碩士學位請求論文

極限槪念을 使用하지 않은 導函數의 定義에서 有理函數의 導函數

指導敎授 高 鳳 秀

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

洪 性 圭

1993年 8月

極限概念을 使用하지 않은 導函數의 定義에서 有理函數의 導函數

指導教授 高 鳳 秀

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

1993年 6月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 洪 性 圭

洪性圭의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1993年 7月 日

審査委員長 金益賢

審查委員 梁永五

審查委員 方銀淑

<초 록>

극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수

홍 성 규

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 봉 수

실수의 집합의 부분집합인 구간상에서 정의된 실수치 유리함수에 대한 도함수의 정의를 극한개념을 사용하지 않고 유도한다. 그 정의로부터 단순히 대수방정식의 중근의 기하학적 성질, 인수분해, 방정식의 전개등 기초적인 방법에 의하여 유리함수의 도함수들이 선형성, 곱셈공식, 특히 다항식에 대한 도함수들의 나눗셈 공식을 얻는다. 응용으로써 본 논문에서 정의되는 도함수의 기하학적 유도 방법을 사용하여 유리함수의 단조성, 극값, 미분의 평균치정리들도 증명된다.

목 차

I. 서 론

1991년도 제주대학교 교육대학원 석사학위논문 "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의및 성질들의 연구" [1]에서 극한개념을 사용하지 않고 일반적인 다항식들의 도함수를 유도하였다. 유도 과정에서 사용한 방법들은 중학교 3학년 또는 고등학교 1학년 수학교육과정에서 학습한 대수적 방정식의 전개, 인수분해, 중근의 성질, 계수비교 그리고 함수 그래프의 직관적인 이해이다. 또한 고차다항식들의 값의 변화상태, 최대 최소등도 연구되었다.

고등학교 수학교육에 있어서 중심이 되는 미분법은 극한 개념을 도입하여 그 이론을 전개하고 있기 때문에 학생들이 미분법을 이해하기 위해서는 먼저 극한개념에 대한 학습이 선행 되어야 한다. 따라서 극한개념을 사용하지 않는 미분법 연구는 연구대상으로 충분한 가치가 있다.

본 논문의 연구 목적은 극한 개념을 사용하지 않은 다항식들의 도함수 정의 및 성질들의 개념을 포함하고 일반화 하는 연구로서 일반적인 유리함수에 대한 도함수를 극한개념을 도입하지 않고 단순히 대수적인 방정식의 전개, 인수분해 및 중근의 성질들을 기하학적으로 이해할 수 있는 지식만 가지고도 미분법에 대한 개념들을 쉽게 이해시킬 수 있는 방법들과 유리함수들의 값의 변화상태, 최대 최소들을 추정할 수 있는 방법을 연구하는데 있다.

본 논문의 본론 제1부에서는 [1]의 결과들을 증명없이 요약한다.

본 논문의 본론 제2부에서는 유리함수의 도함수, 도함수들의 선형성, 도함수들의 곱셈공식을 유도하며 그 결과들은 극한을 사용하여 얻을 수 있는 도함수들의 덧셈, 곱셈공식들의 결과들과 같음을 증명한다.

본 논문의 본론 제3부에서는 유리함수의 도함수와 그래프의 관계로써 함수의 증감, 최대 최소, 미분의 평균치 정리들을 얻으며 그 결과들은 극한개념을 도입하여

증명된 결과들과 같음을 보인다. 또한 그 증명 과정들을 비교할 때 본 논문의 증명방법은 중학생, 고등학생들이 미분의 성질들을 이해 하는데 극한개념을 사용한 증명보다 기하학적임을 알게 한다.

II. 본 론

1. 제 1 부 다항식의 도함수 및 그 성질

본 장에서는 [1]의 내용을 요약한다.

1) 함수와 함수의 그래프의 관계

두 집합 A, B를 실수 R 의 부분집합이라 할때, 집합 $A \times B$ 는

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

으로 정의하고, 집합 A 로 부터 집합 B 로의 관계 R 은 $A \times B$ 의 부분집합으로 정의 한다.

함수 $f : A \rightarrow B$에 대하여 함수 f 의 그래프

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

는 집합 $A \times B$ 의 부분집합이며, 함수 f 의 그래프는 집합 A 로 부터 집합 B 로의 한 관계이며 그 관계는 임의의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 오직 다음 명제중 하나만 만족한다.

a는 b와 관계가 있다. 즉, $b = f(a)$

a는 b와 관계가 없다. 즉, $b \neq f(a)$.

만약, 두 함수 $f : A \rightarrow B$ 와 $g : A \rightarrow B$ 가 같다는 정의는 함수 f 의 그래프와 함수 g 의 그래프가 같다는 것이다. 따라서, 두 관계는 같게 되며 이러한 관점에서 함수와 함수의 그래프는 일대일 대응이 되기 때문에 같은 것으로 취급해도 문제점이 없다.

2) 다항식의 중근의 개념을 사용한 다항식의 도함수 정의

다항식 $F(x)$ 가

$$F(x) = (x - x_0)^n G(x) \ (n \geq 2 \quad \text{인 자연수})$$

로 나타낼 때 방정식 $F(x) = 0$ 는 $x = x_0$ 에서 중근을 갖는다고 한다.

$f(x)$ 를 x 에 관한 다항식이라 할 때 방정식

$$f(x) - ax - b = 0$$

이 $x = x_0$ 에서 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 가 유일하게 존재할 때 함수 $y = f(x)$ 는 $x = x_0$ 에서 미분가능 하다고 정의하고, 이때 "a 를 함수 $y = f(x)$의 $x = x_0$ 에서 도함수"라고 정의하며 $a = f'(x_0)$으로 나타낸다.

3) 점 x_0 에서 다항식의 도함수의 기하학적 의미와 접선의 기울기

다항식 $f(x)$ 에 관하여 방정식

$$f(x) - f'(x_0)x - b = (x - x_0)^n p(x) = 0$$

이 중근을 갖는다는 의미는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = f'(x_0)x + b$ 의 그래프가 점 $(x_0, f(x_0))$ 에서 접한다는 기하학적 의미와같다. 따라서 $f'(x_0)$ 의 기하학적 의미는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(x_0, f(x_0))$ 에서 접선의 기울기다.

4) 상수함수 $y = f(x) = c$ 와 일차함수 $y = g(x) = ax + b$ 의 도함수

방정식 $f(x) - 0 \cdot x - c = 0$ 과 $g(x) - ax - b = 0$ 은 각각 다음과 같은 형태

$$f(x) - 0 \cdot x - c = (x - x_0)^n x \cdot 0,$$

$$g(x) - ax - b = (x - x_0)^n x \cdot 0$$

으로 나타낼 수 있고 $x = x_0$ 에서 중근을 갖는다고 말할 수 있기 때문에

$$f'(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = a$$

로 정의한다.

5) 점 $x = x_0$ 에서 도함수의 선형성과 곱셈법칙

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 미분가능할 때

[1] $\{cf(x_0)\}' = cf'(x_0)$ (c 는 상수).

[2] $\{f(x_0) \pm g(x_0)\}' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ (복호동순).

[3] $\{f(x_0)g(x_0)\}' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

6) 점 x_1 에서 다항식 f 의 도함수를 이용한 f 에 대한 증감상태

$f'(x_1) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 증가상태에 있다.

$f'(x_1) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 감소상태에 있다.

7) 정의역 상의 임의의 점 x 에서 다항식 f 의 도함수를 사용한 f 의 증감

다항식 $f(x)$ 가 한 구간상의 모든점에서 미분가능하고 그 구간에서

항상 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 단조증가 한다.

항상 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 단조감소한다.

8) 극점 $(x_0, f(x_0))$ 과 점 x_0 에서 함수 f 의 도함수의 관계

다항식 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 극값을 가지면 $f'(x_0) = 0$ 이다.

9) 점 x_0 에서 함수 f 의 도함수를 이용한 극대, 극소 판정법

다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이고 x_1 의 전후에서 $f'(x)$ 의 부호가

[1] $+$에서 $-$ 로 변하면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극대이고 극대값은 $f(x_1)$ 이다.

[2] $-$ 에서 $+$ 로 변하면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극소이고 극소값은 $f(x_1)$ 이다.

[3] 부호가 변하지 않으면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극값을 갖지 아니한다.

2. 제 2 부 유리함수의 도함수

본 장에서는 일반적인 유리함수에 대한 도함수의 개념을 극한을 사용하지 않고 방정식의 중근의 개념과 일차함수만을 사용하여, 유도하고 그에 따른 도함수의 선형성과 곱셈공식을 얻는다.

정 의 1 : 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 가 x_0 에서 미분가능하다는 의미는 상수 a 와 b 그리고 유리함수 $r(x)$ 가 유일하게 존재하여 다음조건을 만족하는 경우라고 정의한다.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x).$$

이 때, a 를 점 x_0 에서 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 의 도함수라 하고

$$a = \left(\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\right)'$$

으로 표시한다.

정 리 1 : 점 $x_0\,(\neq 0)$ 에서 함수 $\dfrac{1}{x}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)' = -\frac{1}{x_0^2}.$$

증 명 : 함수 $\dfrac{1}{x}$ 은 미분가능함을 보이기 위하여

$$\frac{1}{x} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x)$$

을 만족하는 a, b 그리고 $r(x)$ 를 찾는다. 양변에 x 를 곱하면

$$1 - ax^2 - bx = (x - x_0)^2 r(x) x.$$

따라서, $r(x)x = \frac{1}{x_0^2}$ 이 되고 유일하게 존재하며

(1) $$ax^2 + bx - 1 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)^2$$

이 되고, (1)의 우변을 전개하여 계수를 비교하면

$$a = -\frac{1}{x_0^2}, \qquad b = \frac{2}{x_0}.$$

한편 (1)의 양변을 $-x(\neq 0)$로 나누면

$$\frac{1}{x} - (ax + b) = \frac{(x - x_0)^2}{xx_0^2}.$$

따라서, 함수 $\frac{1}{x}$ 은 $x_0 \neq 0$ 에서 미분가능하고

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)' = -\frac{1}{x_0^2}.$$

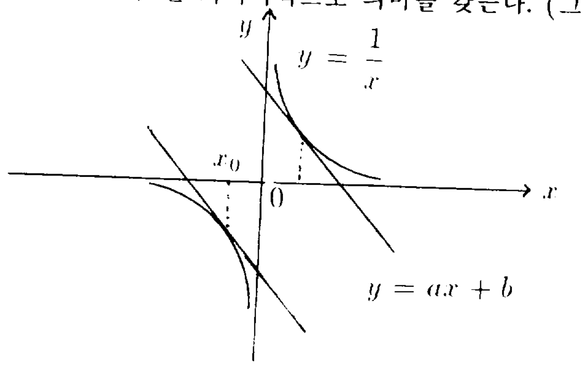
참 고 : 점 $x_0(\neq 0)$ 에서 함수 $\frac{1}{x}$ 의 도함수의 기하학적 의미

$$x = x_0 \text{ 이면 } \frac{1}{x_0} - (ax_0 + b) = 0,$$

$$x > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{x} - (ax + b) = \frac{(x - x_0)^2}{xx_0^2} > 0,$$

$$x < 0 \text{ 이면 } \frac{1}{x} - (ax+b) = \frac{(x-x_0)^2}{xx_0^2} < 0.$$

위의 식으로부터 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 는 $x = x_0$ 에서 접해있다. 결론적으로 위의 정리1은 기하학적으로 의미를 갖는다. (그림 1 참고)



(그 림 1)

따라서, 점 $x = x_0$ 에서 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 도함수는 점 $(x_0, \frac{1}{x_0})$ 에서 함수의 그래프의 접선의 기울기 $-\frac{1}{x_0^2}$ 로 받아들일 수 있다.

정 리 2 : $P(x)$ 를 다항식 $P(x_0) \neq 0$ 이라 하면 점 $x = x_0$ 에서 유리함수 $\frac{1}{P(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' = -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

증 명 : $y = P(x)$, $y_0 = P(x_0)$ 라 놓고, y_0 에서 함수 $\frac{1}{y}$ 의 도함수를

계산하면

(1) $$\frac{1}{y}-(ay+b)=\frac{(y-y_0))^2}{yy_0^2}=\frac{[P(x)-P(x_0)]^2}{P(x)[P(x_0)]^2},$$

$$a=-\frac{1}{y_0^2}=-\frac{1}{[P(x_0)]^2},\quad b=\frac{2}{y_0}=\frac{2}{P(x_0)}.$$

한편, 다항식 $P(x)$ 는 $x=x_0$ 에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

(2) $$P(x)-P'(x_0)x-[P(x_0)-P'(x_0)x_0]=(x-x_0)^2Q(x).$$

여기서 $Q(x)$ 는 다항식이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{P(x)}+\frac{1}{[P(x_0)]^2}[P'(x_0)x+P(x_0)-$$

$$P'(x_0)x_0+(x-x_0)^2Q(x)]-\frac{2}{P(x_0)}$$

$$=\frac{[(x-x_0)P'(x_0)+(x-x_0)^2Q(x)]^2}{P(x)[P(x_0)]^2}$$

따라서

$$\frac{1}{P(x)}+\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x-\frac{1}{P(x_0)}-\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0$$

$$=-\frac{(x-x_0)^2Q(x)}{[P(x_0)]^2}+\frac{[(x-x_0)P'(x_0)+(x-x_0)^2Q(x)]^2}{P(x)[P(x_0)]^2}$$

$$=\frac{-P(x)Q(x)(x-x_0)^2+(x-x_0)^2[P'(x_0)+(x-x_0)Q(x)]^2}{P(x)[P(x_0)]^2}$$

$$=(x-x_0)^2\left[\frac{-P(x)Q(x)+[P'(x_0)+(x-x_0)Q(x)]^2}{P(x)[P(x_0)]^2}\right].$$

결론적으로, a, b, $Q(x)$가 유일하게 결정되므로 점 $x = x_0$ 에서의 함수 $\frac{1}{P(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' = -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

정 리 3 : 미 분 공 식

두 유리함수 $\frac{1}{P(x)}$, $\frac{1}{Q(x)}$ 그리고 상수 C에 대하여 $P(x_0) \neq 0$, $Q(x_0) \neq 0$ 라고 하면

(1) $\left(\frac{C}{P(x_0)}\right)' = C\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)'.$

(2) $\left(\frac{1}{P(x_0)} \pm \frac{1}{Q(x_0)}\right)' = \left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' \pm \left(\frac{1}{Q(x_0)}\right)'$ (복호동순).

(3) $\left(\frac{x_0}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}.$

증 명 : 정리 2 를 사용하면 점 $x = x_0$ 에서 $\frac{1}{P(x)}$ 과 $\frac{1}{Q(x)}$ 은 미분가능하고 다음과 같은 등식이 성립한다.

(1)
$$\frac{1}{P(x)} + \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x - \frac{1}{P(x_0)} - \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0$$
$$= (x - x_0)^2 r(x).$$

$$(2)\qquad \frac{1}{Q(x)} + \frac{Q'(x_0)}{[Q(x_0)]^2}x - \frac{1}{Q(x_0)} - \frac{Q'(x_0)}{[Q(x_0)]^2}x_0$$

$$= (x - x_0)^2 s(x).$$

여기서 $s(x)$ 와 $r(x)$ 는 유리함수들이다.

[1] 의 증명 : 식 (1)의 양변에 C 를 곱하면

$$\frac{C}{P(x)} + \frac{C[P'(x_0)]}{[P(x_0)]^2}x - \frac{C}{P(x_0)} - \frac{C[P'(x_0)]}{[P(x_0)]^2}x_0$$

$$= C(x - x_0)^2 r(x)$$

이므로

$$\left(\frac{C}{P(x_0)}\right)' = -\frac{CP'(x_0)}{[P(x_0)]^2} = C\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)'.$$

[2] 의 증명 : 식 (1)과 식 (2)을 변변 더하거나 빼면

$$\left(\frac{1}{P(x)} \pm \frac{1}{Q(x)}\right) + \left(\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} \pm \frac{Q'(x_0)}{[Q(x_0)]^2}\right)x$$

$$+ \left[\left(\frac{-1}{P(x_0)} - \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0\right) \pm \left(\frac{-1}{Q(x_0)} - \frac{Q'(x_0)}{[Q(x_0)]^2}x_0\right)\right]$$

$$= (x - x_0)^2[r(x) \pm s(x)] \text{ (복호동순)}.$$

이므로

$$\left(\frac{1}{P(x_0)} \pm \frac{1}{Q(x_0)}\right)' = \left(-\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]'}\right) \pm \left(-\frac{Q'(x_0)}{[Q(x_0)]'}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' \pm \left(\frac{1}{Q(x_0)}\right)' \quad \text{(복호동순)}.$$

[3] 의 증명 : 식 (1)의 양변에 x 를 곱하면

$$\frac{x}{P(x)} + \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x^2 + \left(\frac{-1}{P(x_0)} - \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0\right)x$$

$$= x(x-x_0)^2 r(x)$$

이므로

$$\frac{x}{P(x)} - \left[\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}\right] x - d \quad (d\text{는 후에 정해짐})$$

$$= \frac{-P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x^2 - \left(\frac{-1}{P(x_0)} - \frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0\right)x + x(x-x_0)^2 r(x)$$

$$- \left[\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}\right] x - d$$

$$= -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x^2 - 2\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 x - d + x(x-x_0)^2 r(x)$$

$$= -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}(x^2 - 2x_0 x + x_0^2) + \frac{P'(x_0)x_0^2}{[P(x_0)]^2} - d + x(x-x_0)^2 r(x)$$

여기서 $d = \dfrac{P'(x_0)x_0^2}{[P(x_0)]^2}$라 하면

$$\frac{x}{P(x)} - \left[\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}\right] x - d$$

$$= (x - x_0)^2 \left[-\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} + xr(x)\right].$$

따라서,

$$\left(\frac{x_0}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}.$$

계 : 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$가 점 $x = x_0$ $(P(x_0) \neq 0)$ 에서 미분가능하면

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}x_0\right)' = \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}.$$

증 명 : 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$가 점 $x = x_0$ 에서 미분가능하다고 하면

$$\frac{Q(x)}{P(x)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x - \left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0\right]$$

$$= (x - x_0)^2 r(x)$$

따라서, 위 식의 양변에 x 를 곱하면

$$\frac{Q(x)}{P(x)}x - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x^2 - \left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0\right] x$$

$$= x(x - x_0)^2 r(x).$$

여기서

$$\frac{Q(x)}{P(x)}x - ax - b$$

$$= \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x^2 + \left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0\right] x$$

$$+ x(x - x_0)^2 r(x) - ax - b$$

$$= \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x^2 + \left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 - a\right] x$$

$$- b + x(x - x_0)^2 r(x)$$

따라서, $\frac{Q(x)}{P(x)}x$ 가 점 $x = x_0$ 에서 미분가능하려면

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x^2 + \left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 - a\right] x - b.$$

$$= \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' (x - x_0)^2$$

이 되는 a와 b를 찾는다. 전개하여 계수를 비교하면

$$\frac{Q(x_0)}{P(x_0)} - \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 - a = -2\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0,$$

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0^2 = -b,$$

$$a = \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}.$$

따라서

$$\frac{Q(x)}{P(x)}x - \left[\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right] x + \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0^2.$$

$$= (x - x_0)^2 \left[\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' + xr(x)\right]$$

결론적으로

$$\left[\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}x_0\right]' = \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}.$$

정 리 4 : 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$는 점 $x = x_0\,(P(x_0) \neq 0)$에서 미분가능하고

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' = \frac{Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

증 명 : 정리 3의 [3]에 의하여

$$\left(\frac{x_0}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{1}{P(x_0)}$$

$$= -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} x_0 + \frac{1}{P(x_0)}$$

$$= \frac{P(x_0) - x_0 P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

계에 의하여

$$\left(\frac{x_0^2}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{x_0}{P(x_0)} x_0\right)'$$

$$= \left(\frac{x_0}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{x_0}{P(x_0)}$$

$$= \frac{P(x_0) - x_0 P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} x_0 + \frac{x_0}{P(x_0)}$$

$$= \frac{P(x_0)x_0 - x_0^2 P'(x_0) + P(x_0)x_0}{[P(x_0)]^2}$$

$$= \frac{2x_0 P(x_0) - x_0^2 P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

수학적 귀납법을 사용하기 위하여

$$\left(\frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}\right)' = \frac{(n-1)x_0^{n-2} P(x_0) - x_0^{n-1} P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

로 가정하면

$$\left(\frac{x_0^n}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}x_0\right)'$$

$$= \left(\frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}$$

$$= \frac{(n-1)x_0^{n-2}P(x_0) - x_0^{n-1}P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}x_0 + \frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}$$

$$= \frac{(n-1)x_0^{n-1}P(x_0) - x_0^{n}P'(x_0) + x_0^{n-1}P(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

$$= \frac{nx_0^{n-1}P(x_0) - x_0^{n}P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

따라서, 모든 자연수 n 에 대하여

$$(*) \qquad \left(\frac{x_0^n}{P(x_0)}\right)' = \frac{nx_0^{n-1}P(x_0) - x_0^{n}P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

이제

$$Q(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

라 하면

$$Q'(x_0) = na_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1.$$

이므로, 정리 1. 정리 2. 정리 3. 및 식 *. 그리고

수학적 귀납법에 의하여

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' = \left(\frac{a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0}{P(x_0)}\right)'$$

$$= a_n\left(\frac{x_0^n}{P(x_0)}\right)' + a_{n-1}\left(\frac{x_0^{n-1}}{P(x_0)}\right)' + \cdots + a_1\left(\frac{x_0}{P(x_0)}\right)' + a_0\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)'$$

$$= a_n\frac{nx_0^{n-1}P(x_0) - x_0^n P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} + a_{n-1}\frac{(n-1)x_0^{n-2}P(x_0) - x_0^{n-1}P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

$$+ \cdots\cdots + a_1\frac{P(x_0) - x_0 P'(x_0)}{[P(x_0)]^2} + a_0\left(-\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}\right)$$

$$= \frac{(na_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1)P(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

$$- \frac{(a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0)P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

$$= \frac{Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

3. 제 3 부 유리함수의 도함수와 그래프

정 의 : x_1 에 충분히 가까운 임의의 값을 x 라 하자. 이때 유리함수 $f(x)$ 가

$$x_1 < x \text{ 일 때 } f(x_1) < f(x)$$

$$x < x_1 \text{ 일 때 } f(x) < f(x_1)$$

과 같이 되면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 증가상태에 있다고 한다.

$$x_1 < x \text{ 일 때 } f(x_1) > f(x)$$

$$x < x_1 \text{ 일 때 } f(x) > f(x_1)$$

과 같이 되면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 감소상태에 있다고 한다.

정 리 1 : 유리함수 $f(x)$ 에 대하여

$f'(x_1) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 증가상태에 있다.

$f'(x_1) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 감소상태에 있다.

증 명 : x 를 x_1 에 충분히 가까운 임의의 값이라 하고

$$f(x) - f'(x_1)x - d = (x - x_1)^2 P(x)$$

라 하자. $x_1 < x$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= f'(x_1)x + d - f(x_1) + (x - x_1)^2 P(x) \\ &= f'(x_1)x + d - f'(x_1)x_1 - d + (x - x_1)^2 P(x) \\ &= f'(x_1)(x - x_1) + (x - x_1)^2 P(x). \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) + (x - x_1)P(x).$$

만약 x 가 x_1 에 충분히 가까운 값이면 $(x - x_1)P(x)$ 는 극히 작은 값이 되고, $f'(x_1) > 0$ 이므로

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

$x - x_1 > 0$ 이므로 $f(x) > f(x_1)$.

$x < x_1$ 일 때 마찬가지로

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) + (x - x_1)P(x)$$

를 생각하면

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

$x - x_1 < 0$ 이므로 $f(x) < f(x_1)$.

따라서 $f'(x_1) > 0$ 이면 f 는 x_1 에서 증가상태에 있다.

비슷한 방법으로 $f'(x_1) < 0$ 일 때 f 는 x_1 에서 감소상태에 있음을 증명할 수 있다.

정 리 2: 유리함수 f 의 정의역 내의 두 점 a 와 $b(a < b)$ 에 대하여

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x_0)$$

를 만족하는 x_0 가 a 와 b 사이에 존재한다.

증 명 : 유리함수 f 의 그래프 상의 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 잇는 직선 L 을 y 축을 따라 평행이동하면 그래프와 L 이 한 점에서 접하게 되는 점 $(x_0, f(x_0))$ 가 존재한다. 여기서 $a < x_0 < b$ 이다.

접선의 식은 $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}x + f(a)$ 이고 유리함수 f 는 x_0 에서 미분가능하므로

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x - f(a) = (x - x_0)^2 r(x)$$

로 표현할 수 있다. 따라서

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

정 의 : 어느 구간의 임의의 두 점 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 일 때

유리함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 단조증가한다고 하고, $f(x)$ 를 이 구간에서 증가함수라고 한다.

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2) \text{ 일 때}$$

유리함수 $f(x)$ 이 구간에서 단조감소한다고 하고, $f(x)$ 를 이 구간에서 감소함수라고 한다.

정 리 3 : 유리함수 $f(x)$ 가 어느 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서

항상 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 단조증가한다.

항상 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 단조감소한다.

증 명 : 구간 내의 임의의 두 점 $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ 에 대하여 정리 2로 부터

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0)$$

를 만족하는 점 x_0 가 x_1 과 x_2 사이에 존재한다. 만약 구간내의 임의의 점 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면

$$f(x_1) < f(x_2)$$

가 되어 유리함수 f 는 구간에서 증가한다.

만약 구간 내의 임의의 점 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이면

$$f(x_1) > f(x_2)$$

가 되어 유리함수 f 는 구간에서 감소한다.

정 의 : 유리함수 $f(x)$ 가 $x = x_1$ 을 경계로 하여 증가상태에서 감소상태로 옮아가면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극대라 하고, $f(x_1)$ 을 $f(x)$ 의 극대값이라 한다.

유리함수 $f(x)$ 가 $x = x_2$ 을 경계로 하여 감소상태에서 증가상태로 옮아가면 $f(x)$ 는 $x = x_2$ 에서 극소라 하고, $f(x_2)$ 을 $f(x)$ 의 극소값이라 한다. 극대값과 극소값을 극치라 한다.

정 리 4 : 유리함수 $f(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 극치를 가지면 $f'(x_0) = 0$ 가 된다.

증 명 : 정리 2에 의하여 명백하다.

정 리 5 : 유리함수 $f(x)$ 에 있어서 $f'(x_1) = 0$ 이고 x_1 의 전후에서 $f'(x)$ 의 부호가

[1] $+$ 에서 $-$ 로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극대이고, 극대값은 $f(x_1)$ 이다.

[2] $-$ 에서 $+$ 로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극소이고, 극소값은 $f(x_1)$ 이다.

[3] 부호가 바뀌지 않으면 $f(x)$ 는 $x = x_1$ 에서 극치를 갖지 않는다.

증 명 : 정리 3. 정리 4에 의하여 명백하다.

III. 결 론

1. 유리함수의 도함수를 접선의 개념과 일치하도록 이론을 전개하는 과정에서 극한개념을 사용하지 않고, 단순히 대수적인 방정식의 전개, 인수분해 및 중근의 기하학적 성질들을 이용하여 유리함수의 도함수, 그 도함수들의 선형성, 도함수들의 곱셈공식, 특히 다항식들에 관한 도함수의 나눗셈 공식을 얻었다. 그 결과들은 극한을 도입한 도함수의 정의를 이용하여 얻은 결과들과 일치한다.

2. 유리함수의 도함수와 그래프의 관계로써 함수의 증감, 최대 최소, 미분의 평균치 정리들을 얻었으며, 그 결과들도 역시 극한개념을 도입하여 증명된 결과들과 같음을 보였다.

3. 이상의 결과들을 정리하면 본 논문의 증명 방법은 극한개념을 선수 학습으로 습득하지 못한 학습자들에게 미분의 성질들을 이해시키는데 쉬운 과정이며, 특히 유리함수의 그래프의 형태를 이해시키는데도 극한개념을 사용하여 얻은 결과 보다 더 기하학적이다.

참고문헌

1. 윤옥경 · 윤재한(1992), 고등학교 수학 I · II, (주) 웅진문화.

2. 김광보(1991), "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의 및 성질들의 연구". 석사학위 논문, 제주대학교 교육대학원.

3. J.Dieudoné, J.(1960), *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press.

<Abstract>

DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS WITHOUT USING THE CONCEPT OF LIMIT

Hong, Sung-kyu

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Ko, Bong-Soo

The definition of the derivative for real valued rational functions defined by on an interval is introduced without using the concept of limit. With the definition, the linearity, the product rule of derivative for any rational functions, especially, the quotient rule of derivtive for any polynomials are obtained by the elementary methods which are the algebraic expansion, the factorization, the geometric property of multiple roots of algebraic equations. Furthermore, as its application, the monotonicity and local extreme values can be found by the geometrical method of the derivative, and the mean value theorem of calculus is proved by the above similar method.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1993 .

감사의 글

본 논문이 완성되기까지 많은 시간을 할애하여 주신 지도교수 고봉수 박사님과 검토와 조언을 해주신 수학교육과, 수학과의 모든 교수님께 진심으로 감사를 드립니다. 또한 강의를 같이 받았던 동료 원생들을 비롯하여 학교 수업 진행에 어려움 속에서도 학위과정을 무사히 마칠 수 있도록 배려하여 주신 여러 선생님께도 깊은 사의를 표합니다.

그리고 끊임없는 기도와 사랑으로 항상 염려해 준 아내, 건강하게 자라나는 원기, 진기, 특히 어머님께 감사를 드리며 조그마한 기쁨을 나누고자 합니다.

1993년 8월

홍 성 규