碩士學位請求論文

極限槪念을 使用하지 않은 導函數의 定義 및 性質들의 硏究

A Study of Properties and Definitions for Derivatives without the Concept of Limit

指導敎授 高 鳳 秀

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 光 寶

1991年度

極限概念을 使用하지 않은 導函數의 定義 및 性質들의 研究

A Study of Properties and Definitions for Derivatives without the Concept of Limit

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 金 光 寶

指導教授 高 鳳 秀

1991年 7月 日

金光寶의 碩士學位 論文을 認准함

1991年　月　日

主審 ____________

副審 ____________

副審 ____________

濟州大學校 教育大學院

목 차

〈Abstract〉

A Study of Properties and Definitions for Derivatives without the Concept of Limit

Kim, Kwang Bo

Mathematics Education Major

Graduate School of Education

Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by professor Ko, Bong Soo

In this thesis, the difinition of the derivative without using the concept of limit is studied.

With that definition, the power rule, the algebra of derivatives and the product rule of derivatives for any real polynomial functions are the same as the original ones.

Furthermore, as applications of derivatives, the monotonicity and local extreme values of real functions are studied.

Finally, that definition of the derivative can be applied to establish the differentiation of polynomial functions defined on general spaces which have only algebraic structures.

1. 序　　論

高等學校 數學敎育에 있어서 中心이 되는 微分法은 極限槪念으로 導入하여 使用하고 있기 때문에 學生들이 微分法을 理解하기 위해서는 먼저 極限槪念에 대한 學習이 先行되어야 한다.

왜냐하면, 주어진 函數 $f(x)$가 점 $x = x_0$ 에서 微分可能하다는 定義는 다음의 극한값이 存在할 때이다.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

그러나 敎育現場에서 數學敎科 이외의 일부 다른敎科, 예를 들면 物理學習 時間에 速度槪念을 說明하기 위하여 數學敎科에서 微分法을 學習하기 전에 微分法을 必要로 하는 境遇가 있다

그러므로 授業時 必要한 微分法을 理解하지 못한 狀態에서 敎授-學習이 이루어지기 때문에 그 敎科內容을 가르치는 方法에서 그리고 學生들이 그 敎科內容을 理解하는데 어려움을 느끼고 있다.

반면에 아무리 어려운 內用이라도 學生들의 發達段階에 맞춰 쉽게 再構成하여 가르칠 수 있다는 Bruner의 敎育理論의 立場 [參考 文獻 2] 에서 본 硏究의 目的은,

極限槪念을 알지 못하드래도 中學校 三學年 또는 高等學校 一學年 數學敎育過程에서 學習한 代數的方程式의 展開, 因數分解및 重根의 性質들을 幾何學的으로 理解할 수 있는 知識만 가지고도 微分法에 대한 基本槪念들을 쉽게 理解시킬 수 있는 方法들과 高次多項函數들의 값의 變化狀態, 最大最小, 그래프의 形態들을 쉽게 推定할 수 있는 方法을 硏究하는데 있다. 따라서 本 論文에서 取扱되는 모든 函數들 또는 方程式들은 특별한 言及이 없을 때에는 一般的인 多項函數들 또는 多項式들이다.

本 論文의 本論 第1部에서는

1) 高等學校 二學年 人文系列過程에서 다루는 微分槪念들,

① 微分係數

② 微分係數의 幾何學的 意味

③ 微分不能인 境遇

④ 導函數, 微分法 公式

⑤ 微分의 幾何學的인 意味

⑥ 函數의 增加 減少

⑦ 函數의 極大 極小

을 中學校 三學年 또는 高等學校 一學年 學生들이 極限槪念에 대한 事前知識 없이 學習할 수 있도록 위의 槪念들을 理論的으로 展開한다.

그래서 本論 第1部의 定理들의 證明은 中學校 三學年, 高等學校 一學年 學生들이 理解할 수 있겠끔 만들어진다.

本 論文의 第2部에서는 變化率과 一次函數(線形函數)의 關係를 抽象的인 空間에서 定義된 函數들까지 適用할 수 있음을 보인다.

本 論文의 第3部에서는 第1部에서 記述된 微分의 幾何學的 意味를 說明하기 위하여 函數와 函數의 그래프는 같은 것으로 볼 수 있다는 內容으로 構成된다. 構成하게 된 理由는 一般的으로 函數를 微分한다고 하면, 微分한다는 것은 작게 切斷한다는 뜻이지만, 函數의 定義는 抽象的이다.

抽象的인 것을 작게 切斷한다는 意味는 中學校 三學年, 高一年 學生들에게는 전혀 納得이 않될 뿐더러, 成人들도 理解를 못한다. 그러나 函數와 函數의 그래프는 같은 것으로 볼 수 있다는 事實만 느낀다면, 函數를 微分한다는 뜻을 函數의 그래프를 작게 切斷한다는 뜻으로 쉽게 받아들일 수 있다.

2. 本　　論

2.1. 第 1 部

2.1.1. 變化率의 定義

(定義1) 方程式 $F(x) = 0$ 가 $x = x_0$ 에서 重根을 갖는다는 意味는,

$F(x) = (x-x_0)^n G(x)$ (n 은 2 보다 큰 自然數)

의 形態로 바꿀 수 있다는 것이다.

(定義2) 方程式 $f(x) - ax - b = 0$ 가 $x = x_0$ 에서 重根을 갖도록 하는 常數 a, b 가 存在할 때, 函數 $y = f(x)$ 는 $x = x_0$ 에서 微分可能하다고 하며, a 를 $y = f(x)$ 의 $x = x_0$ 에서의 變化率이라 하고 다음과 같은 記號로 나타낸다.

$$a = f'(x_0), \qquad a = y'_{x=x_0}, \qquad a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

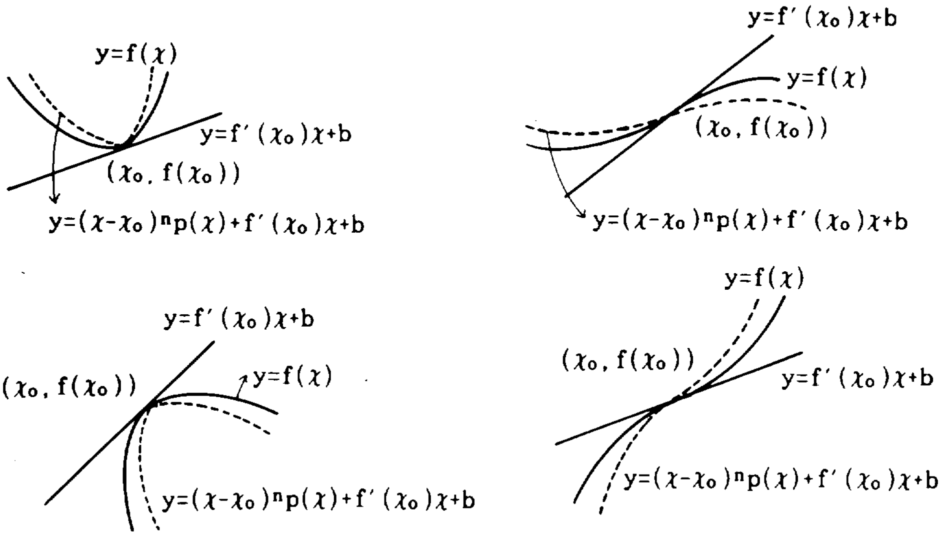
($f'(x_0)$ 의 幾何學的 意味)

方程式

$f(x) - f'(x_0)x - b = (x-x_0)^n p(x)$ (n≥2인 自然數)

이 重根을 갖는다는 意味는 函數 $y = f(x)$ 의 그래프와 函數 $y = f'(x_0)x + b$ 의 그래프가 점$(x_0, f(x_0))$에서 接해 있다는 것이다.

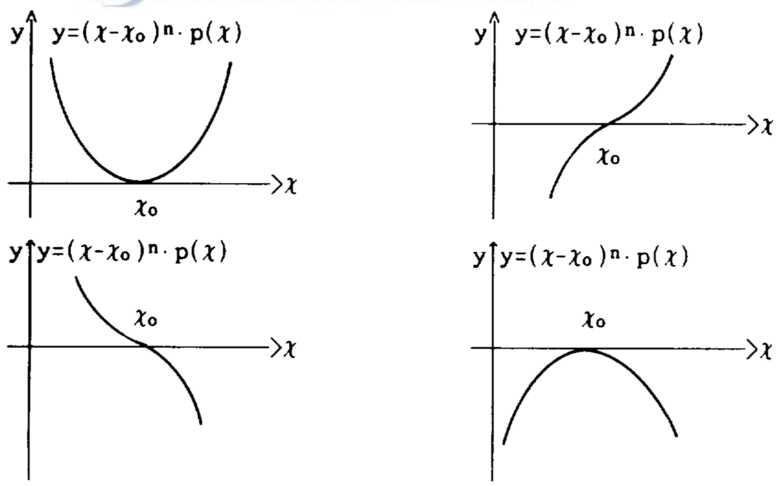
接해 있는 形態는 다음 4가지 境遇로 分類된다.



특히, 만약 $f(\chi)$ 가 多項函數이면, 函數 $y = f(\chi)$ 와 函數 $y = f'(\chi_0)\chi + b$ 가 점 $(\chi_0, f(\chi_0))$ 에서 接해 있는 形態는 多項函數 $y = (\chi-\chi_0)^n p(\chi) + f'(\chi_0)\chi + b$ 와 函數 $y = f'(\chi_0)\chi + b$ 가 接해 있는 形態와 비슷하다고 한다.

따라서 接해 있는 形態는 점 $(\chi_0, 0)$ 에서 多項函數 $y = (\chi-\chi_0)^n p(\chi)$ 와 χ 축과 接해 있는 形態와 비슷하다고 말할 수 있다.

(그림參照)



結論的으로 $f'(\chi_0)$ 의 幾何學的 意味는 函數 $y = f(\chi)$ 의 그래프 위의 점 $(\chi_0, f(\chi_0))$ 을 지나고, 그 점에서 接해 있는 接線의 기울기가 된다.

常數函數와 一次函數들에 關한 重根의 槪念은 약간의 解析的인 差異가 있으므로 그 函數들의 變化率을 定意로 採擇한다.

(定義3) 常數函數 $y = f(\chi) = c$ 와 一次函數 $y = g(\chi) = a\chi + b$ 들에 關한 $f'(\chi_0) = 0$, $g'(\chi_0) = a$ 로 定義한다. 그 導函數의 定義는 다음과 같은 意味를 갖는다.

方程式,

$$f(\chi) - 0\cdot\chi - c = 0 \quad 와 \quad g(\chi) - a\chi - b = 0$$

들은 다음과 같은 形態

$$f(\chi) - 0\chi - c = (\chi-\chi_0)^n\chi\cdot 0, \quad g(\chi) - a\chi - b = (\chi-\chi_0)^n\chi\cdot 0$$

表現할 수 있기 때문에, 위의 두 方程式들은 $\chi = \chi_0$ 에서 重根을 갖는다고 말할 수 도 있다.

(例題1) 函數 $y = |\chi|$ 는 $\chi = 0$ 에서 微分可能 하지 못하다.

(풀 이) 만약 $y = |\chi|$ 가 $\chi = 0$ 에서 微分可能 하다고 하면, 常數 a 와 b가 存在하여 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$|\chi| - a\chi - b = \chi^n p(\chi) \qquad \text{-------------- ①}$$

만약 $\chi > 0$ 이면, 式 ① 은 다음과 같다.

$$\chi - a\chi - b = \chi^n p(\chi). \qquad \text{-------------- ②}$$

따라서 $n = 1$ 이고 $p(\chi) = c$ 인 常數函數이다. 그러므로 그것들을 式 ② 에 代入하면

$$(1 - a)\chi - b = c\chi.$$

따라서

$$c = 1-a, \qquad b = 0.$$

未定係數法에 의하여

$$p(\chi) = (1-a) \text{ 이고}$$

$$\chi - a\chi = (1 - a)\chi.$$

만약 $\chi < 0$ 이면

$$-\chi - a\chi = -(1 + a)\chi = (1 - a)\chi.$$

따라서

$$-(1 + a) = (1 - a).$$

즉, $2 = 0$ 이 되어 矛盾이 發生하게 된다.

따라서 $f(\chi) = |\chi|$ 는 $\chi = 0$ 에서 微分可能 하지 못하다.

2.1.2. 導函數, 微分法의 公式

(定義4) $\chi = \chi_1$ 에서의 $f(\chi)$ 의 變化率 $f'(\chi_1)$ 의 값은, χ_1 의 값이 定해지면 이에 對應하여 定하여 진다. 따라서 χ_1 를 變數로 보면 $f'(\chi_1)$은 χ_1의 函數로 볼 수 있다. 즉, 集合 D를 函數 f의 定義區域이라 하고, 集合 $D' = \{ \chi \in D : y = f(\chi)$ 는 χ 에서 微分可能 하다 $\}$ 을 形成하면, 임의의 元素 $\chi \in D'$에 $f'(\chi)$ 를 對應시키는 새로운 對應關係를 나타낸다. 이때 이 函數 f'를 函數 f 의 導函數라고 한다. (主意: 一般的으로 $D \neq D'$, 例題 1 參照) 函數 $y = f(\chi)$ 의 導函數를

$$y', \quad f'(\chi), \quad \frac{dy}{d\chi}, \quad \frac{df(\chi)}{d\chi}, \quad \frac{d}{d\chi} f(\chi)$$

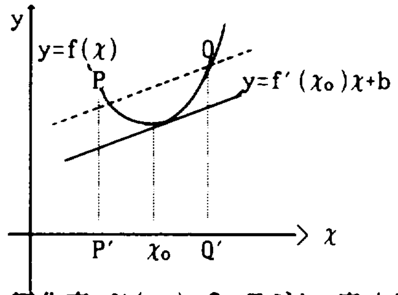
등으로 나타낸다.

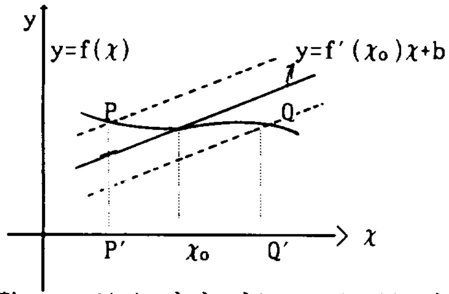
$f(\chi)$ 의 導函數를 구하는 일을 $f(\chi)$ 를 χ 로 微分한다고 하고, 이 計算法을 微分法이라 한다.

(" 函數 $f(\chi)$ 를 χ 로 微分한다 " 의 幾何學的 意味)

函數 $y = f(\chi)$ 를 χ 로 微分한다는 意味는 $f'(\chi)$ 를 찾는 것이다.

따라서 $\chi = \chi_0$ 에서 接해 있는 다음 2 가지 形態를 갖는다고 假定하자.





變化率 $f'(\chi_0)$ 을 구하는 意味는 函數 $y = f(\chi)$ 위의 점$(\chi_0,\ f(\chi_0))$ 에서 接線의 方程式 $y = f'(\chi_0)\chi + b$ 을 計算하는 것과 一致한다. 接線의 方程式을 y 축 方向으로 平行移動 (그림參照)하면, 그림에서 점 P 와 점 Q 사이의 函數의 그래프와 直線 PQ 를 y축 方向으로 平行移動 하여 直線 $y = f'(\chi_0)\chi + b$ 와 一致하도록 하는 過程에서 점 P 와 점 Q 사이의 函數 그래프의 길이는 점점 작게 되어간다.

函數와 函數의 그래프는 一致하는 槪念 (第3部 參照)으로 받아들일 수 있기 때문에, 函數 $y = f(\chi)$ 그래프를 작게 切斷한다는 意味는 函數를 微分한다는 뜻이다.

또한 $f(\chi) - f'(\chi_0)\chi - b = (\chi-\chi_0)^n p(\chi)$ 에서 函數 $y = f(\chi)$ 의 그래프를 위의 方法으로 微分하고, 점 P와 점 Q 를 χ 축에 正射影하여 얻는점을 $P' = (a,\ 0)$, $Q' = (b,\ 0)$ 라고 하면

$$f'(\chi_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

즉,

$$f(b) - f(a) = f'(\chi_0)(b - a).$$

위의 方法으로 函數 $y = f(\chi)$ 의 그래프를 계속 微分하면 $f(b) - f(a)$ 는 작은 數로 되어가고, $f'(\chi_0)(b - a)$ 도 작은 數로 되어간다.

이러한 觀點에서 $f'(\chi_0)(b - a)$를 점 χ_0 에서 函數 $y = f(\chi)$ 의 微分이라고 본다.

(定理1) 微分公式

만약 두 函數 $f(\chi)$ 와 $g(\chi)$ 가 微分可能한 函數들이라 할 때

[1] $\{c\cdot f(\chi)\}' = c\cdot f'(\chi)$. (c : 常數)

[2] $\{f(\chi) \pm g(\chi)\}' = f'(\chi) \pm g'(\chi)$. (複號同順)

[3] $\{f(\chi)\cdot \chi\}' = f'(\chi)\cdot \chi + f(\chi)$.

(證 明) 점 $\chi = \chi_0$ 에서

函數 $f(\chi)$ 와 函數 $g(\chi)$ 가 微分可能 하므로

$$f(\chi) - f'(\chi)\chi - b = (\chi - \chi_0)^n p(\chi) \quad (n \ge 2)$$

$$g(\chi) - g'(\chi)\chi - d = (\chi - \chi_0)^m q(\chi) \quad (m \ge 2)$$

라고 表現할 수 있으며, 여기서 b 와 d 는 χ_0 에 從屬된 常數 이며, $n \ge m$ 이라고 假定해도 無妨하다.

[1] $f(\chi) - f'(\chi_0)\cdot \chi - b = (\chi - \chi_0)^n \cdot p(\chi) \quad (n \ge 2)$.

위式의 兩邊에 c 를 곱하면

$$c\cdot f(\chi) - c\cdot f'(\chi_0)\cdot \chi - cb = c\cdot(\chi - \chi_0)^n \cdot p(\chi).$$

따라서,

$$\{ c\cdot f(\chi_0) \}' = c\cdot f'(\chi_0).$$

χ_0를 變數로 보면

$$\{ c\cdot f(\chi) \}' = c\cdot f'(\chi).$$

[2] $f(\chi) - f'(\chi_0)\cdot \chi - b = (\chi - \chi_0)^n \cdot p(\chi) \quad (n \ge 2)$.

$g(\chi) - g'(\chi_0)\cdot \chi - d = (\chi - \chi_0)^m \cdot q(\chi) \quad (m \ge 2)$.

위 두 方程式에서 左邊은 左邊, 右邊은 右邊끼리 더하면

$$[\ f(\chi) + g(\chi)\ ] - [\ f'(\chi_0) + g'(\chi_0)\ ]\cdot \chi - (b + d)$$
$$= (\chi - \chi_0)^m \cdot [(\chi - \chi_0)^{n-m} \cdot p(\chi) + q(\chi)].$$

따라서,

$$\{ f(\chi_0) + g(\chi_0) \}' = f'(\chi_0) + g'(\chi_0).$$

χ_0 을 變數로 보면

$$\{ f(\chi) + g(\chi) \}' = f'(\chi) + g'(\chi).$$

[3] $f(\chi) - f'(\chi_0)\cdot\chi - b = (\chi - \chi_0)^n\cdot p(\chi) \qquad (n \geq 2).$

위式의 兩邊에 χ 를 곱하면

$$f(\chi)\cdot\chi = f'(\chi_0)\cdot\chi^2 + b\chi + (\chi - \chi_0)^n\cdot p(\chi)\cdot\chi.$$

따라서,

$f(\chi)\cdot\chi - [\ f'(\chi_0)\cdot\chi_0 + f(\chi_0)\ ]\cdot\chi - d$

(d 는 나중에 정한다)

$= f'(\chi_0)\cdot\chi^2+b\chi-f'(\chi_0)\cdot\chi_0\cdot\chi-f(\chi_0)\cdot\chi+\chi\cdot(\chi-\chi_0)^n\cdot p(\chi)-d$

$= f'(\chi_0)\cdot\chi^2+(b-f'(\chi_0)\cdot\chi_0-f(\chi_0))\cdot\chi-d+\chi\cdot(\chi-\chi_0)^n\cdot p(\chi)$

$= f'(\chi_0)\cdot\chi^2+ (b-f'(\chi_0)\cdot\chi_0-f'(\chi_0)\cdot\chi_0-b)\cdot\chi$

$\quad -d+(\chi-\chi_0)^n\cdot p(\chi)\cdot\chi$

$= f'(\chi_0)\cdot\chi^2-2f'(\chi_0)\cdot\chi_0\cdot\chi-d+(\chi-\chi_0)^n\cdot p(\chi)\cdot\chi.$

여기서

$$f'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0)^2 = f'(\chi_0)\cdot\chi^2-2f'(\chi_0)\cdot\chi_0\cdot\chi+f'(\chi_0)\chi_0^2$$

이므로, 만약 $d = -f'(\chi_0)\chi_0^2$ 라면

$f(\chi)\cdot\chi - [f'(\chi_0)\cdot\chi_0 + f'(\chi_0)]\chi + f'(\chi_0)\chi_0^2$

$= (\chi - \chi_0)^2\cdot[f'(\chi_0) + (\chi - \chi_0)^{n-2}p(\chi)\cdot\chi\ ].$

따라서,

$$(f(\chi_0)\chi_0)' = f'(\chi_0)\chi_0 + f(\chi_0).$$

χ_0 을 變數로 보면,

$$(\ f(\chi)\chi\ )' = f'(\chi)\chi + f(\chi)$$

(系) 函數 $f(\chi)$ 가 微分可能 하다고 하면

① $(\chi^2)' = (\chi\cdot\chi)'$

$= (\chi)'\chi + \chi$ ([3]에 의해)

$=2\chi\cdot$

$(\chi^3)' = (\chi^2 \cdot \chi)'$

$= (\chi^2)'\chi + \chi^2$ ([3]에 의해)

$= 3\chi^2.$

數學的 歸納法에 의해, $(\chi^{n-1})' = (n-1)\chi^{n-2}$ 라고 假定하면,

$(\chi^n)' = (\chi^{n-1} \cdot \chi)'$

$= (\chi^{n-1})' \cdot \chi + \chi^{n-1}$

$= n\chi^{n-1}.$

② 임의의 多項函數 $f(\chi) = a_0 + a_1\chi + a_2\chi^2 + \cdots + a_{n-1}\chi^{n-1} + a_n\chi^n$. 에 대해

$f'(\chi) = (a_0 + a_1\chi + a_2\chi^2 + \cdots + a_{n-1}\chi^{n-1} + a_n\chi^n)'$

([2]에 의해)

$= (a_0)' + a_1(\chi)' + a_2(\chi^2)' + \cdots + a_{n-1}(\chi^{n-1})' + a_n(\chi^n)'$

([1]에 의해)

$= a_1 + 2a_2\chi + \cdots + (n-1)a_{n-1}\chi^{n-2} + na_n\chi^{n-1}.$

위의 (系)로 부터 임의의 多項函數는 微分可能하고 그 導函數는 쉽게 計算된다.

③ $\{ f(\chi) \cdot \chi^2 \}' = \{ f(\chi) \cdot \chi \cdot \chi \}'$

$= \{ f(\chi) \cdot \chi \}' + f(\chi) \cdot \chi$

(微分公式 [3]에 의해)

$= [f'(\chi) \cdot \chi + f(\chi)] \cdot \chi + f(\chi) \cdot \chi$

(微分公式 [3]에 의해)

$= f'(\chi) \cdot \chi^2 + 2\chi \cdot f(\chi)$

數學的 歸納法에 의하여,

$\{ f(\chi) \cdot \chi^{n-1} \}' = f'(\chi) \cdot \chi^{n-1} + (n-1) \cdot \chi^{n-2} f(\chi)$

라고 하면,

$\{ f(\chi) \cdot \chi^n \}' = \{ f(\chi) \cdot \chi^{n-1} \cdot \chi \}'$

$= \{ f(\chi) \cdot \chi^{n-1} \}' \cdot \chi + f(\chi) \cdot \chi^{n-1}$

(微分公式 [3]에 의해)

$= \{ f'(\chi) \cdot \chi^{n-1} + (n-1)x^{n-2} \cdot f(x) \} \chi + f(\chi) \cdot \chi^{n-1}$

(假定에 의해)

$$= f'(\chi)\cdot\chi^n + n\chi^{n-1}\cdot f(\chi)$$

(系) 임의의 두 多項函數 $f(\chi)$ 와 $g(\chi)$ 에 대하여 곱셈에 關한 微分公式이 成立한다.

$$\{ f(\chi)g(\chi) \}' = f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi)$$

(證 明) $g(\chi) = a_n\chi^n + a_{n-1}\chi^{n-1} + \cdots + a_1\chi + a_o$ 라고 두면

$$\begin{aligned}
\{f(\chi)g(\chi)\}' &= \{ f(\chi)[a_n\chi^n + a_{n-1}\chi^{n-1} + \cdots + a_1\chi + a_o]\}' \\
&= \{ a_n f(\chi)\cdot\chi^n + a_{n-1} f(\chi)\cdot\chi^{n-1} + \cdots + a_1 f(\chi)\cdot\chi \\
&\quad + a_o f(\chi) \}' \\
&= \{ a_n f(\chi)\cdot\chi^n \}' + \{ a_{n-1} f(\chi)\cdot\chi^{n-1} \}' + \cdots + \\
&\quad \{ a_1 f(\chi)\cdot\chi \}' + \{ a_o f(\chi) \}'
\end{aligned}$$

(微分公式 [2]에 의해)

$$\begin{aligned}
&= a_n\{ f'(\chi)\cdot\chi^n + n\chi^{n-1}\cdot f(\chi) \} \\
&\quad + a_{n-1}\{ f'(\chi)\cdot\chi^{n-1} + (n-1)\chi^{n-2}\cdot f(\chi) \} \\
&\quad + \cdots + a_1\{ f'(\chi)\cdot\chi + f(\chi) \} + a_o f'(\chi)
\end{aligned}$$

(微分公式 [3]과 系 ①에 의하여)

$$\begin{aligned}
&= f'(\chi)\{ a_n\chi^n + a_{n-1}\chi^{n-1} + \cdots + a_1\chi + a_o \} \\
&\quad + f(\chi)\{ na_n\chi^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\chi^{n-2} + \cdots + a_1\} \\
&= f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi).
\end{aligned}$$

(系 ②에 의하여)

2.1.3. 函數의 增加 減小 및 極大 極小

(定義5) χ_1 에 充分히 가까운 임의의 값을 χ 라고 하자.
이때 函數 $f(\chi)$가 ,

$\chi_1 < \chi$ 일때 $f(\chi_1) < f(\chi)$

$\chi < \chi_1$ 일때 $f(\chi) < f(\chi_1)$

과 같이 되면, $f(\chi)$ 는 $\chi = \chi_1$ 에서 增加狀態에 있다고 한다. 또,

$x_1 < x$ 일때 $f(x_1) > f(x)$

$x < x_1$ 일때 $f(x) > f(x_1)$

과 같이 되면, $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 減少狀態에 있다고 한다.

(定理2) 函數 $f(x)$ 에 대하여

$f'(x_1) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 增加狀態에 있다.

$f'(x_1) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 減少狀態에 있다.

(證 明) x 를 x_1 에 充分히 가까운 임의의 값이라 하고,

$$f(x) - f'(x_1)\cdot x - d = (x - x_1)^n\cdot p(x) \qquad (n \geq 2).$$

라 하자.

$x_1 < x$ 일때

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= f'(x_1)\cdot x + d - f(x_1) + (x - x_1)^n\cdot p(x) \\ &= f'(x_1)\cdot x + d - f'(x_1)\cdot x_1 - d + (x - x_1)^n\cdot p(x) \\ &= f'(x_1)\cdot(x - x_1) + (x - x_1)^n\cdot p(x) \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) + (x - x_1)^{n-1}\cdot p(x).$$

만약 x 가 x_1에 충분히 가까운 값이면 $(x-x_1)^{n-1}p(x)$ 는 극히 작은 값이되고, $f'(x_1)$ 은 일정한 양의 常數이므로

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

$x - x_1 > 0$ 이므로

$$f(x_1) < f(x).$$

$x < x_1$ 일때 마찬가지로

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) + (x - x_1)^{n-1}\cdot p(x).$$

를 생각하면

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

$x - x_1 < 0$ 이므로

$$f(x) < f(x_1).$$

따라서 定義에 의하여 函數 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 增加狀態에 있다. 마찬가지로 $f'(x_1) < 0$ 일때 函數 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 減少狀態에 있음을 證明할 수 있다.

(定義6) 어느 區間의 임의의 두점 x_1, x_2 에 대해

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) < f(x_2)$$

일때, $f(x)$ 는 이 區間에서 單調增加 (또는 增加)한다고 하고 $f(x)$ 를 이 區間에서 增加函數라고 한다. 또

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2)$$

일때, $f(x)$ 는 이 區間에서 單調減少 (또는 減少)한다고 하고 $f(x)$ 를 이 區間에서 減少函數라 한다.

(定理3) 函數 $f(x)$가 어느 區間에서 微分可能 하고, 그 區間에서
항상 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 區間에서 單調增加 한다.
항상 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 區間에서 單調減少 한다.

(證 明) 區間내의 임의의 두점 x_1, x_2 에 대해

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

은 函數 $f(x)$ 의 그래프上에 있는 두점 $p(x_1, f(x_1))$ 과 $Q(x_2, f(x_2))$ 를 잇는 直線 L 의 기울기가 된다.
直線 L 을 y 축의 양의 方向으로 平行移動시켜 函數 $f(x)$ 의 그래프와 直線 L 이 接하도록 하고, 그 점을 $S(x_0, f(x_0))$ 라고 하면

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

만일 恒常 $f'(x) > 0$ 이면, 위의 式으로부터

$$f(x_1) < f(x_2)$$

가 되어 函數 $f(x)$ 는 單調增加 한다.

만일 恒常 $f'(x) < 0$ 이면, 위의 式으로부터

$$f(x_1) > f(x_2)$$

가 되어 函數 $f(x)$ 는 單調減少 한다.

(定義7) 函數 $f(x)$ 가 $x = x_1$ 을 境界로 하여 增加狀態에서 減少狀態로 옮아가면, $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 極大라 하고 $f(x_1)$ 을 $f(x)$ 의 極大값이라 한다.

函數 $f(x)$ 가 $x = x_2$ 을 境界로 하여 減少狀態에서 增加狀態로 옮아가면, 函數 $f(x)$ 는 $x = x_2$ 에서 極小라하고 $f(x_2)$ 을 極小값이라 한다.

極大값과 極小값을 極値라 한다.

(定理4) 函數 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 極値를 갖으면 $f'(x_0) = 0$ 이 된다.

(證 明) 만일 函數 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 極大값을 갖는다고 假定하면 점 $x = x_0$ 을 境界로 하여 增加狀態에서 減少狀態로 옮아간다. 그러한 狀態에서 函數 $f(x)$ 의 그래프 上에서 두점 $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, f(x_2))$, $f(x_1) = f(x_2)$이 存在한다. 두점 P, Q 를 잇는 直線 L 을 y 축의 양의 方向으로 平行移動하면, 直線 L 은 점 $(x_0, f(x_0))$ 에서 函數 $f(x)$ 의 그래프와 接한다. 따라서

$$f'(x_0) = \text{直線 L의 기울기} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

마찬가지로, 函數 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 極小값을 가질때도 $f'(x_0) = 0$ 임을 證明할 수 있다.

(定理5) 函數의 極大, 極小 判定法

函數 $f(x)$에 있어서 $f'(x_1) = 0$ 이고, x_1 의 前後에서 $f'(x)$ 의 付號가

[1] + 에서 - 로 바뀌면

$f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 極大이고, 極大값은 $f(x_1)$ 이다.

[2] - 에서 + 로 바뀌면

$f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 極小이고, 極小값은 $f(x_1)$ 이다.

[3] 付號가 바뀌지 않으면, $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 極値를 갖지 않는다.

(證 明) (定 理4)에 의해 明白하다.

2.2. 第 2 部

2.2.1. 變化率과 一次函數(또는 선형函數)의 關係

R 을 實數 全體의 集合이라고 하고, $I = (a, b)$ 는 垂直線 상의 開區間 (open interval) 이라 하자.

區間 I 內의 임의의 점 x_0 에서 函數 $f: I \to R$ 에 關한 점 $x = x_0$ 에서 變化率 $f'(x_0)$ 은 다음 方程式을 滿足 시킨다.

$$f(x) - f'(x_0)x - b = (x - x_0)^n p(x) \qquad (n \geq 2)$$

따라서 變化率 $f'(x_0)$ 는 一次函數 $g: R \to R$, $g(x) = f'(x_0)x + b$ 를 생각하게 한다.

集合 $R^n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in R, \ i = 1, 2, \cdots, n \}$ 은 n 次元 유클리디안 (Euclidian) n 次元 空間이라 하고, D 를 R^n 의 開部分集合 (open subset) 이라 하자.

集合 D 내의 임의의 점 P_0, $P_0 = (a, b, \cdots, c)$ 에서

函數 $f: D \to R$ 에 關한 점 $P = P_0$ 에서의 變化率 $f'(P_0)$ 는

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0}$$

로 定義할 수 없다.

왜냐하면 $p - p_0$ 에 대한 곱의 逆元이 R^n 上에서는 定義되지 않는다. 그러나, R^n 으로부터 R 로 對應되는 一次函數는 1 x n 行列 [A] 이다.

(參考 3)

따라서 R^n 上에서 定義된 內積을 利用하면 變化率 $f'(p_0)$ 는 다음과 같이 定義된다.

$f'(p_0)$ 는 1 x n 行列이며 다음 方程式을 重根을 갖도록 常數 b 를 結定하는 것이다.

$$f(p) - f'(p_0) \cdot p - b = 0$$

여기서 · 는 R^n 상에서 定義된 內積이며, 重根을 갖는다는 意味는 $(p-p_0)\cdot(p-p_0)\cdot \cdots \cdot (p-p_0)R(p)$ 인 形態로 變形시킬 수 있다는 것이다.

위와 같은 內容과 一致하는 微分槪念은 現在 使用된다. (參考 3)

集合 $R^m = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) : x_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$ 은 m 次元 유클리디안 m 次元 空間이라 하고, D 를 R^n 의 開部分集合이라 하자.

集合 D 내의 임의의 점 P_0, $P_0 = (a, b, \cdots, c)$ 에서

函數 $f : D \to R^m$ 에 關한 점 $p = p_0$ 에서 變化率 $f'(p_0)$ 도 역시 一次函數를 利用하여 定義할 수 있다.

R^n 으로부터 R^m 으로 對應되는 一次函數 (線形函數)는 m x n 行列이다. 따라서 變化率 $f'(p_0)$ 는 m x n 行列이 다음 方程式을 重根을 갖도록 점 $b = (x_0, y_0, \cdots, z_0) \in R^m$ 를 結定하는 것이다.

$$f(p) - [\ f'(p_0)](p) - b = 0.$$

여기서, $[\ f'(p_0)](p)$ 는 行列 $[\ f'(p_0)]$ 에 의한 점 $p \in R^n$ 의 變換을 意味한다. 方程式이 重根을 갖는다는 意味는, 벡터의 外積을 利用하여

$$A_1(p-p_0) \times A_2(p-p_0) \times \cdots \times A_K(p-p_0)$$

(여기서 A_i 는 行列(metrix), $i = 1, 2, \cdots, k$)

인 形態로 變形시킬 수 있다는 것이다.
위와 같은 內容과 一致하는 微分槪念은 現在 使用된다. (參考 3)

一般的으로, X 와 Y 를 代數的인 構造가 定義된 空間이라 하고, 특히 X 와 Y 가 體(Field)가 될때, 函數 $f : X \rightarrow Y$, $p_o \in X$ 라 하면, 變化率 $f'(p_o)$ 는 X 로부터 Y 로 對應되는 線形函數로써 다음 方程式을 重根을 갖도록 $q_o \in Y$ 를 決定하는 것이다.

$$f(p) - f'(p_o)(p) - q_o = 0.$$

만일 X 와 Y 에 距離槪念이 주어지고, 完備性을 갖춘 Banach 空間일 境遇 위와같은 內容과 一致하는 微分槪念은 現在 使用된다. (參考 4)

2.3. 第 3 部

2.3.1. 函數와 函數의 그래프의 差異 〔參考 5〕

(定義8) 하나의 順序雙 (a, b)는 다음과 같은 集合으로 定義한다.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

(參考) 위의 (定義8) 로부터 順序雙의 가장 基本的인 性質인

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c, \quad b = d$$

가 證明된다.

(定義9) 두 集合 A 와 B 곱 A x B 는 다음과 같은 集合으로 定義한다.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

(定義10) 集合 A 로부터 集合 B 의 關係 R 은 임의의 順序雙 (a, b) 에 대하여 다음 命題중에서 오직 하나만 滿足하는 것이다.

(i) a 는 b 에 關係가 있다.

(ii) a 는 b 에 關係가 없다.

(參考) 定義 9, 定義 10에 따르면 集合 A 로부터 集合 B 의 임의의 關係 R 은 集合 A x B 의 유일한 集合 R^* 를 다음과 같이 定義할 수 있다.

R^* = { (a, b) : a 는 b 와 關係가 있다.}

반면에

集合 A x B 의 임의의 集合 R^* 는 集合 A 로부터 集合 B 로의 유일한 關係 R 을 定義할 수 있다.

a 는 b 와 關係가 있다 ↔ (a, b) 는 R^* 元素이다.

集合 A 로부터 集合 B 로의 關係와 A x B 의 部分集合의 對應關係의 觀點에서 볼때 다음과 같은 定義를 내릴 수 있다.

(定義11) 集合 A 로부터 集合 B 로의 關係 R 은 A x B 의 部分集合이다.

第 3 部의 結論은 위의 定義 및 參考 事項들의 觀点에서, 임의의 函數 f: A→B 에 대하여, 函數 f 의 그래프

{ (a, f(a)) : a ∈ A }

는 集合 A x B 의 部分集合이고, 函數 f 는 集合 A 로부터 集合 B로의 關係이다. 그리고 그 關係는 임의의 順序雙 (a, b) 에 대하여 오직 다음 命題중 하나만 滿足한다.

(i) a 는 b 와 關係가 있다 ↔ b = f(a)

(ii) a 는 b 와 關係가 없다. ↔ b ≠ f(a)

結論的으로, 만약 두 函數 $f: A \to B$ 와 $g: A \to B$ 가 같다는 事實은, 函數 f 의 그래프와 函數 g 의 그래프가 같다는 것이고, 이러한 觀點에서 函數와 函數의 그래프는 같은 것이다.

3. 結　　論

以上에서 살펴본 內容을 綜合해 보면, 多項函數들에 關하여,

1) 極限槪念을 使用하지 않는 中學校 三學年 數學過程을 修了한 學生들이 習得한 數學知識 중에서 代數方程式의 展開, 因數分解 및 重根의 性質을 利用하여 새로운 導函數의 定義를 세우고 導函數의 槪念, 性質 및 代數的 導函數의 計算등이 極限을 導入한 導函數의 定義를 利用하여 얻은 結果들과 一致한다.

2) 抽象的인 空間 X 와 Y 사이에서 定義된 一般的인 函數 $f: X \rightarrow Y$, $p_0 \in X$ 에 대해 變化率 $f'(p_0)$을 定義할 수 있고, 그 變化率은 一次函數(線形函數)로 表現할 수 있다. 다만 變化率을 定義하기 위하여 X와 Y사이에서 定義된 函數들에 관한 重根의 槪念이 必要하다.

3) 函數 $f(\chi)$를 χ로 微分한다는 意味를 幾何學的으로 說明하기 위하여 函數와 函數의 그래프는 서로 一致한다는 槪念을 記述한다.

參 考 文 獻

1. 정영진 , 고등학교 수학 1, 학연사, 1984

2. 정범모, 교육과 교육학, 1976

3. C. Buck, Advanced Calculus, International student Edition, 1978

4. J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960

5. S. Lipschutz , Theory and Problems of Finite Mathematics, Schaum's outlinne Series, 1966

감 사 의 글

모자람이 많았던 저에게 이 한편의 논문이 나오기까지 깊은 관심을 가지고 가르쳐 주신 지도교수 고봉수 박사님을 비롯하여 교육과정을 이수하는데 강좌를 담당하여 주신 수학교육과 및 수학과의 여러 교수님들께 무한히 감사를 드립니다.

아울러 졸업하기까지 사랑과 격려를 해준 가족들과 함께 이 조그만 성취의 기쁨을 나누고자 합니다.

1991년 월 일

김 광 보