碩士學位論文

極限槪念을 活用한 數列 및 函數의 極限과 連續性에 대한 研究

指導敎授　鄭 承 達

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

文 東 柱

2003年　8月

極限槪念을 活用한 數列 및 函數의 極限과 連續性에 대한 硏究

指導敎授 鄭 承 達

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2003年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 文 東 柱

文東柱의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2003年 7月 日

審査委員長 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

審 査 委 員 ______________ 印

＜抄錄＞

極限槪念을 活用한 數列 및 函數의 極限과 連續性에 대한 硏究

文 東 柱

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授　鄭 承 達

수학 교육은 어떤 기본개념을 바탕으로 좀 더 차원 높은 개념을 이해하는 과정의 반복이어서 기본개념이 미비된 학생이 새로운 수학 개념을 학습하는 데는 결정적 장애가 될 수 있다. 이런 측면에서 볼 때 현행 고등학교 수학에서 수열 및 함수의 극한에서부터 미분·적분학에 이르기까지 중요하게 다루어지고 있는 극한 개념 지도는 그 응용성이 매우 강하고 교육적 가치가 풍부하며 또한 고등수학을 하는데 밑바탕이 되는 아주 중요한 개념이므로 정확한 학습이 요구되고 있는 실정이고, 또한 수학 교육의 현대화 과정에서 보다 논리적 엄밀성이 강조되고 있는 추세이므로 극한 개념 지도가 논리적으로 다루어져야 하지만, 극한 개념의 엄밀한 이론적 정의가 매우 어려운 관계로 현행 고등학교 수학교육에서는 정확한 극한 개념을 바탕으로 하는 학습보다는 직관적인 개념을 토대로 하는 문제 해결 중심의 교육 등, 여러 가지 제약으로 논리적 엄밀성이 결여되고 있는 실정이다.

따라서 본 논문에서는 극한과 함수의 연속성을 다루기 전 단계에서 학생들의 극한 개념 이해의 특성을 살펴본 후 실수의 중요한 성질을 고찰하고 엄밀한 이론적 정의인 $\varepsilon-\delta$논법을 중심으로 수열의 극한과 함수의 극한 및 함수의 연속성을 직관적인 방법에서 탈피하여 보다 이론적인 방법으로 증명하고, 교과서를 재구성하여 일선에서 이론적 학습이 필요한 지도교사에게는 많은 참고가 될 수 있도록 하였고, 또한 다양하고 구체적인 예제를 통하여 명확히 하도록 하였다.

* 본 논문은 2003년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

<목 차>

초록

I. 서 론 1

1. 연구의 목적 및 필요성 1

2. 연구의 주요 영역 및 내용 3

3. 연구방법 4

II. 본 론 5

1. 극한개념의 이해의 특성 5

1) 인지발달론에의한 개념이해의 특성 5

2) 극한개념 이해 및 개선 방안 6

3) 극한개념의 수학사적 고찰 8

2. 실수의 구조 및 체계 12

1) 실수의 탄생 동기 12

2) 실수계의 대수적 공리 15

3) 실수계의 순서공리 16

4) 실수계의 완비공리 21

5) 내점과 집적점 27

3. 수열의 극한 29

1) 현행 고등학교 교과서 내에서의 극한의 정의 29

2) 수열적 접근법으로서의 극한의 정의 34

3) 수열의 극한에 대한 기본성질 38
4) 수열의 수렴 발산 판정법 43
4. 함수의 극한 48
1) 함수의 극한에 관한 정의 48
2) 함수의 극한에 관한 기본정리 52
5. 함수의 연속성 59
1) 함수의 연속성에 관한 정의 60
2) 함수의 연속성에 관한 기본정리 62
3) 불연속 함수의 종류 65
4) 함수의 연속과 관련된 정리들 70
Ⅲ. 결 론 및 제 언 75
참 고 문 헌 77
＜Abstract＞ 78

<그림목차>

그림1) 수직선 13
그림2) 수열 $a_n=1+\frac{1}{n}$의 그래프 29
그림3) 수열 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$의 그래프 29
그림4) 수열 $a_n=n$의 그래프 30
그림5) 수열 $a_n=3-2^{n-1}$의 그래프 30

그림6) 수열 $a_n = (-1)^{n-1} n$의 그래프 ······ 30
그림7) 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 그래프 ······ 31
그림8) 수열 $\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$의 그래프 ······ 32
그림9) 수열 $\{(-1)^{n+1}\}$의 그래프 ······ 32
그림10) 수열 $\{2^n\}$의 그래프 ······ 32
그림11) 수열 $\{(-2)^{n-1}\}$의 그래프 ······ 33
그림12) 수열 $\{3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots\}$의 그래프 ······ 33
그림13) 수열 $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \cdots$의 그래프 ······ 33
그림14) 코오시(Cauchy)수열 ······ 46
그림15) 함수의 극한 ······ 49
그림16.17) 연속함수의 그래프 ······ 49
그림18) 연속함수의 그래프 ······ 61
그림19) 불연속 함수의 그래프 ······ 61
그림20) 극한값과 함수값이 다른 불연속 함수 ······ 62
그림21) $f(x) = |x|$의 그래프 ······ 65
그림22) 도약 불연속 함수의 그래프 ······ 66
그림23) 무한 불연속 함수의 그래프 ······ 66
그림24) 진동 불연속 함수의 그래프 ······ 67
그림25) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n+x^{n+1}}{1-x^n+x^{n+2}}$ 의 그래프 ······ 70
그림26) Roll의 정리 ······ 73
그림27) 평균값 정리 ······ 74

I. 서 론

1. 연구의 목적 및 필요성

인간의 삶이란, 그 자체가 일상에서 부딪치는 여러 가지 문제를 하나하나 해결해 나가는 것인데, 그 문제 해결의 전략을 가장 합리적이고 경제적으로 찾는 수단이 바로 수학적 접근이다. 즉, 창의적인 사고력을 개발하는데 가장 적합한 교육적 경험은 수학을 공부하는 것이다. 더구나 21C는 지식이나 정보의 양과 질에 있어서 매우 빠른 속도로 생성되고 소멸하는 정보의 시대로, 세계가 하나로 이어지는 미래 사회에 우리 학생들이 잘 적응하고 슬기롭게 대처하며 살 수 있도록, 이를 위한 교육의 변화를 요구하고 있다. 따라서 제7차 교육과정에서는 개개인의 적성과 소질을 개발하여 창의적인 사고력을 겸비한 인간을 기르는 교육을 하고자 하는 것이다. 그래서 21C의 수학은 자연과학 및 기술 개발에 없어서는 안 되는 필수적인 도구라고 교육학자 Pestallozzi는 말하고 있다[1]. 철학은 인간의 이성과 감정에 관한 현상을 표현하고 설명하는 언어인 것에 반하여 수학은 자연의 질서와 물질에 관한 현상을 표현하고 설명하는 언어이기 때문에, 크기와 정도의 차이는 있겠지만 수학적 사고방법과 문제 해결력을 키우는 것이 인간 세상을 포함한 자연 현상을 객관적으로 표현하고 이해할 수 있는 유일한 방법[2]이라고 하겠다. 합리적인 수학적 사고는 창조적인 삶을 이끌어 갈 수 있으며 수학적 사고는 미래를 예측하고 문제를 탐구하는 능동적인 활동을 할 수 있게 하는데[3] 지금의 우리 수학교육은 유클리드 식의 체계적이고 연역적이며 엄밀한 수학으로서의 측면[4], 즉 형식화된 내용을 강조하여 과정보다는 생성된 결과를 중요시하는 수업, 수학의 주제들을 단편적으로 서술하고 공리들을 무미건조한 형태로 서술하는 교과서와 문제풀이 중심의 전통적인 교수법 등 학생들에게 수학적 사고

---

1) 우정호 著. 《학교수학의 교육적 기초》. 서울대학교출판부. 1998. p23
2) 이것을 Mathematical power라고 부르기도 한다.
3) 김종명(1999) 《수학교육에서 수학사의 활용》. 대한수학교육학회. 학교수학 제1권 2호
4) 우정호 譯. 《어떻게 문제를 풀 것인가? – How to solve it : G. Polya 》. 서울. 천재교육. 1986. p6

의 참맛을 경험하게 하기보다는 학교를 졸업한 후에는 등을 돌리게 하는 수학교육이 되고 있다는 것이다. 또한 수학이란 문제를 푸는 교과이고 어려운 과목이며 단지 대학 입시를 위한 교과로만 인식되도록 하지 않았나 생각된다. 학교에서 수학을 공부하는 가장 근본적인 이유는 바로 여기에 있다고 할 수 있다. 우리 생활에서 일어나는 문제를 해결하기 위해서는 우선 그 문제에 영향을 끼치는 여러 가지 변수들을 찾아서 그들 사이의 상호 작용 관계를 분석할 필요가 있는데, 이 때 수학적 통찰력과 분석 능력이 요구된다. 현대 사회에서처럼 어떤 현상의 변화나 미래를 예측하는데 관련되는 요인이 엄청나게 많은 경우에는 더욱 효과적이고 경제적인 문제 해결 방법이 필요한데, 여기서 해석학적 접근 방법이 매우 효과적이다. 해석학(解析學; analysis)은 글자 그대로 '무엇을 가르고(解) 쪼개서(析) 그 뜻을 헤아리는 것'으로서, 대수적 계산(algebra)과 미적분(微積分; calculus)을 포함하는 수학적 방법론(Methodology)을 말한다. 특히, 중등학교 교육과정에서 해석학의 범주에 들어갈 수 있는 영역은 함수, 측정, 극한과 연속성, 미분, 적분 등이다. 그 중에서 또한 문제의 분석 과정에서 요구되는 엄밀하고 정교한 근사적 추론(asymptotic approximation) 방법은 바로 극한(極限; limit)을 공부함으로써 얻을 수 있다.

현대 수학을 대표하는 핵심 개념의 하나인 수학적 극한 개념은 무한 근사 과정의 최종 산물을 수학화한 개념으로, 함수에 대한 지식을 확장시켜 주고, 현대 수학에서 핵심적인 역할을 하는 무한개념 및 무한개념을 기초로 하는 다른 많은 개념을 이해하는 데에 토대가 되어주는 개념이다.

특히, 극한 개념은 인류가 이룩한 위대한 지적 성취의 하나이며 수학의 유용성을 잘 보여주는 미・적분학의 기초가 되는 개념으로, 미적분 개념의 이해는 극한 개념의 이해에서 시작된다고 말을 할 수 있다. 오늘날 미・적분학이 수학뿐만 아니라 물리학・생물학 등과 같은 자연과학 및 공학 분야, 경제학・심리학을 비롯한 사회과학 분야에 널리 응용되는 기본적인 도구적 지식으로서 이들 분야에 입문하는 데에 필수적인 지식이라는 점에서 이런 분야로 진출하려는 학생들에게 그 기초 개념인 극한 개념에 대한 정확한 이해는 필수적이다. 이와 같이 극한 개념의 정확한 이해의 필요성에도 불구하고 학생들의 빈약한 이해 상황은 학습지도에 교사들의 보다 많은 관심과 교수학적 노력이 필요함을 말해주고 있다. 따라서 극한과 함수의 연속성을 다루기 이

전에 실수의 중요한 성질을 고찰해 본 다음 좀 더 엄밀한 이론적 정의를 써서 직관적인 방법과 비교 분석하여 극한 및 함수의 연속성에 대한 개념을 명확히 이해시킴으로써 단편적인 지도상의 문제점을 극복하고 보다 바람직한 수학교육의 질적 향상을 기하고, 아울러 효율적인 지도 방법을 모색하는데 이 연구의 목적이 있다.

2. 연구의 주요 영역 및 내용

Piaget의 수학개념의 발달이론에 의한 극한 개념의 이해의 특성과 극한 개념의 이해 개선을 위한 학습지도 방향을 고찰 한 후 극한 개념을 이해하는데 기초가 되는 실수에 대하여 고찰한다. 실수의 엄밀한 정의는 무엇인가. 중, 고등학교에서 배운 실수의 직관적 개념은 주로 기하학을 바탕으로 형성되어 있으나 대수적으로 재구성 할 수 있을 것이다. 학생들은 오랫동안 실수에 대한 직관적 개념이 고착되어 있다. 현행 고등학교에서 순서체란 용어는 사용하지 않지만 다루고 있다. 즉 공식적으로 이것을 명시화하지 않고 단지 직관적으로 이해하도록 되어 있다. 그런데 일부 교과서는 이 공리 또는 이와 동등한 공리를 슬쩍 넣은 교과서도 있다. 초, 중학교에서 직관적으로 배운 수직선이 고등학교에서는 어느 정도 대수적으로 취급된다. 이 때 실수의 순서구조가 도입된다. 실수의 순서구조란 실수의 부분집합으로서 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있는 집합 P가 존재한다는 것을 의미한다. 그러면 최소상계의 성질에 대해서는 어떻게 소개하고 있을까? 논의하기 앞서 이 공리를 취급하지 않으면 극한에 관련된 여러 가지 주제를 취급할 수 없게 된다. 따라서 고등학교의 수학에 극한을 포함하는 단원은 어떤 면에서 보면 사상누각이 된다. 이와 같이 실수의 순서구조를 고찰 한 후 마지막으로 완비구조라는 고등학교에서는 접근할 수 없었던 개념을 다룬다. 이 개념은 학생들이 주로 상징적 지식의 형태로 주어진다. 이 문제는 1과 0.9999...가 같은가라는 문제로 시작한다. 수열이라는 도구를 이용하면 실수의 구조가 명쾌하게 나타난다. 이어서 수열과 함수의 극한 및 함수의 연속성에 관한 기본 개념을 직관적인 방법과 엄밀한 이론적 정의에 의하여 비교분석하고 몇 가지 예제를 들어 증명함으로써 좀 더 확실히 알고자 한다. 즉 2-3절에서는 수열의 극한에 관하여 현행 고등학교 교

과서 내에서의 극한의 정의로서 그래프를 이용한 극한의 직관적인 방법으로 수렴과 발산을 살펴본 후 수열적 접근법으로서의 정의인 ε-δ논법에 의한 극한을 정의하고 필요한 정리들과 예제를 통하여 개념을 명확히 한 후 수열의 극한에 대한 기본성질들을 다루어 간다. 2-4절 함수의 극한에서는 함수의 극한에 관한 정의 및 수열적 접근법으로서의 함수의 극한과 수학적인 정의인 ε-δ논법에 의한 극한의 정의를 살펴본 후 함수의 극한에 관한 기본 정의 및 정리 그리고 다양한 예제를 살펴본다. 또한 2-5절의 함수의 연속성에서는 현행 고교과정에서의 연속함수의 정의와 해석학에서의 연속함수의 정의를 비교 분석 할 수 있다. 최종적으로 불연속 함수의 종류를 고찰한 후 함수의 연속과 관련된 정리들을 살펴 볼 수 있다.

3. 연구방법

극한의 개념은 그 성립과정을 살펴보면 알 수 있듯이 그 자체가 여러 가지 갈등요소를 지니고 있으며 다양하고 복잡하게 응용되기 때문에 개념습득이 매우 어려운 것으로 인식이 되고 있다. 게다가 극한의 형식적인 정의는 인간의 자연스런 사고 과정과는 약간 다른 사고를 필요로 하기 때문에 학습에 곤란을 일으키는 경우가 종종 있다. 고등학교에서 극한 개념을 토대로 함수의 연속성과 나아가서 미적분을 다루고 있으나 극한의 엄밀한 이론적 정의는 매우 어려워서 고등학교에서는 극한에 관한 대부분의 기본 성질을 상식적으로 다루고 있을 뿐 그 결과만을 직관적인 방법에 의존하고 있는 실정이다. 즉 해석학보다 형식적인 정의에 너무 중요성을 부여하고 있다. 그래도 학생들은 연습문제를 풀거나 문제를 해결하거나 시험에 합격하는데 방해를 받지 않아 대다수의 학생들은 극한에 대한 개념을 고급학년에 올라가서 조차 완전하게 습득하지 못하고 있다. 극한과 함수의 연속성과의 관계를 참고문헌 및 선행 연구와 고등학교 교과서를 중심으로 고찰하고, 단편적인 지식 축적과 직관적이고 결과 위주의 지도로서 응용에만 치중했던 극한 개념을 논리적인 차원에서 고찰하고 구체화하여 직관적인 방법과 엄밀한 이론적 정의를 비교 분석 하고자 한다.

II. 본 론

1. 극한 개념의 이해의 특성

1) 인지발달론에 의한 개념 이해의 특성

극한 개념은 해석학의 이론적 바탕을 이루는 기초 개념이며 고등수학에 필요한 전형적인 수학적 사고 가운데 하나이다. 실수의 구조, 근사법, 연속성, 미분가능성이나 적분가능성 등은 모두 극한의 개념을 바탕으로 정립된다. 따라서 극한 개념은 해석학 이론에서 중심적인 위치를 차지하고 있으며 극한에 대한 명확한 개념이 확립되지 않고는 해석학 이론에 대한 온전한 습득이나 적절한 응용을 기대 할 수 없다.[5)]

개념의 이해에 대한 금세기 최고의 아동발달 심리학자이며 구성주의[6)] 학자인 Piaget[7)]의 인지적 세마와 균형이론에 의하면, 인간에게는 행동과 조작의 일반적인 양식인 인지적 세마가 존재한다. 이 인지적인 세마는 환경과의 상호작용 즉 순응에 의해 재조직되고 발달된다. 이 순응에는 기존의 인지구조에 종속시키는 동화와 기존의 인지구조를 문제에 맞게 수정 및 개선하는 조절이 있다. 즉 인간은 자신의 인지구조와 환경과의 부단한 상호작용(동화와 조절)에 의해 보다 유연하고, 포괄적인 인지구조를 구성함으로써 환경과의 보다 나은 균형을 이룩한다고 하고 있다.

학생들이 극한 개념을 이해하지 못하는 원인은 세 가지 측면에서 생각할 수 있다. 첫째는 새로운 개념과 관련되는 선행 지식을 갖고 있지 않은 경우이고, 둘째는 기존 지식과 새로운 지식 사이의 간격이 너무 큰 경우이며, 이때는 새로운 개념을 기존의 지식과 연관된 구조를 형성시키기가 어려워지므로 새로운 개념을 어려워하게 되거

---

5) 김인수(1997) 「해석학의 기초개념과 학습지도」, 전남대학교 출판부, P.160.

6) http://www.didache.or.kr/info/develop/dp-4.htm

① 대표적인 구성주의 학자 : 피아제

② 지식이나 논리구조는 학습자가 머리 속에서 여러 가지 현상과 사실을 토대로 능동적 상호작용을 통해 구성 또는 구조화한다고 주장하는 이론.

③ 인간의 지식발달이 동화와 조절의 보완적인 과정에 의해 이루어진다고 보는 이론.

7) 1896년 스위스의 Neuchatel에서 태어난 Jean Piaget(1896-1980)

나, 기억했다가 곧 잊어버리거나 왜곡하여 기억하게 될 수 있다. 이럴 경우는 학생들에게 선행 개념을 재 형성시켜주거나 둘 사이의 간격을 좁혀 줄 수 있는 중간 단계를 지도해 주는 것이 필요할 것이다. 셋째는 기존 개념과 새로운 개념이 서로 갈등을 일으키는 경우, 즉 기존의 지식이 그 때까지 관련된 학습에서는 유용한 지식이었지만 새로운 문제 상황에서는 부적합한 지식, 즉 새로운 개념과 갈등을 일으키는 지식인 경우가 있다. 이와 같이 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용했던 지식으로 학생의 인지 구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제 상황에서는 부적합한 선행 학습으로 인한 인지적 장애를 갖고 있는 경우를 들 수 있다. 이 경우에는 장애가 되는 기존의 인지 구조가 조절되어야 새로운 개념을 받아들일 수 있는데, 그와 같은 기존의 인지 구조의 조절은 쉽지 않다. 이미 기존 지식의 유용성과 성공 경험을 맛봄으로써 그것에 대한 확신을 갖고 있기 때문에, 기존의 인지 구조를 변화시킬 필요성을 못 느끼게 된다. 그런 경우에 학생들은 자신의 기존의 인지 구조를 변화시키기보다는 기존 지식을 변화시키지 않은 채, 새로운 지식에 대한 왜곡된 개념 이미지를 형성하거나 기존의 지식과는 별개의 개념 이미지를 형성하고 있다가 문제 상황마다 서로 다른 개념 이미지를 불러일으킬 수 있다. 심한 경우에는 새로운 지식을 거부할 수도 있다. 따라서 이러한 인지적 장애는 학생들이 새로운 지식과 갈등을 일으키고 학생들이 새 지식을 받아들이는 데에 필요한 적절한 조절을 하는 것을 방해하는 요인이며 새로운 개념을 이해하는 데에 어려움을 겪게 하는 주요 원인이 된다.[8] 이런 경우 기존의 지식이 작용하지 않는 상황을 학생에게 제시하여 인지적 갈등을 일으키고 장애를 의식하게 하여 개념을 수정하고 재구성하도록 해야 한다.

2) 극한 개념의 이해 및 개선 방안

극한 개념의 지도를 어렵게 만드는 주요 요인들 중에 극한 개념의 다양성, 풍부함, 복잡성, 그리고 인지론적 장애 등이 있다. 그 중 인지론적 장애는 학생이 개념에 대하여 지니고 있는 지식의 일부로, 어떤 상황에서는 잘 작용하지만 잘못 작용하거나

8) 박선화(1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 교육학 박사학위 논문. 서울대학교 대학원

모순이 되는 상황도 가진 불완전한 지식이다. 그러므로 처음에 형성된 불완전하고 잘못된 지식을 무너뜨리고 새로운 상황에서 만족스럽게 작용하는 새 개념으로 대체하도록 하는 것이 교육이다.[9] 학생들에게 있어서 극한 개념은 초등학교 때 배운 원의 넓이나 중학교에서 배운 순환소수, 무리수 개념 등과 같이 선행학습으로 이미 초등학교에서부터 극한 개념을 기초로 하는 표현들인 "점점 더 가까워진다", "한없이 커진다", "한없이 가까워진다", "끝없이 계속된다"와 같은 개념들을 접해 본 적이 있고, 부분적으로 관련된 개념들을 학습하여 왔었다. 그리고 고등학교부터는 그 개념이 공식적으로 가르쳐지기 시작하고, 이것들로부터 극한 개념을 조직 할 수 있다. 따라서 극한 개념을 배우기 시작하는 많은 고등학교 학생들이 극한 개념의 이해에 어려움을 겪는 원인은 첫째와 같이 관련된 선행지식이 없기 때문이라기보다는, 둘째인 기존의 지식과 적절히 연결 관계를 맺지 못했거나, 셋째인 학생들이 극한 개념과 갈등을 일으키는 선행 지식, 즉 인지적 장애를 갖고 있기 때문으로 볼 수 있다. 따라서 극한 개념의 이해 개선을 위한 첫 번째 방안은, 극한 개념을 받아들이는 데에 적절한 토대를 학생들에게 형성시키는 것이 필요하다는 것이다.

두 번째 방안은 무한 개념의 이해 개선을 위한 학습지도가 필요하다는 점이다. 이것은 모두 유한 체계에 적합한 우리의 인식의 한계에서 비롯되는 것이다. 무한 개념에서 비롯된 학생들의 오류를 교정하기 위해서는 먼저 학생들의 무한 개념을 분명하게 의식하게 하는 것이 필요하다.

마지막 방안으로 본 논문에서 시도할 직관적인 극한 개념에 대한 보완적인 지도가 필요하다는 점이다. 극한 개념에 대한 인지적 장애의 중요한 유형 중의 하나가 극한 개념을 구성하고 있는 요소들에 대한 비수학적인 개념이다. 대표적인 예가 극한 개념과 관련 있는 일상적 표현의 비수학적인 의미와 비수학적인 무한 개념이다. 고등학교에서 지도되는 직관적인 극한 개념은 일상적 표현을 사용하여 정의되고 있다. 학생들의 장애의 중요한 특징 중의 하나가 직관적 정의에서 비롯된 잘못된 개념을 많이 갖고 있다는 점이다. 직관적 정의의 한계에서 비롯된 오(誤) 개념의 극복은 그러한 한계를 넘어서는 방법이 도입되지 않고는 극복되기 어렵다. 직관적 정의의 한계를 보완하고, 좀 더 엄밀한 수준의 정의에 가깝게 다가가면서도 학생들의 인지적 측면을 고

9) 김인수(1997) 「해석학의 기초개념과 학습지도」, 전남대학교 출판부, P.179.

려하는 방법으로서, 학생들에게 정의의 형태는 직관적 정의 형식으로 제시하지만 그 정의의 수학적 의미를 분명하고 정확하게 설명하는 방법을 생각할 수 있다. 즉, 학생들에게 직관적 정의를 가르칠 때 모호한 '한없이 가까워진다'는 일상적 표현만 제시하는 것으로 그치지 말고 그것이 수학적으로 의미하는 바를 분명하게 설명해주는 것이 필요하다고 생각된다. 그러한 표현은 '두 수의 차가 0으로 줄어든다', '수열과 극한값 사이의 차가 원하는 만큼 얼마든지 작아질 수 있다', '극한값을 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 유한개의 항을 제외한 나머지 모든 항은 그 구간 안에 들어온다'는 것임을 학생들에게 알려주고, 학생들이 '한없이 가까워진다'는 일상적 표현을 수학적 의미로 생각할 수 있도록 스스로 자신의 사고를 제어할 수 있게 지도하는 것이 필요하다고 생각된다. 특히 근방 개념은 수직선 위에서 극한 개념을 특징적으로 잘 보여주면서도 엄밀한 극한 개념과 조화되는 개념이므로, 수열의 극한을 나타내는 수직선 모델과 관련시켜 학생들에게 분명하게 설명해주는 것이 필요할 것으로 생각된다. 특히 이 개념은 학생들의 관심의 초점을 극한값에 두고 극한값과 수열의 항의 값이나 함수 값 사이의 관계를 잘 보여줄 수 있다. 또한 극한 개념에서 중요한 것은 학생들은 수열이 극한값으로 가까워지는 극한 과정뿐만 아니라 극한값을 중심으로 수열을 바라보는 태도를 갖게 하는 것이 필요하다. 극한 개념에서 이 측면, 즉 과정을 중심으로 생각하는 것과 대상을 중심으로 생각하는 것은 매우 중요하고, 널리 응용되는 성질이므로, 두 개념이 자유롭게 서로 교환되면서 떠올릴 수 있도록 강조해서 지도하는 것이 필요하리라 생각된다.

3) 극한 개념의 수학사적 고찰

유클리드(Euclid ; 330?～275? B.C. 그리스)의 「기하학 원본」13권 중, 제11권에서 제13권까지는 입체기하학이 수록되어 있다. 여기에는 사면체, 원기둥, 원뿔, 구 등의 기본적인 도형의 부피를 구하는 데 극한을 이용하고 있다. 유클리드는 두 원에 내접하는 닮은 정다각형의 넓이는 지름의 제곱에 비례한다는 것을 확인하고, 원에 내접하는 정 2^n각형의 계열로서 원의 넓이를 구할 수 있다고 생각하였다. 또한 극한을 사용하여 원의 넓이도 지름의 제곱에 비례한다는 것을 모순법으로 증명하였다.

이러한 방법은 아르키메데스(Archimedes ; 287?～212B.C. 그리스)가 도형의 넓이

나 부피를 계산하기 위하여 사용하였고, 그 후에도 많은 수학자들은 아르키메데스의 방법을 검토하여 무한소 해석(infinitesimal calculus)으로 발전 시켰다. 유한의 생각이 우리 인간의 경험적 개념이라면, 무한에 대한 생각은 선험적 능력이며 우리의 관념의 영역을 한층 넓히게 하는 개념이라 할 수 있다. 이 생각은 고대 그리스 시대부터 그 시작을 찾아 볼 수 있다. 수의 아름다움과 수학이 설명해 주는 우주의 모습에 흐뭇했던 피타고라스는 수의 세계에서 무리수라는 존재를 발견하고 너무 놀랐고 이를 극비에 부칠 것을 종용하였다. 소크라테스[10] 시대 때, 한 학파를 형성한 파르메니데스의 제자 제논은 역설 네 가지[11]를 만들어 당시 학자들의 입을 막았다. 겨우 입을 연 아리스토텔레스는 실재적 무한과 과정적 무한으로 개념을 이분하여 학문상에 인정되는 무한개념을 과정적 무한으로 제한시켜 이 역설을 피해 나가려 했다.

당시 알렉산드리아라는 학문적 중심지를 벗어난 시라큐스의 수학자 아르키메데스는 유한주의의 학풍에 벗어나 무한의 세계의 문을 열어갔다. 원추 곡선이 그리는 면적을 계산하였는데, 이것이 구적법의 시초라 볼 수 있다. 플라톤 학파의 에우독소소는 실진법을 통해 무한이 일으키는 무리한 소동을 잠재우려 하였다.

무한의 개념이 중세를 거쳐 사회 전반으로 확산되어 갔는데, 이는 기독교에서 신의 존재를 증명하려는 성직자들의 노고이다. 유한한 인간의 세계에서 신의 존재를 무한으로 설명하려는 의도에서였다. 유클리드의 유한하며 정적인 세계가 데카르트에 의해 해석 기하학으로 금이 가기 시작하더니, 뉴턴 시대에 이르러 운동을 설명하려는 움직임이 학계와 사회에 만연되었다. 뉴턴이 유율법을 만들어 이를 설명하였고 이 미분적분의 효용성은 많은 학자들을 매료 시켰다. 그 동안 풀리지 않았던 문제들을 해결해 주었고 자연현상을 이해하는 데 운동을 포착하지 않으면 안되었기에 신진 물리학자들이 대거 등장하며 미적분이 100년 간 유럽을 활기차게 만들었다. 또 이 때 시작된 미분 방정식은 자연세계의 질서를 한가지씩 모델화 하여 수식으로 명료하게 설

10) Socrates (470~399 B.C 그리스철학자) 소크라테스 및 그의 일파는 수학을 논리적으로 엄밀하게 할 것을 주장했다.
11) Zenon (490~429 B.C.) 한 점에서 한 점까지 가는 데는 먼저 중점을 지나야하므로 결국 종점에 도달할 수 없고, 아킬레스는 거북을 따라잡을 수가 없고, 화살은 날고있으나 힘이 주어진 순간을 생각하면 정지하고있다.

명되게 만들 수 있었다. 예를 들자면 뉴턴은 17세기에 인공위성이 지구궤도를 돌려면 어떻게 하여야 하는지를 계산해 냈다. 그러나 이 미적분은 기초가 없었다. 이로 인해 곧 많은 모순들이 쏟아져 나왔고 이를 해결할 필요가 있었다. 뉴턴은 막연하게 접근으로 극한의 개념을 대신하였다. 이에 코시는 엄밀한 극한의 정의를 도입하였다. 이로 인해 수학은 한층 더 견고한 토대 위에 설 수 있게 되었다. 바이어스트라스는 이 극한 개념을 바탕으로 그 동안 계속되어 온 무리수에 대한 논의를 매듭짓고 실수 체계를 확립하였다.

결론적으로 말하자면, 무한개념으로 극한 개념이 성립되고 이는 미적분의 논리적 근거가 되었다. 17세기에는 무한소 해석은 이론적인 면보다는 계산적인 면이 앞서있었고, 계산 면에서 많은 업적을 이룩하였다. 이러한 경향은 18세기에 들어와서도 오일러(Euler,L. ; 1707~1783,스위스), 라그랑주(Lagrange,J.L ; 1736~1813,프랑스)등에 의해서 극한 개념에 대한 연구가 진행되었으나, 이론적인 면의 후진성을 극복하지는 못하였다.[12] 무한소 해석의 중심개념은 극한이다. 무한소(infinitesimal)와 관련된 여러 결과는 극한 개념에 의존하고 있는 것이다. 18세기에는 아직도 논리적인 바탕이 빈약하였기 때문에 무한소 해석은 수학에 있어서 하나의 독립된 분야를 차지하지 못하고 있었다. 무한소 해석이 수학의 독립된 분야로 발전하기 위하여 극한값의 정의, 극한값을 구하는 방법, 극한값을 계산할 수 있는 수학적인 식과 그의 기호화를 해결하지 않으면 안 되었던 것이다. 1754년 달랑베르는 극한 이론이 필요하다는 것을 지적하며 불완전한 해석학의 기초에 대한 실제적인 구제책을 처음으로 제시하였고, 19세기에 이르러 극한 개념이 수학적으로 엄밀하게 정의된 것은 코시(Cauchy)에 의해서 이다. 그는 해석학 강의(Cours d′analyse de l′Ecole Polytechnique, 1821)에서 연속 함수를“어떤 변수의 값들이 우리가 원하는 만큼 어떤 수와의 차가 작아질 때, 그 수를 극한이라 부른다.”[13]라고 극한을 정의하였고, 이러한 극한 개념을 이용하여 함수의 연속성을 정의하였는데, 그는 함수의 무한히 작은 증분 $f(x+a)-f(x)$ 가 a 의 무한히 작은 증분 a 와 함께 한없이 작아 질 때, 함수 $f(x)$ 를 변수 x 의 연속함수라 불렀다. 그는 과거의 수학자들이 함수의 극한이 존재한다는 충분한 근거로서

12) 고등학교 수학 2 박두일 신동선 교학사 1991년
13) 김인수(1997) 「해석학의 기초개념과 학습지도」, 전남대학교 출판부, P.173.

기하학적인 명백한 연속성을 이유로 들었던 것과는 달리 극한이라는 개념을 써서 연속성을 정의하였다. 그는 극한 이론을 바탕으로 연속성뿐만 아니라, 미분가능, 정적분을 정의하였다. 또, 이 극한 개념은 무한급수의 수렴과 발산문제를 해결할 수 있는 기초가 되기 때문에 해석학의 발전에 필수 불가결한 것이었다. 그러나 바이어슈트라스와 리만에 의해 극한 개념으로 설명할 수 없는 반례가 제시되면서 코시에 의해 발전된 극한 개념도 극한의 진정한 문제점까지는 다루지 못하고 있다는 사실이 밝혀지게 되었다. 이러한 문제의 근원은 극한 개념이 실수계의 단순하고 직관적인 개념 위에 건설되었기 때문인데 실제로 그때까지 실수계는 엄밀하게 정의되지 않고 대강 당연하다고 여겨져 왔다. 극한, 연속성, 미분 가능성에 대한 이론은 가정되어 왔던 것보다 더 깊이 숨겨진 실수계의 성질에 의해 좌우된다는 사실이 밝혀지면서 해석학의 모든 분야에 앞서 실수 체계의 엄밀화 작업이 선행되어야 한다는 인식이 확산되어 바이어슈트라스와 그의 제자들에 의해 주도된 실수 체계의 엄밀화 작업은 “해석학의 산술화”라고 불리는 주목할 만한 프로그램을 통해 성취되었고, 이로 인해 오늘날 모든 해석학의 이론은 실수계를 특징짓는 공준 집합으로부터 논리적으로 이끌어 낼 수 있다. 사실상 오늘날 존재하는 모든 수학은 본질적으로 실수계가 무모순이면 무모순이라고 말 할 수 있을 정도로 수학의 기초에 대한 실수계의 중요성이 존재한다.

요약하면, 20세기 초에 이르러 완전한 모습을 갖추게 된 실수 체계(연산공리와 연속성공리)가 성립되기까지는 근 2000년이 걸렸다.

1. 기하학과 대수의 만남-해석학(데카르트, 16세기)이 성립되고,

2. 극한 개념의 도입과 정착[14]되며 해석학의 산술화[15]가 이루어지고

3. 칸토에 의해 무한의 개념이 수학의 영토 위에 확실하게 자리잡고, 집합이 도입된 후에야 비로소 실수계가 확립되고 이를 추상화하는 작업을 통해 현대 수학이 꽃피게 되었다.

14) 볼차노(Bolzano,B.;1781～1848,체코)와 코오시(Augustin-Louis Cauchy;1789- 1857 , 프랑스)에 의하여 극한 개념을 수학적 표현으로 정착시키다.

15) 바이어슈트라스

2. 실수의 구조 및 체계

1) 실수의 탄생 동기

현대 수학에서 실수는 그 개념이 명확하게 세워져 있지만 실수의 개념이 모호했던 고대나 근대의 수학자들은 막연히 실수의 존재만 확인할 수 있었을 뿐 그 수를 실수라고도 부르지 않았고 또한 실수가 가진 성질을 정확히 제시할 수 없었다.

지금 사람들은 실수가 무리수와 유리수의 두 부류로 나눌 수 있다는 것을 알고 있었지만 고대의 사람들은 모든 수가 적당한 정수의 비로 나타낼 수 있었다고 믿었었다. 즉 유리수만을 생각할 수 있었다. 이와 관련되어 기원전 5 세기경 피타고라스 학파의 히파수스(Hippasus)는 정사각형의 대각선의 길이인 $\sqrt{2}$배가 두 정수의 비로 나타낼 수 없음을 알게되어 이를 알리던 중 죽게 되었다.

따라서 실수의 탄생이라고 불러야 할 시점은 실수의 개념을 명확하게 제시했던 19 세기 경으로 보아야 할 것이다. 이 당시 데데킨트(Dedekind) 와 코시(Cauchy) 등이 유리수로부터 실수를 구성해 내었고 이로 인해 실수가 가지는 성질 중 중요한 연속성과 완비성에 대한 명확한 개념이 자리잡게 되었다. 따라서 실수의 탄생 동기는 실수가 가지는 성질 중 연속성과 완비성에 대한 직관적인 해석으로부터 벗어나기 위한 노력에서 일 것이다. 특히 바아어슈트라스(Weierstrass)가 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선이 있다는 것을 발견한 이후 그 당시의 수학자들은 극한, 연속성, 미분 가능성을 연구하기 위해서는 직관적으로 받아들였던 실수의 성질을 좀 더 엄밀하게 다루어야 할 필요가 있었다. 이에 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 엄밀하게 전개하고 그 다음에 해석학의 모든 기초적인 개념을 실수 체계로 부터 유도하자는 계획을 주장하였고, 이 계획은 해석학의 산술화라고 불려지게 되었다. 그 이후 두 가지 방향으로 계획이 이루어지게 되었는데 하나는 실수 자체가 가진 고유한 성질을 생각하여 공리적으로 접근하는 방법이고 또 다른 방법은 데데킨트나 코시, 칸토르와 머레이(Meray) 등에 의해 유리수로부터 실수를 구성하는 것이었다.

따라서 해석학을 공부하는데 가장 기본이 되는 극한 개념은 실수의 집합과 그 위에 정의된 함수에 바탕을 두고 있으므로 실수의 성질이 매우 중요한 역할을 하고 있

다.

실제적인 측정이나 계산에서는 분수나 소수, 즉 유리수만 가지고도 충분하다. 무리수를 숫자로 쓰면 (즉 소수로 표현하면) '순환하지 않는 무한소수' 가 되므로 정확히 쓸 수 없다. 따라서 무리수는 $\sqrt{\ }$ 나 π 와 같이 기호로 밖에 나타낼 수 없으며, 그것들을 가지고 계산한 결과는 $\sqrt{2}+1$ 이나 3π 와 같이 하나의 수인데도 불구하고 식처럼 써야 한다. 우리가 실수를 친숙하게 느끼는 것은 바로 초등학교에서부터 수학시간에 계속 사용해 온 '수직선' 때문이다. 수학의 이곳 저곳에서 워낙 반복적으로 수직선을 사용하다 보니 우리의 의식 속에는 "수는 곧 수직선" 이라는 이미지가 단단히 자리잡고 있다. 따라서 중학교 이상에서 수학을 공부한 학생들은 물체의 길이는 실수라고 생각한다. 그 이유는 중학교에서는 수직선 위에 유리수를 모두 표시해도 빈틈이 남으며, 그 빈틈에 해당하는 수(무리수) 까지 포함하는 수의 집합을 '실수' 라고 부르기 때문이다. 그래서 "수는 곧 수직선" 이라는 이미지는 "수직선은 곧 실수의 집합" 이라는 좀 더 세련된 이미지로 바뀐다. 예를 들면

직선 상에 서로 다른 두 점 O, P를 선택하고 고정하자.

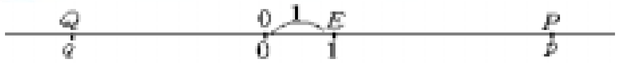


그림1)

직선 상에 임의의 점 P 를 생각하자. 선분 OE를 단위 길이로 선분 OP의 길이를 계산할 수 있다. 즉, 점 P에 실수 p가 대응함을 알 수 있다. 점 P가 위 그림과 같이 점 O를 기준으로 점 E와 같은 방향이면 양수를 대응하고, 반대 방향이면 음수를 대응시키자. 그러면 직선 상의 각 점은 실수 p의 원소로 대응됨을 알 수 있다. 이 때, 실수p 는 점 O를 원점, 점 E를 단위 점으로 한 점 P의 좌표가 된다.

역으로, 하나의 실수 x 를 취하면 좌표가 x 인 점이 유일하게 존재한다고 인정하게 된다. 이것이 실수에 관한 연속성의 공리이다. 수직선이란 직선 상에 모든 실수를 일대일로 대응한 좌표 계를 말한다. 수직선은 각 점이 실수로 취급되므로 실수에서의 연산, 순서관계 등 많은 편리한 성질을 직선 상에 적용할 수 있어 매우 편리하다. 따라서 실수란 직선 위의 점과 점의 관계를 이해하고 해석하기 위하여 도입한 수 체계

임을 알 수 있다. 앞으로 우리는 실수의 전체의 집합과 수직선을 같은 것으로 취급한다. 그런데 수직선과 실수를 동일한 것으로 본다면 한 가지 중요한 성질에 착안하지 않을 수 없다. 수직선 위에 모든 실수에 대응하는 점들을 찍으면 직선 위에는 빈 곳이 없게 된다. 연필을 종이에서 떼지 않고 '연속적으로' 주욱 그려 나가도 연필이 지나가는 모든 위치에 실수들을 크기 순서대로 대응시킬 수 있는 것이다. 이것이 유리수가 갖지 못한, 실수의 특이한 성질이고 이런 성질을 가리켜 '실수의 연속성' 이라고 하기도 하지만 다른 중요한 용어와 혼동될 수 있으므로 '완비성'(completeness) 이라고 한다. 이 말은 빈틈이 없음을 뜻하는 말이다.

실수의 집합을 보는 관점에 따라서 어떤 경우는 완비라고 하고 또 다른 경우는 연속이라고 하는데 두 가지 모두 옳은 표현이다. 연속이라고 할 때는 집합의 크기라는 관점이고 완비라고 하는 것은 집합의 순서의 관점에서 본 것이다.

집합론에서 보면 집합의 원소의 개수에 관한 농도 이론과 원소들 간의 순서관계를 논하는 순서 이론이라고 한다. 실수를 연속이라고 할 때는 연속체라는 말에서 유래한 것이며, 연속체라고 하는 것은 칸토어에 의하여 생겨났는데 자연수의 집합보다 더 큰 집합들 중에서 가장 작은 집합이다. 즉 실수의 집합을 이야기하는 것이다. 칸토어는 실수의 집합의 크기와 자연수의 집합의 크기 사이에 존재하는 집합은 없다고 가정하였고, 이것을 연속체 가설이라고 한다. 이와 같이 초・중학교에서 직관적으로 배운 수직선이 고등학교에서는 어느 정도 대수적으로 취급된다. 즉 초・중학교에서 배운 실수의 직관적인 개념은 주로 기하학을 바탕으로 형성되어있으나 해석학에서는 대수적으로 재구성을 하고 있다. 학생들은 연산의 닫힘의 성질에 따라 수의 개념이 자연수, 정수, 유리수, 실수의 순으로 확장된다는 것을 어느 정도 배웠고 따라서 실수의 사칙연산과 그에 관한 성질은 이미 알고 있다. 여기서는 극한의 개념에서 가장 중요한 실수의 몇 가지 성질들과 그에 필요한 용어들을 살펴보려고 한다. 일반적으로 실수는 다음 두 가지 방법으로 정의하고 있다. 하나는 유리수의 집합에서[16] "데데킨트(R.Dedekind)의 절단(cut)"을 이용하여 무리수를 정의하여 유리수와 무리수를 실수라고 정의하는 방법이고, 또 하나는 실수계를 공리적 방법으로 정의한 다음에 실수계

16) 유리수(rational number)={ $\frac{a}{b} \mid a, b \neq 0$ 는정수}

의 부분집합의 원소로서 양의정수, 정수, 유리수, 무리수를 정의하는 방법이다. 여기서는 후자를 이용하고자 한다.

실수의 구조는 대체로 대수구조, 순서구조, 완비구조로 파악 할 수 있다.

2) 실수계의 대수적 공리

공리1. 이항연산 "+"가 존재 한다. 곧 각 $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에 대하여 $a+b \in \mathbb{R}$ 가 하나씩 대응한다[17].

공리2. 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \text{(덧셈의 결합법칙)}$$

공리3. 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$a+b = b+a \qquad \text{(덧셈의 교환법칙)}$$

공리4. 임의의 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$a+0 = a = 0+a \qquad \text{(덧셈의 항등원)}$$

을 만족하는 $0 \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.[18]

공리5. 각 $a \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$a+(-a) = 0 = (-a)+a \qquad \text{(덧셈의 역원)}$$

인 $-a \in \mathbb{R}$ 가 존재한다.[19]

공리6. 이항연산 "·"이 존재한다. 즉 각 $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에 대하여 $a \cdot b \in \mathbb{R}$ 가 하나씩 대응한다[20].

공리7. 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

---

17) 공리1)에서의 이항연산 "+"을 덧셈(addition)이라 한다. 공리1)은 집합 $\mathbb{R}$ 이 덧셈에 대하여 닫혀있음을 의미하고, $x+x=2x$ 로 나타낸다.

18) 공리4)에서 $0 \in \mathbb{R}$ 을 덧셈에 대한 항등원이라 하고, 영(zero)이라고 부른다.

19) 공리5)에서 $-a \in \mathbb{R}$ 를 a의 덧셈에 대한 역원(inverse)이라고 하고. $a, b \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $a+(-b)$를 $a-b$ 로 표시한다.

20) 공리6)에서의 이항연산 "·"을 곱셈(multiplication)이라 한다. 공리6은 집합 $\mathbb{R}$ 이 곱셈에 대하여 닫혀있음을 의미하고 $x \cdot y = xy$ 로 나타내고 특히 $x \cdot x = x^2$ 으로 나타낸다.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \text{(곱셈의 결합법칙)}$$

공리8. 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{(곱셈의 교환법칙)}$$

공리9. 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \qquad \text{(곱셈의 항등원)}$$

을 만족하는 $1(\neq 0) \in \mathbb{R}$이 존재한다.[21]

공리10. $a \neq 0$인 각 $a \in \mathbb{R}$에 대하여

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a \qquad \text{(곱셈의 역원)}$$

을 만족하는 $a^{-1} \in \mathbb{R}$가 각각 존재한다.[22]

공리11. 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$에 대하여

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{(덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙)}$$

공리1～공리5 를 만족하는 집합을 ***가환군***(commutative group)이라 하고, 공리1 ～ 공리11을 모두 만족하는 집합을 ***체***(field)라고 한다. 따라서 실수의 집합은 덧셈에 대하여 가환군이고, 덧셈과 곱셈에 대하여 체이다.

특히 곱셈 $x \cdot y$ 를 간단히 xy로 나타내고, 특히 $x = y$ 인 경우 $x \cdot x$를 x^2 으로 나타낸다.

3) 실수계의 순서공리

실수의 집합은 최소상계 성질을 만족하는 순서체(ordered field)로 정의한다. 이렇게 진술하면 중・고등학교 학생에게 설명하기 곤란하다. 즉 대수적으로는 체의 구조를 이루고 순서구조로서는 선형순서 구조이며 양의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있다. 그러나 고등학교에서 순서체란 용어는 사용하지 않지만 다루어지고 있다.

---

21) $1(\neq 0) \in \mathbb{R}$을 곱셈에 대한 단위원(unit)이라고 한다.

22) $a^{-1} \in \mathbb{R}$를 a의 곱셈에 대한 역원(multiplicative inverse)이라 하고, a^{-1}또는 $\frac{1}{a}$로 나타낸다. $a, b \in \mathbb{R}$ (단 $b \neq 0$)에 대하여 $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$로 표시한다.

그러면 최소상계 성질에 대해서는 어떻게 소개하고 있을까? 이 장의 4절 실수계의 완비성 공리에서 논의하기 앞서 이 공리를 취급하지 않으면 극한에 관련된 여러 가지 주제를 취급할 수 없게 된다. 따라서 고등학교의 수학에 극한을 포함하는 단원은 어떤 면에서 보면 사상누각이 된다. 이러한 난점 때문에 외국 일부의 교육과정에서는 미적분을 생략하기도 한다.

그런데 현행교육과정은 공식적으로 이것을 명시화하지 않고 단지 직관적으로 이해하도록 되어 있다. 그런데 일부 교과서는 이 공리 또는 이와 동등한 공리를 슬쩍 넣은 교과서도 있다.

공리12. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에는 다음 조건을 만족하는 공집합이 아닌 부분집합 P가 존재한다.

(1) 임의의 $a, b \in \mathrm{P}$에 대하여 $a + b \in \mathrm{P}$이고 $ab \in \mathrm{P}$이다.

(2) 임의의 $a \in \mathrm{P}$에 대하여 다음 중 하나만이 성립한다.

$a \in \mathrm{P}$ 또는 $a = 0$ 또는 $-a \in \mathrm{P}$ 이다.[23)]

이 집합 P를 양의 실수의 집합이라고 한다. 양의 실수의 집합 P의 존재성에 의하여 실수의 전 순서성(total ordering)[24)]이 나타난다. 따라서 실수의 전 순서성은 양수의 집합의 존재성으로부터 나타나는 단순한 결론에 지나지 않는다. 따라서 양수의 존재성이 핵심이다. 실제로 실수를 헤쳐 모아 임의로 순서를 구성하는 것은 얼마든지 가능하다. 그러나 양수의 존재성을 보장하지 않는 순서란 의미가 없다. 이와 같이 초, 중학교에서 직관적으로 배운 수직선이 고등학교에서는 어느 정도 대수적으로 취급되며 이 때 실수의 순서구조가 도입된다. 실수의 순서구조란 실수의 부분집합으로서 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있는 집합 P가 존재한다는 것을 의미한다. 물론 이 집합은 다음의 정의와 같이 0 을 포함하지 않고 -P 에 의하여 실수의 집합이 3부분으

---

23) (1)에 의하여 집합 P는 덧셈, 곱셈에 대하여 닫혀있고 $a \in \mathrm{P}$ 이면 a 를 양의 실수라하고 $-a \in \mathrm{P}$ 이면 a 를 음의 실수라 하며 $a \in \mathrm{P}$ 는 반드시 양의실수, 0, 음의 실수 중 하나이다. 이것을 삼분성질(trichotomy property)이라 한다.

24) 수직선이 보여주는 것과 같이 일직선으로 나열할 수 있다는 것

로 분할된다는 것을 요구한다.

정의2.1 임의의 $a, b \in \mathrm{P}$ 에 대하여 $a > b$, $a = b$, 그리고 $a < b$ 를 다음과 같이 정의한다.

$a - b \in \mathrm{P}$ 이면 $a > b$, $a - b = 0$ 이면 $a = b$, $-(a - b) \in \mathrm{P}$ 이면 $a < b$ 라고 정의한다.

참고) $a < b$ 이거나 $a = b$ 인 경우를 $a \leq b$ 로 나타낸다.

정리2.2 임의의 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a > b$ 이고 $b > c$ 이면, $a > c$ 이다.

(2) $a \geq b$ 이고 $a \leq b$ 이면, $a = b$ 이다.

(3) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$

(4) $1 > 0$

증명. (1) $a > b$ 이고 $b > c$ 이면, $a - b \in P$ 이고 $b - c \in P$ 이므로

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in P$$

따라서 $a > c$ 이다.

(2) $a \neq b$ 라고 하면, $a - b \in P$ 이거나 $-(a - b) = b - a \in P$ 이다.

그런데 $a - b \in P$ 이면 $a > b$ 이므로 $a \leq b$ 와 모순이고, $b - a \in P$ 이면 $a < b$ 이므로 $a \geq b$ 와 모순이다. 따라서 $a = b$ 이다.

(3) $a = 0$ 이면, $a^2 = a \cdot a = a \cdot 0 = 0$ 이다.

$a \neq 0$ 이면, $a \in P$ 이거나 $-a \in P$ 이다, 만약 $a \in P$ 인 경우,

$$a^2 = a \cdot a \in P$$

이므로 $a^2 > 0$ 이고, 만약 $-a \in P$ 인 경우,

$$a^2 = 1 \cdot a^2 = (-1)(-1) \cdot a^2 = ((-1)a \cdot (-1)a) = (-a) \cdot (-a) \in P$$

이므로 $a^2 > 0$ 이다.

(4) $1 \neq 0$ 이므로 (3)에 의하여,

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$$

정리2.3 임의 $a, b, c \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a > b$ 이면 $a + c > b + c$ 이다.

(2) $a > b$ 이고 $c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

(3) $a > b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$ 이다.

(4) $a > b$ 이고 $c < 0$ 이면 $ac < bc$ 이다.

(5) $a > 0$ 이면 $a^{-1} > 0$ 이다.

증명. (1) $a > b$ 이면,

$$(a + c) - (b + c) = a - b \in P$$

이므로 $a + c > b + c$ 이다.

(2) $a > b$ 이고 $c > d$ 이면, $a - b \in P$ 이고 $c - d \in P$ 이므로

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \in P$$

이고 따라서, $a + c > b + d$ 이다.

(3) $a - b \in P$ 이고 $c \in P$ 이므로,

$$ac - bc = (a - b)c \in P$$

이고, 따라서 $ac > bc$ 이다.

(4) $a - b \in P$ 이고 $-c \in P$ 이므로,

$$bc - ac = (a - b)(-c) \in P$$

이고, 따라서 $ac < bc$ 이다.

(5) $a^{-1} = 0$ 이면,

$$1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$$

이므로 모순이다. 또 만일 $a^{-1} < 0$ 이면,

$$1 = a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a = 0$$

이므로 모순이고, 따라서 $a^{-1} > 0$ 이다.

정의2.4 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 절대값 $|a|$를 다음과 같이 정의한다.

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ 일때}) \\ -a & (a < 0 \text{ 일때}) \end{cases}$$

이것을 a 의 ***절대값***(absolute value)이라고 부른다.

정리2.5 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|a| \geq 0$ 이고, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2) $|ab| = |a||b|$

(3) $-|a| \leq a \leq |a|$

증명. (1) $|a| \geq 0$ 임은 명백하다, $a = 0$이면 절대값의 정의에 의하여 $|0| = 0$이고, $a \neq 0$이면 $-a \neq 0$ 이므로 $|a| \neq 0$이다.

(2) $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $ab > 0$ 이므로

$$|ab| = ab = |a||b|.$$

$a > 0$ 이고 $b < 0$ 이면 $ab < 0$ 이므로

$$|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|.$$

$a < 0$ 이고 $b > 0$ 인 경우와 $a < 0$ 이고 $b < 0$ 인 경우도 같은 방법으로 증명된다. 그리고 a, b중 어느 하나가 0인 경우에는

$$|ab| = 0 = |a||b|$$

(3) $a \geq 0$ 이면 $|a| = a$ 이므로

$$-|a| \leq 0 \leq a = |a|$$

$a < 0$ 이면 $|a| = -a$ 이므로

$$-|a| = -(-a) = a \leq 0 = |a|$$

이다.

정리2.6 (*삼각부등식*) 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

증명. 정리2.5에 의해 $-|a| \leq a \leq |a|$이고 $-|b| \leq \pm b \leq |b|$이므로

$$-(|a| + |b|) \leq a \pm b \leq |a| + |b|$$

이므로

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

이다. 이를 이용하면 $|a| = |(a-b) + b| \leq |a - b| + |b|$ 이므로

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

이다. 같은 방법으로 $|b| = |a + (b-a)| \leq |a| + |b-a|$ 이므로

$$|b| - |a| \leq |a - b|$$

이다. 따라서

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

여기에 b 대신 $-b$ 를 대입하면 $||a| - |b|| \leq |a + b|$ 를 얻는다.

4) 실수계의 완비공리

실수의 대수적 순서 구조가 완성 되었더라도 수열의 수렴성과 그 이후에 나타나는 여러 문제들, 예를 들면 함수의 극한 더 나아가서 미분, 적분등에 나오는 평균값의 정리, 중간값의 정리, Rolle의 정리, 최대값 최소값의 문제 등은 실수에 관한 마지막 공리로서 해석 분야를 하는데 필수적인 또 다른 공리13이 필요하다.

정의2.7 집합 $M \subset \mathbb{R}$이라 하자. M에 속하는 임의의 원소 x에 대해서 $x \le k$를 만족시키는 상수 k가 존재할 때, 집합 M은 ***위로 유계***(bounded above)라 하고 k를 M의 ***상계***(upper bound)라 하며, 한 상계가 M의 다른 모든 상계보다 작을 때 그 상계를 최소상계 또는 ***상한***(least upper bound ; lub , supremum)이라고 한다. 또 집합 M의 임의의 원소 x에 대해서 $k' \le x$를 만족시키는 상수 k'가 존재할 때, 집합 M 은 ***아래로 유계***(bounded below)라 하고 k'를 집합 M의 ***하계***(lower bound)라 하며, 한 하계가 M 의 다른 모든 하계보다 클 때 그 하계를 최대하계 또는 ***하한***(greatest lower bound ; glb , infimum)이라고 한다.

상한, 하한의 존재성은 유리수의 집합 Q에서는 성립하지 않는 성질이며, 직관적으로 실수계는 순서 구조상 틈이 없이 연속적이고 완비(complete) 되도록 하여 주는 가장 중요한 공리로서 ***완비성 공리***라고 한다.

공리13. $X \subset \mathbb{R}$가 공집합이 아니고 위로 유계이면 X는 상한을 가진다. 즉, 실수 위에서 위로 유계인 증가수열은 수렴한다.[25]

이것은 실수의 집합 $X \subset \mathbb{R}$이 수직선과 일대일 대응임을, 곧 수직선은 구멍이 없이 실수가 대응 되었음을 의미한다. 수학에서는 최소한의 가정으로 출발하는 것이 큰 가치를 가지므로 현재 수학에서 쓰이는 빈틈 없음의 엄밀한 정의인 실수에 대한 「완비성의 공리」는 다음과 같이 다소 뜬 구름 잡는 듯하다. 위 공리에서도 어느 값을 초과하지 않는 원소들로만 이루어진 즉, 위로 유계인 공집합이 아닌 실수의 부분집합을 임의로 잡고 그것을 X 라 하자. 이 때, X 의 어떤 원소도 u 를 초과하지 않게 되는 실수 u 들의 집합을 잡고 그것을 U 라 하면, U 에는 최소값이 있다. 다시 말하면 위로 유계인 실수의 임의의 부분집합에 대해 최소상계가 존재한다. 하지만 그 의도는 결국 '빈 틈' 이 없다는 것이다. 즉, 위 공리에서 X 와 U 는 어떤 경계를 맞대고 있으며, 그 경계가 바로 U 의 최소값이다. 그런데 U 의 최소값이 없다는 것은 그 경계가

25) 완비성(completness)공리 : K. Weierstrass

바로 '빈 틈' 이 된다는 것이며, 공리는 그런 경우가 없다는 말을 하고 있는 것이다.

정리2.8 실수계의 완비성 공리는 다음 명제와 서로 동치이다. 「$X \subset \mathbb{R}$가 공집합이 아니고 아래로 유계이면 X는 하한을 가진다. 즉, 실수 위에서 아래로 유계인 감소수열은 수렴한다.」

증명. ($\Rightarrow$) 집합 T $=\{ y \in \mathbb{R} \mid y$는 S의 하계이다$\}$는 S가 하계를 가지므로 공집합이 아니다. 더욱이, $x \in S$, $y \in T$ 이면 $y \leq x$ 이므로 T는 상한을 갖는다. sup T $= a$로 놓으면 상한의 정의에 의하여

① 모든 $y \in T$에 대하여 $y \leq x$ 이다. 또한, 모든 $x \in S$는 T의 상계이므로

② 모든 $x \in S$ 에 대하여 $a \leq x$ 이다. 그런데 성질 ②는 a가 S의 하계임을 뜻하고, 성질 ①은 y 가 S의 임의의 하계이면 (즉, $y \in T$), $y \leq a$ 임을 뜻한다. 따라서, 하계의 정의에 의해 a=inf S이다.

($\Leftarrow$):($\Rightarrow$)의 증명과 같은 방법으로 증명된다.

유리수의 집합은 빈틈이 있는가? 결론은 빈틈이 있다. 먼저, 유리수의 집합에 빈틈이 있다는 것이 무엇을 말하는지 알아보자. 수직선에 점을 찍을 수 있고 또한 자와 컴퍼스로 작도할 수도 있다. 이것은 유리수가 아니기 때문에 그 점에서 유리수의 집합은 끊어져 있다는 것이 중학교 교과서에 나와 있는 내용이다. 하지만 이것은 완전한 설명이 아니다. 수직선은 수의 집합을 나타내는 모형일 뿐이다. 우리가 가진 것이 유리수를 모두 모아 놓은 집합 뿐 이라면, 그 집합에 '빈 틈' 이 있다는 것을 그 자체로 어떻게 알 수 있는가? 한 예를 들면, 수열 0.8, 0.88, 0.888, 0.8888, …… 와 같은 수열은 수렴하는가? 즉, 어느 하나의 수에 무한히 가까워져 가는가? 그렇다. 이 수열의 극한값은 $\frac{8}{9}$이다. 이번에는 수열 $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8},$ ……와 같은 수열은 어떤가? 역시 수렴하고 그 극한값은 1 이다. 이처럼 수열이 수렴 할 것을 보장 할 수 있는 조건은 많지만 그 중 하나의 예로, 위의 두 수열과 같이 계속 증가하면서 어느 한계

를 절대 초과하지 않는 수열, 즉 위로 유계인 증가수열은 당연히 수렴해야 할 '것처럼 보인다. 그런데, 놀랍게도 우리가 가지고 있는 것이 유리수로 제한된다면, 어느 한계를 초과하지 않는 즉 위로 유계인 증가 수열의 극한값이 유리수 범위에서는 존재하지 않는 경우가 생긴다. 예를 들어,

수열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ……인 경우를 보면 이 수열의 원소들은, 그 자신은 제곱해서 2 보다 작되, 끝자리수에 1 을 더해서 제곱하면 2 보다 커지게 되는 유한소수들이다. 이 수열은 분명 계속 증가하고 있으며, 1.5 를 넘을 수 없는 위로 유계인 증가수열 이므로 당연히 어딘가로 수렴해야 할 것 같은데, 수열의 각 원소가 유리수 임에도 불구하고 그 극한값은 유리수의 집합 안에는 없다. 바로 여기에서 유리수의 집합의 '빈 틈' 이 발견된다. 다시 말해, 이 수열은 유리수의 집합의 '빈 틈' 을 향해서 수렴하고 있는 것이다. 즉, 위로 유계이고 증가 수열인데 어떤 유리수의 값에도 수렴하지 않는다. 이것은 유리수의 집합이 무엇인가 부족하다는 것이다. 그래서 완비공리는 이 부족함을 메꾸어 준다. 위의 공리13과 동치인 공리로는 다음과 같이 여러 가지가 있다.

정리2.9「자연수의 집합 $\mathbb{N}$는 위로 유계가 아니다.」

증명. 만약 자연수의 집합 $\mathbb{N}$이 위로 유계라 가정하면 완비성 공리에 의하여 최소상계 $a \in \mathbb{R}$가 존재하고, 실수 $a-1$은 a보다 작은 수이므로 $\mathbb{N}$의 상계가 아니다, 따라서 다음 부등식 $a-1 < n \leq a$를 만족하는 자연수 $n \in \mathbb{N}$이 존재한다. 그러면 $n+1 \in \mathbb{N}$임에도 불구하고 $n+1 > a$이기 때문에 a가 $\mathbb{N}$의 상계라는데 모순이다.

따름정리2.10 (*아르키메데스의 연속성 정리*)임의의 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$에 대하여 $na > b$가 성립하는 적당한 $n \in \mathbb{N}$이 존재한다.[26)]

---

26) Archimedes(287~212 B.C): 이 정리에서 말하는 성질을 아르키메데스 성질이라 하고, 따라서 완비성공리를 만족하는 순서체는 아르키메데스 성질을 만족한다. 유리수체를 생각하면 그 역은 성립하지 않는다.

증명. 간접 증명법으로 증명하기 위하여 정리가 성립하지 않는다고 하자. 즉, 적당한 $a>0$, $b\in\mathbb{R}$가 존재해서 모든 $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $na\le b$ 가 성립한다고 하자, 이때, b 는 집합 $S=\{na\mid n\in\mathbb{N}\}$ 의 상계가 되므로 S 는 위로 유계이다. 따라서, 실수계의 완비성 공리에 의하여 S 는 상한을 갖는다. 이때, S의 상한을 α 라고 하면 모든 $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $(n+1)a\le\alpha$, 즉 $na\le\alpha-a$ 가 되므로 $a<0$이 되어 $a>0$ 이라는 가정에 모순이다.

이 정리는 “어떤 양수 a를 2배 3배…, n배…하면 어떤 수 보다도 크게 할 수 있다.” 이것은 수열 $\{na\mid n=1,2,3,\cdots\}$이 유계가 아니라는 것을 말하고 있는 것으로 본다면, 실수의 무한성 즉 위로 유계 하지 않다 를 주장하는 것이라 볼 수 있다.

또, 직선 위에 선분 AB 와 CD가 있을 때($\overline{AB}\gg\overline{CD}$), 그 직선위에 유한개의 점 $A_1, A_2, \cdots A_n$을 $AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}A_n=CD$ 가 되게 취하고, B가 A와 A_n사이에 있도록 할 수 가 있다고 하는 표현으로 바꾸면, 직선 위의 점의 연속성을 말하는 것이 된다. 이 공리는 사실 다음의 연속성 공리와 같은 것이다.

따름정리2.11 : 임의의 $a\in\mathbb{R}(a>0)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a<n$ 을 만족시키는 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

(2) $0<\frac{1}{n}<a$ 을 만족시키는 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

증명. (1) $a<0$ 인 경우 정리는 명백하므로, $a\ge0$ 라고 하자.

집합 A={ $k\in Z\mid k\le a$ }라고 하면, A는 공집합이 아니고 a는 A의 상계이므로, 완비성의 공리에 의하여 u=supA가 존재한다. 그러면 $u-\frac{1}{2}<u$ 이므로, $u-\frac{1}{2}$은 A의 상계가 될 수 없고, 따라서 $u-\frac{1}{2}<k$가 되는 A의 원소 k가 존재한다. $k+1$은 자연수이고 $k+1\notin A$이므로, $n=k+1$이라 하면 $a<n$ 이다.

⑵ Archimedes의 정리에서 $b=1$로 잡으면 $na > 1$ 즉, $0 < \frac{1}{n} < a$ 을 만족시키는 $n \in \mathbb{N}$이 존재한다.

칸토르는 유리수를 항으로 하는 수열의 수렴값(극한값)을 갖고 실수를 정의하여 실수론을 전개하였다.

정리2.12 (*칸토르27)의 실수의 연속성 공리*) "실수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$가 있고, 조건

⑴ $a_n < b_n$이고 $\{a_n\}$을 증가수열이고 $\{b_n\}$은 감소수열이다.

⑵ $b_n - a_n \to 0 \quad as \quad n \to \infty$을 만족하면, 모든 n에 대하여 $a_n < c < b_n$이 되는 유일한 수 c 가 반드시 존재한다."

이것을 실수에 대한 가장 기본적인 성질이다. 실수 상에서의 극한 개념은 이 공리를 바탕으로 한다. 이는 ***칸토르의 공리***라고도 한다.

정리2.13 (*유리수의 조밀성*) a와 b가 $a<b$인 두 실수이면, $a < r < b$ 인 유리수 r 이 존재한다.

증명. 편의상 $a > 0$ 인 경우만 보이자.

가정 $a<b$로부터 $b-a > 0$ 이므로 아르키메데스의 정리로부터 $n(b-a) > 1$ 즉, $(b-a) > \frac{1}{n}$ 을 만족하는 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재한다.

또, 두 실수 a와 $\frac{1}{n}$에 대하여 아르키메데스의 정리를 다시 적용하면 $a < k\frac{1}{n} = \frac{k}{n}$를 만족하는 $\{k \in \mathbb{N} \mid k\frac{1}{n} > a\} \neq \phi$ 가 존재한다. $a < \frac{k}{n}$를 만족하는 $k \in \mathbb{N}$ 중에서 가장 작은 k를 m라 하면 $\frac{m-1}{n} \le a < \frac{m}{n}$이 된다. 이때, $r = \frac{m}{n}$으로 놓으면

27) 1874년 집합론과 무한이론에 관하여 연구함-초한수 이론을 발전시킴

$b > a + \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n} = r > a$ 이므로 $a < r < b$ 이다.

정리2.14 (*Dedekind의 정리*) 실수 $\mathbb{R}$의 두 부분 집합 $A \neq \phi$ 와 $B \neq \phi$가 다음의 성질들을 만족한다. (1) $A \cup B = \mathbb{R}$ (2) 임의의 $a \in A$, $b \in B$에 대하여 $a < b$이다. 이때, 임의의 $a \in A$, $b \in B$에 대하여 $a \leq \alpha$ 이고 $\alpha \leq b$인 $\alpha \in \mathbb{R}$가 유일하게 존재한다.

증명. 가정에서 A와 B가 공집합이 아니고 $b \in B$ 는 A의 상계이므로 실수의 완비성 공리에 의해서 A는 상계를 갖는다. 여기서 $\alpha = \sup A$ 로 놓으면 α 는 A의 상계이므로 임의의 $a \in A$ 대하여 $a \leq \alpha$ 가 성립하고, 또한 임의의 $b \in B$는 A의 상계이므로 상한의 정의로부터 $\alpha \leq b$ 이다. 따라서 α 의 존재성이 증명되었다.
다음은 유일성을 증명하기 위하여 임의의 $a \in A$, $b \in B$에 대하여 $a \leq \beta$이고 $\beta \leq b$인 $\beta \in \mathbb{R}$가 존재한다고 하자. β는 A의 상계이므로 $\alpha \leq \beta$이다. 만일 $\alpha \leq \beta$라면 $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$는 $\alpha < \gamma < \beta$이고, 가정으로부터 $\gamma \in A$이거나$\gamma \in B$이다. 그런데 $\gamma \in A$이라면 임의의 $a \in A$에 대하여 $a \leq \alpha$라는 사실에 모순이고, 한편 $\gamma \in B$이라면 임의의 $b \in B$에 대하여 $\beta \geq B$라는 사실에 모순이다. 따라서 $\alpha = \beta$일 수밖에 없다.

데데킨트는 절단을 통해 실수가 유리수와 무리수로 구성됨을 즉, 위로 유계인 실수의 부분집합은 최소상계를 가짐을 보였다. 실제로 실수계의 완비성 공리와 Dedekind의 정리는 서로 동치가 됨을 보일 수 있다. 따라서 실수계의 완비성 공리 대신에 Dedekind의 정리로 바꾸어 놓아도 상관이 없게 된다.

5) 내점과 집적점

정의2.15 (*수직선 상에서의 집적점의 정의*) 집합 S를 ℝ의 부분집합이라 할 때, 임의의 양수 ε에 대하여 부등식 $0 < |x-a| < \varepsilon$를 만족하는 $x \in S$ 가 존재하면 a를 집합 S의 ***집적점*** 이라고 한다.

정의2.16 (*근방개념을 사용한 집적점의 정의*) 점 $a \in \mathbb{R}$가 주어 졌을 때, 임의의 양수 ε에 대하여 개구간 ($a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$)으로 나타낸다. 이 개구간을 점 a의 ***ε-근방***(ε-neighborhood)이라 하고, 이를 기호로 $N_\varepsilon(a)$으로 나타낸다. 이때 점 a를 ***ε-근방의 중심***(center)이라 하고 실수ε를 ***반경***(radius)이라고 한다.

다시 말하면 a의 ε-근방은 곧 $N_\varepsilon(a)=\{x \in R \mid |x-a| < \varepsilon\}$임을 알 수 있다.

즉 수직선 상에서 점 P를 포함한 개구간($p-\varepsilon$, $p+\varepsilon$)을 점 P의 근방이라고 하고, 기호로 $N_\varepsilon(p)$를 사용하자. 이 직선에 좌표계를 도입하면 양 끝점을 제외한 선분은 개구간으로 표시할 수 있으므로, 점 P의 근방이란 점 P의 좌표를 포함하는 개구간 ($p-\varepsilon$, $p+\varepsilon$)이 된다.

수직선의 부분집합 M과 점 P에 대하여, P의 모든 근방 $N_\varepsilon(p)$가 P와 다른 M의 점을 포함 할 때, 점 P를 집합 M의 ***집적점***(accumulation point)이라 하고 다음과 같이 정의한다.

정리2.17 임의의 양수 ε에 대하여 「($N_\varepsilon(a)$- { a })」 내에 집합 S의 점이 적어도 하나 있을 때, a를 집합 S의 집적점이라고 한다. 즉 임의의 양수 ε에 대하여 ($N_\varepsilon(a)$- { a })∩S $\neq \phi$때를 말한다.

예제1. S = $\{\frac{1}{n} \mid n$은 자연수$\}$ = $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} . . . .\}$ 라 하면 0은 S의 집적점이다.

정의2.18 (*내점의 정의*) 점 $a \in S \subset \mathbb{R}$ 에 대하여, 이에 대응하는 적당한 ε>0이 존재하여 $N_\varepsilon(a) \subset$S가 될 때, 점 a를 S의 ***내점***(interior point)이라고 한다.

3. 수열의 극한

1) 현행 고등학교 교과서 내에서의 극한의 정의

현재 고등학교 교과과정에서 다루어지는 수열의 극한에 대한 정의는 다음과 같이 정의되고 있다.

정의3.1 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n 이 한없이 커짐에 따라. 일반항 a_n 의 값이

(1) 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면, "***수열*** $\{a_n\}$***은*** α ***에 수렴한다***" 고 하고, α 를 무한수열 $\{a_n\}$의 ***극한값*** 또는 ***극한***이라고 정의하고 있다. 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 또는 $n\to\infty$ 일 때, $a_n \to \alpha$ 로 나타낸다.

(2) a_n 의 값이 한없이 커지면 "***수열*** $\{a_n\}$***은 양의 무한대로 발산한다***" 고 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $n\to\infty$ 일 때 $a_n \to \infty$로 나타낸다.

(3) a_n 의 값이 한없이 작아지면 "***수열*** $\{a_n\}$***은 음의 무한대로 발산한다.***" 고 하고 이것을 기호로 수열 $\{a_n\}$은 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 또는 $n\to\infty$ 일 때 $a_n \to -\infty$로 나타낸다.

(4) 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않을 때, "***수열*** $\{a_n\}$***은 진동한다.***" 고 한다.

무한수열의 수렴 발산을 이해시키기 위하여 n 이 증가 할 때 수열의 일반항 a_n 이 어떻게 변하는가를 그래프를 이용하여 다음과 같이 설명하고 있다. 예를 들면

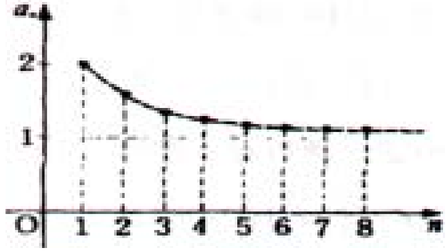
그림1) 

그림2는 수열 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ 의 그래프를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$의 극한값을 예상하고

그림3) 

그림3은 수열 $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 의 그래프를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]$의 극한값을 예상하고 있고

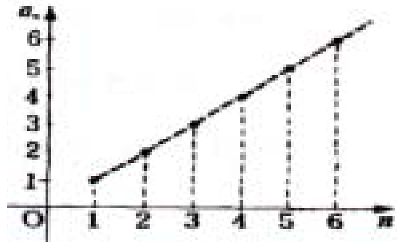
그림4) 

그림4는 수열 $a_n = n$의 그래프를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} n$ 의 극한값을 예상하고 있으며

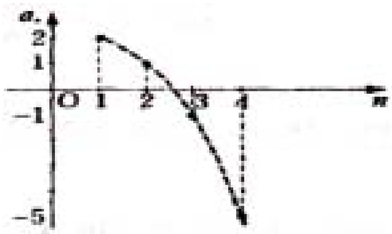


그림5)

그림5는 수열 $a_n = 3-2^{n-1}$의 그래프를 이용하여 $\lim_{n \to \infty}(3-2^{n-1})$의 극한값을 예상하고

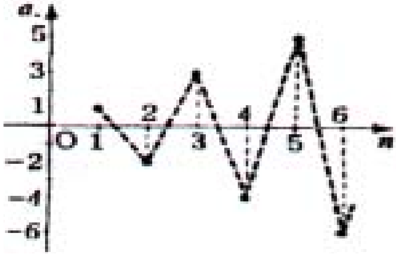


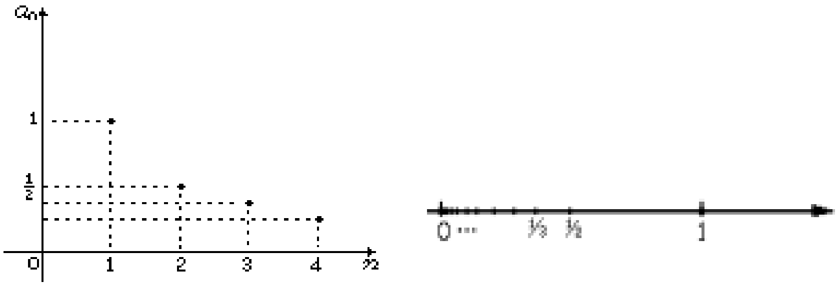
그림6)

그림6은 수열 $a_n = (-1)^{n-1}n$의 그래프를 이용하여 $\lim_{n \to \infty}(-1)^{n-1}n$의 극한값을 구하고 있다. 여기서 그림2, 그림3과 같이 무한수열 $\{a_n\}$ 에서 항의 번호 n 이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워짐을 보이고 있으며, 이 때 수열 { a_n}은 α 에 수렴한다고 하고 있다. 그림4 와 같이 수열 { a_n}에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 "수열 { a_n}은 양의 무한대로 발산 한다" 라 하고, 그림5 와 같이 수열 { a_n}에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 한없이 작아지면 "수열 { a_n}은 음의 무한대로 발산한다."라 하며, 그림6은 수열 { a_n}에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라. 일반항 a_n의 값이 수렴하지 않고 진동 발산하는 것을 알 수 있다.

한편 아래의 그래프는 보다 학생들에게 직관적인 극한의 개념을 이해시키기 위하여 각각 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$, $\{2^n\}$, $\{(-2)^{n-1}\}$ 에 대한 수열의

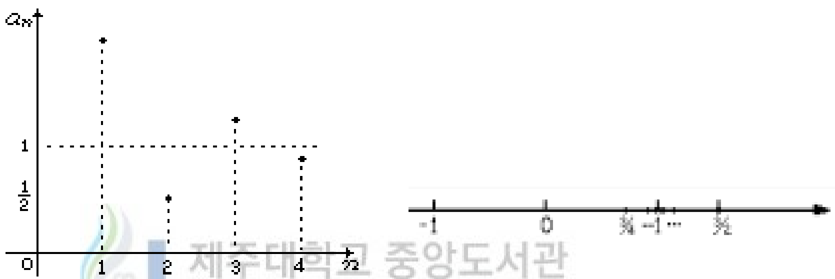
그래프와 아울러 극한값을 수직선상에 나타냄으로서 극한의 개념을 파악 할 수 있다.

그림7)



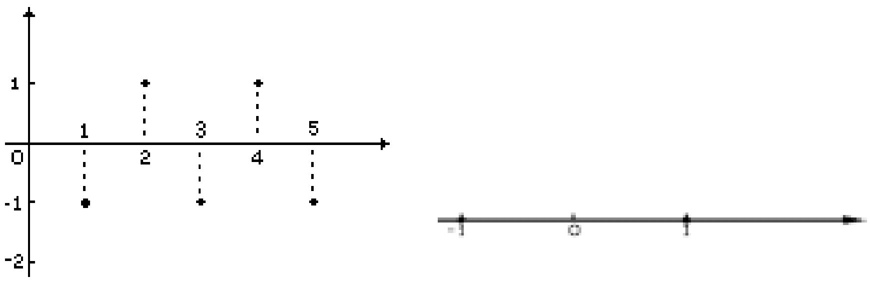
수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 그래프

그림8)



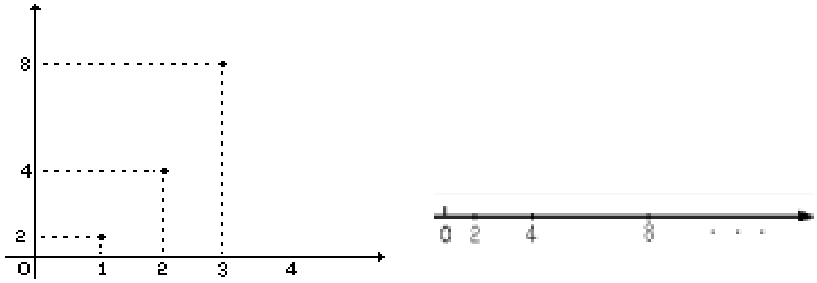
수열 $\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$의 그래프

그림9)



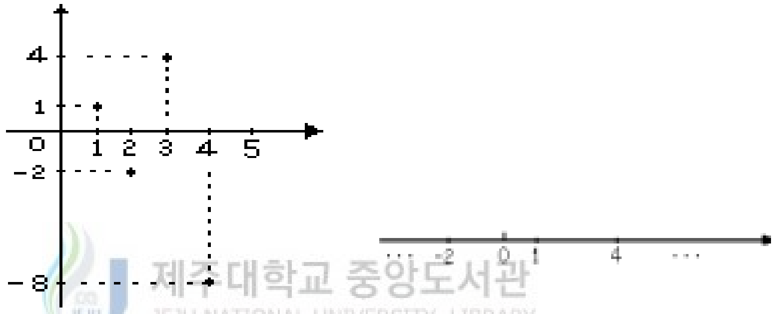
수열 $\{(-1)^{n+1}\}$의 그래프

그림10)



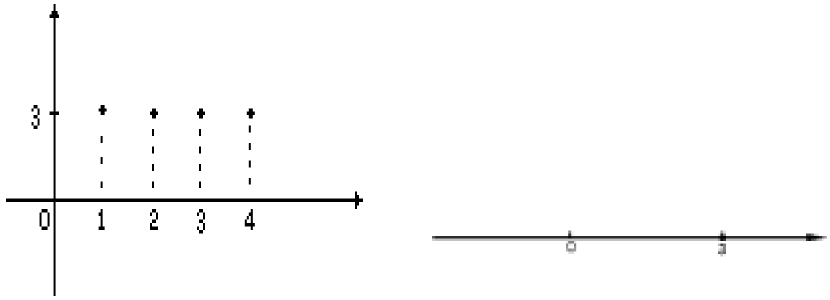
수열 $\{2^n\}$의 그래프

그림11)

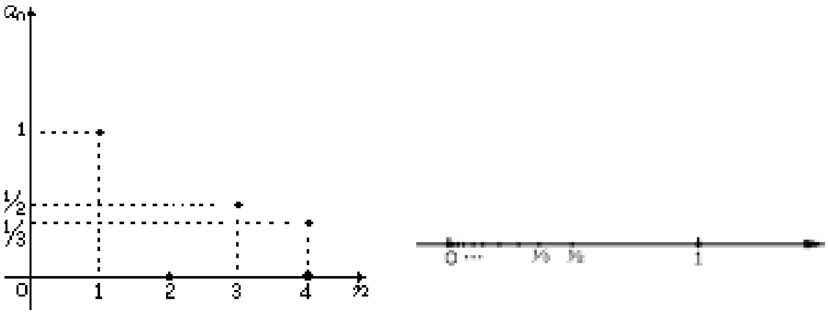


수열 $\{(-2)^{n-1}\}$의 그래프

그림12)



수열 {3, 3, 3, ⋯, 3, ⋯}의 그래프

그림13) 

수열 $1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{5},\cdots$의 그래프

이와 같이 고등학교 교과서에서는 n-축(x 축)과 a_n-축(y 축)으로 이루어진 좌표 평면 위에 $(n\ ,\ a_n)$으로 나타내어지는 수열의 그래프를 그려봄으로써 학생들의 직관을 자극하고 극한 개념을 형성하게끔 하고 있다. 그러나 그래프는 새로운 사실이나 관계를 찾기 위한 것이라기 보다는, 이미 받아들여진 정리, 정의에 대해 시각적인 느낌을 통하여 이해를 돕는 보조 자료에 불과하므로 컴퓨터 프로그램을 이용하여 학생들에게 수열을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있음을 보여주는 것도 학생들이 극한에 대한 보다 강한 심상과 장애를 극복할 수 있는 다양한 개념 이미지를 심어줄 수 있다고 본다.

2) 수열적 접근법으로서의 극한의 정의

대학 수학에서의 수열의 극한에 대한 수치해석적인 엄밀한 이론적 정의는 '형식적 정의' 또는 'ε-δ 논법의 정의'라고 부른다.

정의3.2 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n - L| < \varepsilon$를 만족하면, 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 하고, L을 무한 수열 $\{a_n\}$의 ***극한값*** 또는 ***극한***이라고 한다. 또한 수열이 극한을 가지지 않으면 발산한다고 한다.

그리고 이것을 기호로, $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to L$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 로 나타낸다.

이것을 정의2.16의 근방의 개념을 사용하여 다시 표현한다면

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists K \in N \mid n \geq K \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$\iff {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists K \in N \mid n \geq K \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

$\iff {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists K \in N \mid n \geq K \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$

$\iff {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists K \in N \mid n \geq K \Rightarrow a_n \in N_\varepsilon(L)$

$\iff$ L 의 어느 ε-근방 $N_\varepsilon(L)$을 택하여도, $N_\varepsilon(L)$이 포함하지 않는 항의 개수는 유한개 뿐이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq L \iff {}^\exists \varepsilon_0 > 0 \mid ({}^\forall n \in N,\ {}^\exists m > n \mid a_n \notin N_{\varepsilon_0}(L))$

$\iff$ 어느 자연수 n 을 잡아도, $a_n \notin N_{\varepsilon_0}(L)$인 자연수 m (단 $m > n$)이 존재하도록 양수 ε_0을 택할 수 있다.

$\iff$ 무수히 많은 개수의 항을 포함하지 않는 L 의 ε_0-근방 $N_{\varepsilon_0}(L)$을 택할 수 있다.

여기서 수열의 극한이 L 이라는 의미는 수열이 실제로 극한에 도달한다는 것이 아니다. 수열의 극한은 그 수열이 도달하는 값이 아니라 n 이 무한히 커진다면 수열 $\{a_n\}$과 어떤 수 L 와의 차가 $|a_n - L|$가 원하는 만큼 얼마든지 작아질 수 있다는 의미이다. 즉 $a_n \to L$ 는 $|a_n - L| \to 0$ 과 같다.

정리3.3 (*극한의 유일성*) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 극한은 유일하다.
즉, 만약 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ 이면 $L = M$ 이다.

증명. $L \neq M$라고 가정하자. 그러면 $|L - M| > 0$이다. $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M|$ 이라고 놓자.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$이므로 자연수 N_1이 존재하여 $|a_n - L| < \varepsilon$ ($n \geq N_1$) 이다. 마찬가지로 $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ 이므로 자연수 N_2이 존재하여 $|a_n - M| < \varepsilon$ ($n \geq N_2$) 이다. 이 때, N=Max(N_1, N_2)라 하면

$$|L - M| = |(a_n - M) - (a_n - L)|$$

$$\leq |a_n - M| - |a_n - L|$$

$$< 2\varepsilon = |M - L|$$

즉, $|L - M| < |M - L|$ 가 된다. 분명히 이것은 모순이다. 따라서 $L = M$ 이다.

정의3.4 임의의 실수 M에 대하여 $n \geq K$ 이면 $a_n > M$ 을 만족하는 자연수 K 가 존재할 때 "수열 { a_n}은 무한대로 발산한다" 고 하고, $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to \infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 로 나타낸다. 또 $n \geq K$ 이면 $a_n < M$ 을 만족하는 자연수 K 가 존재 할 때 "수열 { a_n}은 음의 무한대로 발산한다" 고 하고 $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to \infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 로 나타낸다.

예제2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 증명하여라.

증명. (1) 직관적인 방법 : 31쪽 그림7에 의하여 직관적으로 충분히 큰 n 에 대하여 함수값(극한값)이 x 축에 가까이 가고 있음을 직관적으로 알 수 있다.

(2) ε-δ의 증명법 : 임의의 양의 수 ε에 대하여 적당한 양의 정수 K 를 $K > \frac{1}{\varepsilon}$ 이 되도록 잡으면, $\varepsilon > \frac{1}{K}$ 이 된다. 이 때, 임의의 양수 ε에 대하여 양의 정수 K 가 존재하여 $n \geq K$ 인 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

예제3. $a_n = \frac{2n+1}{n}$ 일 때, $\{a_n\}$ 의 극한은 2임을 증명하여라.

증명. $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ 이므로, 임의의 양의 수 ε에 대하여 적당한 양의 정수 K 를 $K > \frac{1}{\varepsilon}$ 이 되도록 잡으면, $\varepsilon > \frac{1}{K}$ 이 된다. 이 때, 임의의 양수 ε에 대하여 양의 정수 K가 존재해서 $n \geqq K$ 인 모든 양의 정수 n 에 대하여,

$$|a_n - 2| = |2 + \frac{1}{n} - 2| = \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = 2.$

예제4. $|r| < 1$, $a_n = r^n$ 일 때, $\{a_n\}$ 의 극한은 0 임을 증명하여라.

증명. $|r| < 1$ 이므로, $|r| = \frac{1}{1+a}$ $(a > 0)$라고 놓을 수 있다. 그런데, $n \geqq 2$ 일 때 부등식 $|r^n| = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$ 이 성립하므로, 임의의 양의 수 ε에 대하여 적당한 양의 정수 K 를 $K > \frac{1}{a\varepsilon}$ 이 되도록 잡으면, $\varepsilon > \frac{1}{Ka}$ 이 된다. 이 때, 임의의 양수 ε에 대하여 양의 정수 K가 존재해서 $n \geqq K$ 인 모든 양의 정수 n 에 대하여

$$|a_n - 0| = |r^n - 0| < \frac{1}{na} \leqq \frac{1}{Ka} < \varepsilon$$

가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = 0$

예제5. 수열 $\left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right)$ 이 수렴함을 증명하여라.

증명. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $n \geq K \Rightarrow \left| \frac{2+(-1)^n}{n} - 0 \right| \leq \frac{3}{n} < \varepsilon$를 만족시키는 자연수 K를 정할 수 있으면 수열 $\left(\frac{2+(-1)^n}{n} \right)$는 0 에 수렴하게 된다. 임의의 양의 수 ε에 대하여 적당한 양의 정수 K 를 $K > \frac{3}{\varepsilon}$ 이 되도록 잡으면, $\varepsilon > \frac{3}{K}$ 이 된다. 이 때 $n \geq K \Rightarrow \left| \frac{2+(-1)^n}{n} - 0 \right| \leq \frac{3}{n} \leq \frac{3}{K} < \varepsilon$이 성립한다. 따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

예제6. 수열 $a_n = n$ 은 발산함을 보여라.

증명. 수열 $\{a_n\}$이 실수 α에 수렴한다고 가정하면, 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 자연수 K가 존재하여 $n \geq K$ 인 모든 n 에 대하여 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$이 성립한다. 만약 $\varepsilon = 1$ 이라면 $|a_n - \alpha| < 1$ 즉 $-1 < n - \alpha < 1$ 이므로,
따라서 $\alpha - 1 < n < \alpha + 1$ 이되어 $n \geq K$ 을 만족하는 모든 n가 $\alpha - 1$ 과 $\alpha + 1$ 사이에 있음을 의미하는데 이것은 분명히 모순이다. 따라서 a_n은 발산한다.

예제7. 수열 $a_n = (-1)^n$ 은 발산함을 보여라.

증명. 수열 $\{a_n\}$이 실수 α에 수렴한다고 가정하면, $\varepsilon = \frac{1}{2}$에 대하여 적당한 자연수 K 가 존재하여 $n \geq K$ 인 모든 n 에 대하여 $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$이 성립한다. 즉 n이 짝수이면 $|a_n - \alpha| = |1 - \alpha| < \frac{1}{2}$ 이고,

n이 홀수이면 $|a_n - \alpha| = |-1 - \alpha| = |1 + \alpha| < \frac{1}{2}$ 이어야 한다. 따라서

$$2 = |1+1| = |(1+\alpha) + (1-\alpha)| \leq |1+\alpha| + |1-\alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이 되어 모순이다. 따라서 주어진 수열은 발산한다.

3) 수열의 극한에 대한 기본성질

현행 고교과정에서는 증명 없이 인정하고 있는, 수렴하는 수열이 가지는 다음과 같은 기본성질을 증명하기 위해서는 직관적인 방법으로는 설명할 수 없으므로 깊이 다루지 않고 있어서 반드시 해석학적 개념인, ε-δ논법의 정의3.2의 도입이 필수적이다.

정리3.5 만약 $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{L}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \mathrm{M}$ 일 때 , 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{n\to\infty}\{a_n \pm b_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \mathrm{L} \pm \mathrm{M}$ (복부호동순)

(2) $\lim_{n\to\infty} k\,a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\,\mathrm{M}$ (여기서 k 는 상수)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \mathrm{L}\cdot\mathrm{M}$

(4) 만약 $b_n \neq 0$ 이고 $\mathrm{M} \neq 0$ 일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{x\to\infty} a_n}{\lim_{x\to\infty} b_n} = \frac{L}{M}$

증명. (1) 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해, ε에 대응하는 적당한 자연수 K_1, $K_2 \in$N이 존재하여 $n \geq K_1$ 이면 $|a_n - L| < \varepsilon$ 이고, $n \geq K_2$ 이면 $|b_n - M| < \varepsilon$ 이 성립한다.
여기서, K=Max{ K_1, K_2 }로 놓으면 $n \geq K$ 인 모든 자연수 $n \in N$ 에 대하여

$$
\begin{aligned}
|(a_n \pm b_n) - (\mathrm{L} + \mathrm{M})| &\leq |(a_n - \mathrm{L}) \pm (b_n - \mathrm{M})| \\
&\leq |a_n - \mathrm{L}| \pm |b_n - \mathrm{M}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\{a_n \pm b_n\} = \mathrm{L} \pm \mathrm{M} = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$ 이 성립한다.

(2) $k = 0$ 인 경우는 명백하므로, $k \neq 0$ 라고 하자. 임의의 양수 ε에 대해

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|k|}$ 이라 하면 $n > K_1$ 일 때,

$$|ka_n - kM| = |k||a_n - M| < |k|\,\varepsilon_1 = \varepsilon$$

이 되어 $\lim_{n\to\infty} k\,a_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k$M 이다.

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n =$M이므로 수열 { b_n }은 유계이다. 즉 어떤 양의 실수 P가 존재하여 모든 자연수 $n\in N$에 대하여 $|b_n|\le P$가 성립한다. 또한 $\varepsilon > 0$ 을 임의의 실수라 하면 ε에 대응하는 적당한 자연수 $K_1, K_2 \in N$이 존재하여 $n\ge K_1$ 이면 $|a_n - L| < \varepsilon$ 이고, $n\ge K_2$ 이면 $|b_n - M| < \varepsilon$ 이 성립한다.

따라서 K=Max{ K_1, K_2 }로 놓으면 $n\ge K$ 인 모든 자연수 $n\in N$에 대하여

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - \mathrm{LM}| &\le |(a_n b_n - \mathrm{L}\,b_n) + (\mathrm{L}\,b_n - \mathrm{LM})| \\
&\le |a_n b_n - \mathrm{L}\,b_n| + |\mathrm{L}\,b_n - \mathrm{LM}| \\
&\le \mathrm{P}|a_n - \mathrm{L}| + |\mathrm{L}|\,|b_n - \mathrm{M}| \\
&\le \mathrm{P}\varepsilon + |\mathrm{L}|\varepsilon = (\mathrm{P} + |\mathrm{L}|)\varepsilon
\end{aligned}
$$

이다. 또한, $(P+|L|)>0$ 이 성립한다.

따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n =$ L · M이 성립한다.

(4) 이것의 증명은 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} b_n}$을 보여주면 된다. $\lim_{n\to\infty} b_n =$M 이므로, $\varepsilon > 0$ 을 임의의 실수라 하면 ε에 대응하는 적당한 자연수 $K_1\in$N이 존재하여, $n\ge K_1$ 이면 $|b_n|\ge \frac{1}{2}|\mathrm{M}|$가 성립한다. 임의의 양수 ε에 대해 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}|M|^2$이라 하고, K=Max{ K_1}라 하자, n≥K이면

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{b_n - M}{b_n M}\right| \le \left|\frac{b_n - M}{\frac{1}{2}M^2}\right| = \frac{2}{|M|^2}|b_n - M| < \varepsilon$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} b_n}$이 성립한다.

정리 3.6 $\lim_{n\to\infty} a_n =$L 일 때 다음이 성립한다.

$$\forall\, n \in N,\ a_n \geq 0 \Longrightarrow L \geq 0$$

증명. L < 0 라고 하면 양수 $-\frac{L}{2}$에 대하여

$$\exists\, K \in N \mid n \geqq K \Longrightarrow |a_n - L| < -\frac{L}{2} \quad (a_n \to L)$$

따라서, $a_k - L < -\frac{L}{2}$ 곧 $a_k < \frac{L}{2} < 0$ 이므로 모순이다.

정리3.7 (*극한값과 부등식 및 조임정리*)

(1) 수열 { a_n } , { b_n }이 수렴하여 $\lim_{n\to\infty} a_n =$L , $\lim_{n\to\infty} b_n =$M일 때 $a_n \leq b_n$ 이면 L ≤ M 이다.

(2) 수열 { a_n },{ b_n },{ c_n }에서 $a_n \leq c_n \leq b_n$이고, 또 수열{ a_n },{ b_n }도 수렴하여 $\lim_{n\to\infty} a_n =$L , $\lim_{n\to\infty} b_n =$L이면 수열 { c_n }도 수렴하여 $\lim_{n\to\infty} c_n =$L 이다.

증명. (1) 이 정리의 증명은 $c_n \geq 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$일 때, $\gamma \geq 0$ 임을 보이면 된다. 만약 $\gamma < 0$ 이라 가정하자. $n > N$ 이면 $|c_n - \gamma| < -\gamma$인 양의 정수 N이 존재한다. 그러므로 $c_n \leftarrow \gamma$ 즉, $c_n < 0$ 이 되어 모순이다. 따라서, $\gamma \geq 0$ 이다.

모든 n에 대하여 $b_n - a_n \geq 0$ 이므로 $M - L = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq 0$ 즉, $L \leq M$이다.

한편 $a_n \leq b_n$ 일 때, L < M 가 반드시 성립한다고는 할 수 없다. 예를 들면, $a_n = 1$ $b_n = 1 + \frac{1}{n}$이라 하면 모든 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이지만, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이 된다.

(2) 임의로 주어진 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 자연수 N_1, N_2 가 존재하여 $n \geq N_1$이면 $|a_n - L| < \varepsilon$, 즉 $L - \varepsilon < a_n$ 이고, $n \geq N_2$ 이면 $|b_n - L| < \varepsilon$ 즉 $b_n < L + \varepsilon$이다.

여기서, N=Max{ N_1, N_2 }로 놓으면 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$에서 $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$, 즉 $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$이 되어

$|c_n - L| < \varepsilon$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} c_n = L$이다.

예제8. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$를 구하여라.

증명. 자연수 n에 대하여 $-1 \le \sin n\theta \le 1$, $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n\theta}{n} \le \frac{1}{n}$이고,

$\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = 0$ 이다.

예제9. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ 임을 보이자.

증명. 모든 n에 대하여 $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

예제10. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$임을 보여라.

증명. $n \ge 2$일 때 $n^{\frac{1}{n}} > 1$이므로 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$ (단, $h_n > 0$)로 놓을 수 있다. 따라서, $n \ge 2$일 때

$$n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2 + \cdots \ge 1 + \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2$$

이므로 $n - 1 \ge \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2$ 곧 $h_n^2 \le \frac{2}{n}$ 따라서, $n \ge 2$ 일 때

$$0 < n^{\frac{1}{n}} - 1 = h_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \text{ 그런데 } \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \text{ 이므로 } \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

정의3.8 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $a_n \le M$ 또는 $a_n \ge M$을 만족하는 적당한 실수 M > 0 이 존재하면 수열 $\{a_n\}$은 ***위로유계***(bounded above)또는 ***아래로 유계***

(bounded below)인 수열이라 하고 위로 유계이고 동시에 아래로 유계인 수열을 ***유계수열***(bounded sequence)이라 한다. 즉 수열 $\{a_n\}$이 유계이면 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $|a_n| \le M$를 만족하는 M∈ℝ이 존재한다.

정리3.9 수렴하는 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

증명. 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 라 하고 $\varepsilon = 1$ 로 잡자. 그러면 이 $\varepsilon = 1$ 에 대응하는 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$인 모든 n에 대하여 $|a_n - \alpha| < 1$ 이 성립한다. 즉 $\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ 여기서
M= Max$\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots |a_{N-1}|, |\alpha|+1\}$이라 놓으면, 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$이면, $-M \le a_n \le M$이 되므로 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

정리3.10 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \alpha^2$이다.

증명. 임의의 양수 ε>0에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$ 인 모든 n에 대하여 $|a_n^2 - \alpha^2| < \varepsilon$ 임을 보이자. 수열 $\{a_n\}$가 수렴하므로 정리3.9에 의하여 $\{a_n\}$은 유계이다. 즉 어떤 상수 M에 대하여 $|a_n| \le M$이다. 따라서

$$|a_n + \alpha| \le |a_n| + |\alpha| \le M + |\alpha| \quad \cdots ①$$

이 성립하고 또한 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이므로 $a_n \to \alpha$ 이다. 이 때 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$ 인 모든 n 에 대하여

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{M+|\alpha|} \quad \cdots ②$$

이다. 여기서 ① , ② 에 의하여

$|a_n^2 - \alpha^2| = |a_n - \alpha|\,|a_n + \alpha| < \frac{\varepsilon}{M+|\alpha|}\, M + |\alpha| =$ε이 된다.

4) 수열의 수렴 발산 판정법

우리는 수열의 수렴성을 조사할 때, 그 수열의 극한을 미리 추정하여 그 극한으로 수렴하는지의 여부를 조사하였으나 여기서는 수열의 극한을 미리 추정하지 않고 그 수열의 수렴성 여부를 조사 할 수 있는 실수계의 완비성 공리[28]로 부터 얻어지는 기준으로 단조수렴정리(monotone convergence therom)와 Cauchy 수렴판정법(Cauchy criterion)에 대하여 살펴본다.

정의3.11 수열 $\{a_n\}$에서 모든 $n \in N$ 대하여 $a_n \le a_{n+1}$[또는 $a_n < a_{n+1}$]인 관계를 만족하면, 수열 $\{a_n\}$을 ***단조증가수열***(monotone increasing sequence)[또는 ***강증가수열***(strictly increasing sequence)]이라 하고, $a_n \ge a_{n+1}$[또는 $a_n > a_{n+1}$]인 관계를 만족하면, 수열 $\{a_n\}$을 ***단조감소수열***(monotone decreasing sequence)[또는 ***강감소수열***(strictly decreasing sequence)]이라고 한다. 단조증가수열과 단조감소수열을 통틀어서 ***단조수열*** (monotone sequence)이라고 한다.

(1) 단조수렴정리(monotone convergence therom)

정리3.12 수열 $\{a_n\}$이 단조증가수열(monotone increasing sequence)일 때,

(1) 수열$\{a_n\}$가 위로 유계이면, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 그 극한은

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$이고

(2) 수열 $\{a_n\}$가 위로 유계가 아니면, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \infty$

증명. (1) 수열$\{a_n\}$가 위로 유계이므로 실수의 완비성의 공리로부터 수열 $\{a_n\}$은 최소 상계 $\alpha=\sup\{a_n\}$이 존재한다. 이제, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$임을 보이자. 임의의 $\varepsilon>0$

28) ℝ의 공집합이아닌 부분집합 S가 위로유계(아래로유계)이면, S의 상한(하한)이 반드시 존재한다.

에 대하여 $\alpha-\varepsilon$은{ a_n }의 상계가 아니므로 $\alpha-\varepsilon < a_N \leq \alpha$를 만족하는 적당한 자연수 N가 존재한다. 그런데 { a_n }이 단조증가 하므로 $n \geq N$인 모든 n에 대하여 $\alpha-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha+\varepsilon$ 즉 $|a_n-\alpha| < \varepsilon$인 관계가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다.

(2) 수열 { a_n }가 위로 유계가 아니므로 임의의 실수 M>0에 대하여 $a_N > M$을 만족시키는 자연수 N이 존재한다. 그런데 { a_n }이 단조증가 하므로 $n \geq N$인 모든 n에 대하여 $a_n \geq a_N > M$이 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 이다.

정리3.13 수열 { a_n }을 단조감소수열(monotone decreasing sequence)할 때,

(1) 수열 { a_n }이 아래로 유계이면, 수열{ a_n }은 수렴하고 그 극한은

$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{ a_n \}$

(2) 수열 { a_n }가 아래로 유계가 아니면, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{ a_n \} = -\infty$

증명. (1) $b_n = -a_n$이라 놓으면 수열 { b_n }은 위로 유계인 단조증가 수열이다. 한편 $\lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{ b_n \}$이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} b_n = -\sup\{ b_n \} = \inf\{ -b_n \} = \inf\{ a_n \}$이 된다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{ a_n \}$

(2) $b_n = -a_n$이라 놓으면 수열 { b_n }은 위로 유계가 아닌 단조증가 수열이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ 이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

정리3.14 (*Bolzano-Weierstrass의 정리*) 임의의 유계인 수열은 반드시 수렴하는 부분수열을 갖는다.

증명. 수열 { a_n }을 유계인 실수열이라 하고 M= $\lim_{n\to\infty} \sup\{ a_n \}$이라 하자. 무수히 많은 n 값에 대하여 $a_n > M-1$이 된다. 이와 같은 n값들 중의 한 값을 n_1이라고 하

면 무수히 많은 n 값에 대하여 $a_{n_1} > M-\frac{1}{2}$ 이 되므로 $n_2 > n_1$ 이고 $a_{n_2} > M-\frac{1}{2}$ 이 되는 n_2 가 존재한다. 이렇게 계속 하므로서 각 정수 $k > 1$ 에 대하여 $n_k > n_{k-1}$ 이 되고 $a_{n_k} > M-\frac{1}{k}$ 이 되는 n_k 를 취할 수 있다. 임의로 주어진 ε에 대하여 자연수 N가 존재하여 $a_n < M+\varepsilon\ (n \geq N)$ 이 된다. 지금 $\frac{1}{k} < \varepsilon$ 이 되고 $n_k > N$ 이 되도록 자연수 K를 취하면 $k > K$ 일 때, $\frac{1}{k} < \varepsilon$ 이 되고 $n_k > N$ 이 된다. 따라서

$$M-\varepsilon < M-\frac{1}{k} < a_{n_k} < M+\varepsilon\ (k > K)$$

즉, $|a_{n_k} - M| < \varepsilon$ 이 된다. 따라서 $a_{n_k} \to M$ 이 된다.

⑵ 코오시의 수렴판정법(Cauchy criterion)

단조수렴 정리는 단조수열에만 적용되는 제한이 있다. 그러나 코오시 판정법은 단조 수열에 제한 받지 않고 또 극한값을 알지 않아도 된다.

정의3.15 수열{ a_n }에 있어서, 명제「임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 N이 존재하여 $n, m \geq N$ 인 모든 자연수 n, m 대하여 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 이다」를 만족하면, 수열{ a_n }을 ***코오시(Cauchy)수열***이라고 그림14와 같다.

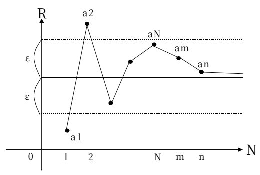


그림14)

정리3.16 임의의 수렴하는 수열은 코오시(Cauchy)수열이다.

증명. 수열 { a_n }이 α에 수렴한다고 하자. 그러면 극한의 정의로부터ε>0을 임의의 실수라 할 때, 이에 대응하는 적당한 자연수 N이 존재하여 $m \geq N$, $n \geq N$인 모든 자연수 m , n에 대하여

$$|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

이 성립한다. 따라서

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

이 성립한다. 그러므로 수열 { a_n }은 Cauchy수열 이다

정리3.17 모든 코오시(Cauchy)수열은 반드시 유계이다.

증명. 수열 { a_n }을 임의의 코오시 수열이라고 하자. 그러면 코오시 수열의 정의에서 ε=1로 택하면, 이에 대응하는 적당한 자연수 N이 존재하여 $m \geq N$, $n \geq N$인 모든 자연수 m , n에 대하여

$$|a_n - a_m| < 1$$

이 성립한다. 따라서 $n \geq N$인 모든 자연수 n 에 대하여

$$|a_n| \leq |a_N| + 1$$

이 된다. 여기서 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3| \cdot \cdot \cdot |a_{N-1}| \, |a_N| + 1\}$로 놓으면, 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n| \leq M$이므로 수열 { a_n }는 유계이다.

4. 함수의 극한

1) 함수의 극한에 관한 정의

고등학교에서의 함수의 극한의 정의는 『 함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 구간에서 정의되어 있다고 할 때, x가 a에 가까이 접근함에 따라서 함수값 $f(x)$가 일정한 수 L에 한없이 가까이 갈 때, $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 L라하고 이것을 기호로 $\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}$ 또는 $x\to a$ 일 때, $f(x)\to L$로 나타낸다.』 반면에 엄밀한 이론적인 정의는 다음 정의4.1과 같이 나타낸다.

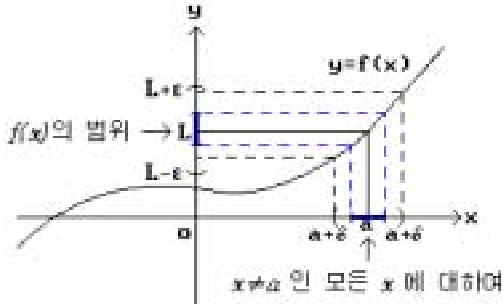
정의4.1 $f(x)$를 실수 $\mathbb{R}$의 부분집합 X 에서 $\mathbb{R}$로의 함수라 하자. 임의의 $\varepsilon>0$에 대해서 $\delta>0$가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$인 모든 $x\in X$에 대하여 $|f(x)-L|<\varepsilon$을 만족 할 때, x가 a에 접근하면 " $f(x)$의 극한이 L이다"라하고, $\lim_{x\to a} f(x)=L$로 나타낸다.

이렇게 함수의 극한을 증명하는 방법을 간단히 '***ε-δ논법***'[29] 이라 하는데 이 증명에는 그림 15와 같이 두 개의 접근도를 나타내는 기호 ε과 δ를 사용한다는 점이다. 다시 말하면 임의의 양수ε을 주더라도 그에 대한 적당한 양수δ가 항상 존재하며, $0<|x-a|<\delta$ 인 모든 x에 대하여 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 이 성립함을 보여야 한다. 그러므로 δ는 ε의 선택에 따라 변한다. 즉 임의로 주어진 양수 ε은 먼저 확정되는 양으로 그 값이 정해질 때마다 이에 대응하여 정의의 조건에 맞도록 δ가 정해질 수 있어야 한다. 따라서 구하는 δ는 ε에 대하여 상대적으로 존재하는 것이기 때문에 보통 ε에 대한 식 $\delta=h(\varepsilon)$으로 나타내면 편리하다.

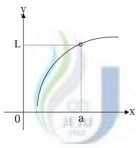
---

29) 위 정의와 같이ε과δ를 써서 극한을 논하는 방법을 'ε-δ논법'이라 하며, 코오시가 사용한 방법이다. 여기서 ε는 error bound(오차의 한계)의 첫 글자 e의 그리스 문자 ε를 딴 것이고, δ는 deviation bound(편차의 한계)의 첫 글자 d 의 그리스문자 δ를 딴 것이다.

그림15)



참고) $0 < | x-a | < \delta$ 가 뜻하는 것은 a 에서 극한을 가지는 함수 $f(x)$ 가 a 근방의 모든 점에서 정의되어 있어야 하지만 그림16) 에서 보듯이 점 a 에서는 꼭 정의되어야 할 필요는 없으며, 그림17)과 같이 a 에서 정의되어 있다 하여도 극한값과 함수 값이 반드시 일치해야 하는 것은 아니다.



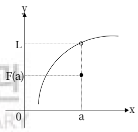


그림16) 그림17)

점 a 에서 함수가 정의되지 않은 경우 $f(a)$ 와 극한값이 일치하지 않는 경우

참고) 여기서 ‘ε-δ논법’에 의한 함수의 극한 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$의 증명 방법은 다음의 단계를 밟아 증명하면 편리하다.

① $f(x) - L$을 $x - a$에 관한 식으로 나타낸다.

② $0 < |x - a| < \delta$ 임을 가정하여 $|f(x) - L| < g(\delta)$을 만족하도록 하는 $g(\delta)$를 찾는다.

③ 부등식 $0 < g(\delta) \leq \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위 $0 < \delta \leq h(\varepsilon)$를 구하고, 이 범위의 값 중 어느 하나를 선택한다. (보통 $\delta = h(\varepsilon)$를 선택한다)

④ 위 ③ 단계에서 선택된 δ에 대하여 다음 사실이 성립함을 검증한다. 즉, 임의의 $\varepsilon > 0$ 을 주더라도 $0 < |x-a| < \delta$이면 반드시 $|f(x)-L| < \varepsilon$이다.

다음에는 그 사용 방법에 대한 예제를 몇 가지 들어보자.

예제11. $f(x)=4x$ 에 대하여 $\lim_{x \to 3} f(x) = 12$임을 증명하여라.

증명. ① $f(x)-L$ 을 $x-a$에 관한 식으로 나타낸다.

$$f(x)-L = 4x-12 = 4(x-3)$$

② $0 < |x-a| < \delta$ 임을 가정하여 $|f(x)-L| < g(\delta)$을 만족하도록 하는 $g(\delta)$를 찾는다. 즉 $0 < |x-3| < \delta$ 임을 가정하면

$$|4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = g(\delta)$$

③ 부등식 $0 < g(\delta) \le \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위 $0 < \delta \le h(\varepsilon)$를 구하고 이 범위의 값 중 어느 하나를 선택한다. (보통 $\delta = h(\varepsilon)$를 선택한다.) 부등식 $0 < 4\delta \le \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위 $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{4} = h(\varepsilon)$이므로, 이 범위의 값 중

$$\delta = h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} \text{ 라고 두면}$$

④ 위 단계에서 선택된 δ에 대하여 다음 사실이 성립함을 검증한다.

즉 임의의 $\varepsilon > 0$ 을 주더라도 $0 < |x-3| < \delta$ 이면

$$|4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \text{이다.}$$

예제12. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ 임을 증명하여라.

증명. ① $f(x)-L = \frac{x^2-1}{x-1} - 2 = \frac{x^2-1-2x+2}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$

($\because$ $0 < |x-1| < \delta$ 이므로 $x-1 \ne 1$)

② $0 < |x-1| < \delta$ 임을 가정하여

$$|f(x)-L| = \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|\frac{x^2-1-2x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right|$$

$$= |x-1| < \delta = g(\delta)$$

③ $0 < g(\delta) = \delta \le \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위

$$0 < \delta \le \varepsilon = h(\varepsilon)$$

를 구하고 이 범위의 값 중 $\delta = \varepsilon$을 선택한다.

④ 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $0 < |x-5| < \delta$ 이면

$$|f(x)-L| = |(2x-4)-6| = 2|x-5| < \delta = \varepsilon \text{ 이다}$$

예제13. $\lim\limits_{x\to c}|x| = |c|$ 임을 증명하여라.

증명. ① $f(x)-L = |x|-|c|$

② $0 < |x-c| < \delta$ 임을 가정하여

$$|f(x)-L| = ||x|-|c|| \le |x-c| < \delta = g(\delta) \text{ (∵삼각부등식)}$$

③ $0 < g(\delta) = \delta \le \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위

$$0 < \delta \le \varepsilon = h(\varepsilon)$$

를 구하고 이 범위의 값 중 $\delta = \varepsilon$을 선택한다.

④ 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $0 < |x-c| < \delta$ 이면

$$|f(x)-L| = ||x|-|c|| \le |x-c| < \delta = \varepsilon \text{ 이다.}$$

예제14. 함수 $f(x) = x^2+2x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 15$ 임을 증명하여라.

증명. ① $f(x)-L = x^2+2x-15 = (x-3)(x+5) = (x-3)\{(x-3)+8\}$

② $0 < |x-3| < \delta$ 임을 가정하여

$$|f(x)-L| = |x^2+2x-15| = |x-3||x-3+8|$$

$$\le |x-3|\cdot(|x-3|+|8|) < \delta(\delta+8) \text{ (∵삼각부등식)}$$

여기서 $0 < \delta \le 1$에서 δ를 찾아보면 $\delta \le 1$이므로 $\delta + 8 \le 9$이다. 따라서

$$|f(x)-L| = |x^2+2x-15| < \delta(\delta+8) \le 9\delta = g(\delta)$$

③ $0 < g(\delta) = 9\delta \le \varepsilon$을 만족하는δ의 범위 $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{9} = h(\varepsilon)$를 구하고,

위의 $\delta \le 1$ 이므로 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{9}, 1\}$이라 하자.

④ 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $0 < |x-3| < \delta$ 이면

$$|f(x)-L| = |x^2+2x-15| < \delta(\delta+8) \le 9\delta = \varepsilon$$ 이다.

2) 함수의 극한에 관한 기본정리

정의4.2 함수 $f(x)$에서, 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여

(1) " $a < x < a+\delta$인 모든 x 에 대하여 $|f(x)-L| < \varepsilon$이다."를 만족 할 때, L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 ***우극한*** 또는 ***우극한값***이라고 하고 기호로는 $\lim_{x\to a+0} f(x) = L$과 같이 나타낸다.

(2) " $a-\delta < x < a$ 인 모든 x 에 대하여 $|f(x)-L| < \varepsilon$이다."를 만족 할 때, L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 ***좌극한*** 또는 ***좌극한값***이라고 하고 기호로는 $\lim_{x\to a-0} f(x) = L$과 같이 나타낸다.

정리4.3 $\lim_{x\to a} f(x) = L$이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{x\to a-0} f(x) = L = \lim_{x\to a+0} f(x)$이다.

증명. $\lim_{x\to a} f(x) = L$이라고 가정하자. 그러면 임의로 주어진 ε>0 에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$ 인 모든 x 에 대하여 $|f(x)-L| < \varepsilon$ 이 성립한다. 만약 $a < x < a+\delta$이면 $0 < |x-a| < \delta$가 되므로 $|f(x)-L| < \varepsilon$ 이 성립한다. 따라서 $\lim_{x\to a+0} f(x) = L$이다. 마찬가지 방법으로 $\lim_{x\to a-0} f(x) = L$이다.

역으로, $\lim_{x \to a-0} f(x) = L = \lim_{x \to a+0} f(x)$라고 가정하자. 그러면 임의로 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 적당한 양수 $\delta_1 > 0$ 이 존재하여

$a < x < a+\delta_1$인 모든 x에 대하여 $| f(x) - L | < \varepsilon$이 성립한다.

또한 적당한 양수 $\delta_2 > 0$가 존재하여

$a-\delta_2 < x < a$ 인 모든 x에 대하여 $| f(x) - L | < \varepsilon$이 성립한다.

여기서 $\delta = \min\{ \delta_1, \delta_2 \}$이라 하면

$0 < |x-a| < \delta$ 인 모든 x 에 대하여 $a < x < a+\delta_1$이거나 $a-\delta_2 < x < a$ 가 되므로 $|f(x) - L| < \varepsilon$이 성립한다. 따라서 $\lim_{x \to a} f(x) = L$이다.

정리 4.4 (*극한값의 유일성*) 만약 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$ 이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{M}$일 때 $\mathrm{L} = \mathrm{M}$ 이다.

증명. 만약 $\mathrm{L} \neq \mathrm{M}$ 이라고 가정하자면 $\frac{|L-M|}{2} > 0$ 이다.

한편 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$이므로 적당한 $\delta_1 > 0$가 있어서 만약에 $0 < |x-c| < \delta_1$ 이면, $|f(x) - L| < \frac{|L-M|}{2}$인 조건을 만족한다. 마찬가지로 $\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{M}$ 이므로 적당한 $\delta_2 > 0$가 있어서 만약에 $0 < |x-c| < \delta_2$ 이면, $|f(x) - M| < \frac{|L-M|}{2}$인 조건을 만족한다. 이 때 적당한 $\delta_1, \delta_2 > 0$에 대하여, $0 < |x-c| < \min\{ \delta_1, \delta_2 \}$이라면, $|f(x) - L| < \frac{|L-M|}{2}$이고 $|f(x) - M| < \frac{|L-M|}{2}$이다. 따라서

$$|L-M| = |(L-f(x)) + (f(x)-M)| \le |L-f(x)| + |f(x)-M|$$
$$< \frac{|L-M|}{2} + \frac{|L-M|}{2} = |L-M|$$

이므로 모순이다. 따라서 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$ 이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{M}$ 일 때 $L = M$ 이다.

정리4.5 만약 $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$ 이고 $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{M}$ 일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\{\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}\} = \mathrm{L} \pm \mathrm{M}$ (복부호동순)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{cf(x)} = \mathrm{cM}$ (여기서 c는 상수)

(3) $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{f(x)} \cdot \mathrm{g(x)} = \mathrm{L\ M}$

(4) 만약 $\mathrm{M} \neq 0$ 일 때, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

증명. (1) 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $0 < |\mathrm{x} - a| < \delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)+g(x)-(L+M)}| < \varepsilon$

인 적당한 δ 를 찾으면 된다. $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$ 이므로 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 에 대하여

$$0 < |\mathrm{x} - a| < \delta_1 \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - \mathrm{L}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

인 δ_1 이 존재하고, $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g(x)} = \mathrm{M}$ 이므로 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 에 대하여

$$0 < |\mathrm{x} - a| < \delta_2 \Rightarrow |\mathrm{g(x)} - \mathrm{M}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

인 δ_2 가 존재한다. 여기서 δ 를 δ_1 , δ_2 중 최소값으로 택하면, (1)과 (2)가 모두 성립하므로,

$$\begin{aligned} |\mathrm{f(x)+g(x)-(L+M)}| &= |\mathrm{f(x)-L + g(x)-M}| \\ &\le |\mathrm{f(x)-L}| + |\mathrm{g(x)-M}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

따라서, 구하는 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 이다.

(2) (1)의 증명에서 g(x), M 대신에 각각 $-$g(x), $-$M 을 대입하면 된다.

(3) $\mathrm{c} = 0$ 인 경우는 분명히 성립한다.

$\mathrm{c} \neq 0$ 인 경우는 $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{f(x)} = \mathrm{L}$ 이므로,

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - M | < \frac{\varepsilon}{|C|}$$

이 되는 적당한 δ 를 잡을 수 있다. 따라서

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | cf(x) - cM | = | c | \, | f(x) - M | < | C | \frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon$$

따라서 $\lim_{x \to a} cf(x) = cM$ 이 성립한다.

(4) $f(x)g(x) - L \cdot M = \{L + f(x) - L\}\{M + g(x) - M\} - L \cdot M$

$$= L \cdot M + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M) - L \cdot M$$

$$= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M)$$

한편 조건에서 $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ 이므로,

$$0 < | x - a | < \delta_1 \Rightarrow | f(x) - L | < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$0 < | x - a | < \delta_2 \Rightarrow | g(x) - M | < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$0 < | x - a | < \delta_3 \Rightarrow | f(x) - L | < \frac{\varepsilon}{3(1 + |M|)} < \frac{\varepsilon}{3|M|}$$

$$0 < | x - a | < \delta_4 \Rightarrow | g(x) - M | < \frac{\varepsilon}{3(1 + |L|)} < \frac{\varepsilon}{3|L|}$$

인 δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 가 존재한다. 이 때 $\delta = \min\{ \delta_1 , \delta_2 , \delta_3 , \delta_4 \}$라고 하면

$$| f(x) \cdot g(x) - L \cdot M | < | L | \, | g(x) - M | + | M | \, | f(x) - L | + | f(x) - L | \, | g(x) - M |$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

(5) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}$ 이므로,

$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ 임을 보이고 곱의 법칙을 이용하면 된다.

그런데, $\lim_{x \to a} g(x) = M$, $| M | > 0$ 이므로

$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-M|<\frac{|M|}{2}$ 인 δ_1 이 존재한다. 또,

$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot|M|^2$ 인 δ_2 가 존재한다. 한편

$$|M|-|g(x)| \leqq |g(x)-M| < \frac{|M|}{2} \Rightarrow \frac{|M|}{2} < |g(x)| \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$$

$$|g(x)|-|M| \leqq |g(x)-M| < \frac{|M|}{2} \Rightarrow |g(x)| < \frac{3|M|}{2} \Rightarrow \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}$$

이므로 $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}$ 이다.

$$\therefore \frac{1}{|g(x)|}-\frac{1}{|M|} = \frac{|g(x)-M|}{|Mg(x)|} \leqq \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|g(x)-M|$$

$$< \frac{2}{|M|^2}\cdot|g(x)-M| < \frac{2}{|M|^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot|M|^2 = \varepsilon$$

따라서, δ 를 δ_1 , δ_2 의 최소값으로 택하면

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow \frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M} < \varepsilon$ 이 성립한다.

정의4.6 $f(x)$는 X 에서 ℝ로의 함수이고, 임의의 큰 수 $M>0$에 대하여 $0\neq|x-a|<\delta$이면 $f(x)>$ M를 만족하는 적당한 $\delta>0$가 존재하면 x가 a로 가까이 갈 때, $f(x)$는 ***"양의 무한대로 간다"*** 고 하며 기호로는 $x\to a$일 때, $f(x)\to\infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ 로 나타낸다. 한편 임의의 음수 $M<0$에 대하여 $0\neq|x-a|<\delta$이면 $f(x)<$ M를 만족하는 적당한 $\delta>0$가 존재하면 x가 a로 가까이 갈 때, $f(x)$는 ***"음의 무한대로 간다"*** 고 하며 기호로는 $x\to a$일 때, $f(x)\to-\infty$ 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ 로 나타낸다.

정의4.7 $f(x)$는 X 에서 ℝ로의 함수이고, X 가 위로 유계가 아닌 경우 임의의 양수 ε에 대하여 $x>M$, $x\in X \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$을 만족하는 양수 M 이 존재하면, $f(x)$는 x가 ∞로 갈 때 극한 L를 가진다고 하고 기호로는 $x\to\infty$일 때,

$f(x) \to L$ 또는 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$로 나타낸다. 한편 X가 아래로 유계가 아닌 경우 임의의 양수 ε에 대하여 $x < M$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$을 만족하는 음수 M가 존재하면, $f(x)$는 x가 $-\infty$로 갈 때 극한 L를 가진다고 하고 기호로는 $x \to -\infty$일 때, $f(x) \to L$ 또는 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ 로 나타낸다.

예제15. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = \infty$임을 보이자.

증명. 임의의 양수 M에 대하여 $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$이라고 하면,

$$0 \neq |x-0| = |x| < \delta \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = \infty$이다.

예제16. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$임을 보이자.

증명. 임의의 양수 M에 대하여 M $> \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 되게 M을 택하면

$$x > M,\ x \in X \Rightarrow |f(x) - L| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{M^2} < \varepsilon$$

따라서 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$이다. 또 임의의 양수 M에 대하여 M$< -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 되게 M을 택하면

$$x < M,\ x \in X \Rightarrow |f(x) - L| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{M^2} < \varepsilon$$

따라서 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$이다.

예제17. $\lim_{x\to1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$임을 구하여라.

증명. $0 < |x-a| < \delta$이면 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} > \dfrac{1}{\delta^2}$ 임에 주목하여,

임의로 주어진 $M > 0$에 대하여 $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ 로 잡을 때, $0 < |x-a| < \delta$이면

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} > \dfrac{1}{\delta^2} = M$ 이므로 $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$이다.

예제18. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x} = 2$ 임을 증명 하여라.

증명. 임의로 주어진 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $K = \dfrac{3}{\varepsilon}$이라 하면,

$x > K$ 일 때, $\left| \dfrac{2x+3}{x} - 2 \right| = \left| \dfrac{3}{x} \right| < \varepsilon$이므로 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x} = 2$이다.

정리4.9 (*조임정리*) 점 a를 포함하는 어떤 개구간 위에서 정의된 함수 f, g, h가 $x \neq a$인 모든 x에 대하여 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 이고 $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$ 이면 $\lim_{x\to a} g(x) = L$이다.

증명. 가정에서 $\delta_1 > 0$ 이 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta_1 \text{ 인 모든 } x \text{ 에 대하여 } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

이다. 또 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 $\delta_2 > 0$ 가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta_2 \text{ 인 모든 } x \text{ 에 대하여 } L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

이고, 적당한 $\delta_3 > 0$ 가 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta_3 \text{ 인 모든 } x \text{ 에 대하여 } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

이다. 이제 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$라고 하면,

$$0 < |x-a| < \delta \text{ 인 모든 } x \text{ 에 대하여 } L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to a} g(x) = L$이다.

예제19. 위의 조임정리를 이용하여 $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$을 구하여라.

증명.

$$\left| x \sin\frac{1}{x} \right| = |x| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$$

이므로, $-|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$ 이다. 한 편

$$\lim_{x \to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x \to 0}|x|$$

이므로, 위 조임정리에 의하여 $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ 이다.

ε-δ방법을 이용하여 증명하면, 임의의 주어진 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $x \neq 0$일 때, $0 < |x-0| < \delta$ 인 모 든 x 에 대하여 $\left| x \sin\frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$을 만족시키는 $\delta > 0$ 이 존재함을 보이면 된다. $\left| x \sin\frac{1}{x} \right| < |x|$가 성립하므로 $\delta = \varepsilon$으로 잡으면

$$\left| x \sin\frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin\frac{1}{x} \right| < |x| < \varepsilon$$

이다. 따라서, $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ 이다.

5. 함수의 연속성

1) 함수의 연속성에 관한 정의

연속 함수란 직관적으로 볼 때 함수 $y = x^2$, $y = \cos x$ 등과 같이 함수의 그래프가 모든 점에서 연결되어 있음을 의미한다. 그래서 고등학교 교과과정에서의 연속 함수에 대한 직관적인 정의는

" 함수 $f(x)$가 그 정의역의 x값 a에 대하여 $f(a)$가 정의 되고, $\lim_{x\to a} f(x)$이 존재하며, $f(a)= \lim_{x\to a} f(x)$가 성립 할 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다. 또, 정의역에 속하는 모든 x 값에서 연속인 함수 $y=f(x)$를 연속함수라고 한다."

여기서 " $\lim_{x\to a} f(x)$ 이 존재한다"를 정리 4 .4 에서 보듯이 고교과정에서는 좌극한값과 우극한값이 같을 때를 의미하고 함수값 $f(a)$가 존재하며 같을 때 연속이라고 정의하고 있다. 일반적으로 고교수준에서 다루는 연속함수는 다음과 같다.

○ 다항함수 $f(x)$는 정의역 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

○ 지수함수 $f(x)=a^x$은 정의역 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.(단, $a>0$, $a\neq 1$)

○ 지수함수 $f(x)=\log_a x$는 정의역 $(0, \infty)$에서 연속이다.(단, $a>0$, $a\neq 1$)

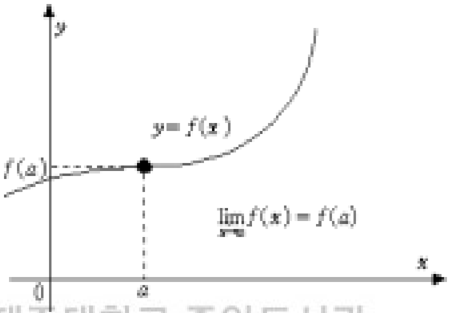
○ 삼각함수 $f(x)=\sin x$ 및 $\cos x$는 정의역 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

○ 삼각함수 $f(x)=\tan x$ 는 $x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \cdots, \pm\frac{2n-1}{2}\pi\cdots$를 제외한 모든 x에서 연속이다.

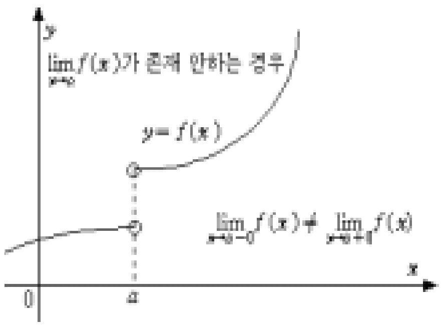
연속이라는 정의는 직관적으로 누구나 명백하게 알고 있는 것 같지만 이 개념의 해석학적인 엄밀한 이론적 정의는 그리 쉽지 않다. 함수 $f(x)$가 정의되고 x를 a에 충분히 가깝게 접근시킬 때 $f(x)$가 $f(a)$에 한없이 가깝게 할 수 있는 경우를 $f(x)$는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다. 자세히 말하면,

정의5.1 함수 $f(x)$가 다음과 같은 세 가지 조건을 모두 만족 할 때,
① 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 정의되고 ② $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하여 ③ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 **연속**($f(x)$ is continuous at a)이라고 한다.
또한 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이 아니면 즉, 위의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 이 함수는 $x=a$ 에서 ***불연속***(discontinuous)이라고 한다.

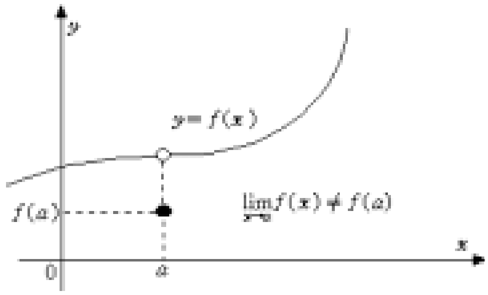
그래프를 이용하여 함수의 연속성을 확인하면

그림18)


이 경우는 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속인 경우이고

그림19)


이 경우는 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재 안하는 경우

그림20) 

이 경우는 $x=a$에서 함수의 극한값과 함수값이 존재하나 서로 다른 경우이므로 둘째와 셋째는 불연속이다.

주의. (1) (*개구간에서의 연속*) 연속함수 $f(x)$를 그 정의역이 x축 또는 개구간으로 이루어졌다고 하자. 이 경우 $f(x)$는 그 정의역에 속하는 각수 a에서 연속이면 연속 함수이다. 예를 들면 $y=\dfrac{1}{x}$은 연속 함수이고 그 정의역은 $(-\infty, 0)$과 $(0, \infty)$로 이루어진다. 비록 0은 제외되었으나 연속의 핵심은 함수가 그 정의역에 속하는 각 수에서 연속인 것이다.[30]

(2) (***폐구간에서의 연속***) 함수 $f(x)$가 폐구간$[a, b]$에서 연속임을 밝힐 때에는 다음과 같이 정의한다.

① 개구간 (a, b)에서 연속이고

② $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ (점 a의 우측에서의 연속, $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 $x=-1$ 에서)

③ $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$ (점 b의 좌측에서의 연속, $y=\sqrt{1-x^2}$ 의 $x=1$ 에서)가

모두 성립함을 보이면 된다.

2) 함수의 연속성에 관한 기본정리

30) 대학교재연구회 《미적분학》. 경문사. 1993. P34.

정리5.2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $f(x)\pm g(x)$도 $x=a$에서 연속이다

증명. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이고, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$이다. 따라서 앞의 극한에 관한 정리4.6으로부터 $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)$이다.

그러므로 두 함수의 합 $f(x)\pm g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

정리5.3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $f(x)\cdot g(x)$도 $x=a$에서 연속이고, $g(x)\neq 0$일 때, $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

증명. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이고, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$이다. 따라서 앞의 극한에 관한 정리4.6로부터 $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\cdot g(a)$이다. 그러므로 두 함수의 곱 $f(x)\cdot g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

같은 방법으로 $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속임을 보일 수 있다.

정리5.4 함수 $f(u)$가 $u=A$에서 연속이고 $\lim_{x\to a} g(x)=A$이면 합성함수 $f((x))$도 $x=a$에서 연속이다. 즉 $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(A)$

증명. 함수 $f(u)$가 $u=A$에서 연속이므로,

임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $|u-A|<\eta$이면 $|f(u)-f(A)|<\varepsilon$이 성립하는 $\eta>0$가 존재한다. 또, $\lim_{x\to a} g(x)=A$ 이므로, 이 $\eta>0$ 에 대하여

$|x-a| < \delta$이면 $|g(x)-A| < \eta$가 성립하는 $\delta > 0$ 가 존재한다. 따라서 $|x-a| < \delta$이면 $|g(x)-A| < \eta$이므로 $|f(g(x))-f(A)| < \varepsilon$ 이 되어 $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(A)$이다.

정리5.5 다항함수 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 은 $x = c$ 에서 연속이다.

증명. $x^i - c^i = (x-c)(x^{i-1} + cx^{i-2} + \cdot\cdot\cdot + c^{i-1})$이므로

$$p(x)-p(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i - c^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i (x-c)(x^{i-1} + cx^{i-2} + \cdot\cdot\cdot + c^{i-1})\text{이다.}$$

임의의 양수 ε에 대하여 δ≤Max $(|c|, 1)$라고 잡으면, $|x-c| < \delta$를 만족하는 x에 대해

$$|x^{i-1} + cx^{i-2} + \cdot\cdot\cdot + c^{i-1}| \le i|2c|^{i-1} \le M_i$$

를 얻고 $M = Max(|a_i, M_i|)$로 택한다. 그러면 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$ 일 때

$$|p(x)-p(c)| = |\sum_{i=0}^{n} a_i (x-c)(x^{i-1} + cx^{i-2} + \cdot\cdot\cdot + c^{i-1})|$$

$$\le |x-c| \sum_{i=0}^{n} |a_i| |x^{i-1} + cx^{i-2} + \cdot\cdot\cdot + c^{i-1}|$$

$$\le \delta_n \cdot \mathrm{M} < \varepsilon \text{를 얻는다.}$$

예제20. 실수의 집합 ℝ에서 정의된 함수 $f(x) = x+2$는 $x = a$에서 연속임을 보여라.

증명. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $|x-2| < \delta$일 때, 적당한 양의 수 δ =ε라고 두면 $|f(x)-f(a)| = |(x+2)-(a+2)| = |x-a| < \delta = \varepsilon$ 를 만족하므로 $f(x) = x+2$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

예제21. 실수의 집합 ℝ에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$은 $x=2$ 에서 연속임을 보여라.

증명. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $|x-2| < \delta$일 때, $|f(x)-f(2)| < \varepsilon$를 만족하는 적당한 양의 수 δ를 찾으면 된다. 여기서 $\delta \le 1$인 δ를 잡으면 $|x-2| < 1$ 또는 $1 < x < 3$ 이다.

$$|f(x)-f(2)| = |x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$$
$$< \delta \cdot |x+2| < 5\delta$$

그래서 $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$이라면 $|x-2| < \delta$일 때, $|x^2-4| < \varepsilon$이다. 그러므로 $f(x)=x^2$ 은 $x=2$ 에서 연속이다.

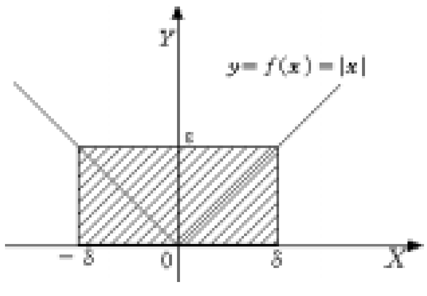
예제22. 실수의 집합 ℝ에서 정의된 함수 $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속임을 증명하라.

증명. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $|x-0| < \delta$일 때, $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$를 만족하는 적당한 양의 수 δ를 찾으면 된다. 이 때 $\delta = \varepsilon$으로 택하면

$|x-0| < \delta$이면 $|f(x)-f(0)| = ||x|-0| = |x| < \varepsilon$이므로

$f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

그림21)



예제23. 실수의 집합 ℝ에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$가 연속임을 증명하여라.

증명. $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ 이고 $|\sin t| \le |t|$, $|\cos t| < 1$ 이므로

$$|\sin x - \sin y| = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \le 2\left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 = |x-y|$$

따라서 a가 실수일 때, 임의의 양수 ε에 대하여 δ =ε으로 택하면

$$|x-a| < \delta\text{일 때, } |f(x)-f(a)| = |\sin x - \sin a| \le |x-a| < \delta = \varepsilon$$

따라서 $f(x)$는 ℝ에서 연속이다.

3) 불연속함수의 종류

정의 5.1에서 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이 아니면, $f(x)$는 $x=a$ 에서 불연속이라고 정의하였다. 불연속의 종류로서는 다음과 같다.

(1) 도약 불연속(jump discontinuity)

(2) 무한 불연속(infinite discontinuity)

(3) 진동 불연속(osillatory discontinuity)

(4) 제거가능 불연속(removable discontinuity)

(5) 그 밖의 불연속으로 나눌 수 있다.

(1) 도약 불연속(jump discontinuity)

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 우극한, 좌극한이 존재하지만

$\lim_{x \to a+0} f(x) \ne \lim_{x \to a-0} f(x)$ 일 때, $f(x)$는 $x=a$ 에서 ***도약 불연속***이라 한다.

함수 $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$ 는 x = 0 에서 도약 불연속이다.

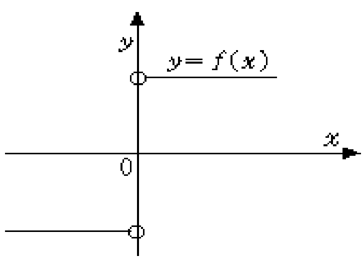
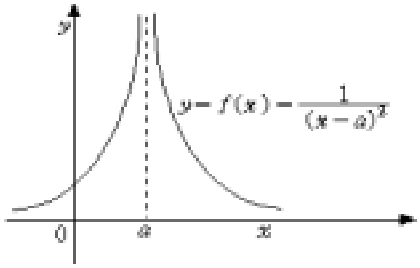


그림22)

⑵ 무한 불연속(infinite discontinuity)

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$중의 어느 한 경우 일 때, $f(x)$는 $x=a$ 에서 ***무한 불연속***이라 한다. $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$이므로 $f(x) = \frac{1}{x^2}$은 $x=a$ 에서 무한 불연속이다.

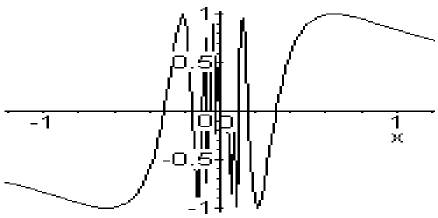
그림23)



⑶ 진동 불연속(osillatory discontinuity)

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 의 근방에서 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ 와 같이 함수 값이 진동할 때, $f(x)$는 ***진동 불연속***이라 한다.

그림24)



⑷ 제거가능 불연속(removable discontinuity)

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$ 이 존재하고,

2. $f(a)$가 존재하지 않거나 $f(a) \neq L$ 인 경우 $f(x)$는 $x=a$ 에서 ***제거 가능한 불연속***이라 한다.

함수 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$ 는, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 이지만 $f(1)$은 존재하지 않는다. 따라서, $f(x)$는 $x=1$에서 제거 가능한 불연속이다. 즉, $f(1)=2$로 정의하면,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : x\neq 1 \\ 2 & : x=1 \end{cases}$$

은 $x=1$ 에서 연속인 함수가 되어, 불연속인 점 $x=1$ 은 제거할 수 있다.

(5) 그 밖의 불연속

함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & : x \text{ 가 유리수 일 때} \\ 0 & : x \text{ 가 무리수 일 때} \end{cases}$ 은 모든 점에서 불연속이다.

따라서, 이 함수는 도약 불연속, 무한불연속, 진동 불연속, 제거 가능 불연속의 어느 경우에도 속하지 않는다.

예제24. 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x \text{ 는유리수}) \\ 0 & (x \text{ 는무리수}) \end{cases}$ 에 대하여 $x=0$ 과 $x=a$ (단 $a\neq0$)에서의 연속성을 보여라.

증명. (1) $x=0$ 일 때, $|x-0|<\delta=\varepsilon$이라 놓으면

$|f(x)-f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \varepsilon$이다. 따라서 $x=0$ 에서 연속이다.

(2) $x=a$ (단 $a\neq 0$)일 때, a가 유리수이면 모든 무리수 x에 대하여

$|f(x)-f(a)| = |0-a| = |a| < \varepsilon$이고, a가 무리수이면 모든 유리수 x에 대하여

$|f(x)-f(a)| = |x-a| = |x| < \varepsilon$(단 $|x|>|a|$)이다. 따라서, $x=a$ 에서 불연속이다.

예제25. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 는 $x=2$ 에서 불연속 임을 보여라.

증명. ① $f(x)-L = \dfrac{x^2-4}{x-2}-4 = \dfrac{x^2-4-4x+8}{x-2} = \dfrac{(x-2)^2}{x-2} = x-2$

($\because$ $0<|x-2|<\delta$이므로 $x-2\neq 0$)

② $0<|x-2|<\delta$임을 가정하여

$$|f(x)-L| = \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = \left|\frac{x^2-4-4x+8}{x-2}\right| = \left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|$$

$$= |x-2| < \delta = g(\delta)$$

③ $0 < g(\delta) = \delta \le \varepsilon$을 만족하는 δ의 범위 $0<\delta\le\varepsilon = h(\varepsilon)$를 구하고 이 범위의 값 중 $\delta = \varepsilon$을 선택한다.

④ 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $0<|x-2|<\delta$ 이면

$$|f(x)-L| = \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = \left|\frac{x^2-4-4x+8}{x-2}\right| = \left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|$$

$= |x-2| < \delta = \varepsilon$ 이다.

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ 극한값은 존재하나 함수값 $f(2)$가 정의되지 않으므로

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 는 $x=2$에서의 불연속이다.

예제26. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-x^n+x^{n+1}}{1-x^n+x^{n+2}}$ (n은 양의 정수)로 정의되었을 때, $f(x)$는 $\mathbb{R}$위에서 연속인지 알아보아라.

증명. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-x^n+x^{n+1}}{1-x^n+x^{n+2}}$ (n은 양의 정수)에서 $|x|<1$일 때는 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로 $f(x)=1$

$x=1$ 일 때는 $f(1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-1^n+1^{n+1}}{1-1^n+1^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$x=-1$ 일 때는 $f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\{1-(-1)^n\times 2\}=\begin{cases}-1 & (n\text{ 이 짝수일때})\\ 3 & (n\text{ 이 홀수일때})\end{cases}$ 따라서

$x=-1$ 일 때는 $f(x)$는 값을 갖지 않는다.

$|x|>1$ 일 때는 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$ 이므로 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^n}-1+x}{\dfrac{1}{x^n}-1+x^2}=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

따라서 $|x|>1$일 때는 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 여기서 $f(x)$의 그래프를 그려보면 $x=\pm 1$ 을 제외하면 $f(x)$는 항상 연속이지만 $\lim\limits_{n\to 1-0}f(x)=1$, $\lim\limits_{n\to 1+0}f(x)=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to 1}f(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$ 에서 불연속이다.

또 $x=-1$ 일 때는 $f(x)$는 정해진 값을 갖지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서도 불연속이다.

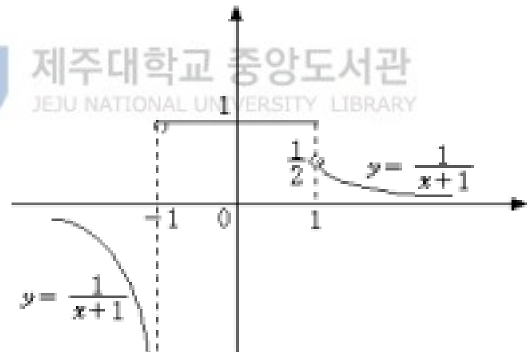


그림25)

4) 함수의 연속과 관련된 정리들

정리5.6 (*중간값의 정리*) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)<k<f(b)$이면 $k=f(c)$를 만족하는 c가 개구간 (a, b)안에 적어도 하나이상 존재한다.

증명. $f(a) < k < f(b)$ 인 경우를 증명한다.

$$F(x) = f(a) - k$$

라고 하면 $F(x)$ 는 $[a, b]$에서 연속이고, $F(a) < 0$, $F(b) > 0$이다.

여기서 $\mathrm{M} = \{x \mid a \le x \le b,\ F(x) \le 0\}$라고 하면 M은 $[a, b]$의 부분 집합이고 $\mathrm{M} \ne \phi$ 이다. b는 M의 상계이므로 M의 상한이 존재한다. 따라서 sup M= c 라 하면 $a \le c \le b$이다.

$c = b$ 라 가정하면, $F(x)$는 연속이므로 $\delta < 0$가 존재하여 $F(b)$ 와 $F(b-\delta)$ 는 같은 부호가 된다. 그런데, $F(b) > 0$ 이므로 $F(b-\delta) > 0$ 이다.

한편 $b-\delta = c-\delta < c$ 이므로 $F(c-\delta) \le 0$ 가 되어 모순이다.

또 $c = a$ 라고 가정하면, $F(x)$ 는 연속이므로 $\varepsilon > 0$ 이 존재해서 $F(a) = F(c)$ 와 $F(c+\varepsilon)$ 는 같은 부호가 된다. 그런데, $F(a) < 0$ 이므로 $F(c+\varepsilon) < 0$ 이다. 한편 $a+\varepsilon = c+\varepsilon > c$ 이므로 $F(c+\varepsilon) > 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $a < c < b$ 이고 sup M = c 이므로 $F(c) \ge 0$ 이다. 만일 $F(c) > 0$ 라 하면, c 근방에서 $F(x) > 0$ 이다. 즉 $a < c' < c$ 인 c'가 존재해서 $c' < x \le c$ 이면 $F(x) > 0$ 이므로 $x \notin M$ 이다. 또 sup $M =$ c 이므로 $x > c$ 이면 $x \notin M$ 이다. 그러므로 $x \in M$ 이면 $x \le c'$가 되어 c' 는 M의 상계이다. 이것은 sup $M = c$ 에 모순이다. 따라서 $F(c) = 0$ 즉, $F(c) = K$가 되어 c 가 존재한다.

예제 27. 방정식 $(x^2-1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ 은 0 과 1 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

증명. $f(x) = (x^2-1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$라 놓으면 $f(x)$는 x의 모든 값에 대하여 연속이다.

$$f(0) = (0^2-1)\cos 0 + \sqrt{2}\sin 0 - 1 = -2$$

이므로 $f(0) < 0$ 이고,

$$f(1)=(1^2-1)\cos 1+\sqrt{2}\sin 1-1=\sqrt{2}\sin 1-1$$ 이므로

($\because 1 > \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\sin 1 > \sin\frac{\pi}{4}$ 따라서, $\sqrt{2}\sin 1-1 > \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-1=0$)

$f(1) > 0$ 이다. 따라서 $f(x)=0$은 0과 1사이에 적어도 1개의 근을 갖는다.

정리5.7 (*최대 최소값의 정리*) $f(x)$가 유계인 폐구간 $I=[a, b]$에서 연속이고 $M=\sup\{f(x) \mid x\in I\}$, $m=\inf\{f(x) \mid x\in I\}$ 라고하면 $f(d)=M$, $f(c)=m$ 인 점 c, d가 구간 $[a, b]$에 존재한다.

증명. $M=\sup\{f(x) \mid a\le x\le b\}$이므로 각 $n=1, 2, 3 \cdot\cdot$에 대하여 $M-\frac{1}{n}$은 집합 $\{f(x) \mid a\le x\le b\}$의 상계가 아니다. 따라서,

$$^{\exists}x_n\in I \mid M-\frac{1}{n} < f(x_n)\le M$$

곧, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$ 인 수열 (x_n)을 I 에서 택할 수 있다. 모든 n 에 대하여 $a\le x_n\le b$ 이므로 (x_n)은 유계수열이다. 따라서 Bolzano-Weierstrass 정리에 의하여 (x_n)은 수렴하는 부분수열(x_n)를 가진다.

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=d$ 라고하면 $d\in[a, b]$ 그런데 f 는 d 에서 연속이므로

$$f(d)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

이다. 같은 방법으로, $f(c)=m$ 인 점 c가 I 에 존재함을 증명 할 수 있다.

정리5.8 (*롤의 정리*)함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 끝 점 a, b를 제외한 구간 (a, b)의 점 x에 대하여 $f'(x)$가 존재하여 $f(a)=f(b)$이면 $f'(x)=0$ 이 되는 $x=c$가 구간 (a, b)안에 적어도 하나 존재한다.

증명. ⑴ 함수 $f(x)$가 상수 함수 일 때, 구간 (a, b)안의 모든 c에 대하여

$f'(x)=0$ 이므로 정리가 성립한다.

(2) 함수 $f(x)$가 상수 함수가 아닐 때, $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)=f(b)$이므로 구간 (a, b)안의 한 값 $x=c$ 에서 최대값 최소값 중 하나를 가진다. $x=c$ 에서 최대값을 가질 때 충분히 작은 값 h 에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

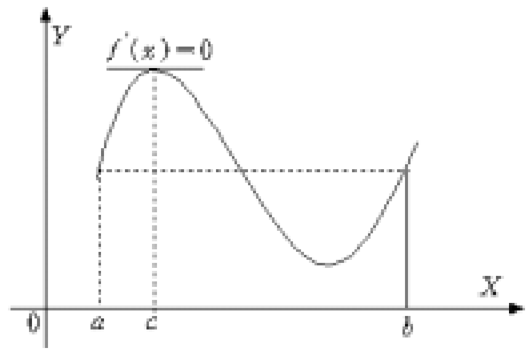
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

그런데, $f(x)$는 $x = c$에서 미분 가능하므로 평균변화율의 좌극한값과 우극한값이 같아야 한다. 따라서, $x=c$ 에서

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

$x=c$ 에서 최소값을 가질 때에도 같은 방법으로 $f'(c)=0$ 임을 보일 수 있다. 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)=f(b)$ 일지라도 구간 (a, b)에서 미분가능 하지 않으면 Roll 정리가 성립하지 않는다.

그림26)



정리5.9 (*평균값 정리*) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 구간$[a, b]$에서 연속이고, $f'(x)$와 $g'(x)$가 존재하고, 끝점을 제외한 구간의 각 점에서 $g'(x)\neq 0$이면 다음을 만족하는 a, b사이에 적어도 하나의 x값 즉, $x=c$가 존재한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

이 때, $g(x)=x$ 인 경우에 대하여 평균값 정리가 된다.

증명. $g(b)=g(a)$라 가정하면 a, b 사이의 어떤 x에 대하여 $g'(x) = 0$ 이다. 그러나 이것은 가정에 모순이다. 그러므로 $g(b)\neq g(a)$가 된다.

상수 $K=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 라 놓으면

$$\mathrm{F(x)} = f(x)-f(b)-K[g(x)-g(b)]$$

이고 이 함수는 Roll의 정리의 조건에 만족한다. 따라서 a, b 사이에 적어도 하나의 x 값 즉, $x=c$ 에 대하여

$$F'(x)=f'(x)-Kg'(x) = 0$$

이다. 따라서 $\mathrm{K} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ 이다.

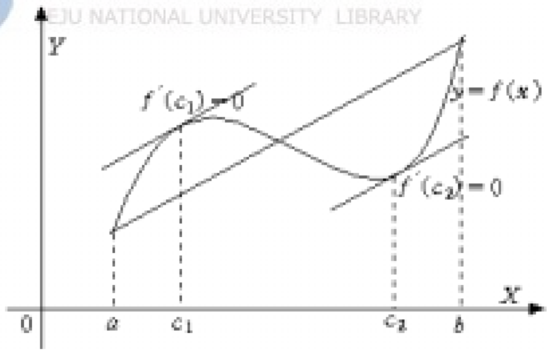


그림27)

Ⅲ. 결 론 및 제 언

1) 결 론

본 연구에서는 미·적분학의 기초가 되는 극한 개념을 이용하여 해석학에서 가장 기본이 되면서 중요한 역할을 하고 있는 수열 및 함수의 극한과 연속성을 이론적인 측면에서 정확하고 세밀하면서도 엄밀하게 고찰 했고, 극한 개념을 보다 확고히 하기 위하여 실수의 개념, 실수의 연속성, 수열의 극한, 함수의 극한, 함수의 연속성 등을 단계적으로 자세히 논의하고자 하였으며 최종적으로 함수의 연속성과 그에 관한 응용 몇 가지를 다루면서 불연속 함수의 종류로 본 연구를 마무리하였다. 즉, 현행 고등학교 교과서에서 증명이 없이 직관적으로 다루어지고 있는 극한 개념을, 이론적인 방법에 의한 극한 개념으로 연구해 보았다. 왜냐하면 수학교육에서는 직관적인 면도 중요하지만 증명 없이 정의나 정리들이 사용되는 것은 좀 더 깊이 생각해야 할 문제이기 때문이다. 그래서 본 연구에서는 보다 극한의 개념을 이용한 방법으로 논의를 전개하였고 또한 ε-δ방법에 의한 다양한 예제를 보임으로써 일선 수업 현장에서 학생들을 지도하는 교사에게는 극한의 개념이나 연속성에 대한 이해를 도울 뿐만 아니라 일부 우수한 고등학생들에게는 고등수학을 접하기 전에 수열 및 함수의 극한과 연속성에 대한 정확한 이해를 돕고자 하였으며, 그 외 수학 교육에 관심이 있는 사람들에게도 도움이 되리라고 본다.

2) 제 언

수학교육의 현대화 과정에서 논리의 엄밀성을 강조하기 위해서는 미·적분학의 토대가 되는 극한의 개념 및 그의 성질에 관한 지도는 현재 그래프를 이용한 직관적인 방법과 동시에 보다 엄밀한 논리의 접근도 재고되어야 할 것이다.

수학적 개념을 이해하고 활용함으로써 분석 종합할 수 있는 능력을 함양하기보다는 단순한 계산에만 치중되어 있는 극한교육의 문제점을 해결하고, 수학 교육의 질을 향상시키기 위한 방안을 구상하고자 한다. 따라서 그 방안으로서 다음과 같은 사항을 고려하여 롤 수 있다.

첫째, ε-δ논법을 이용한 수열 및 함수의 극한 개념의 지도는 고등학교 학생들의 수준에 적합한 도입 방법과 그들의 탐구심과 호기심을 유발 할 수 있는 내용의 구성에 대하여 교과연구회 등의 차원에서 좀더 적극적이고 심도 있는 논의와 연구가 이루어져야 할 것이다.

둘째, 교과서와는 차별화를 두어 ε-δ논법을 이용하여 보다 엄밀한 극한의 정의를 내린 후 극한의 내용을 전개시킨 보조 학습자료를 만드는 것이다. ε-δ논법을 이용한 극한의 지도는 고등학교 학생들에게는 무리라는 생각이 지배적이지만 충분히 이해할 수 있는 능력이 있는 상위권 학생들에게는 시도해 볼 만하다. 이것은 극한의 응용인 연속, 미・적분 등에 도움을 줄 것이다.

셋째, 극한을 이해하기 위하여 다양한 접근 방법을 시도해 보아야 할 것이다. 특히 극한의 개념은 직관적으로 이해되는 부분이기 때문에 학생들에게 컴퓨터를 이용하여 시각적으로 보여줄 수 있고 또한 학생들이 직접 결과를 도출하는 적극적인 수업 방법이 더욱 효과적 일 것이다.

참 고 문 헌

1. 대한교재연구회 (1993), 「미적분학」. 서울 : 경문사.

2. 김광환(1996), 「해석학 입문」, 서울 : 청문각.

3. 김성기 . 김도한 . 계승혁(1996), 「해석개론」, 서울 : 서울대학교 출판부.

4. 김인수(1997),「해석학의 기초개념과 학습지도」, 전남 : 전남대학교 출판부.

5. 문교부(1988),「수학과 교육과정 해설(5차)」, 서울 : 대한교과서주식회사.

6. 교육부(1995),「수학과 교육과정 해설(6차)」, 서울 : 대한교과서주식회사.

7. 박두일 . 신동선(1993), 「고등학교 수학 Ⅰ」교과서. 서울 : (주)교학사.

8. 박두일 . 신동선(1993), 「고등학교 수학 Ⅱ」교과서. 서울 : (주)교학사.

9. 박한식 외 5명(1998), 「고등학교 수학 Ⅰ」교과서. 서울 : (주)지학사.

10. 박한식 외 5명(1998), 「고등학교 수학 Ⅱ」교과서. 서울 : (주)지학사.

11. 김명렬 외 2인(1995). 고등학교 공통수학. (주) 중앙교육진흥연구소.

    ____________(1995). 고등학교 수학 I. (주) 중앙교육진흥연구소.

    ____________(1995). 고등학교 수학 Ⅱ. (주) 중앙교육진흥연구소.

12. 宋謹和(1996). 極限槪念과 函數의 連續性에 關한 硏究, 慶熙大學校. 석사학위논문

13. 한종희(1997). “고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구” 석사학위논문. 한국교원대학교 대학원.

14. 박선화(1993), “개념학습에서 발생하는 인지적 갈등요인에 관한 고찰 - 개념정의와 개념이미지의 관계를 중심으로”. 대한수학교육학회 논문집, 제3권,제 1호.

15. 박선화(1993). “무한 개념의 이해 - 칸토르의 무한 개념을 중심으로 한 역사적 접근”. 대한수학교육학회 논문집, 제3권, 제2호.

16. 박선화(1998). “수학적 극한 개념의 학습지도 방향 탐구 -수열의 극한 개념을 중심으로”

17. 우정호(1998). “학교수학의 교육적 기초” 서울대학교 출판부.

18. 우정호(2000). “수학 학습-지도 원리와 방법”. 서울대학교 출판부.

<Abstract>

The Study on Progression and the Limit and Continuity of Function through the Use of the Concept of Limit

Moon, Dong-Joo

Mathematics Education Major

Graduate school of Education, Cheju National University

Jeju, Korea

Supervised by Professor Jung, Seoung-Dal

The education of mathematics is repeating processes to understand a higher level of concept on the basis of a certain basic one, so the insufficient understanding of basic concepts can be a serious obstacle to learning a new concept of mathematics. From this viewpoint, the concept of limit, which ranges from progression and the limit of function to differential and integral calculus constituting the significant sections of high school's mathematics in Korea, requires a precise learning since it contains wide application, educational value and the very important concept underlying higher mathematics. The concept of limit also needs learning through a logical method and understanding in that modern

mathematics tends to stress more logical strictness. It is very hard to give a strict definition to the concept of limit in theory, however. As a result, the education of mathematics in the country's high schools lacks a logical strictness in the approaches to the concept of limit, which leads to the education seeking the solutions to problems on the basis of an intuitive conception rather than the clear understanding of it.

Accordingly, the study first investigated the characteristics of high schoolers' understanding the concept of limit in the previous step of the learning of limit and the continuity of function and then the important nature of real number. It finally proved the limit of progression, the limit of function and the continuity of function centering on the strictly theoretical definition of the $\varepsilon-\delta$ argument, escaping from an intuitive method, and reorganized the contents of textbook. And also, it contained various and specific examples in a bid to offer lots of reference to mathematics teachers in need of theoretical research.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August . 2003