수 (step function).....  | 8  |
| (Figure.6) (단위) 구형(rectangular) 펄스.....  | 9  |
| (Figure.7) 단위임펄스 함수와 구형과 함수의 극한.....   | 10 |
| (Figure.8) 이산 데이터 convolution 표현.....  | 12 |
| (Figure.9) 푸리에 급수 위상각 형태.....  | 16 |
| (Figure.10) Example 1. $3.5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{0.01} \times t\right) + 4.43 \times \cos\left(\frac{2\pi \times 3}{0.01} \times t\right)$ ..... | 25 |
| (Figure.11) Example 1.Fourier 급수 I .....   | 26 |
| (Figure.12) Example 1.Fourier 급수 II .....  | 26 |
| (Figure.13) Example 1.진폭스펙트럼.....  | 27 |
| (Figure.14) Example 1.위상스펙트럼.....  | 28 |
| (Figure.15) Example 1.파워스펙트럼.....  | 28 |
| (Figure.16) sliding Window CTFT.....   | 29 |
| (Figure.17) The tiling diagram.....  | 30 |
| (Figure.18) Signal & Power Spectrum i .....  | 30 |
| (Figure.19) Signal & Power Spectrum ii .....   | 31 |
| (Figure.20) Signal & Power Spectrum iii.....   | 32 |
| (Figure.21) Example 2. Signal.....   | 32 |
| (Figure.22) Example 2. power spectrum.....   | 33 |
| (Figure.23) Example 2. STFT Window Lenght (40).....  | 33 |
| (Figure.24) Example 2. STFT Window Lenght (100).....   | 34 |
| (Figure.25) Wave Spectra.....  | 34 |
| (Figure.26) Example 3. Signal.....   | 36 |
| (Figure.27) Example 3. Power Spectrum.....   | 36 |

|   |    |
|---|----|
| (Figure.28) Example 3. Signal STFT I .....                        | 37 |
| (Figure.29) Example 3. Signal STFT II .....                       | 38 |
| (Figure.30) Example 4. Signal.....                                | 40 |
| (Figure.31) Example 4. Signal Power Spectrum.....                 | 40 |
| (Figure.32) Example 4. Signal STFT.....                           | 40 |
| (Figure.33) Bouy wave data of Japanese Meteorological Office..... | 42 |
| (Figure.34) Wave STFT.....  | 43 |



## - Summary -

Due to economic development and increasing population, the potential values of the resources, energy and space on the ocean are being recognised anew. When the infrastructure is established in the ocean, the external force operating to the ocean infrastructure is means. The ocean infrastructure must be safe from the external force caused by the wave motion of the ocean. The sea-surface displacement of this ocean is very irregular.

Fourier, a French mathematician and physicist, who announced Fourier series and Fourier coefficient. This Fourier application became the solution to the problem of heat transfer. And this interpretation is a possibility of putting out indolently with numerical formula to wave motion of the ocean. This Fourier analysis to synthesis of the sine group which is periodic is one of the best solution to analysis of wave's time domain analysis in periodic. But there was a limit to interpretation of non-period group ocean wave. It is possible to inter this non-periodic group wave by using a Fourier Transform. It is called frequency domain analysis.

Using Fourier with Series and Coefficient method is called time domain analysis and using Fourier Transform method is called frequency domain analysis. Time domain analysis is one of the best solution to analysis of the period wave. Here, in physics, the wavelength of a sinusoidal wave is the spatial period of the wave. The period means a wave's cycle time or the interval time's magnification. When analyzing ocean wave, we used Power Spectrum analysis based on this Fourier Transform and Wave Spectrum analysis based on Power Spectrum. Ocean wave is the total wave motions operating variously according to period and segment. The wave motion of the ocean extends in all segments which are measured, like tides operates wave, Although the wind wave which is low frequency operates only on some part of measured and disappears. The power spectrum has some limitations in sensing wind waves operating only on some part of segments and close frequency. This problem can be solved by using period of the wave or the period's magnification. In other words, if the interval being analyzed and one wave period



are the same. This solution calls the Short-Time Fourier transform (STFT). In the continuous-time case, the function to be transformed is multiplied by a window function which is non-zero for only a short period of time. The Fourier transform (a one-dimensional function) of the resulting signal is taken as the window is slid along the time axis, resulting in a two-dimensional representation of the signal. In signal processing, a window function is a function that is zero-valued outside of some chosen interval. For instance, a function that is constant inside the interval and zero elsewhere is called a rectangular window, which describes the shape of its graphical representation. the proper window size was examined, based on the wave motion frequency band of the ocean.

As a result, the wind wave frequency and close frequency were recognized by STFT, which couldn't be recognized by the power spectrum. here, the wind waves operated on some part of segments and disappeared during the investigation. Based on the 2007 buoy data of Japanese Meteorological in 2007, analyze the actual ocean wave spectrum was analyzed.

# 제 1 장 서 론

## 1.1 연구 배경 및 목적

경제의 발전과 인구의 증가로 인해 해양의 자원, 에너지, 공간에 대한 잠재적인 가치가 재인식 되어가고 있다. 이런 해양에 구조물을 설치할 때 구조물에 작용하는 중요한 외력은 파이고 파에 의한 외력에 대하여 해상구조물은 안전하여야 한다. 이런 해양의 해면변위는 매우 불규칙하다. 프랑스의 수학자 푸리에에는 이런 해양의 파를 정현파들의 합성이라고 가정하고 이를 구할 수 있는 푸리에 급수와 계수를 발표 하였다. 이 푸리에 해석은 주기적인 정현파의 합성에는 최고의 해법이다. 하지만 비주기 파의 해석에는 한계가 있었고 이런 비주기적 파를 해석하기 위해 푸리에 변환을 이용하여 비주기파를 해석 하였다. 푸리에 급수와 계수와 같은 방법을 시간 영역 분석이라고 하며 푸리에 변환을 이용한 분석을 주파수 영역 분석이라고 한다.

해양의 파동운동은 바람에 의해서 발생하는 풍파와 달, 해와 지구간의 만류인력에 의해 발생하는 조석 해면기압변동이나 바람의 응력에 의해서 발생하는 폭풍성 해일 등 여러 가지 영향에 의해 수면 변동이 일어난다. 이런 여러 가지 요인들로 인한 파는 매우 불규칙하게 보인다. 이런 불규칙한 파동에서 외력을 구하기 위해 통계적인 대표값에 의해 일군의 파를 표현한다. (최대파, 유의파, 평균파 등) 또는 에너지 스펙트럼에 의해서 표현한다.

해면 변위는 조석파 같은 장주기파와 풍파와 같은 단주기파들과 같은 정현파들 합이다. 이런 파동의 특성은 시계열 자료로서 이런 시계열 분석의 기본적인 방법은 시간영역 분석(time domain analysis)과 주파수 영역분석(frequency domain analysis)이다. 이 두 방법은 접근 방법에서 서로 구분 되지만 서로 배타적 이론이 아니라 상호 보완적인 방법이다.

해양의 파를 해석하는데 이 푸리에 변환을 기초로 에너지 보존의 법칙을 이용한 파워스펙트럼과 이에 기초한 스펙트럼 해석법들이 사용되고 있다. 여기서 푸리에가 말하는 주기는 어떤 해석 구간에 정수배의 위상변환이 전 과정이 반복적으로 일어날 때 이다. 즉 비주기인 해양파의 어떤 임의의 기간 동안만 해석한다면 그 구간에 주기성을 띤 파고들은 보다 명확히 파악할 수 있다. 관측 구간의 길이를 변환시키면서 그 구간을 주기로 갖는 파들을 구할 수 있다. 이런 방법을 국소푸리에변환이라고

하며 본 연구에서는 이런 국소푸리에 영역이 기존 Power 스펙트럼에 의한 해석과의 차이를 비교해 보고자 한다.

## 1.2 연구 내용

프랑스 수학자 푸리에에 의하여 규칙적인 파동의 특성에 대한 푸리에 정의가 발표된 이후 해양의 불규칙한 파동에 대하여 수식화가 가능해 졌다. 어떤 구간에서 연속이면 이 푸리에 방정식을 이용하여 삼각함수로 나타낼 수 있는데 그 구간에서 연속적으로 작용하여야 한다. 하지만 해양의 파동의 파동은 여러 가지 요인에 의한 파동들의 합으로 계측된 전 구간에 걸쳐서 작용하는 조석과 같은 파동도 있지만 단주기 파이며 계측 구간 중 일부 구간에만 작용하고 사라지는 풍파와 같은 파동도 있다. 전 구간에 대한 푸리에 해석은 조석과 같은 전 구간에 영향을 미치는 파동에 대해서는 신뢰성을 가지지만 그 주기와 작용 구간이 다양하게 변하는 풍파의 특성을 이해하는 데는 문제가 있다고 하겠다.

푸리에 해석은 어떤 신호가 존재하는 구간을 정확히 지정해 준다면 그 구간의 신호를 명확히 파악할 수 있다. 파고의 계측구간에서 전 구간이 아닌 임의의 구간을 변환하며 푸리에 해석을 실시할 경우 풍파와 같은 파동의 특성을 이해하는 데 도움이 된다. 어떤 일정한 구간에만 작용하는 파동도 함께 존재한다. 푸리에 해석의 부분적인 구간을 윈도우를 통하여 정하고 시간이 지남에 따라 주파수와 시간에 따라 스펙트럼의 변화를 보여주는 국소푸리에변환(STFT; Short-Time Fourier Transform)을 적용하여 해양의 파동에 필요한 적정 윈도우 사이즈와 신호의 간격을 알아보았다. 이 STFT는 저주파수와 고주파수를 찾아내는 구간이 다르다. 이로 인하여 여러 번 분석을 해야 하는 한계성을 지니고 있다. 이에 대한 대안으로 Wavelet 이론이 생겨나게 되었다. 하지만 이 Wavelet이론 역시 STFT분석을 통하여 각 주파수 파장대에 대한 구간의 길이를 정의해야 한다. 이 연구를 통해 해양 파에 대한 주파수별 구간대를 구하고 후에 해양파동에 적합한 Wavelet이론의 기초가 될 것이라 생각 된다.

## 제 2 장 이론적 배경

### 2.1 시계열분석(time series analysis)의 의미

시계열이란 시간에 따라 연속적으로 관측된 자료, 즉 서로 다른 시점  $t_1, t_2, \dots, t_N$ 에서 관측된 값의 계열  $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_N}$ 을 시계열 자료(time series data)라고 한다. 시계열 분석의 궁극적인 목표의 하나는 미래의 예측이다. 시계열에서 미래의 예측은 먼저 이 시계열의 과거 패턴을 규명하고 이 패턴의 미래에서도 지속된다는 전제하에 그것을 미래에 적용한다. 또 시계열의 패턴을 기술하는 데는 주어진 시계열이 성격을 달하는 성분의 전부 또는 일부의 합으로 구성되었다고 보고 각 성분의 수학적 모형을 개발하는 방법이 이동된다. 이런 시계열 분석의 기본적인 방법은 시간영역 분석(time domain analysis)과 주파수 영역분석(frequency domain analysis)이다.

이 두 방법은 접근 방법에서는 서로 구분되지만 서로 배타적인 이론은 아니라 상호 보완적인 방법이다. 먼저, 시간영역 분석은 인접한 시계열 값들 사이에 존재하는 종속성과 상관성을 현재의 값이 과거의 값들의 회귀(regression)라는 가정에서 출발한다. 이에 반하여, 주파수 영역분석은 주어진 시계열이 평균이나 분산 등이 비교적 안정되어 있는 소위 정상시계열(stationary time series)을 대상으로 하여 이것을 서로 다른 주기를 갖는 사인(sine)이나 코사인(cosine)함수와 같은 강한 주기함수들의 일차결합으로 나타내는 방법이다.

#### 2.1.1 신호의 주기적 특성에 따른 분류

동일한 파형이 일정한 시간마다 반복되는 신호를 주기(periodic)신호라 하고 그렇지 않은 신호를 비주기(aperiodic)신호라 한다.

$$\text{주기신호} : x(t+T) = x(t)$$

주기 중에서 가장 작은 양의 값을 기본(fundamental)주기라고 하며, 보통 신호의 주기라고 하면 이를 말한다.

### 2.1.2 신호의 대칭성에 따른 분류

어떤 신호는 파형이 특별한 형태의 대칭성을 보이는 경우가 있다. sin파와 같이 원점에 108°대칭인 신호를 기수(odd)신호라고 하며, cos파와 같이 세로축에 대칭인 신호를 우수(even)신호라 한다.

$$\begin{aligned} \text{기수신호: } x(t) &= -x(-t) \\ \text{우수신호: } x(t) &= x(-t) \end{aligned}$$

### 2.1.3 신호의 발생 패턴에 따른 분류

신호는 발생 패턴에 따라 확정(deterministic)신호와 확률(random)신호로 나눌 수 있다. 확정신호는 항상 동일한 시간에 대해 동일한 형태의 일정한 패턴을 보이는 신호이며, 정현파와 같은 신호가 여기에 속한다. 확률신호는 동일한 시간에 대해 가능한 다른 형태의 패턴을 보일 수도 있지만 일정한 통계적 특성을 갖는 신호이다.

### 2.1.4 샘플링

디지털 시스템이 아날로그 시스템에 비해 신호처리의 다양화 및 융통성, 신뢰성 향상, 감도의 개선, 잡음의 영향감소, 소형화 및 경량화 등 많은 장점이 있으며 많은 경우의 물리적 현상이나 신호는 연속시간에서 정의되므로 디지털 시스템에 의한 처리가 이루어지기 위해서는 연속신호를 이산 신호 특히 디지털 신호로 바꾸는 작업이 필요하다. 디지털 시스템의 갖는 장점들로 인해 여러 면에서 디지털 시스템에 의한 신호(정보)의 처리가 더 융통성이 있으며 연속 신호의 처리에 비해서 더 나은 경우가 많다. 그러나 일상생활에서 또는 과학 기술 분야에서 마주치는 대부분의 신호들은 시간과 공간에 대하여 연속적이다. 따라서 디지털 시스템을 이용하여 이들을 처리하기 위해서는 우선 연속 신호로 변환하는 것이 필요하다. 이 동작을 샘플링이라고 한다.

샘플링은 연속신호를 특정시간마다의 값으로 취하여 이산신호로 만드는 과정을 말한다. 연속신호의 샘플링과 관련하여 우리가 항상 염두에 두어야 하는 것은 정보의 손실이다. 실제로 샘플링된  $x[k]$ 으로부터 완벽하게  $x(t)$ 를 복원할 수는 없다.

즉, 샘플링은 연속신호  $x(t)$ 로부터 수열  $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ 를 만드는 동작이다. 여기서  $t_k$ 는 샘플링이 일어나는 순간으로 시간상에서 어떤 특별한 점에서의  $x(t)$ 만 고려한가는 것을 뜻한다.

샘플링에서 중요한 문제는 샘플링에 의해 얻어진 이산 신호가 연속 신호의 특성을 잘 보존하고 있고 정보의 손실 없이 원래의 연속신호로 완전하게 복원 될 수 있는가 하는 것이다. 이러한 전제가 만족되지 않는다면 연속신호를 샘플링 하여 디지털 시스템으로 처리하는 것은 무의미하다.

보통 연속신호는 일정한 기산의 증분마다 샘플링 되어 진다. 이때의 시간 증분을 샘플링 주기라고 부르며  $T_s$ 로 나타낸다. 이 경우 샘플링 된 이산신호의 값은  $x(kT_s)$ 가 된다. 여기서  $k$ 는 정수이며,  $x(kT_s)$ 를 간단히  $x[k]$ 로 쓸 수 있다.

정현파 신호의 샘플링은 일반적인 연속기간 신호들을 정현파의 합으로 표현할 수 있다는 점에서 정현파 신호는 샘플링 효과를 연구하는데 기초가 되는 연속신호이다.

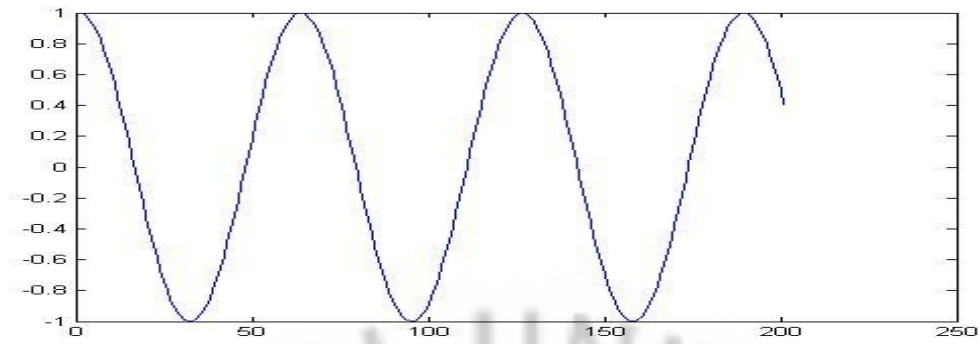
$$X(T) = A \cos \omega t$$

이 신호를 샘플링 주기  $T_s$ 로 샘플링하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x[k] = x(kT_s) = A \cos(\omega k T_s) = A \cos(\hat{\omega} k)$$

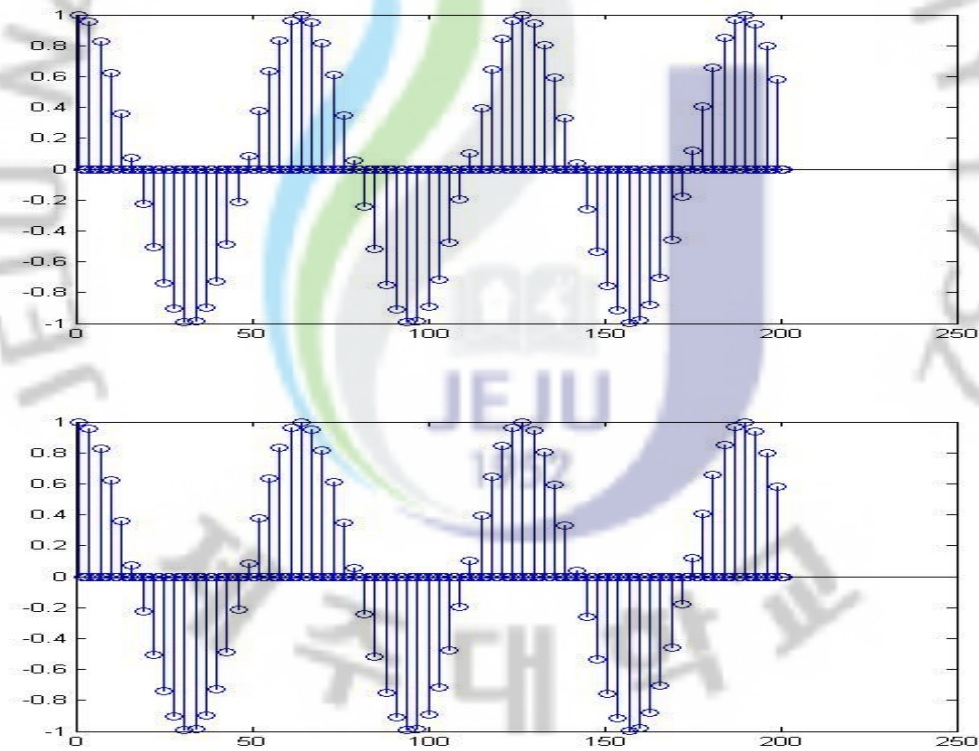
여기서  $\hat{\omega}(=\omega T_s)$ 은 샘플링 주기  $T_s$ 로 정규화 된 라디안 주파수로서 단위 rad인 파원이 없는 양이다. 이것은  $x[k]$ 에서  $k$ 가 차원이 없는 것과 일치한다. 즉 이산 신호는 단순히 수들의 수열로서 샘플링에 의해 시간 척도 정보를 포함하고 있는 샘플링 주기에 대한 정보를 전하지 않는다. 즉, 샘플링 된 이산신호는 시간 척도 정보를 포함하고 있는 샘플링 주기에 대한 정보를 갖고 있지 않으므로 부가적 조건들이나 정보가 없다면 이를 어떤 특정한 연속신호와 결부시킬 수 없다.

정현파 신호를 복원하는 것과 샘플링 주기 간에는 밀접한 관계가 있다. 연속신호가 대역제한(band limited)되고 각 샘플들이 그 신호에서 가장 높은 주파수와 연관되어 충분히 샘플링 율로 취해진다면 그 샘플링 집합은 유일하게 그 신호를 나타내며 완전하게 복원 될 수 있다.

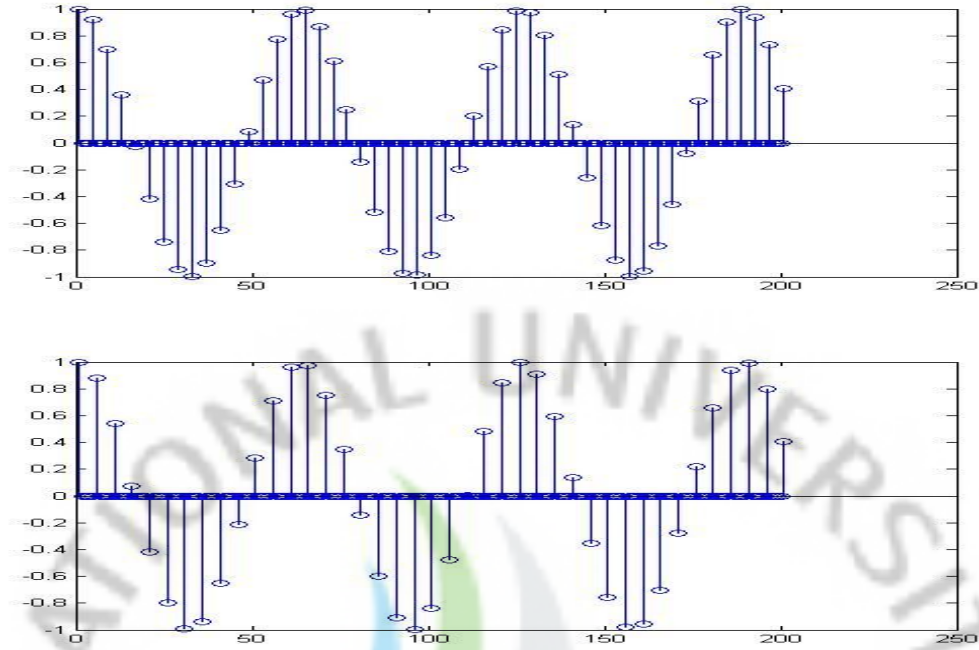


(Figure.1) ideal signal

다음과 같은 크기 1인 코사인 신호가 있을 때 샘플링 간격을 2초에서 5초로 변함에 따라 아래 그림과 같은 데이터를 얻는다.

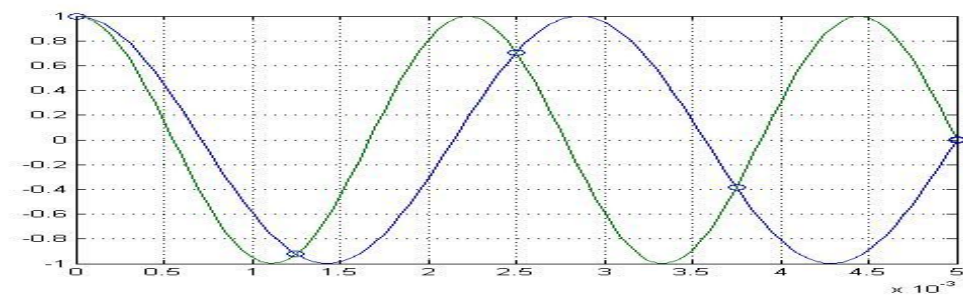
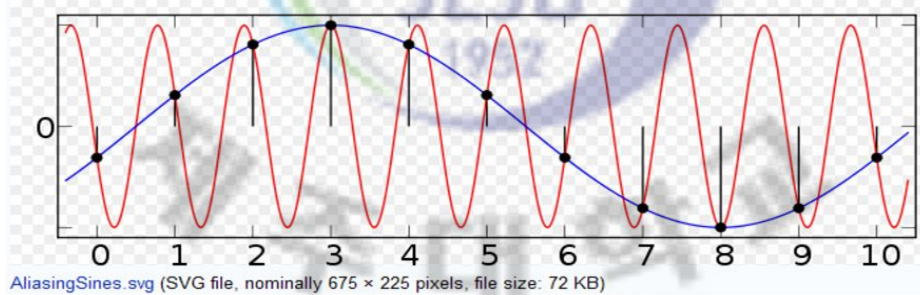


(Figure.2) ideal signal of different sampling time  $i$



(Figure.3) ideal signal of different sampling time ii

같은 연속신호를 샘플링 해서 이산데이터를 얻을 때 샘플링 간격이 커질수록 그 신호의 특성을 정확히 파악하기 힘들어 짐을 알 수 있다. 그렇다고 간격을 작게 하면 필요 없이 자료가 방대 해 지고 계산에 많은 시간을 소유하게 된다.



(Figure.4) Aliasing



위의 그림은 주기가 다르고 크기는 같은 신호이다. 연속 신호를 등간격으로 시계열 변환시켰을 때, 고주파수 성분이 저주파수 성분으로 변환되거나 서로 다른 두 신호를 같은 신호로 인식 할 수 있다

이런 문제를 해결하는 주파수 이론은 Nyquist 샘플링 이론이다. 총 샘플링 주파수의 1/2이 되는 주파수를 폴딩 주파수 혹은 나이퀴스트 주파수라 부르며 흔히  $f_s$  표기한다.

- 최대주파수 성분이  $f_s$ 인 아날로그 신호는 적어도  $2f_s$  Hz 샘플링 율로 균일하게 샘플링 된 샘플들에 의하여 완전히 복원 될 수 있다. ( $f_s \geq 2f_{\max}$ )
- 즉, 샘플링 된 신호의 최대 주파수의 2배가 되는 주파수로 샘플링 하면 손실 없이 원신호를 재구성할 수 있다.
- Nyquist 주파수 :  $2f_{\max}$  [rad/sec]
- Nyquist 율 : 신호의 최대주파수의 2배 즉,  $f_s = 2f_{\max}$
- Nyquist Interval :  $T = 2\pi/2f_{\max} = \pi/f_{\max}$  [sec]

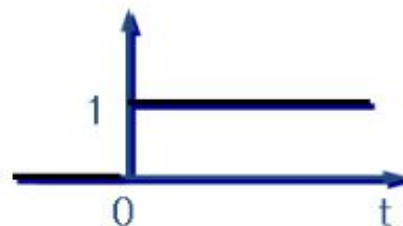
### 2.1.5 기본적인 이산 (시간)신호

이산신호는 신호는 이산적인 순간에 대해서만 정의 되는 신호로서 정렬된 숫자들의 나열로 표시되기 때문에 수열(sequence)이라고도 지칭된다. 이산 신호는 태생적으로 이산인 신호로 있지만 연속신호의 표본화를 통해서 얻어지고 처리되는 경우가 많다.

#### 2.1.5.1 (단위) 계단함수 (step function)

단위 계단함수는 다음 식과 같이 정의 된다

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



(Figure.5) (단위) 계단함수 (step function)

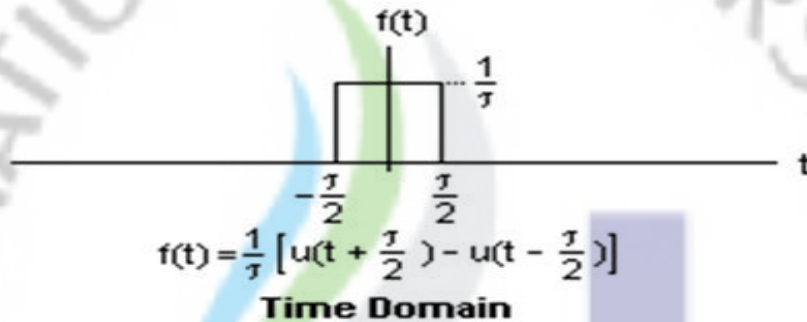
위의 정의에서  $k$ 가 정수임을 유의하여야한다.

### 2.1.5.2 (단위) 구형(rectangular) 펄스

다른 유용한 스위칭 함수로는 아래와 같이 정의 되는 단위 구형 펄스가 있다.

$$p_L[k] = \begin{cases} 1, & -(L-1)/2 \leq k \leq (L-1)/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= u[k + (L-1)/2] - u[k - (L+1)/2]$$



(Figure.6) (단위) 구형(rectangular) 펄스

### 2.1.5.3 (단위) 임펄스(impulse)함수

단위 임펄스 함수는 물리적으로 존재하지 않는 함수이지만 시스템의 특성을 이해하는 데 매우 중요한 위치를 차지하는 함수이다.

$$\delta[k] = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

으로 정의되며 Kronecker delta 또는 단위 샘플(sample) 함수라고도 한다.

이산적 의미의 임펄스 함수가 아니 연속적 의미의 단위 임펄스 함수 즉 델타함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

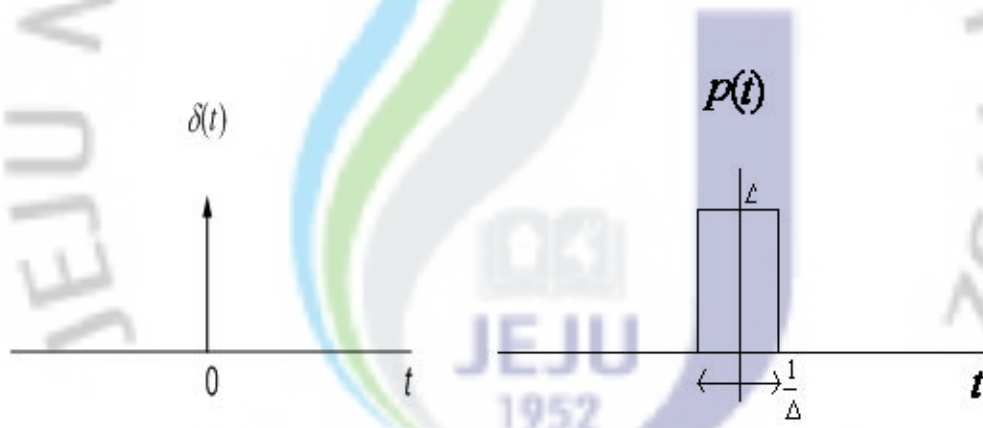
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

단위 임펄스 함수의 면적은 1이고 이 단위 면적이 t축의 미소 구간 안에서 얻어 간다는 것을 나타낸다. 이러한 성질들로 함수를 정의하는 동기는 사용되는 어떤 측정 장치의 분해능과 비교하여 짧은 시간 영역 안에서 일어나는 현상을 표현하기 위한 필요성으로부터 나왔다. 하지만 이것은 측정된 양의 거의 순간적인 변화를 생성해 낸다.

단위 임펄스 함수에 대한 수학적 기초는 확고한 분포이론에 대한 Laurent Schwartz의 개척적인 작업으로 공식적인 수학적 정의는 복함수(functional)의 의미로 진정이 있었으며

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

이고, 여기서 x(t)는 t=0에서 연속이다. 즉,  $\delta(t)$ 는 위 식에 의해 정의되는 복함수이며 원점에서 연속인 임의의 함수에 x(0)의 값을 부여한다.



단위 임펄스 함수      구형파 함수의 극한

(Figure.7) 단위임펄스 함수와 구형파 함수의 극한

위 식이 적분에 대한 공식적인 성질을 따른다는 조건에 의하여 여러 가지  $\delta(t)$ 의 유용한 특성이 얻어진다. 예를 들어  $\delta(at)$ 를 고려할 때, a가 상수라면 적분변수를 치환하고 a가 상수라면, 적분변수를 치환하고 a > 0과 a < 0을 분리함으로써

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

와 같이 될 수 있고  $a=-1$ 을 대입하면

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

적분의 공식적인 성질을 관계시키는 정의 결과를 상기한다면 단위 임펄스를 포함하는 조작을 할 때 위의 식을 이용할 수 있게 된다.

두 번째 델타 함수의 중 중요한 성질은 천이성이며  $x(t)$ 가  $t=t_0$ 에서 연속이라 가정하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

와 같다. 이 성질은 위에 식에  $\lambda=t-t_0$ 로 놓고

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda+t_0)\delta(\lambda)d\lambda = x(t_0)$$

를 얻을 수 있다.

유한 구간을 가진 적분은  $t_1 < t < t_2$ 와 같이 어떤 구간 바깥은 0이 된다고 정의하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{그 외} \end{cases}$$

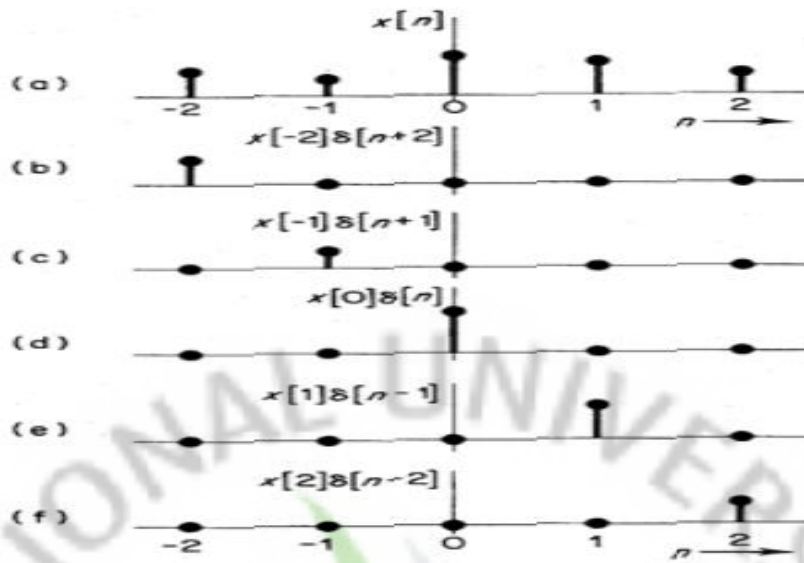
이며,  $\delta(t)$ 의 네 번째 특징은

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

와 같다. 여기서  $x(t)$ 가  $t=t_0$ 에서 연속이면, 직관적으로  $t=t_0$ 를 제외한 모든 곳에서  $\delta(t-t_0)=0$ 이 된다.

### 2.1.6 이산시스템의 convolution 표현

이산 신호 임펄스 함수는  $k=0$ 에서만 1의 값을 갖는 성질을 이용하면 임의의 이산 신호는 다음과 같이 각 시간순간에 대한 신호의 크기와 그 시간만큼 이동된 단위 임펄스의 곱의 합으로 표현 할 수 있다.



(Figure.8) 이산 테이더 convolution 표현

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \dots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[0] \\
 &\quad + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]
 \end{aligned}$$

위의 식은 단순한 수학적 등가식이 아니라 매우 강력한 개념적 도구이다. 선형시스템의 특징 중 하나인 가산성(additivity)은 여러 종류의 원인(입력)이 어떤 시스템에서 작용하고 있을 때 그 시스템에 의한 전체적인 효과(출력)는 각 원인을 따로따로 고려함으로써 결정할 수 있다는 것으로, 각 원인을 고려할 때 다른 원인은 모두 없다고 가정하면 전체적인 효과는 각 원인에 의한 효과의 합으로 표현하다. 수학적으로 연산자를  $L$ , 원인을  $u$ , 효과를  $y$ 로 표현할 때 다음의 관계가 성립한다.

$$L[u_1] = y_1, L[u_2] = y_2 \rightarrow L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2] = y_1 + y_2$$

위에 표현된 임의의 신호를 시스템에 인가하면 선형성 중 가산성에 의해 시스템 응답을 다음과 같이 된다.

$$y[k] = L[x[k]] = L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k]\right] \\ = \dots + x[0]L[\delta[-k]] + \dots + x[n]L[\delta[n-k]] + \dots$$

선형 시스템의 마지막 조건이 동차성(homogeneity)은 원인이  $\alpha$ 배로 증가하면 효과 또한  $\alpha$ 배로 증가함을 말한다. 즉,

$$L[u] = y \rightarrow L[\alpha u] = \alpha L[u] = \alpha y$$

이고, 이식을 위의 식에 대입하면

$$y[k] = \dots + x[0]L[\delta[-k]] + \dots + x[n]L[\delta[n-k]] + \dots \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]L[\delta[n-k]]$$

선형 시스템의 가산성과 동차성을 합쳐 다음과 같은 식은 중첩의 원리(principle of superposition)라고 다음과 같다.

$$L[\alpha u_1 + \beta u_2] = \alpha L[u_1] + \beta L[u_2] = \alpha y_1 + \beta y_2$$

시스템에서 입력신호의 시간 축상의 이동(전진 혹은 지연)이 단순히 출력신호에서 동일한 시간 축상의 이동을 초래할 때 이를 시불변(time invariant)이라고 하고 그렇지 않을 경우 시변(time varying)이라고 한다. 다시 말해 시스템의 출력이 입력의 형태에만 의존하고 입력이 적용되는 시점에는 의존하지 않을 경우를 시불변이라고 한다. 입력  $x(t)$ 에 대한 출력이  $y(t)$ 이면, 임의의  $x(t-t_0)$ 에 대한 출력이  $y(t-t_0)$  이어야 한다. 즉,

$$L[x(t)] = y(t) \rightarrow L[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

시불변성은 시스템의 파라미터가 시간에 따라 변하지 않아야만 가능하다. 시스템의 입출력 관계가 미분방정식으로 표현될 경우 방정식의 계수가 상수이면 시불변 시스템이고 계수가 시간함수가 되면 시변시스템이다. 시스템이 선형성을 만족하면서 시불변인 시스템을 선형시불변(LTI : Linear Time Invariant)시스템이라고 한다.

임의의 신호를 선형성 중 동차성에 의해 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y[k] &= \dots + x[0]L[\delta[-k]] + \dots + x[n]L[\delta[n-k]] + \dots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]L[\delta[n-k]]
 \end{aligned}$$

시불변성에 의해  $L[\delta[n-k]] = h[n-k]$ 가 만족 되므로 시스템이 출력은

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]L[\delta[n-k]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k]$$

위의 식은 임의의 입력  $x[k]$ 에 대한 시스템의 응답은 단지 시스템의 임펄스 응답만 알면 알아낼 수 있음을 의미한다. 그리고 위 식의 우변과 같은 형태를 상승합(convolution summation)이라고 하며, convolution은 기호\*를 사용하여 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]*h[k]$$

## 2.2 Fourier 해석

### 2.2.1 Fourier 급수와 계수

Fourier 정의의 기본 개념은, 모든 신호 성분은 각기 다른 주파수를 가진 정현파들의 합으로 표현할 수 있고 그것을 다음과 같은 수식으로 표현 하였다.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

그리고 각각의 주파수의 계수는 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, n = 1, 2, 3, \dots \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

그에 대한 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} dx \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \\
&= a_0 [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0 \\
\therefore a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} \cos mx dx \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos mx dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m) + \cos(n-m)) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m) + \sin(n-m)) dx
\end{aligned}$$

if  $n \neq m$  이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mx dx = 0$$

else if  $n = m$  이면

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mx dx &= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + \cos 0x) dx \\
&= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx + \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= a_n \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mx dx &= a_n \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mx dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} \sin mx dx \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \sin mx dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m) - \sin(n-m)) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m) - \cos(n-m)) dx
\end{aligned}$$



$$\text{if } n \neq m \text{ 이면}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mx dx = 0$$

$$\text{else if } n = m \text{ 이면}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mx dx = \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx - \cos 0x) dx$$

$$= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos 0x) dx = b_n \pi$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mx dx$$

### 2.2.2 Fourier 급수의 위상각 형태와 복소 표현



$$\sin \alpha = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \cos \alpha = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

(Figure.9) 푸리에 급수 위상각 형태

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(w_o t) + b_n \sin(w_o t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \times \cos(w_o t + \delta_n)$$

$$\delta_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

이 성립한다.

복소지수를 포함하는 또 다른 형태의 푸리에 급수를 오일러 공식에 이용하여

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

정리하면 다음과 같이 된다.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t)e^{jn\omega_0 t} + f(t)e^{-jn\omega_0 t}\} dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T \{f(t)e^{jn\omega_0 t} - f(t)e^{-jn\omega_0 t}\} dt$$

$$A = a_n \quad X = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$B = jb_n \quad X = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$A = X + Y, \quad B = X - Y$$

$$\frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{jn\omega_0 t} dt = A_n$$

$$\frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = B_n$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{jn\varpi_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-jn\varpi_0 t}$$

$A_n e^{jn\varpi_0 t}$ 에서  $n=0$  일 때

$$A_0 e^0 = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^0 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = a_0 \text{ 이다.}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jn\varpi_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-jn\varpi_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{jn\varpi_0 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} B_{-n} e^{jn\varpi_0 t}$$

$$B_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\varpi_0 t} dt$$

$$B_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\varpi_0 t} dt = A_n$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{jn\varpi_0 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} A_n e^{jn\varpi_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\varpi_0 t}$$

### 2.2.3 페이지 신호

물리적 시스템은 항상 실수신호만 작용하더라도, 실수신호를 수학적인 복소량으로 표현하는 것이 편리하다. 회로이론의 페이지 량은 다음과 같이 표시하다.

$$\vec{X} = Ae^{j\theta} = A \angle \theta$$

는 실수 정현파 신호

$$x(t) = \text{Re}(\vec{X} e^{j\varpi_0 t}) = A \cos(\varpi_0 t + \theta), \quad -\infty < t < \infty$$

에 대한 기호표시이다. 복소신호

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= Ae^{j(\varpi_0 t + \theta)}, \quad -\infty < t < \infty \\ &= \vec{X} e^{j\varpi_0 t} \end{aligned}$$

를 회전 페이지 신호라 한다. 이것은 세 개의 매개변수인 진폭  $A$ , 위상  $\theta$ , 각주파수  $\varpi_0 > 0$  로 규정된다. 오일러 정리  $\exp(ju) = \cos u + j \sin u$ 를 사용하면,  $\tilde{x}(t)$ 가 주

기  $T_0=2\pi/\omega_0$ 를 가지는 주기적 신호라는 것을 쉽게 밝힐 수 있다.

$$X = a + jb = Re^{j\theta} = R\cos\theta + jsin\theta$$

로 표시할 수 있다. 여기서 a는 실수부, b는 허수부, R은 크기  $\theta$ 는 각도이다. 뒤의 식은 오일러의 관계, 즉

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + jsin(\theta)$$

에 의한 것이다. 실수부와 허수부를 비교하면,

$$Re(X) = a = R\cos(\theta), \quad Im(X) = b = R\sin(\theta)$$

라는 것을 알 수 있다. 이 때  $Re(*)$ 는 실수부를  $Im(*)$ 를 각각 표시한다. 역관계는

$$R = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}(b/a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= Ae^{j(\omega_0 t + \theta)}, \quad -\infty < t < \infty \text{에서 처럼,} \\ &= \vec{X}e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

실수 정현파 신호  $A\cos(\omega_0 t + \theta)$ 와 관련시키기 위해, 실수부분을 선택하는 것 외에도,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\tilde{x}(t) + \frac{1}{2}\tilde{x}^*(t) \\ &= \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t + \theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t + \theta)}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

와 같이 복소 공액과 서로 반대로 회전하는 페이지 항으로 표현함으로써  $\tilde{x}(t)$ 를 정현파와 대응 되는 관계로 만들 수 있다.

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$  대한 식들을 시단영역표현이라 한다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\tilde{x}(t) + \frac{1}{2}\tilde{x}^*(t) \\ &= \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t + \theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t + \theta)}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

에서 양의 주파수와 음의 주파수에 의한 회전 페이지의 합으로 생각할 수 있다. 이런 수학적 유도는 실수성분을 얻기 위해서는 복소 공액을 더할 필요가 있다는 사실로부터 생긴 결과이다. 강조되어야 할 것은 음의 주파수들은 물리적으로 존재하지 않고 단지 수학적 유도를 편리하게 얻게 된다.

## 2.2.4 스펙트럼

$x(t)$ 에 대한 또 다른 표현은 주파수 영역에서 주어진다.  $\tilde{x}(t) = A \exp[j(\omega_0 t + \theta)]$ 는 주어진  $f_0$ 값에 대한  $A$ 와  $\theta$ 에 의해서 완전히 규정될 수 있기 때문에 주파수 영역 표현은 주파수  $f$ 의 함수인 진폭  $A$ 와,  $f$ 의 함수인  $\theta$ 를 표현하는 두 가지 그래프 형태를 가질 수 있다. 이런 주파수에 대한 진폭 그래프를 단측 진폭스펙트럼이라 부른다. 이 스펙트럼 그래프는 단지 양의 주파수에 대한 점이나 선분으로 이루어져있기 때문에 단측이라는 수식어가 사용되었다.

위의 식에 포함하는 스펙트럼 그래프가 만들어 졌다면  $x(t)$ 가 서로 반대되는 방향의 회전 페이지의 합으로 얻어지기 때문에  $f = f_0$ 와  $f = -f_0$ 에서 스펙트럼 선분이 나타나게 된다. 여기서 관심을 가지고 있는 단일 정현파 신호에 대한 스펙트럼을 양측 진폭 위상 스펙트럼 이라고 부른다. 정현파 성분의 합으로 이루어져 있다면 스펙트럼 그래프는 여러 선분으로 구성되었을 것이다. 관습적으로 실수 성분을 택하므로 정현파 함수로 표현된 신호는 스펙트럼을 구하기 전에 여현파 함수로 변환을 하여야 한다. 이러한 경우  $\sin(\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t + \theta - \pi/2)$ 의 등식이 유용하다.

양측 스펙트럼에 대하여 두 가지 강조하는 것이 중요하다. 첫째,  $A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 와 같이 실수 성분의 정현파 신호를 얻기 위해서는 공액 복소 페이지를 합할 필요가 있기 때문에 음의 주파수 선분이 있어야 한다. 둘째, 진폭스펙트럼은 원점에 대하여 짝함수의 대칭성을 가지고 위상스펙트럼은 홀함수의 대칭성을 다진다는 것을 주목하여야 한다. 이 대칭성은  $x(t)$ 의 신호가 실수이기 때문에 나타나는 결과이며 이것은 실수의 성분을 얻기 위해서는 회전하는 페이지 공액이 가산 되어져야 한다는 것을 의미한다.

다시 말해, 함수  $f(t)$ 의 Fourier변환  $\hat{f}(\omega)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{f}(\omega) = \text{Re}\hat{f}(\omega) + j\text{Im}\hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$$

여기서  $\text{Re}\hat{f}(\omega)$ 와  $\text{Im}\hat{f}(\omega)$ 는 각각  $\hat{f}(\omega)$ 의 실수부와 허수부를 의미한다. 또한,  $|\hat{f}(\omega)|$ 와  $\Phi(\omega)$ 를 각각  $f(t)$ 의 진폭스펙트럼(amplitude spectrum)과 위상스펙트럼(phase spectrum)이라 한다. 이들은 연속스펙트럼들(continuous spectrums)이다.

$$\text{Re}\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

$$\text{Im}\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$\text{Re}\hat{f}(\omega) = \text{Re}\hat{f}(-\omega), \quad \text{Im}\hat{f}(\omega) = -\text{Im}\hat{f}(-\omega)$$

복소수인  $\hat{f}(\omega)$ 의 크기는  $\sqrt{\text{Re}\hat{f}(\omega)^2 + \text{Im}\hat{f}(\omega)^2}$  이고 위상은  $\tan^{-1}\frac{\text{Im}\hat{f}(\omega)}{\text{Re}\hat{f}(\omega)}$ 이다.

### 2.2.5 Power Spectral Density(PSD)

Power 스펙트럼은 신호를 여현파의 합으로 가정하고 푸리에 변화의 가능한 신호가 존재할 때 신호의 급수(푸리에 급수)의 주파수에 대한 배열 상태를 말한다. 다시 말해 신호는 시간에 대해 적분가능이나 덧셈 가능해야 한다. Power 스펙트럼은 푸리에 변환을 이용한다. Power 스펙트럼은 진폭-주파수 반응의 제공으로서 자기상관 함수의 푸리에 변환을 말하며 다음과 같이 정의가 된다.

$$P = s(t)^2$$

### 2.2.6 임펄스 샘플링

무한 임펄스 열  $p(t)$ 를 연속 신호  $x(t)$ 에 곱하는 변조동작으로 모델링 될 수 있다. 즉,

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$$

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = x(nT_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$$

즉, 샘플링 된 신호는 세기가  $x(nT_s)$ 인  $T_s$ 초 간격의 임펄스들로 구성되어 있다. 이런 샘플링의 정의는 임펄스 함수를 실제로 발생시킬 수 없기 때문에 상당한 추상적인 개념이지만 시스템에 대한 임펄스 응답의 경우와 마찬가지로 샘플링 성질을 수

학적으로 규명하는데 매우 유용하다.

임펄스 열  $p(t)$ 는 주기가  $T_s$ 인 주기 신호이므로 다음과 같이 Fourier 급수로 표현할 수 있다.

$$p(t) = \frac{1}{T_s} (1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + 2\cos 3\omega_s t \dots)$$

따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_s(t) = \frac{1}{T_s} (x(t) + x(t)2\cos\omega_s t + x(t)2\cos 2\omega_s t + x(t)2\cos 3\omega_s t + \dots)$$

Fourier 변화하면 우변의 첫째 항은  $X(\omega)$ 가 되고, 둘째 항은  $X(\omega - \omega_s) + X(\omega + \omega_s)$ 가 되는데, 이것은  $X(\omega)$ 를  $\omega_s$ 와  $-\omega_s$ 만큼 이동한 것이다. 마찬가지로 나머지 항들에 대해 반복하면 다음과 같이 된다.

$$X_s = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * p(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega - n\omega_s)$$

샘플링 된 신호  $x_s(t)$ 의 Fourier 스펙트럼  $X_s(\omega)$ 는 원래 신호  $x(t)$ 의 스펙트럼  $X(\omega)$ 를 진폭을  $\frac{1}{T_s}$  배하여 샘플링 주파수  $\omega_s$ 의 정수배마다 반복한 주파수에 대한 주기함수임을 의미한다.

## 제3장 Matlab을 이용한 시계열 이산자료의 주파수 변환의 방법

### 3.1 이산자료의 주파수 변환

시계열 시간영역의 분석(time domain analysis)은 과거의 자료를 가지고 그 확률 구조나 패턴에 대한 정보를 기초하여 그 시계열의 규칙성을 찾아 미래의 관측값을 예측하는 방법이다. 하지만 이 시계열의 자료가 삼각함수의 주기함수들의 합이라고 할 경우 시계열 보다는 주파수 영역분석(frequency domain analysis)이 보다 효과적일 수 있다. 이 주파수영역 분석은 주어진 정상시계열을 서로 다른 주기를 갖는 사인이나 코사인 함수와 같은 주기함수의 일차결합으로 나타내어 여기서 얻어진 각 주기나 그 역수의 주파수의 영향력을 스펙트럼 형식으로 표시하여 그 시계열의 주기성을 파악하는 방법이라 할 수 있다.

### 3.2 시간데이터의 주파수 변환

— Matlab코드 —

```
dt=1      % 샘플링 간격
SN=[size(X)]; % 데이터 개수 행렬표현
N=SN(1,2); % 데이터 개수
T=dt*N;   % 시간 좌표값
fs=(2*pi)/T; % 샘플링 주파수
f=(0:dt:dt*(N-1))*fs %주파수 좌표값
```

여기서, dt는 시간이나 길이의 시계열분석의 관측 길이나 관측시간의 간격이며, X는 관측된 시계열 이산자료의 1×N행렬이고, N은 관측된 데이터의 개수이다. T는 관측 시간이나 관측 길이이고 fs는 T의 역수이고 샘플링이 최소 주파수이다. f는 fs의 간격으로 0에서 (N-1)×fs까지의 주파수가 증가 되는 이산 자료이다.



### 3.3 푸리에 급수 $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dx$$

연속자료의  $a_0$ 의 푸리에 급수를 이산 자료 식으로 고치면 아래와 같다.

— Matlab코드 —

```
a0=(fix(((sum(X)*dt)/pi)*(10^4)))/(10^4)
```

여기서  $\text{sum}(X)$ 는  $X$ 의 이산자료들의 합이고  $\text{sum}(X)*dt$ 는 이 이산자료의  $dt$ 간격의 면적이 되며  $\text{fix}$ 명령어는 유효숫자를 소수점 4째 자리까지 나타내기 위하여 사용하였다.

### 3.4 푸리에 급수 $a_n, b_n$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

연속자료의  $a_n, b_n$ 의 푸리에 급수를 이산 자료 식으로 고치면 아래와 같다.

— Matlab코드 —

```
x=1:1:N;
```

```
freq=2*fs*x;
```

```
for i=1:(N-1);
```

```
  a_(i)=(sum((X.*cos(i*freq))*dt*2)/T);
```

```
  b_(i)=(sum((X.*sin(i*freq))*dt*2)/T);
```

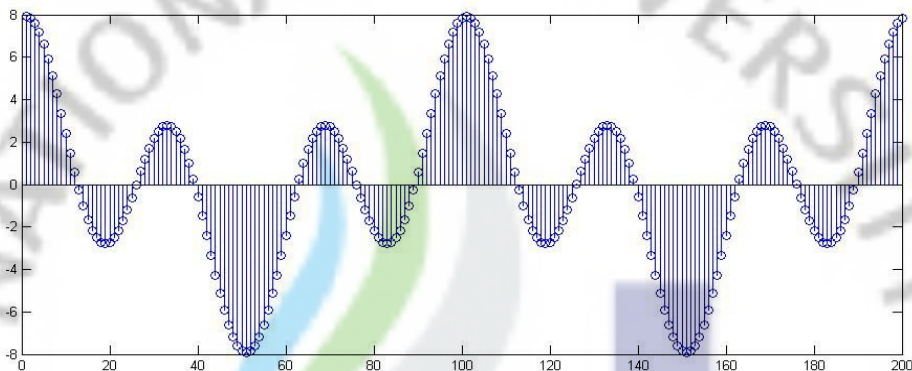
```
  a(i)=(fix(a_(i)*10^4))/(10^4);
```

```
b(i)=(fix(b_(i)*10^4))/(10^4);
```

```
end
```

여기서  $i \times \text{freq}$ 는  $i$  번째인 주파수이다. 소수점 넷째 자리까지의  $a_n, b_n$  값을 나타낸다.

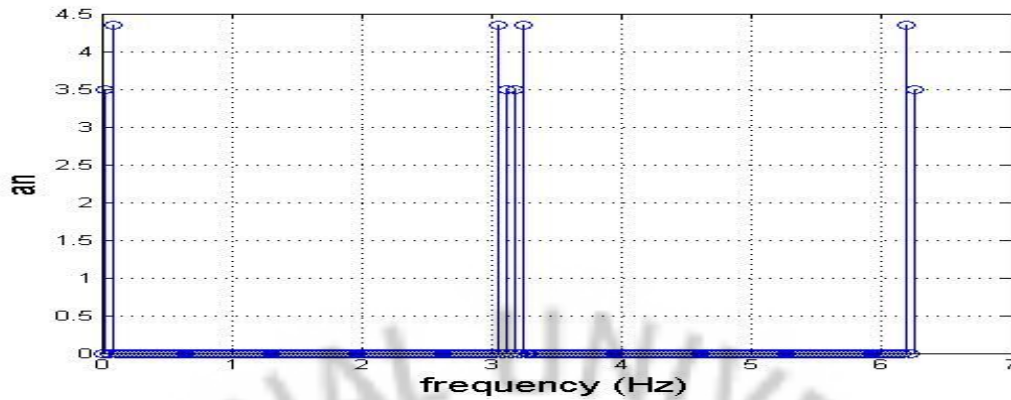
### 3.5 푸리에 급수와 주파수 표현의 해석



(Figure.10) Example 1.  $3.5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{0.01} \times t\right) + 4.43 \times \cos\left(\frac{2\pi \times 3}{0.01} \times t\right)$

위의 그림과 같은  $3.5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{0.01} \times t\right) + 4.43 \times \cos\left(\frac{2\pi \times 3}{0.01} \times t\right)$  파의 데이터를 1초 간격으로 200초간 샘플링 한 것을 위의 Matlab코드로 분석하면 아래의 그림과 같다.

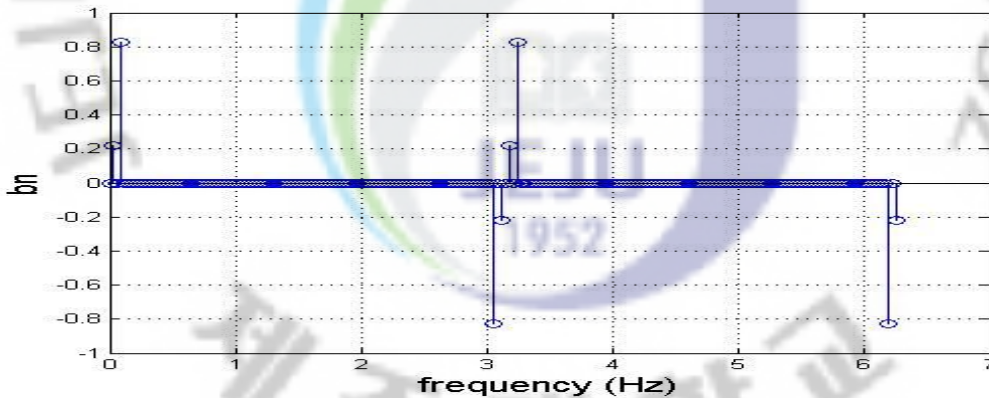
$$a_0 = 0$$



(Figure.11) Example 1.푸리에 급수 I

여기서 주기가  $\frac{2\pi}{0.01}$ 와  $\frac{2\pi \times 3}{0.01}$  주기에 크기가 3.5와 4.43의 짜인 곡선의 합인 형태이다. 하지만 주기가  $\left(2\pi - \frac{2\pi}{0.01}\right)$ 와  $\left(2\pi - \frac{2\pi \times 3}{0.01}\right)$ 인 곳에도 3.5와 4.43의 크기가 보인다. 이 이유는 코사인 함수의 우수함수 성질에 의한 것이다.

$$\text{우수함수 } \cos(t) = \cos(-t) = \cos(2\pi - t)$$



(Figure.12) Example 1.푸리에 급수 II

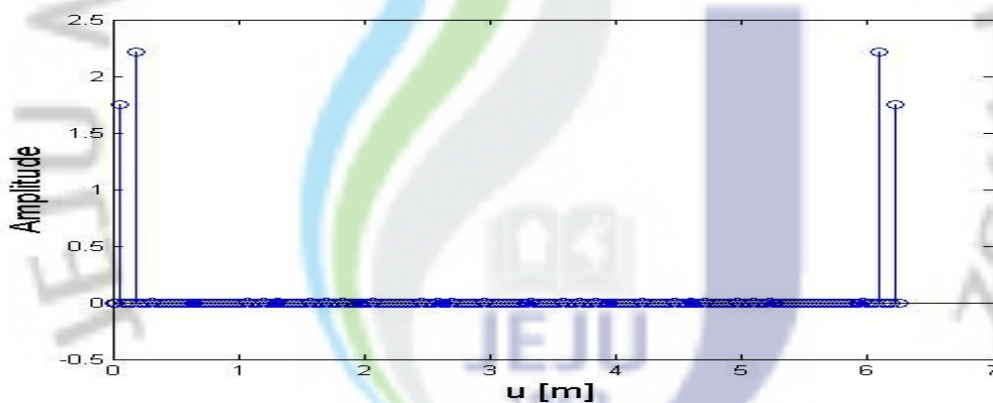
$b_n$ 의 값은 연속데이터의 샘플링에 의한 영향으로 이산데이터화 하여 계산하는 과정에서 나타나게 되었으며  $\frac{2\pi}{0.01}$ 와  $\frac{2\pi \times 3}{0.01}$ 의 주기의 크기가  $\left(2\pi - \frac{2\pi}{0.01}\right)$ 와  $\left(2\pi - \frac{2\pi \times 3}{0.01}\right)$ 의 주기에 그 크기가 반대로 나타난다. 이는 sin함수의 기수 함수적 성질 때문이다.

## 3.6 연속스펙트럼들(continuous spectrums)

### 3.6.1 진폭스펙트럼(amplitude spectrum)

— Matlab코드 —

```
% amplitude spectrum  
A_s=fft(X)/N; %Do the DFT  
figure(1)  
stem(f,A_s)  
xlabel('u [m]','fontsize',15)  
ylabel('Amplitude','fontsize',15)
```



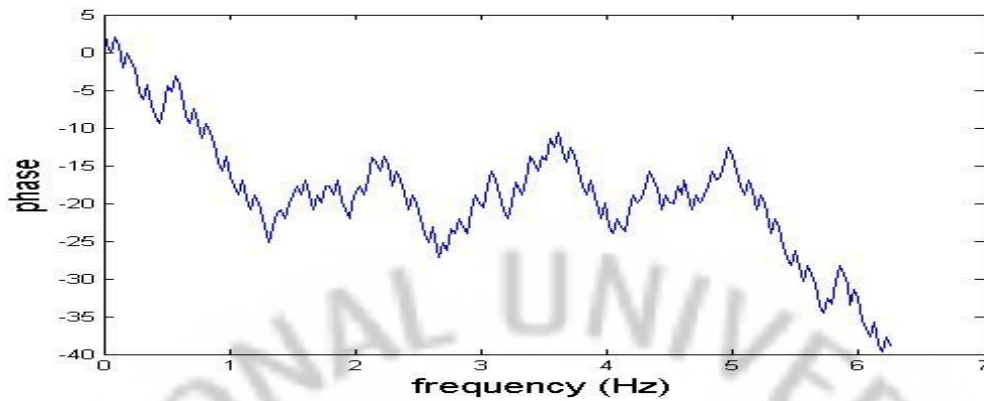
(Figure.13) Example 1.진폭스펙트럼

### 3.6.2 위상스펙트럼(phase spectrum)

— Matlab코드 —

```
% phase spectrum  
p_s=unwrap(angle(A_s));  
figure(4)  
plot(f,p_s)  
xlabel('frequency (Hz)', 'fontsize',15)
```

```
ylabel('phase','fontsize',15)
```



(Figure.14) Example 1. 위상스펙트럼

### 3.6.3 파워스펙트럼(power spectrum)

— Matlab코드 —

```
% x: Time sequence
```

```
% n: Number of DFT
```

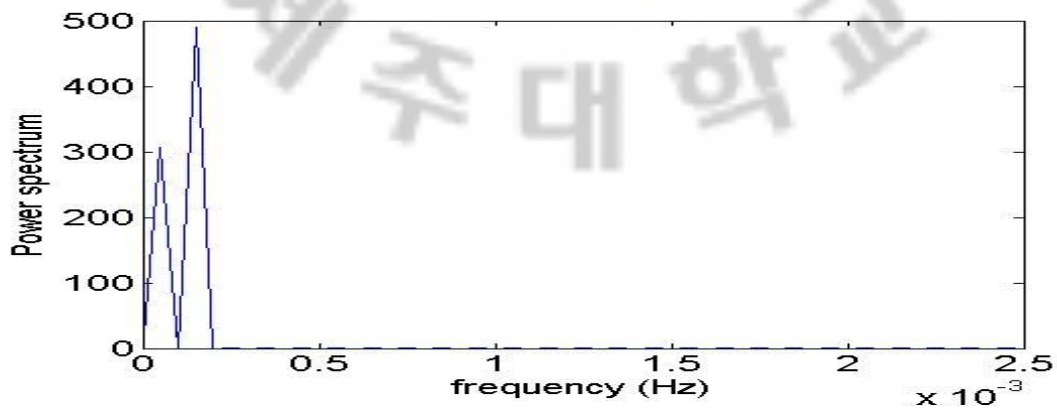
```
% R_s: Sampling time=dt
```

```
Xs = fft(x',N);
```

```
Pyy = (Xs.* conj(Xs)) / N;
```

```
f = (1/R_sample)*(0:N/2)/N;
```

```
P = Pyy(1:N/2+1);
```



(Figure.15) Example 1. 파워스펙트럼

## 제4장 Short-Time Fourier Transform(STFT)

### 4.1 국소푸리에 변환(Short-Time Fourier Transform; STFT)

푸리에 변환에 의한 스펙트럼 분석은 전 시간 구간에 신호가 연속적으로 존재하여야 하지만 파동은 그렇지 않다. 신호처리에서도 이러한 문제가 발생하였고 그 해결책으로 제시된 것이 Short-Time Fourier Transform(STFT)이다.

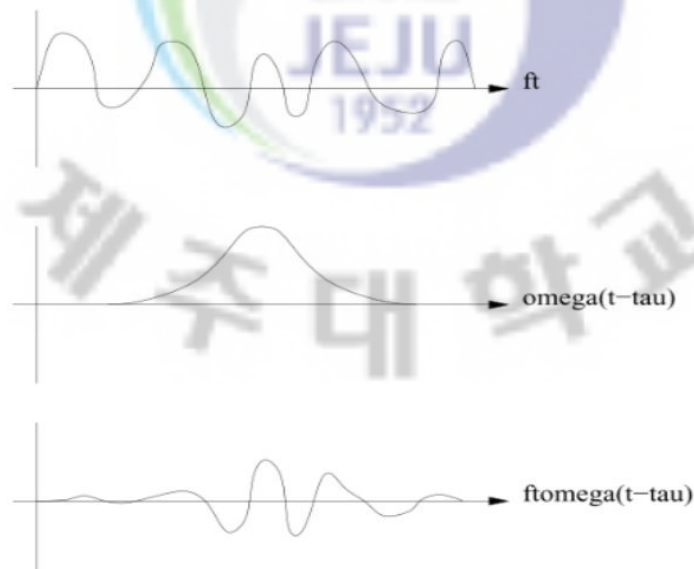
국소푸리에 변환의 정의는 다음과 같다.

$$X_{STFT}(\Omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-i\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{STFT}(\Omega, \tau) w(t - \tau) e^{i\Omega t} d\Omega dt$$

여기서  $\varpi(t)$ 는  $\int (|\varpi(t)|)^2 dt = 1$  다음과 같이 가정이 된다.

이  $\varpi(t)$ 에 의하여 연속푸리에변환 (Continue-Time Fourier Transform; CTFT)와 구분되어 진다. 이  $\varpi(t)$ 를 "슬라이딩 윈도우 CTFT" 이라 한다. 국소푸리에 변환은 (STFT)는  $X_{STFT}(\Omega, \tau)$ 와  $\tau$  시간에 대한  $\varpi(t)$  창의 센터 이동과 윈도우 입력 신호 그리고 CTFT의 계산 결과를 계산하게 된다.

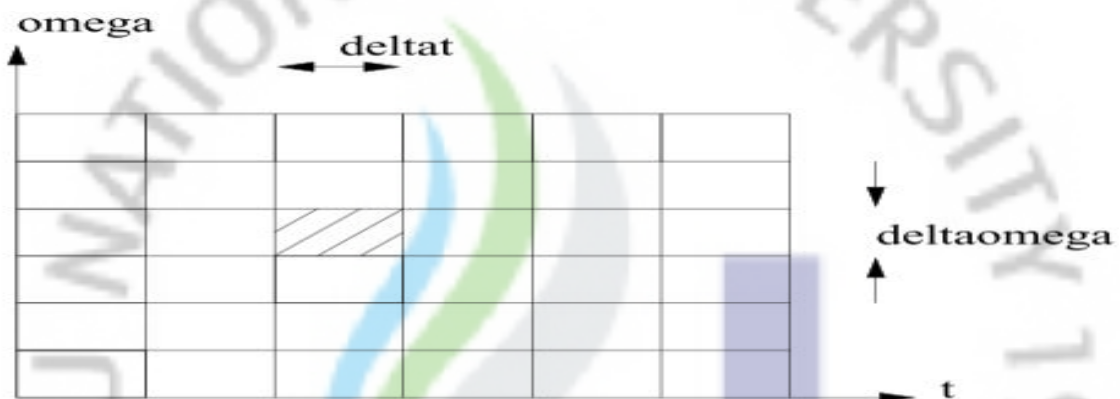


(Figure.16) sliding Window CTFT

시간  $\tau$  부근에 신호를 고립시키기 위한 것이다, 그 때 시간  $\tau$ 에 "국부적으로" 주파수 내용을 예측하기 위하여 연속푸리에 변환으로 분석을 실행한다.  
근본적으로, STFT는 기초 성분을 이용한다.

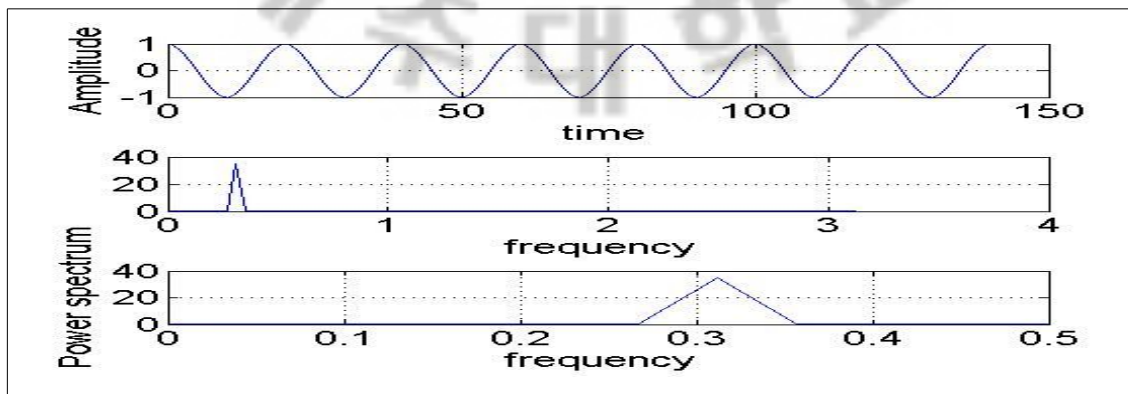
$$b_{\Omega, \tau}(t) = w(t - \tau) e^{i\Omega t}$$

이것은 시간과 주파수의 이동을 위한 창함수  $w(t)$ 로 이해 할 수 있다. STFT의 기초는 종종 타일 바른 면의 시간 주파수 계획으로 설명된다. 여기서 각각의 제목은 특정한 기본적 기초성분을 대표한다.



(Figure.17) The tiling diagram

이 창 의 윈도우의 구간만큼의 신호를 푸리에 변환을 하여 스펙트럼으로 나타낸다. 윈도우는 기간에 따라 계속적으로 이동하여 그 값을 시간과 주파수의 공간에 표현을 해주게 된다. 국소 푸리에 변환의 이점은 어떤 신호가 어느 시간 때에 존재하고 사라지는 가를 알 수 있다는 것이다.



(Figure.18) Signal & Power Spectrum i

- MATLAB코드-

```

clear all
t=0:1:140;
f1=2*pi/20;
x=0.5*cos(f1*t);
figure(1)
subplot(311)
plot(t,x); grid on
xlabel('ftime',
'fontsize',16)
ylabel('Amplitude',
'fontsize',16)

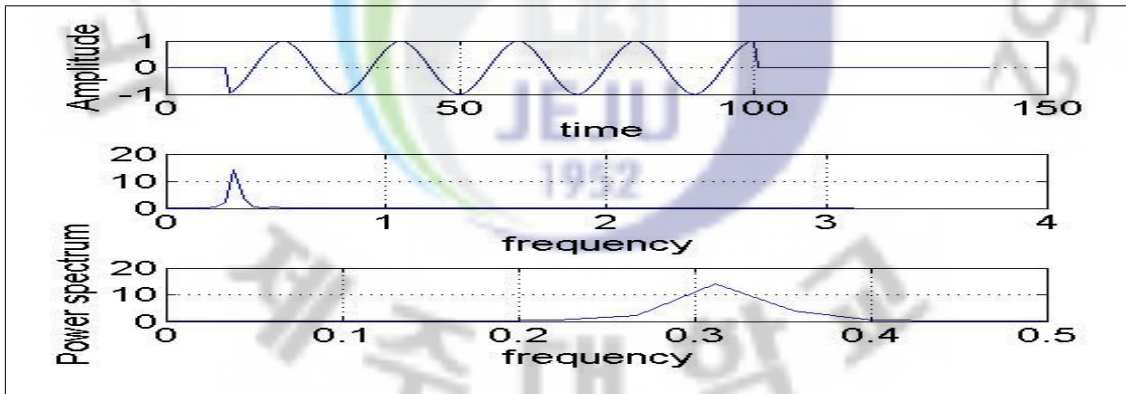
set(gca, 'fontsize', 16);
SN=[size(x)];
N=SN(1,2);
Xs = fft(x,N);
Pyy = Xs.* conj(Xs) / N;
f2 = 2*pi*(0:N/2)/N;
P = Pyy(1:N/2+1);
subplot(312)
plot(f2,P); grid on
xlabel('frequency ',
'fontsize',16)
ylabel('Power spectrum',
'fontsize',16)
set(gca, 'fontsize', 16);

subplot(313)
plot(f2,P); grid on
xlabel('frequency ',
'fontsize',16)
ylabel('Power spectrum',
'fontsize',16)
set(gca, 'fontsize', 16);

```

위 그림과 같은 전 구역에 걸쳐 주기적 신호가 존재하는 하면 이 신호의 파워 스펙트럼은 위의 그림과 같다. 한 신호는 어떤 한 주파수에 그것은 파워만큼의 한 선분으로 표현 되게 된다. 이 신호의 주파수를 계산하면 아래와 같다.

$$f = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{20} \doteq 0.3142$$



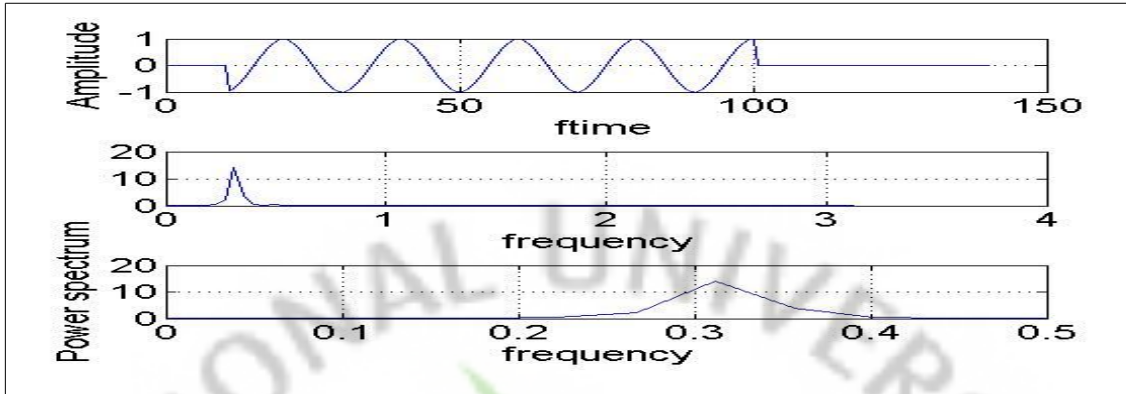
(Figure.19) Signal & Power Spectrum ii

위 그림과 같은 구하려는 구간에 대하여 비주기적 신호가 존재하는 하면 이 신호의 파워 스펙트럼은 위의 그림과 같이 작용하는 주파수는 구할 수 있으나 정확성은 조금 떨어지며 파워 스펙트럼은 첨단 부분이 높이가 작아지고 옆으로 좀 더 퍼진 형태의 파워스펙트럼을 얻게 된다. 이 신호의 주파수를 계산하면 아래와 같다.

$$f = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{58} \doteq 0.1083$$



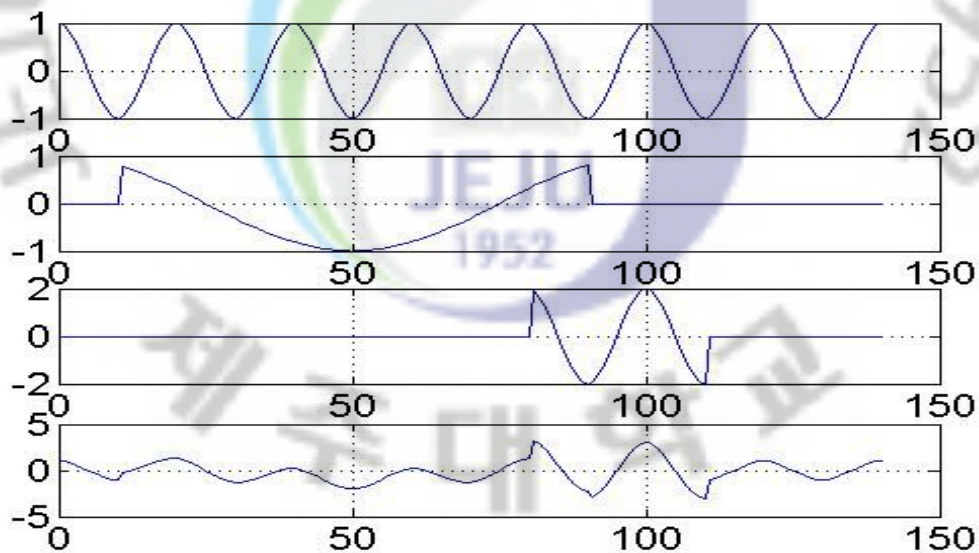
그리고 어떤 특정한 구역에만 신호가 존재하고 사라지는 경우에는 다음과 같은 현상이 나타난다.



(Figure.20) Signal & Power Spectrumiii

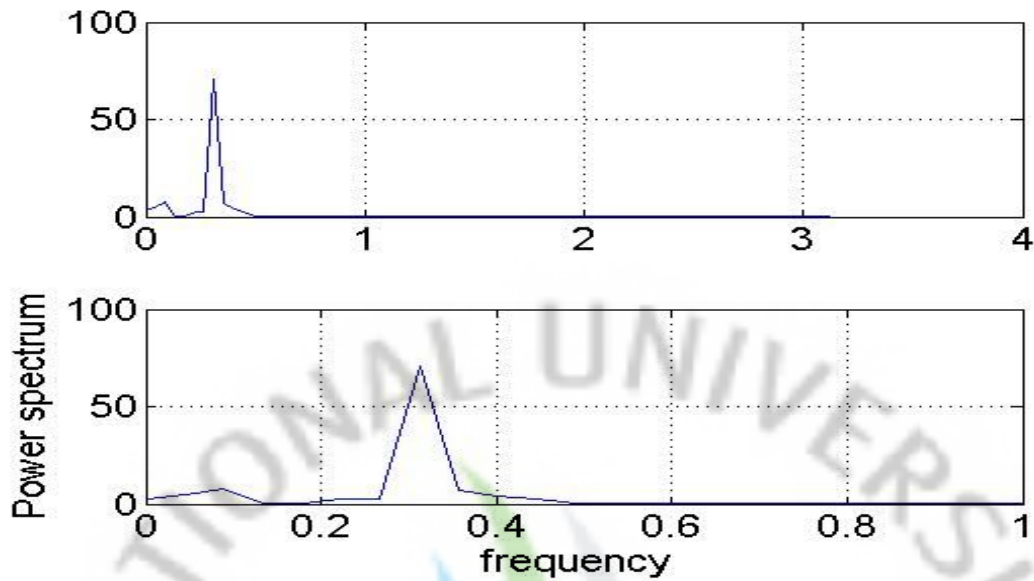
파워 스펙트럼에서 최대 점의 주파수는 알 수 있지만 그 신호가 존재하는 구간의 파워는 존재 길이에 따라 확연히 차이를 보이게 된다.

#### 4.2 국소푸리에 변환적용



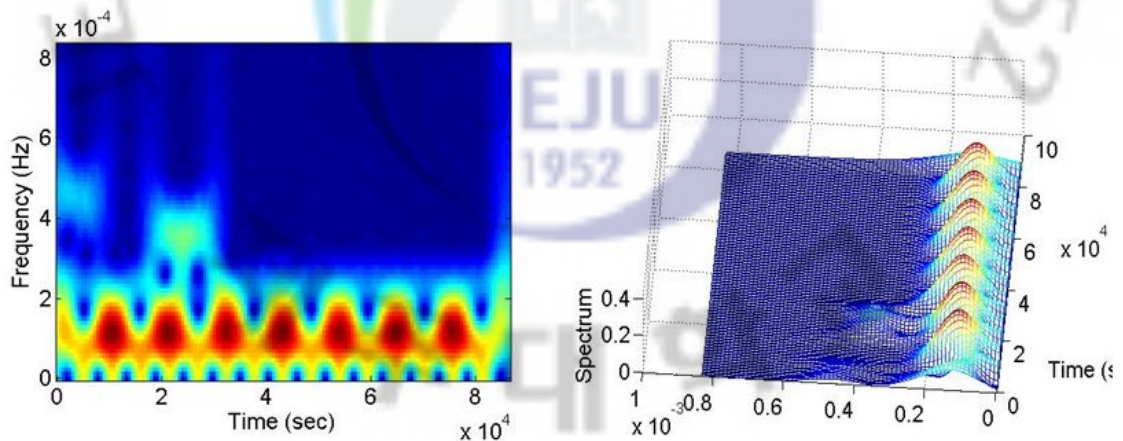
(Figure.21) Example 2. Signal

위의 그림과 같이 전 주기에 걸쳐서 작용하는 파와 부분적인 주기에 걸쳐서 작용하는 파동들의 합성이 있다고 가정 하면 power spectrum은 아래 그림과 같다.



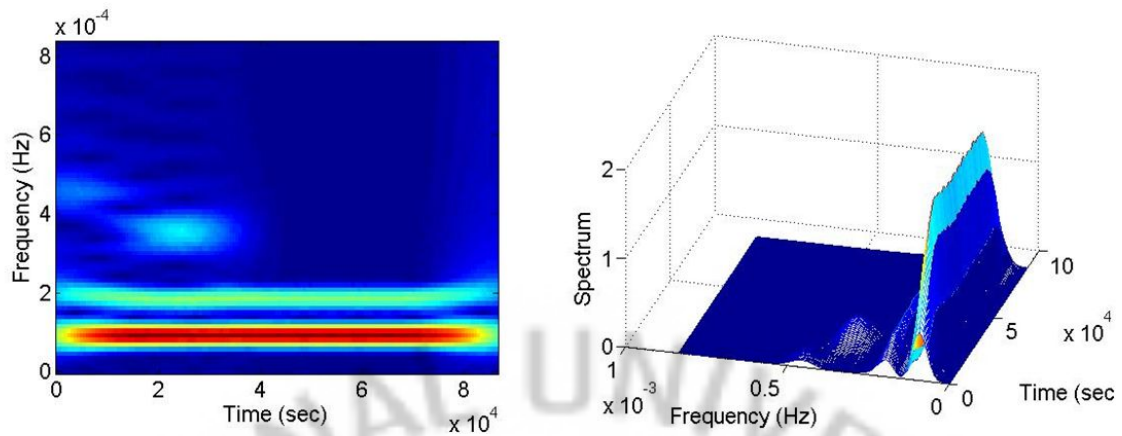
(Figure.22) Example 2. power spectrum

위의 파워스펙트럼은 짧은 시간에 작용하는 파동에 대해서는 검출이 불가능거나 그 파동에 대해서 노이즈로 생각하기 쉽다. 하지만 STFT에 의한 분석은 다음 그림과 같다.



(Figure.23) Example 2. STFT Window Length (40)

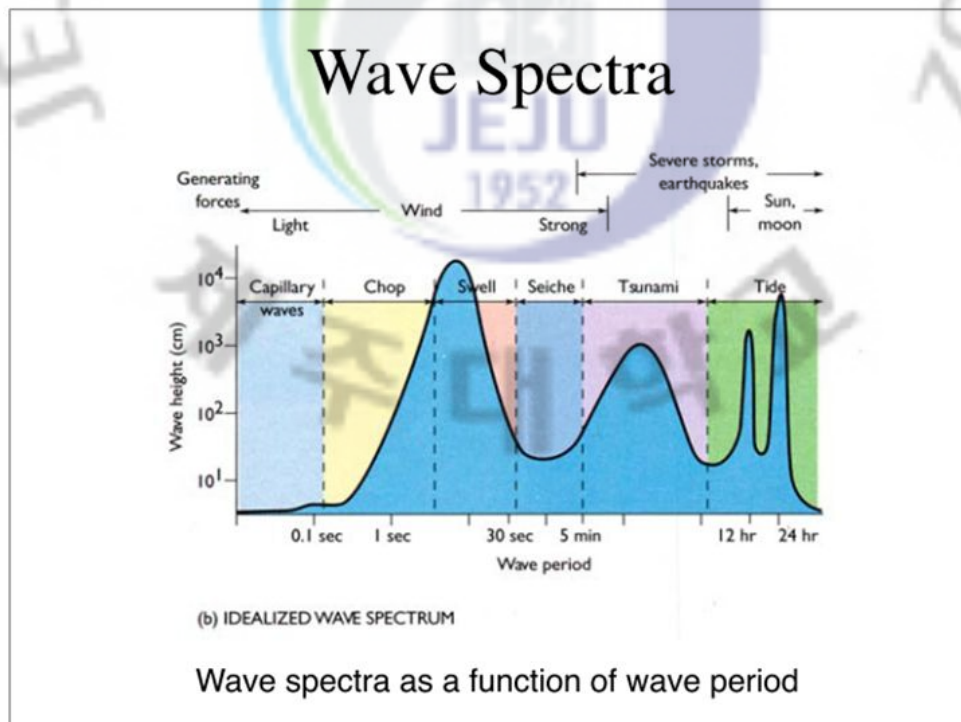
윈도우 사이즈 40일 때의 STFT분석 영상이다. 짧은 주기의 신호에 대해서도 주파수와 스펙트럼의 존재여부와 존재하는 시간대에 대하여 확인이 가능하였다. 하지만 윈도우 창의 길이가 짧아 정확한 주파수를 알 수가 없다.



(Figure.24) Example 2. STFT Window Length (100)

위 그림은 윈도우 사이즈 100일 때의 STFT분석 영상이다. 윈도우 사이즈가 길어짐에 따라서 주파수는 보다 명확히 알 수 있으나 존재하는 시간대에 대해서는 명확성이 떨어지는 것을 볼 수 있다.

#### 4.3 해양에 존재하는 파에 적용한 STFT(풍파분석)

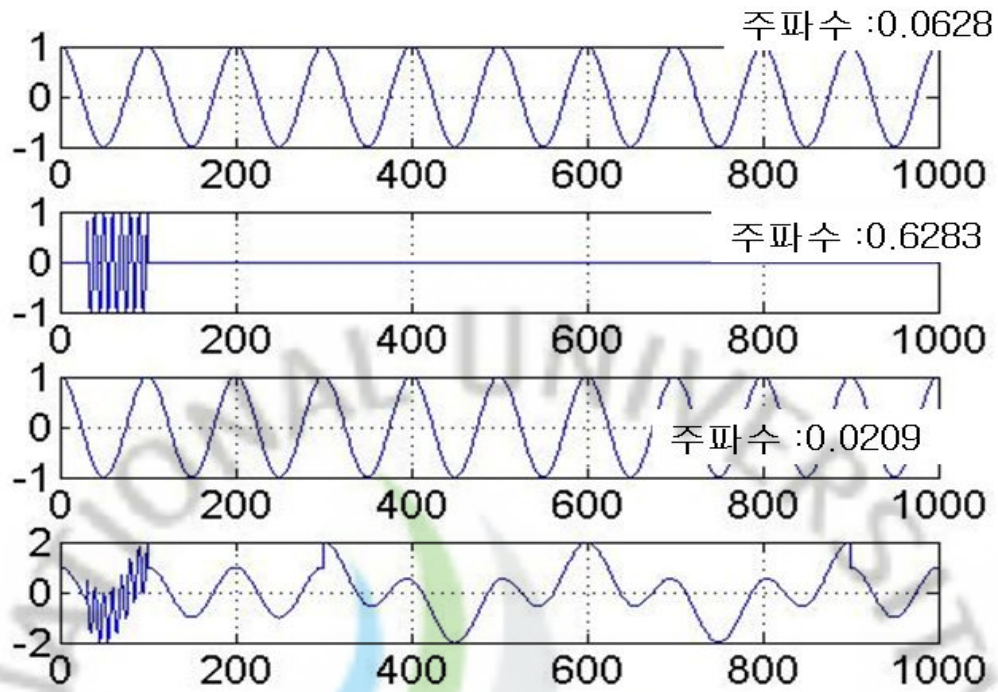


(Figure.25) Wave Spectra

위의 그림에서 보면 풍파(Wind Wave)는 수초에서 수분 단위에서 작용하고 그런 풍파는 육상과 해상의 온도차에 의하여 발생하면 그 주기가 상대적으로 짧다. 기존의 매립식 해상 구조물의 경우 구조물에 안정성에는 큰 문제가 되지 않는다. 하지만 부유식 해양구조물의 경우 (Wind Wave)에 대한 관측과 그에 대한 대책이 필요하다고 사료되어 진다.

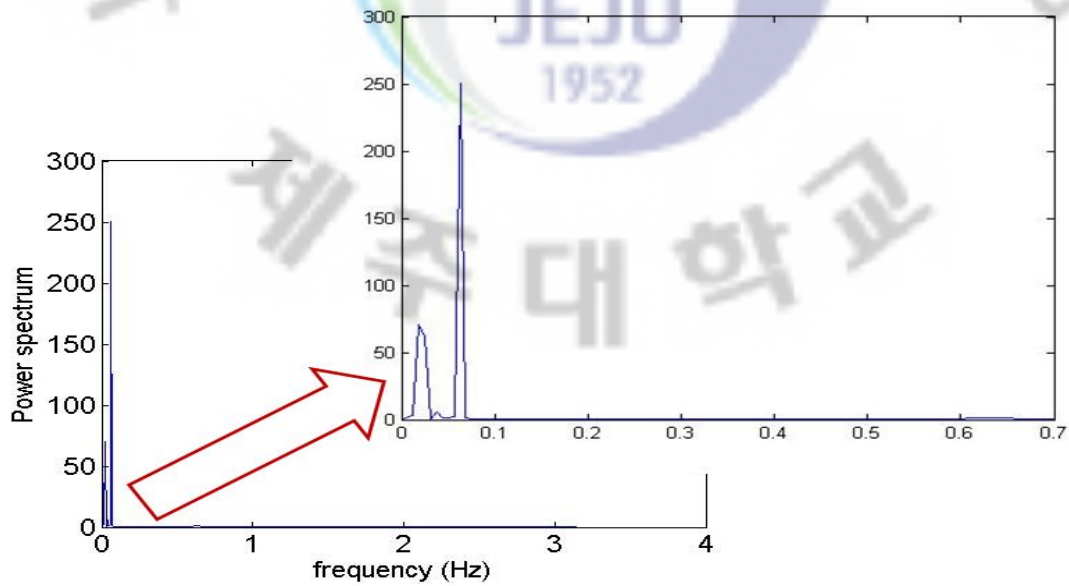
표면을 부는 바람의 작용에 의해 발달한 파랑으로 주기는 10~15sec이하이며, 파고는 보통 2 m 이하이다. 그러나 태풍의 경우도 수 십초 이하의 주기에 10m내외의 파고를 가진다. 풍랑이라고도 한다. 풍파가 바람이 없는 다른 해역으로 진행되는 경우에는 이를 너울(swell)이라 한다. 풍파는 일반적으로 마루가 뾰족하고 둥근 모양의 골을 가지며 파도와 파도 사이의 간격이 비교적 짧지만 너울은 마루와 골이 둥글고 그 간격이 긴 것이 보통이다. 그리고 풍파 및 너울이 얇은 바닷물에서 부서지는 것을 기파(surf)라 한다. 풍파의 크기는 풍속(wind velocity)뿐만 아니라 바람이 분 시간 즉, 연취시간(Wind Duration)과 바람이 분 해상의 거리 즉, 취송거리(Fetch Length)에 따라 결정된다. 주어진 풍속에 의해 충분히 발달한 풍파를 일으키는데 일정한 시간 즉, 최소연취시간(Minimum Duration) 과 일정한 취송거리 즉, 최소취송거리(Minimum Fetch)가 필요하다. 그런데 바람이 일정한 시간 이상 불어도 파랑은 더 높아지지 않는다. 그 이유는 점성에 의한 에너지의 분산과 바람에 의해 바다로 공급된 에너지가 같아지기 때문이다. 즉, 역학적 균형이 이루어진다.

제주도 북부지역의 Buoy 자료를 가지고 STFT 영상 분석을 실시하였으나 파고 자료의 간격의 10분임에 따라 저주파수에 대하여 주파수 중복 현상에 의하여 결과에 대한 신용성이 없었으며 신용이 가능한 주파수대에서는 기계적 오차에 의하여 태풍이 이동시에나 관측이 가능한 10m내외의 파고의 존재로 인하여 그 스펙트럼을 신용할 수 없었다. buoy자료의 기계적 오차나 누락된 부분에 대한 Kalman Filter에 의한 보정 방법 연구가 필요하다고 사료되어 진다. 풍파에 의해 많이 생성되는 주기대의 파들을 이상적인 신호로 만들어 그에 따른 적정 윈도우 사이즈를 연구해 보았다.

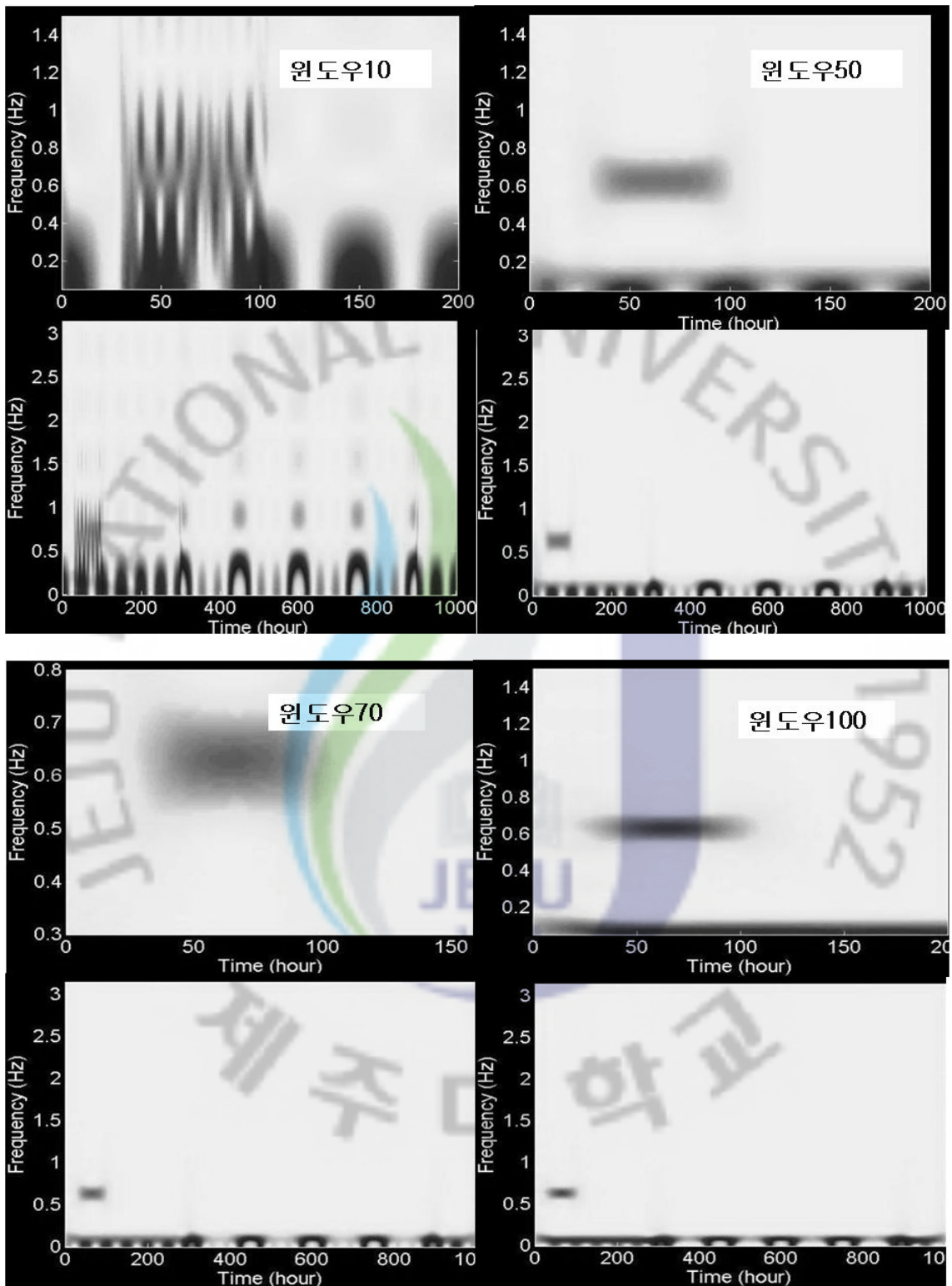


(Figure.26) Example 3. Signal

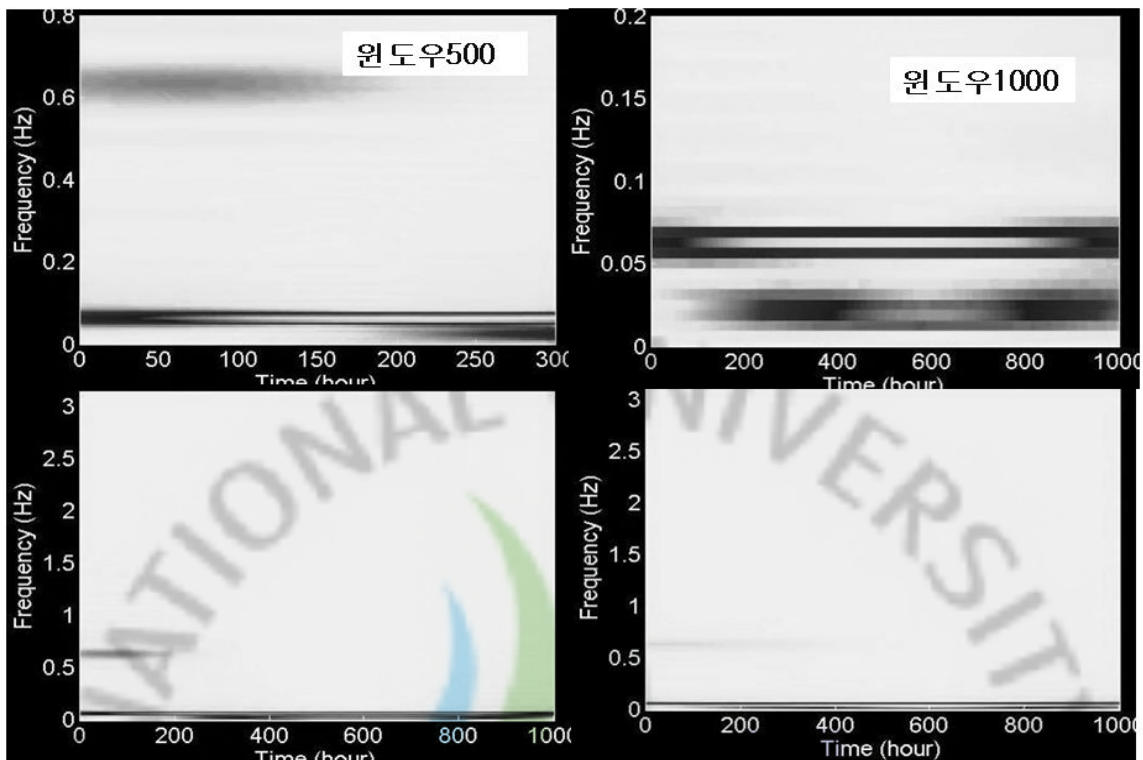
1000초 시간 동안에 100초, 10초 300초 주기의 신호를 각각 순서대로 존재하는 시간대를 다르게 하여 위 그림과 같은 결과를 얻었고 그 결과의 스펙트럼은 다음 그림과 같다.



(Figure.27) Example 3. Power Spectrum



(Figure.28) Example 3. Signal STFT I



(Figure.29) Example 3. Signal STFT II

위의 그림과 같이 짧은 기간 동안 존재하고 사라지는 신호에 대해서는 파워 스펙트럼은 그 파동을 인식할 수 없었으나 STFT의 방법은 이런 파동에 대해서도 인식이 가능하였다. 윈도우 길이가 길어지면 존재하는 주파수는 정확히 파악할 수 있으나 존재하는 시간대에 대해서는 부정확해지는 것을 알 수 있었고 고주파수대와 저주파수대에 따라 그 윈도우의 길이가 다르다는 사실을 알 수 있었다. 그리고 위의 STFT영상은 RGB으로 인쇄 시 문제를 고려하여 MATLAB을 이용하여 흑백으로 영상을 변환 한 것이다.

-영상변화 MATLAB 코드-

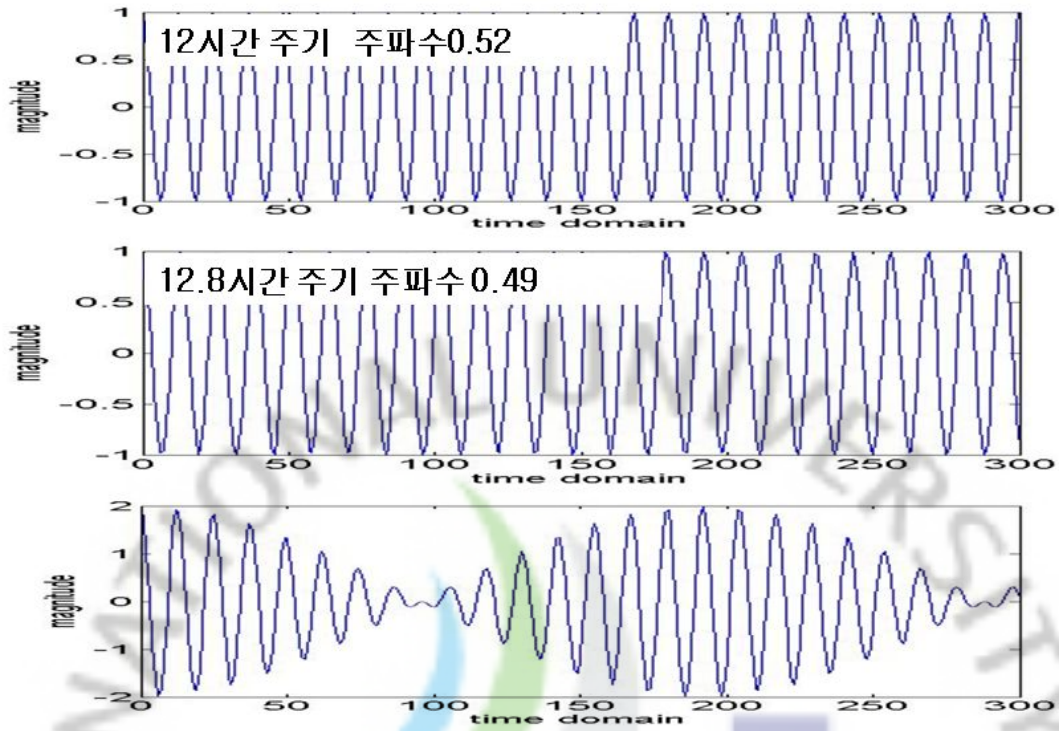
```
clear all
% RGB Image chanes Gray Image
q=imread('1.jpg');
red=q(:,:,1);
green=q(:,:,2);
blue=q(:,:,3);
t=red*0.2+green*0.59+blue*0.11;
figure,imshow(t);
```

#### 4.4 해양에 존재하는 파의 분석(조석분석)

조석(tide)이란 달, 태양 등 지구 주변 전체의 인력작용에 의해 해수면이 주기적으로 상승 하강하며, 바닷물이 해안에 밀려 들어왔다. 쓸려 나가는 현상이다. 조석현상으로 해수면이 상승한 상태를 만조 또는 고조라 하고, 하강한 상태를 간조 또는 저조라 한다. 만조에서 만조 또는 간조에서 간조 사이의 시간을 조석주기라 하며, 반일 주기의 경우, 평균 약 12시간 25분이 된다. 특 이 경우 만조와 간조는 하루에 2회씩 나타나며, 그 시각은 매일 수 십분 씩 늦어진다. 해역에 따라서는 만조와 간조가 하루에 1회밖에 나타나지 않아 1회조가 되는 경우가 있다. 연속되는 만조와 간조 또는 간조와 만조사이의 수위차를 조석간만의 차 또는 줄여서 조차라 한다. 조석의 원인이 되는 외력을 기조력이라 하며, 지구 주변 천체의 인력작용이 기조력의 대부분을 차지한다. 지구 주변의 천체중 거리가 가장 가까운 달과 질량이 가장 큰 태양에 의한 기조력이 가장 크다. 그 밖의 전체에 의한 기조력은 무시할 만큼 작다. 달에 의한 기조력의 조석에 의한 융기는 일정한 주기로 반복된다. 실제 조석융기는 계속적으로 달의 방향에 대해 고정되어 있으나, 지구의 자전에 의해 이러한 주기가 발생한다. 달에 영향에 의해 일어나는 태음조(lunar tide)는 정확히 24시간 50분의 주기를 갖는다. 달의 공전 때문에 매일 약 50분씩 늦어지게 된다. 태양에 의한 기조력은 1년을 주기로 일어나므로 그 영향은 미비하다.

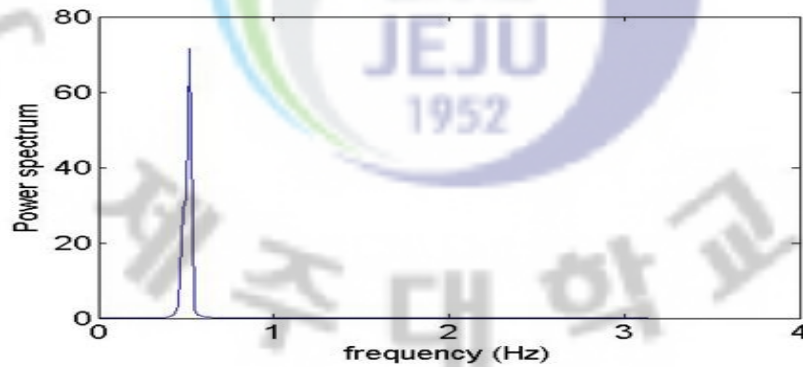
이런 조석에 의한 파고의 측정은 전 시간대에 걸쳐 발생하지만 어떤 한 주파수대에만 존재한다면 Power Spectrum에 의한 분석만으로 그 주기와 파고를 이용하는 데 충분 하다. 하지만 그와 인접한 주파수대에 존재하는 파동에 대해서는 파워 스펙트럼은 인식을 하지 못한다.





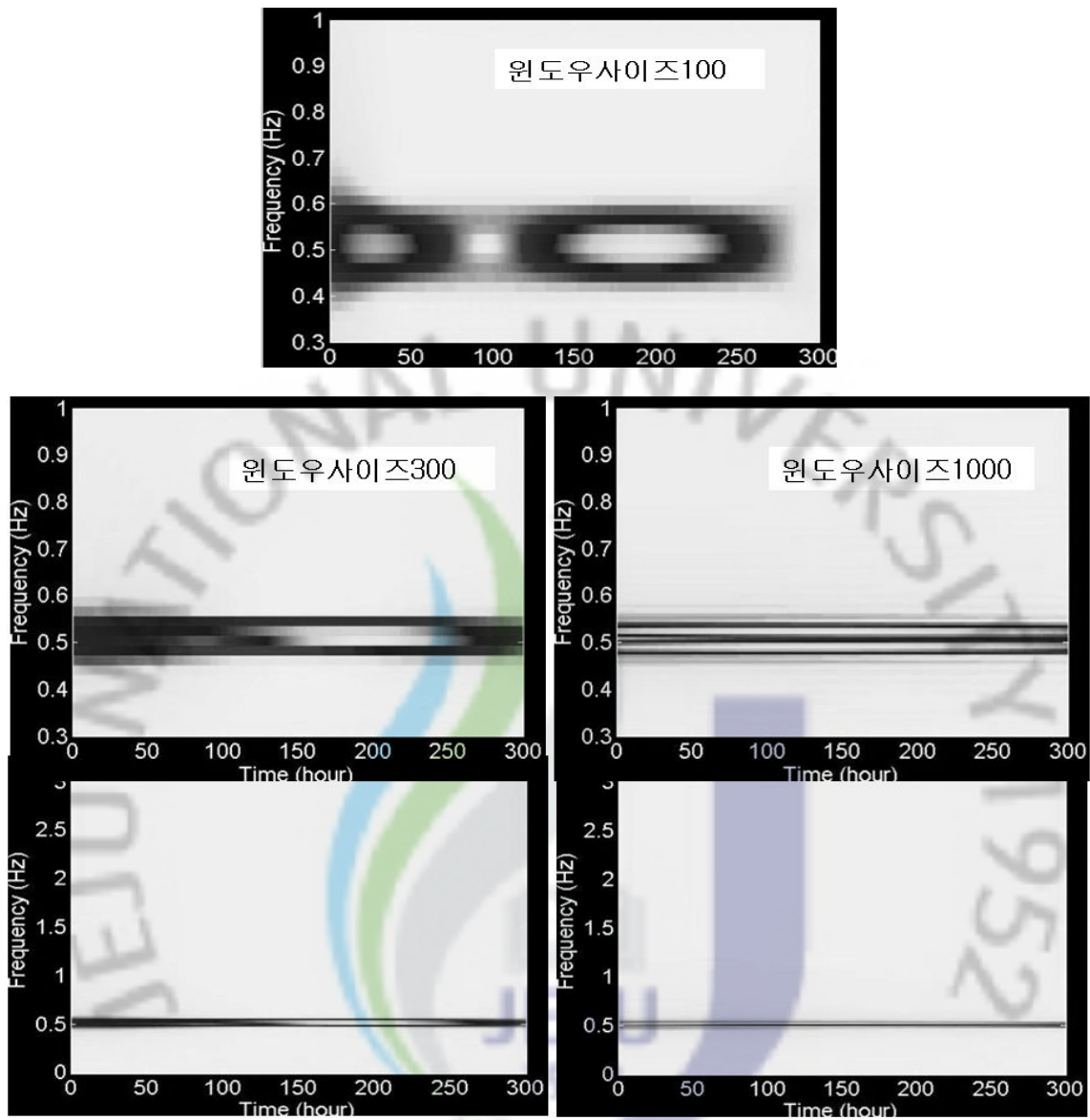
(Figure.30) Example 4. Signal

위 그림과 같이 인접한 두 주파수대의 신호를 만들고 아래 그림과 같이 파워스펙트럼 분석을 실시하였다.



(Figure.31) Example 4. Signal Power Spectrum

근접한 두 개의 파동이 존재하지만 파워 스펙트럼 분석 결과 한 개의 파동으로 인식하기 쉽다. 다음 그림은 STFT에 의하여 분석한 결과이다.

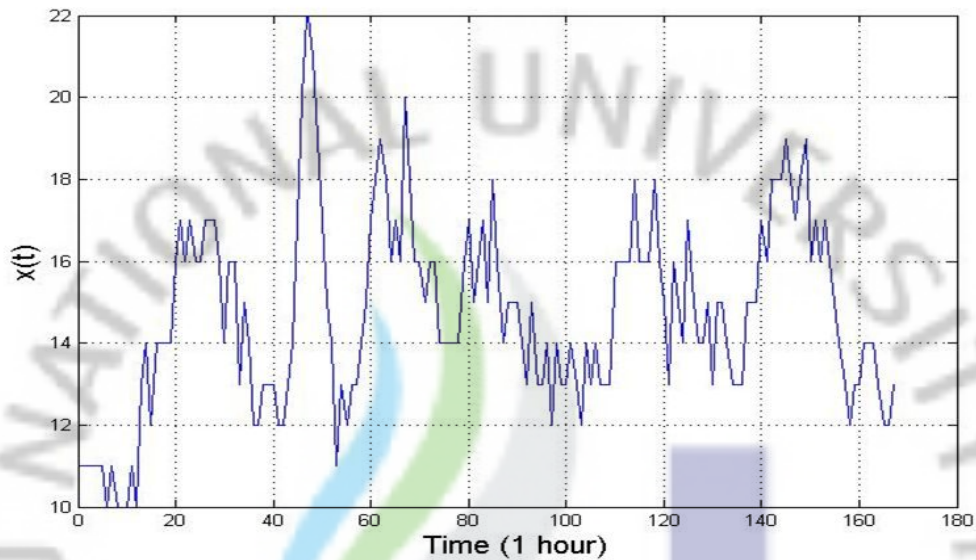


(Figure.32) Example 4. Signal STFT

위의 결과에서 보여 지는 것처럼 정정 윈도우의 결정으로 두 개의 근접한 파동에 대하여 인식이 가능하였다.

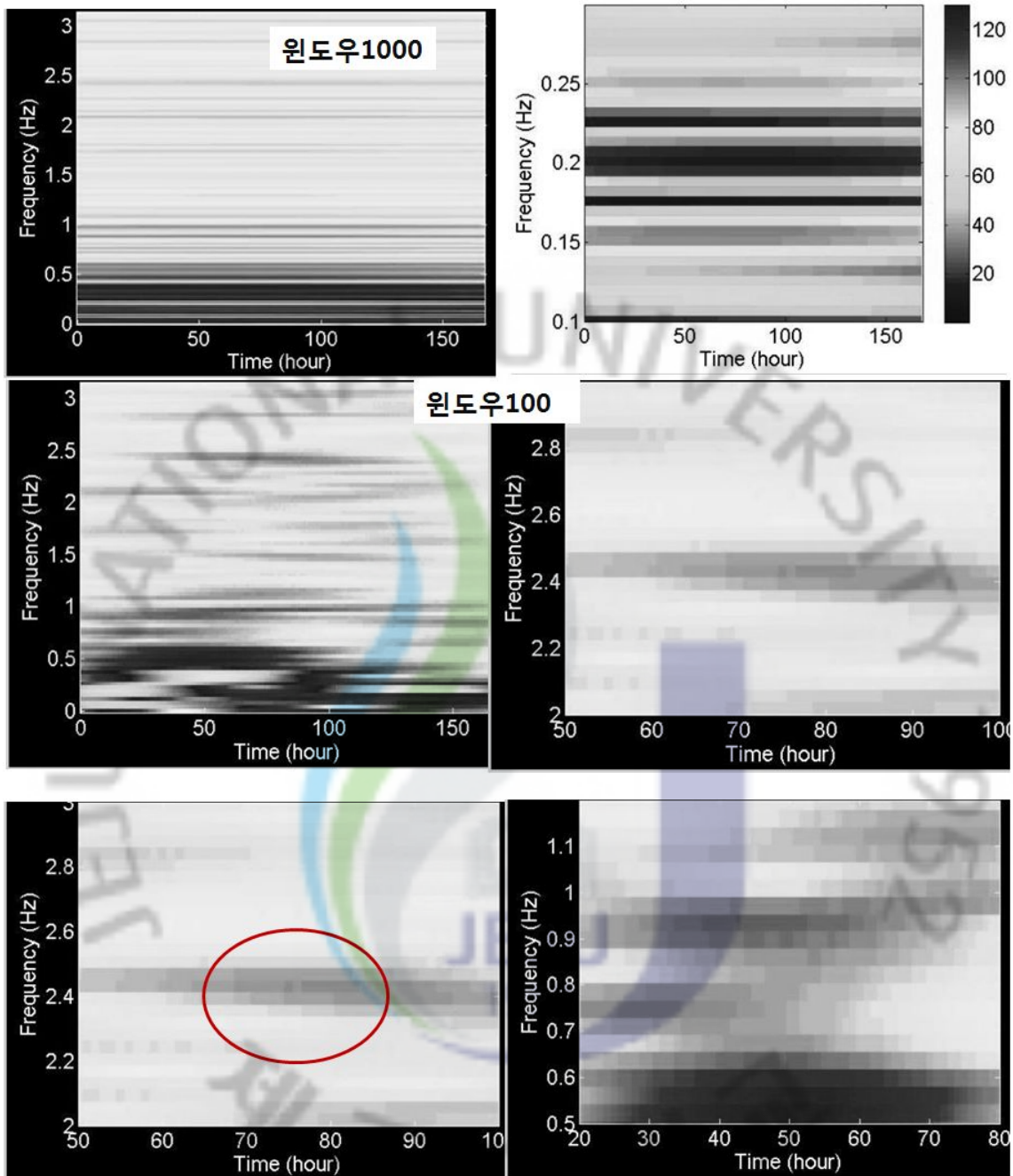
## 제5장 실제 해양의 파동에 STFT 적용

일본 기상청 부이 관측 자료를 바탕으로 실제 해양에 대하여 STFT를 적용하였다.  
관측년도는 2007년이다.



| 시간 | 10/13 | 10/14 | 10/15 | 10/16 | 10/17 | 10/18 | 10/19 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0  | 11    | 16    | 21    | 16    | 14    | 15    | 18    |
| 1  | 11    | 16    | 19    | 16    | 12    | 13    | 19    |
| 2  | 11    | 17    | 17    | 14    | 14    | 16    | 18    |
| 3  | 11    | 17    | 15    | 14    | 13    | 15    | 17    |
| 4  | 11    | 17    | 14    | 14    | 13    | 14    | 18    |
| 5  | 11    | 16    | 11    | 14    | 14    | 17    | 19    |
| 6  | 10    | 14    | 13    | 14    | 13    | 15    | 16    |
| 7  | 11    | 16    | 12    | 16    | 12    | 14    | 17    |
| 8  | 10    | 16    | 13    | 17    | 14    | 14    | 16    |
| 9  | 10    | 13    | 13    | 15    | 13    | 15    | 17    |
| 10 | 10    | 15    | 14    | 16    | 14    | 13    | 16    |
| 11 | 11    | 14    | 15    | 17    | 13    | 15    | 15    |
| 12 | 10    | 12    | 17    | 15    | 13    | 15    | 14    |
| 13 | 13    | 12    | 18    | 18    | 13    | 14    | 13    |
| 14 | 14    | 13    | 19    | 16    | 16    | 13    | 12    |
| 15 | 12    | 13    | 18    | 14    | 16    | 13    | 13    |
| 16 | 14    | 13    | 16    | 15    | 16    | 13    | 13    |
| 17 | 14    | 12    | 17    | 15    | 16    | 15    | 14    |
| 18 | 14    | 12    | 16    | 15    | 18    | 15    | 14    |
| 19 | 14    | 13    | 20    | 14    | 16    | 15    | 14    |
| 20 | 16    | 14    | 18    | 13    | 16    | 17    | 13    |
| 21 | 17    | 17    | 16    | 15    | 16    | 16    | 12    |
| 22 | 16    | 20    | 16    | 13    | 18    | 18    | 12    |
| 23 | 17    | 22    | 15    | 13    | 16    | 18    | 13    |

(Figure.33) Bouy wave data of Japanese Meteorological Office



(Figure.34) Wave STFT

일본 기상청 부이 자료 데이터를(2007.10.13~10.19, 일주일간) 분석한 결과 약 25시간 주기의 조석과 그에 근접한 주기에 영향을 받고 있음을 알 수 있었다. 일주일간의 자료에서 70시간에서 100시간 정도에 2시간 40분 주기의 파동이 40시간에서 60시간 사이에는 약 7시간 주기의 파동이 25시간에서 35시간에는 8시간 20분 정도의 파동이 영향을 미치고 있다는 사실을 알 수 있었다.

## 제6장 결 론

본 연구에서는 해양구조물에 중요한 외력중 하나가 파이고 이런 파에 대한 분석은 구조물 설계에 중요한 요인이다. 해양 파동 스펙트럼 분석 시 많이 사용되는 스펙트럼의 기초는 Power 스펙트럼이고 이 Power 스펙트럼의 문제점은 근접한 주파수의 존재의 인식과 일부 구간에만 작용하고 사라지는 파에 대하여 인식이 어렵다는 것이다. Fourier 변환은 주기적인 파를 그 주기의 정수배의 기간에 분석할 때 정확성이 가장 높다. 반대로 Fourier 변환의 구간을 변화시키면서 그 구간에 정수배되는 주파수를 찾는 방법인 국소푸리에변환(Short-Time fourier Transform; STFT)를 적용하여 보았고 그 결과는 다음과 같다.

1. 이산자료의 Power spectrum의 경우 주기가 비슷한 파에 대해서는 주파수의 검색이 불가능하나 국소푸리에 변환(Short-Time Fourier Transform; STFT)의 경우 윈도우의 길이를 변화시킴으로써 각각의 주파수의 검출이 가능하다.
2. STFT분석에서 저주파수대(장주기파)에서는 윈도우 크기를 길게 하여야 하고 상대적으로 고주파수대에서는 윈도우 크기를 짧게 하여야 한다.
3. STFT는 윈도우 크기를 여러 번 변화 시키면서 파동을 분석해야 한다는 단점을 가지고 있다.
4. 해양의 파동의 경우 풍파, 지진성해일, 폭풍성 해일과 같이 파동의 주기와 크기가 급격히 변하는 경우 Power Spectrum에 기초한 분석보다는 STFT에 의한 분석이 더 적합하다고 생각 된다.
5. 조석의 경우 주기가 비슷한 파동들이 같이 존재할 가능성이 높고 이 경우 그 주파수 검색에 STFT가 보다 효율적일 것이라 생각된다.
6. STFT의 단점인 반복 분석은 Wavelet으로 보완 될 수 있지만 STFT의한 주파수

대에 따른 적정 윈도우 길이가 필요하므로 해양 파동분석을 위해서는 더 많은 자료의 분석으로 적정 윈도우 길이들이 결정되어야 한다.

7. 일본 기상청 부이 자료 데이터를(2007.10.13~10.19, 일주일간) 분석한 결과 약 25시간 주변의 주기들의 조석에 영향을 받고 있음을 알 수 있었다.

8. 일주일간의 자료에서 70시간에서 100시간 정도에 2시간 40분 주기의 파동이 40시간에서 60시간 사이에는 약 7시간 주기의 파동이 25시간에서 35시간에는 8시간 20분 정도의 파동이 영향을 미치고 있다는 사실을 알 수 있었다.

본 연구에서 지지성해일이나 폭풍성해일 풍파와 같이 작용하는 구간이 짧고 다양하게 주기와 파고가 변하는 파에 대해 STFT의 분석을 통한 이런 파동의 운동을 이해하는데 더 도움이 될 것이라 생각된다. STFT분석의 문제는 저주파수대와 고주파수대에 따라 윈도우의 길이가 다르다는 것이다. 다행히 해양의 파동은 주로 발생하는 주기가 뚜렷이 구별된다. 각 주파수대에 알맞은 윈도우 길이를 결정하여 하나의 영상에 표현하여 분석하는 Wavelet분석의 기초가 될 것으로 생각된다.

-참 고 문 헌-

- 강현배·김계경·서진근(2001), “웨이블릿 이론과 응용”, 『대우학술총서』
- 김경수·김태식(2008), “신호처리 및 이미지 처리”, 『아진』
- 김해경·김태수(2003), “시계열 분석과 예측이론”
- 유동훈(2005), “연안·항만동학”, 『SeaRon publishing Co.』
- 이승환·윤동한(2002), “알기쉬운 웨이블릿 변환”, 『진한도서』
- 이태홍·김기두·장수영·권희훈·문대철(2000), “신호와 시스템”, 『한산』
- 이철희 (2001), “신호와 시스템”, 『다성출판사』
- 최병선(2002), “Fourier 해석입문”, 『세경사』
- Bin Yong, "A STUDY OF INVERSE SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM", Chair of System Theory and Signal Processing, University of Stuttgart, Germany 『ICASSP 2008』 pp. 3541~3544
- Chengyong Zhao, Mingfeng He, Xia Zhao(2004), "Analysis of Transient Waveform Based on Combined Short Time Fourier Transform and Wavelet Transform", 『2004 International Conference on Power System Technology』 pp. 1122~1126
- Lütfiye Durak, Orhan Arikan(2003), "Short-Time Fourier Transform : Two Fundamental Properties and an Optimal Implementation", 『IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING』, VOL.51, NO.5
- Gareth Loy(2002), Department of Systems Engineering Research School of Information Sciences and Engineering Australian National University, 『Digital Image Computing Techniques and Applications』 pp. 1~6
- Wang Yuegang, Ji Shao, Xu Hongtao(2007), "Non-stationary Signals Processing Based on STFT", 『The Eight International Conference on Electronic Measurement and Instruments』 pp. 3-301~3-304

## 감사의 글

본 논문이 완성되기까지 부족한 점이 많았던 저에게 많은 가르침을 주시고 항상 격려 해주신 주도교수님인 이병걸 교수님에게 먼저 고마움을 표합니다. MATLAB이란 프로그램을 가르쳐 주시고 논문을 쓸 때 MATLAB에 대해 어려움이 있을 때 찾아가면 언제나 편안하게 찾아가서 물어볼 수 있고 그에 대한 해결 방향을 제시해 주신 배진호 교수님 감사를 드립니다.

그리고 논문 심사위원인 김남형 교수님, 이동욱 교수님께 아울러 학부와 석사과정에서 많은 가르침을 주신 양성기 교수님, 남정만 교수님, 박상렬 교수님 김상진 교수님께도 감사를 드립니다.

매일 바쁘다는 핑계로 자주 만나주지 못했지만 옆에서 늘 내편이 되어주고 힘이 되어주고 걱정을 해준 여자 친구 송향숙과 연구실에서 매일 함께 공부하면서 같이 웃고 힘들어 하고 고민해주던 권혁준 선배와 동기인 이창선에게도 정말 고맙다는 말을 전하고 싶습니다.

대학원 생활 중 힘들 때 늘 곁에서 같이 힘들어 하고 같이 웃고 즐기던 김창훈 선배님, 동기인 김태건, 김영민, 좌용현, 이창림, 윤현청, 안승현, 후배인 박준영, 부양수에게도 고맙다는 말을 전하고 싶습니다. 이제 학교를 졸업하여 각자의 길로 나갈 것이고 그때 너희들이 계획했던 일들 모두 계획했고 희망했던 미래가 펼쳐지길 기원합니다.

실험실에서 굶은 일을 많아 해준 후배 변지선, 김준혁, 부선진에게도 고맙다는 말과 계획했던 일들 생각들이 실현되길 기원합니다.

새롭게 석사과정을 시작하는 친구인 조홍준, 후배인 김석현, 진정운, 우수민, 우주경, 김서리에게 계획했던 보람차고 후회없는 시간이 되길 기원합니다.

항상 나를 믿고 묵묵히 지켜봐주신 가족에게 이 논문으로써나마 고마운 마음을 전합니다.

2009년 12월

해양 및 지형 공간 연구실에서