碩士學位請求論文

基數法의 理論的 基礎

指導教授 梁 成 豪

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

高 永 宗

1996年 8月

基數法의 理論的 基礎

指導教授 梁 成 豪

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

1996年 6月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育 專攻

提出者 高 永 宗

高 永 宗의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1996年 7月 日

審 査 委 員 長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

< 초 록 >

기수법의 이론적 기초

고 영 종

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 양 성 호

본 연구는 중학교 교육과정에 자연수 범위에서 소개된 기수법에 관한 내용을 진법의 기본 정리를 토대로 하여 유리수 범위로 기수법을 확장 시켰고 더 나아가서 p진수와 p^2진수 사이의 관계를 밝힌 다음 더욱 일반화 시켜 p진수와 p^n진수 사이의 관계를 살펴보았다.

목 차

I. 서 론

사람들이 언제부터 수를 써서 셀 수 있었는지를 정확히 알 수는 없지만 오래 전부터 수를 자연스럽게 배우고 사용하여 왔다. 그러나 수가 탄생하기 전 먼 옛날에도 우리의 조상들은 어떤 사물이 많고 적은 것을 생각했을 것이고 그러한 많고 적음(수 개념)을 쉽게 파악할 수 있는 방법들을 모색했을 것이다. 숫자가 탄생하기 전 우리의 조상들은 어떤 방법으로 물건(사물)의 양을 헤아렸을까? 우리의 추측을 동원해 생각해 보면 수가 탄생하기 전 옛날 사람들은 사물의 양(많고 적음)을 다음과 같은 방법으로 파악했을 것으로 여겨진다.

어떤 마을의 원시인이 소를 20마리 키우고 있다고 생각해 보자. 그러나 그 원시인은 20까지 헤아릴 수는 없지만 들판에 내몰았던 소가 저녁이 되어 자기 울타리로 돌아올 때 소가 전부 돌아왔는지 아니면 아직도 돌아올 소가 남아 있는지를 알 수 있다. 아침에 소를 내몰 때 주변에 있는 돌멩이를 한마리 내몰 때마다 하나씩 주워다가 한 곳에 쌓아둔다. 그러면 소를 다 내몰고 나면 돌멩이가 여러 개 쌓인다. 그런 다음 저녁에 소가 울타리로 돌아올 때 쌓아둔 돌멩이를 한마리 돌아올 때마다 하나씩 옆으로 옮긴다. 그래서 돌멩이가 전부 옆자리로 옮겨지면 소가 전부 돌아왔기 때문에 울타리 문을 닫을 수 있을 것이다. 그러나 만약 돌멩이가 전부 옮겨지지 않았다면 아직도 돌아오지 않는 소가 있다는 것을 알아 차리고 울타리 문을 닫지 않는다. 다시 말해 소와 돌멩이를 일대일 대응시켜 수량을 파악하는 방법이다.

그러나 위 방법은 돌멩이를 일일이 주워서 옮겨야 되는 번거로움이 있다. 그러한 단점을 보완해서 생각해 낸 수단이 무엇일까? 바로 손가락이나 발가락을 이용해서

수량을 헤아리는 방법이다. 위에서 소를 20마리 키우는 원시인인 경우 소가 울타리로 돌아올 때마다 손가락을 하나씩 구부린다. 열 마리가 돌아오면 열 손가락이 전부 구부려진다. 열한번째부터 손가락을 하나씩 편다. 그래서 한 차례 양손의 손가락이 구부려졌다가 전부 펴지면 소가 전부 돌아온 것이다. 그렇지만 위 방법도 아주 큰 수개념이 필요할 때는 여간 불편하지 않다. 옛날 사람들은 처음에는 이렇듯 손가락이나 발가락을 사용해서 물건과 일대일 대응시키면서 헤아리다가 큰 수개념이 필요할 때는 한 손의 손가락 수에 해당하는 5나 양손의 손가락 수에 해당하는 10을 한 단위로 생각하는 방법을 깨달았다. 즉 한 손의 손가락을 모두 구부려서 물건과 일대일 대응이 되면 돌멩이를 하나 주워다 놓고 다시 한 손의 손가락을 구부려서 물건과 일대일 대응되면 다시 돌멩이 하나를 주워다 놓는다. 그런 방법을 사용하면 돌멩이 4개로 소 20마리를 나타낼 수 있다. 그러한 생각이 차츰 발전하여 오늘날 우리가 흔히 사용하는 기수법인 5진법 또는 10진법이 탄생 했으리라 추측할 수 있다.

현재 6차 교육과정에 의하여 개정된 중학교 1학년 교과서에서 다루어 지고 있는 기수법에 관한 내용은 오늘날 대부분의 국가에서 사용하고 있는 10진법을 토대로 하여 2진법과 5진법에 한정하여 다루고 있다. 그러나 동일한 수를 여러 각도에서 기수하는 방법으로 여러가지 진법에 관한 내용을 학습지도하므로써 동일한 사물이라 할지라도 여러 다른 관점에서 관찰하고 표현하는 사고 훈련을 하게 되고, 따라서 수학교육의 목적 중의 하나인 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 배양시킬 수 있다고 본다. 따라서 중학교 과정에서 여러가지 진법을 지도할 수 있는 이론적 기초가 마련되어야 하며 그런 입장에서 본 연구는 진법의 기본정리를 마련하여 십진수와 다른 진수와의 관계, 십진수가 아닌 p진수와 p^n진수와의 관계에 대한 이론적 기초를 정립하는 데 목적이 있다.

Ⅱ. 본 론

2.1 기수법의 종류

(1) 덧셈의 원리에 의한 기수법 (가법적 기수법)

기수법 중에서 가장 원시적인 것이 덧셈의 원리에 의한 기수법이다. 이것을 가법적 기수법이라 하는데, 하나 하나의 기호가 나타내는 수들의 합으로 전체 기호가 나타내는 수를 정하는 방법이다.

(예 1) I=1, V=5, X=10 이라 하면 28=XXVIII 또는 28=VVVVVIII 등으로 나타낼 수 있다.

(2) 곱셈의 원리에 의한 기수법 (승법적 기수법)

정해진 진법에 따라 각 단위, 즉 기저를 나타내는 기호를 정하고 이들 단위를 나타내는 기호 앞에 정해진 진법의 기본숫자를 표시하여 기본숫자가 나타내는 수와 단위기호가 나타내는 수와의 곱들의 합으로서 전체기호가 나타내는 수를 정하는 방법이다.

(예 2) 한자의 기수법

삼만오천칠십$= 3 \times 10,000 + 5 \times 1000 + 7 \times 10 = 35070$

여기서 천은 어느 위치에 있든지 아라비아 숫자의 1,000을 의미한다.

(3) 자리의 원리에 의한 기수법 (위치적 기수법)

각 단위에 곱해질 기본숫자가 쓰여지는 자리(위치)를 정하여 놓는 방법으로 기본숫자가 쓰여질 단위의 위치가 정해져 있으므로 해당하는 기본숫자가 없을때는 그 자리를 비워 둘 수가 없다. 따라서 기본숫자 0의 존재가 필수적이며 다른 기수법보다 훨씬 체계화된 것으로 5,6세기경 인도에서 계통적인 진전을 이룩한 것이라고 알려져 있다. 현재 우리가 사용하는 아라비아 기수법이다.

2.2 용어의 뜻

기수법에서 사용되는 몇 가지 용어의 뜻을 분명히 해 둘 필요가 있다.

(1) 기수법(numeration system)

수를 숫자(기호)로써 나타내는 방법을 기수법이라 한다. 옛날에는 하나 하나의 수에 수사나 숫자를 붙이고 있었다. 이와 같은 기수법은 불편하기도 하거니와 또 무한히 많은 수에 대하여 이같은 방법은 불가능하므로 오늘날에 와서는 보통 자리의 원리를 이용하여 기수법을 사용한다. 그 방법에 따르면 하나의 예로 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9의 열개의 숫자의 배열에 의하여 어떠한 큰 수라도 나타낼 수 있는 것이다.

(2) 진수(base)

자리의 원리에 의한 기수법(위치적 기수법)에 의해 수를 나타내면 그 일반형은 양의 유리수 P에 대하여

$$P = A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \cdots + A_1 r + A_0 + B_1 r^{-1} + B_2 r^{-2} + \cdots + B_n r^{-n} + \cdots$$

이다. 이때 r를 진수(base)라 부르며 10진법으로는 $r = 10$이며 $0 \leqq A_i \leqq 9$인 정수, $0 \leqq B_i \leqq 9$인 정수이다.

(3) p진법

위치적 기수법에 의하여 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 p배씩 커지게 정하여 수를 나타내는 방법을 말한다.

(4) 자리의 원리 (principle of location)

10진법에 의한 기수법에서는 먼저 0에서 9까지의 숫자를 정한다. 그리고 이 10개의 숫자로, 10이상의 수는 10의 거듭제곱에다 9 이하의 수를 곱한 것의 합이라 할 수 있다는 원칙과, 숫자를 나란히 썼을 때의 위치에 따라 차례로 10배씩 값이 다르다고 정한 것을 자리의 원리라 한다. 이 자리의 원리에 의해서, 아무리 큰 수라도 10개의 숫자만으로 나타낼 수가 있다. p진법에서는 숫자를 나란히 썼을 때 위치에 따라 차례로 p배씩 값이 달라진다.

2.3 여러가지 기수법의 사용 흔적

(1) 이진법

아프리카의 피그미족은 수를 셀 때 이진법으로 센다. 그리고 현대 과학의 총아인 컴퓨터도 이진법의 원리를 사용한다.

(2) 삼진법

타스마니아 토인은 하나, 둘, 다수(많다)라 센다.

(3) 오진법

사람의 한 손의 손가락 수가 5개이기 때문에 유래된 것으로 보이며 남 아메리카와 아프리카 부족에서 사용된 흔적이 보이고 최초로 널리 사용되었다. 로마 숫자에서도 오진법의 흔적이 보인다. 옛날 우리 조상들이 사용했던 주판도 오진법의 원리가 사용되었다.

(4) 칠진법

일주일의 요일인 월, 화, 수, 목, 금, 토, 일은 칠진법의 흔적이다.

(5) 십진법

옛부터 여러 곳에서 가장 많이 사용되어 왔으며 아라비아 숫자는 십진법의 표현이며 인도에서 유래된 것으로 알려져 있다.

(6) 십이진법

일년의 월수에서 그 흔적이 보이며 길이(1피트=12인치), 시계의 표지판(12간지), 금전(1실링=12펜스), 갯수(1타스=12개) 등에서 아직도 쓰여지고 있다.

(7) 이십진법

손가락과 발가락을 합한 수로 선사 시대에 맨발로 생활한 사람들에게서 사용 가능했을 것이다.

(8) 육십진법

고대 바빌로니아 사람들이 사용한 흔적이 있으며 시간(1시간=60분, 1분=60초), 각도(1도=60분) 등에서는 지금까지 사용되고 있다.

2.4 진법의 기본정리

위치적 기수법에 의해서 몇 진수냐에 따라서 같은 숫자 같은 위치라도 다른 수를 의미한다. 11의 경우 2진수의 표현인 경우 10진수에서는 단 3을 의미하지만 같은 11이라도 16진수의 표현인 경우는 10진수의 17에 해당한다. 여기서는 취급의 편의상 10진수는 그대로 두고 다른 진수는 숫자 밑에 진수(base)를 붙여서 수를 쓰기로 한다. 즉 2진수의 11인 경우는 $11_{(2)}$로 나타내고 16진수의 11은 $11_{(16)}$으로 나타내기로 한다.

$11_{(2)}$가 3이 되는 이유는 앞자리 1이 $1 \times 2^1 = 2$가 되고 뒷자리 1은 $1 \times 2^0 = 1$이되기 때문이다.

$10110_{(2)}$를 계산하면

$$10110_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$$

가 된다. 이 관계를 n자리수 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ (a_i 는 자리수)에 적용하면 십진수로 나타낸 N은

$$N = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10^1 + a_1 \times 10^0$$

으로 나타내고 이식을 십진법의 전개식 또는 십진법의 자리의 기호법이라 부른다.

(예 3) 십진법의 수 7863을 십진법의 전개식으로 나타내면 다음과 같다.

$$7863 = 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

(예 4) 8진법의 양의 정수 $437_{(8)}$을 8진법의 전개식으로 나타내면 다음과 같다.

$$437_{(8)} = 4 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$

위 사실을 더욱 일반화 하여 (정리 4.2) 와 같은 진법의 기본 정리를 만든다.

(정리 4.1) 호제법(Division Algorithm)

임의의 정수 $a > 0$, b 에 대하여,

$$b = aq + r, \quad 0 \leqq r < a$$

인 정수 q 와 r 이 유일하게 존재한다. 이때 q를 몫, r을 나머지라 한다.

(정리 4.2) 진법의 기본 정리

p를 1보다 큰 양의 정수라 하면, 임의의 양의 정수 a는 다음과 같이 유일하게 나타낼 수 있다.

$$a = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

여기에서 m은 음이 아닌 정수, $a_0, a_1 \cdots, a_m$은 정수이며

$0 < a_m < p, \quad 0 \leqq a_i < p \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$이다.

이때 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_{0(p)}$로 표현하며 이것을 a의 p진법의 표현 또는 p진수라 한다.

(증명) $a = 1$인 경우는 $m = 0, \quad a_0 = 1$ 이 되어 위 정리는 성립한다.

수학적 귀납법으로 증명하기 위하여 위 정리가 a보다 작은 정수에 대하여 성립한다고 가정하자.

(정리 4.1)의 호제법에 의하여 $a = pq + a_0$를 만족하는 정수 q, a_0 가 유일하게 존재한다. (단 $0 \leqq a_0 < p$)

이때 $q < a$이므로 귀납법의 가정에 의해 q 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q = a_m p^{m-1} + \cdots + a_2 p + a_1$$

여기에서 m은 음이 아닌 정수, $a_1, a_2, \cdots, a_m$은 정수이며

$0 < a_m < p, \qquad 0 \leqq a_i < p \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1)$이다.

따라서

$$\begin{aligned} a &= pq + a_0 \\ &= p(a_m p^{m-1} + \cdots + a_2 p + a_1) + a_0 \\ &= a_m p^m + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \end{aligned}$$

가 된다.

즉, 위의 정리는 a 에 대해서도 성립한다.

이제 유일성을 증명하기 위하여 만일 a라는 양의 정수가 $a_m p^m + \cdots + a_1 p + a_0$ 와 $b_n p^n + \cdots + b_1 p + b_0$라는 두가지 방법으로 표현되었다고 가정하고 $m \geqq n$이라고 하자. 그러면

$$a_m p^m + \cdots + a_{n+1} p^{n+1} + (a_n - b_n) p^n + \cdots + (a_1 - b_1) p + (a_0 - b_0) = 0$$

이고 p는 0을 나누므로 p는 $a_0 - b_0$를 나눈다. 그런데 $-p < a_0 - b_0 < p$이므로 $a_0 = b_0$이고 마찬가지 방법으로 $a_n = b_n$까지 얻을 수 있다. 그러면 $a_m p^m + \cdots + a_{n+1} p^{n+1} = 0$인데 a_i들은 모두 음이 아닌 정수이므로 $a_m = \cdots = a_{n+1} = 0$이다.

따라서 a의 p진법의 표현은 유일하다.

위치적 기수법에 따라 이것은 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_1 a_{0(p)}$ 로 나타 낸다. □

(참고) (정리4.2)의 내용은 결국 p로 반복하여 나누어 보면

$$
\begin{array}{l|ll}
p & a = a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (\text{나머지}) \\ \hline
p & a_m p^{m-1} + a_{m-1}p^{m-2} + \cdots + a_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_0 \\ \hline
p & a_m p^{m-2} + a_{m-1}p^{m-3} + \cdots + a_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_1 \\ \hline
 & \vdots & \\
p & a_m p + a_{m-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{m-2} \\ \hline
p & a_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{m-1} \\ \hline
 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_m
\end{array}
$$

이므로

$$
\begin{aligned}
a &= a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \\
&= a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_{0(p)}
\end{aligned}
$$

가 된다.

(참고) 1 보다 큰 임의의 양의 정수를 $a = a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ 로 나타낼 때 이 식을 a의 p진법의 전개식이라 한다.

(예 5) 양의 정수 37을 십진법의 전개식으로 뿐만 아니라 (정리 4.2)에 의해 이진법의 전개식으로도 나타낼 수 있다. 따라서 다음과 같이 십진수 37은 이진법의 표현 즉 이진수로 나타낼 수 있다.

$$37 = a_m 2^m + a_{m-1}2^{m-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0$$

라 놓고 양변을 계속 2로 나누면서 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 을 차례로 구할 수 있다.

위 식의 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_0 = 1$ 이고 몫은

$$18 = a_m 2^{m-1} + a_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1$$

이다. 다시

$$18 = a_m 2^{m-1} + a_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_1 = 0$ 이고 몫은

$$9 = a_m 2^{m-2} + a_{m-1} 2^{m-3} + \cdots + a_3 2^1 + a_2$$

이다. 다시

$$9 = a_m 2^{m-2} + a_{m-1} 2^{m-3} + \cdots + a_3 2^1 + a_2$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_2 = 1$ 이고 몫은

$$4 = a_m 2^{m-3} + a_{m-1} 2^{m-4} + \cdots + a_4 2^1 + a_3$$

이다. 다시

$$4 = a_m 2^{m-3} + a_{m-1} 2^{m-4} + \cdots + a_4 2^1 + a_3$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_3 = 0$ 이고 몫은

$$2 = a_m 2^{m-4} + a_{m-1} 2^{m-5} + \cdots + a_5 2^1 + a_4$$

이다. 다시

$$2 = a_m 2^{m-4} + a_{m-1} 2^{m-5} + \cdots + a_5 2^1 + a_4$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_4 = 0$ 이고 몫은

$$1 = a_m 2^{m-5} + a_{m-1} 2^{m-6} + \cdots + a_6 2^1 + a_5$$

이다. 다시

$$1 = a_m 2^{m-5} + a_{m-1} 2^{m-6} + \cdots + a_6 2^1 + a_5$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_5 = 1$ 이고 몫은 0이므로 $m = 5$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned} 37 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 100101_{(2)} \end{aligned}$$

(예 6) 십진수인 양의정수 300을 8진법의 전개식으로 나타내고 8진법의 표현(8진수)으로 고쳐보자.

$$300 = a_m 8^m + a_{m-1} 8^{m-1} + \cdots + a_1 8^1 + a_0$$

라 놓고 양변을 8로 나누면 나머지는 $a_0 = 4$ 이고 몫은

$$37 = a_m 8^{m-1} + a_{m-1} 8^{m-2} + \cdots + a_2 8^1 + a_1$$

이다. 다시

$$37 = a_m 8^{m-1} + a_{m-1} 8^{m-2} + \cdots + a_2 8^1 + a_1$$

에서 양변을 8로 나누면 나머지가 $a_1 = 5$ 이고 몫은

$$4 = a_m 8^{m-2} + a_{m-1} 8^{m-3} + \cdots + a_3 8^1 + a_2$$

이다. 다시

$$4 = a_m 8^{m-2} + a_{m-1} 8^{m-3} + \cdots + a_3 8^1 + a_2$$

에서 양변을 8로 나누면 나머지가 $a_2 = 4$ 이고 몫은 0이므로 $m = 2$ 이다.

그러므로

$$300 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 4 = 454_{(8)}$$

위에서 살펴본 바에 의하면 10진수를 다른 p진수로 표현하려면 10진수를 p로 나눈 나머지를 이용함을 알 수 있다. 그래서 다음의 예와 같이 하면 10진수를 2진수, 8진수 또는 16진수 등으로 간단히 고치는 방법을 알 수 있다.

(예 7) 십진수 37을 2진수로 고치기.

2| 37 .... (나머지)

2| 18 1

2| 9 0

2| 4 1

2| 2 0

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 1 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 0 \\ \hline
 & 0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 1
\end{array}
$$

따라서 $37 = 100101_{(2)}$.

(예 8) 십진수 300을 8진수로 고치기.

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 300 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; (\text{나머지}) \\ \hline
8 & 37 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 4 \\ \hline
8 & 4 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 5 \\ \hline
 & 0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 4
\end{array}
$$

따라서 $300 = 454_{(8)}$.

(예 9) 십진수 300을 16진수로 고치기.

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 300 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; (\text{나머지}) \\ \hline
16 & 18 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; \hat{2} \\ \hline
16 & 1 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 2 \\ \hline
 & 0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 1
\end{array}
$$

따라서$300 = 12\hat{2}_{(16)}$ (단 $\hat{2}_{(16)} = 12$ 로 약속한다.)

(주의) $12\hat{2}_{(16)} = 1212$을 의미 하지 않는다.

(정리 4.3) $p \geqq 2$ 인 정수에 대하여 $0 \leqq t < 1$ 인 유리수 t는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

여기에서, 임의의 i에 대해서 b_i 는 $0 \leqq b_i < p$ 인 정수이다.

(증명) $0 \leqq pt < p$ 이므로 $pt = b_1 + t_1$ 이 되는 $0 \leqq b_1 < p$ 인 정수 b_1 과 $0 \leqq t_1 < 1$ 인 t_1 이 존재한다.
또 $0 \leqq pt_1 < p$ 이므로 $pt_1 = b_2 + t_2$ 이 되는 $0 \leqq b_2 < p$ 인 정수 b_2 와 $0 \leqq t_2 < 1$ 인 t_2 가 존재한다.
일반적으로 임의의 n에 대하여 $pt_{n-1} = b_n + t_n$ 이 되는 $0 \leqq b_n < p$ 인 정수 b_n 과 $0 \leqq t_n < 1$인 t_n 이 존재한다.
그러면

$$\begin{aligned} t &= (b_1 + t_1)p^{-1} \\ &= b_1 p^{-1} + t_1 p^{-1} \\ &= b_1 p^{-1} + (b_2 + t_2)p^{-2} \\ &= b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + t_2 p^{-2} \\ &= \cdots \\ &= b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_n p^{-n} + t_n p^{-n} \end{aligned}$$

이다.

이제

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

임을 밝히기 위하여

$$s_n = b_1 p^{-1} + \cdots + b_n p^{-n}$$

이라 하면 임의의 n 에 대하여 $t - s_n = t_n p^{-n} \geqq 0$ 이므로 s_n은 위로 유계(*bounded above*)이다.

임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $p^N > \frac{1}{\epsilon}$ 인 양의 정수 N 을 취하자. 그러면 $n \geqq N$ 인 양의 정수 n 에 대해서

$$t - s_n = t_n p^{-n} < p^{-n} \leqq p^{-N} < \epsilon$$

이므로

$$\lim_{n \to \infty} s_n = t$$

이다. 따라서

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

이다. □

(정리 4.4) p를 1이 아닌 양의 정수라 하면, 임의의 양의 유리수 a는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 + b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

$$(0 \leqq a_i < p, \quad 0 \leqq b_j < p)$$

위 식을 소수 a의 p진법의 전개식이라 하고 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots_{(p)}$을 a의 p진법의 표현 (또는 p진수)라 한다.

(증명) 임의의 양의 유리수 a에 대하여 $a = s + t$ (s 는 $s \geqq 0$ 인 정수, t 는 $0 \leqq t < 1$ 인 유리수) 와 같이 나타낼 수 있다.

그런데 (정리 4.2) 와 (정리 4.3) 에서 다음과 같이 s 와 t 를 나타낼 수 있다.

$$s = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

따라서

$$a = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 + b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots b_m p^{-m} + \cdots$$

와 같이 나타낼 수 있다. □

(참고)(정리 4.4)에서 모든 $i > m$ 에 대해서 $b_i = 0$ 일 경우는

$$a = a_n a_{n-1} a_{n-3} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_{m(p)}$$

로 나타내기로 한다.

(예 10) 양의 유리수 254.123 을 10진법의 전개식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$254.123 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4 \times 1 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

(예 11) 양의 유리수(소수) 0.25를 4진법의 전개식으로 다음과 같이 나타내고 4진수로 고칠 수 있다.

$$0.25 = a_1 \times 4^{-1} + a_2 \times 4^{-2} + \cdots + a_n \times 4^{-n} + \cdots$$

이라 놓으면

$$0.25 \times 4 = 1.0 = a_1 + a_2 \times 4^{-1} + \cdots + a_n \times 4^{-n+1} + \cdots$$

따라서 $a_1 = 1$, $0.0 = a_2 \times 4^{-1} + \cdots + a_n \times 4^{1-n} + \cdots$이므로

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

그러므로 결국

$$\begin{aligned} 0.25 &= 1 \times 4^{-1} + 0 \times 4^{-2} + \cdots + 0 \times 4^{-n} + \cdots \\ &= 1 \times 4^{-1} \\ &= 0.1_{(4)} \end{aligned}$$

따라서 $0.25 = 0.1_{(4)}$

(예 12) 양의 유리수 3.25를 4진수로 나타내면 $3 = 3_{(4)}$이므로

$$3.25 = 3 + 0.25 = 3_{(4)} + 0.1_{(4)} = 3.1_{(4)}$$

(예 13) 양의 유리수 0.6을 2진수로 나타내는 것을 생각해 보면

$$0.6 = a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + \cdots + a_n \times 2^{-n} + \cdots$$

이라놓고 양변을 2배하여 a_1을 구한다.

$$0.6 \times 2 = 1.2 = a_1 + (a_2 \times 2^{-1} + \cdots + a_n \times 2^{1-n}) + \cdots$$

( )속은 소수부분이 되므로, 따라서 정수부분인 $a_1 = 1$이다.

이방법을 되풀이하면

$$0.2 \times 2 = 0.4, \text{ 따라서 } a_2 = 0$$

$$0.4 \times 2 = 0.8, \text{ 따라서 } a_3 = 0$$

$$0.8 \times 2 = 1.6, \text{ 따라서 } a_4 = 1$$

$$0.6 \times 2 = 1.2, \text{ 따라서 } a_5 = 1 = a_1$$

$$0.2 \times 2 = 0.4, \text{ 따라서 } a_6 = 0 = a_2$$

가 되어 순환소수가 됨을 알 수 있다.

즉, $0.6 = 0.1001100110011001 \cdots_{(2)}$가된다.

역으로 $0.100110011001 \cdots_{(2)}$을 10진법으로 나타내 보자.

$$0.100110011001 \cdots_{(2)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots$$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots) + (\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^4}} + \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}}$$

$$= 0.6$$

이상에서 살펴 본 것처럼 정수가 아닌 유리수 범위에서도 십진수를 다른 p진수로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 또한 p진수인 소수를 십진수 소수로 고치려면 p진수 소수를 p진법의 전개식으로 나타내고 그 전개식을 계산하면 된다.

(예 14) 2진수 소수 $0.101_{(2)}$는 십진소수로 고쳐보면

$$0.101_{(2)} = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$= 0.625$$

(예 15) 8진수 $0.65_{(8)}$은 10진수로 고치면 다음과 같다.

$$0.65_{(8)} = 6 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2}$$

$$= \frac{6}{8} + \frac{5}{64}$$

$$= \frac{53}{64}$$

$$= 0.828125$$

(예 16) 16진수 $0.2\hat{2}_{(16)}$은 10진수로 고치면 다음과 같다.

(단, $\hat{2}_{(16)} = 12$ 로 약속한다.)

$$0.2\hat{2}_{(16)} = 2 \times 16^{-1} + \hat{2} \times 16^{-2}$$
$$= \frac{2}{16} + \frac{12}{256}$$
$$= \frac{44}{256}$$
$$= 0.171875$$

결론적으로 양의 정수 뿐만 아니라 유리수 범위에서 자유롭게 십진수를 다른 진수로, 다른 진수를 십진수로 나타낼 수 있는데 다음과 같이 10진수를 거치면 임의의 p진수를 다른 s진수로 고쳐 나타낼 수 있다.

$$p\text{진수} \rightleftarrows 10\text{진수} \rightleftarrows s\text{진수}$$

2.5 p진수와 p^2진수와의 관계

p진수를 p^2진수로 또는 p^2진수를 p진수로는 10진수를 거치지 않고 직접 고칠 수 있는 방법을 생각해 보자.

p 진수 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_{1(p)}$ 에서 m 이 홀수일때는 $a_{m+1} = 0$ 인 자리수를 a 의 맨 앞자리에 추가하여 $a = a_{2n} a_{2n-1} \cdots a_{1(p)}$ 와 같이 자리수의 갯수가 짝수가 되도록 일반적으로 고칠 수 있다.

(정리 5.1) $p > 1$ 인 정수이고 $s = p^2$ 일때 양의 정수인 p진수 $a = a_{2n} a_{2n-1} \cdots a_{1(p)}$ 에 대해서 $t_1 = a_2 p + a_1$, $t_2 = a_4 p + a_3, \cdots, t_n =$

$a_{2n}p + a_{2n-1}$ 라 두면 $0 \leqq t_i < s$ (단,$i = 1.2.\cdots,n$)이고 $a = t_n t_{n-1} \cdots t_{1(s)}$ 와 같다.

(증명) 우선 $0 \leqq t_i < s$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned} 0 \leqq t_i &= a_{2i}p + a_{2i-1} \\ &\leqq (p-1)p + (p-1) \\ &= p^2 - 1 \\ &< p^2 = s \end{aligned}$$

그러므로 $0 \leqq t_i < s$ 이다.

이제 $a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_2 a_{1(p)} = t_n t_{n-1} \cdots t_3 t_2 t_{1(s)}$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned} a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_2 a_{1(p)} &= a_{2n}p^{2n-1} + a_{2n-1}p^{2n-2} + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 \\ &= (a_{2n}p + a_{2n-1})p^{2n-2} + \cdots + (a_4 p + a_3)p^2 + (a_2 p + a_1) \\ &= (a_{2n}p + a_{2n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_4 p + a_3)s + (a_2 p + a_1) \\ &= t_n s^{n-1} + \cdots + t_2 s + t_1 \\ &= t_n t_{n-1} \cdots t_2 t_{1(s)} \end{aligned}$$

따라서, $a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_{1(p)} = t_n t_{n-1} \cdots t_{1(s)}$ 이다. □

(예 17) 양의 정수인 2진수 $1011_{(2)}$를 4진수로 나타내보자.

(정리 5.1)에 의해서 $a_4 a_3 a_2 a_{1(2)} = 1011_{(2)} = t_2 t_{1(4)}$라 놓으면

$$t_1 = a_2 \times 2 + a_1 = 1 \times 2 + 1 = 3$$

$$t_2 = a_4 \times 2 + a_3 = 1 \times 2 + 0 = 2$$

따라서 $1011_{(2)} = 23_{(4)}$.

(예 18) 양의 정수인 3진수 $122_{(3)}$을 9진수로 나타내 보자.

(정리 5.1)에 의해서 $a_4a_3a_2a_{1(3)} = 0122_{(3)} = t_2t_{1(9)}$라 놓으면

$$t_1 = a_2 \times 3 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$t_2 = a_4 \times 3 + a_3 = 0 \times 3 + 1 = 1$$

따라서 $122_{(3)} = 18_{(9)}$.

이제 (정리 5.1) 에서 $t_i = a_{2i}p + a_{2i-1}$ 인데 a_{2i}, a_{2i-1} 는 t_i 를 p로 나누었을때의 몫과 나머지 이므로 a_{2i}, a_{2i-1}를 구하여 p^2진수를 p진수로 고치는 방법을 생각해보자.

(정리 5.2) $p > 1$인 정수, $s = p^2$이고 양의 정수 $a = a_na_{n-1}\cdots a_{1(s)}$ 에 대해서 $a_i \quad (1 \leqq i \leqq n)$를 p로 나누었을때의 몫과 나머지를 각각 t_{2i}, t_{2i-1}라 하면 $0 \leqq t_j < p \quad (1 \leqq j \leqq 2n)$이고 $a = t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2t_{1(p)}$이다.

(증명) t_{2i-1}은 a_i를 p로 나누었을때의 나머지 이므로 $0 \leqq t_{2i-1} < p$임은 당연하다. 만일 $t_{2i} \geqq p$라 가정하면 $pt_{2i} \geqq p^2$이다. 따라서 $a_i = pt_{2i} + t_{2i-1} \geqq p^2 = s$이므로 모순이 된다. 그러므로 $0 \leqq t_j < p \quad (1 \leqq j \leqq 2n)$이다.

이제 $a = t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2t_{1(p)}$임을 밝히자. $1 \leqq i \leqq n$인 모든 i에 대해서 $a_i = t_{2i}p + t_{2i-1}$이다.

$a = a_na_{n-1}\cdots a_{1(s)}$

$= a_ns^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots a_2s + a_1$

$= (t_{2n}p+t_{2n-1})p^{2n-2}+(t_{2n-2}p+t_{2n-3})p^{2n-4}+\cdots+(t_4p+t_3)p^2+(t_2p+t_1)$

$= t_{2n}p^{2n-1}+t_{2n-1}p^{2n-2}+t_{2n-2}p^{2n-3}+t_{2n-3}p^{2n-4}+\cdots+t_4p^3+t_3p^2+$

t_2p+t_1

$= t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2t_{1(p)}$

이다. □

(예 19) $12123_{(4)}$를 2진수로 고치려면

$$12123_{(4)} = t_{10}t_9t_8t_7t_6t_5t_4t_3t_2t_{1(2)}$$

라 놓으면 $3 = t_2 \times 2 + t_1$ 이 되고 양변을 2로 나누면 몫과 나머지가 서로 같아야 한다. 따라서 $t_2 = 1, t_1 = 1$이다. 같은 방법으로

$$2 = t_4 \times 2 + t_3 \text{에서 } t_4 = 1, t_3 = 0$$

$$1 = t_6 \times 2 + t_5 \text{에서 } t_6 = 0, t_5 = 1$$

$$2 = t_8 \times 2 + t_7 \text{에서 } t_8 = 1, t_7 = 0$$

$$1 = t_{10} \times 2 + t_9 \text{에서 } t_{10} = 0, t_9 = 1$$

따라서 $12123_{(4)} = 0110011011_{(2)} = 110011011_{(2)}$

(예 20) $8521_{(9)}$를 3진수로 (예 19)와 같은 방법으로 고치면

$$8521_{(9)} = t_8t_7t_6t_5t_4t_3t_2t_{1(3)}$$

라 놓으면 $1 = t_2 \times 3 + t_1$ 이 되고 양변을 3으로 나누면 몫과 나머지가 서로 같아야 한다. 따라서, $t_2 = 0, t_1 = 1$이 된다. 마찬가지 방법으로

$$2 = t_4 \times 3 + t_3 \text{ 에서 } t_4 = 0, t_3 = 2$$

$$5 = t_6 \times 3 + t_5 \text{ 에서 } t_6 = 1, t_5 = 2$$

$$8 = t_8 \times 3 + t_7 \text{ 에서 } t_8 = 2, t_7 = 2$$

따라서 $8521_{(9)} = 22120201_{(3)}$이 된다.

2.6 p진수와 p^n진수와의 관계

위 단원에서는 중학교 교육과정 수준에서의 지도를 위하여 p진수와 p^2 진수와의 관계를 알아 보았는데 이것을 더욱 일반화 하여 p진수와 p^n진수와의 관계를 알아본다.

p진수 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_{1(p)}$ 에서 m 이 n의 배수가 아닐때는 $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = 0, \cdots, a_{\alpha n} = 0$ 인 자리수들을 a 의 앞자리에 추가하여 $a = a_{\alpha n} a_{\alpha n-1} \cdots a_{1(p)}$ 와 같이 자리수의 갯수가 n의 배수가 되도록 일반적으로 고칠 수 있다.

(정리 6.1) $p > 1$인 정수, $s = p^n$이고 양의 정수인 $a = a_{\alpha n} a_{\alpha n-1} \cdots a_{1(p)}$에 대해서 $t_i = a_{in} p^{n-1} + a_{in-1} p^{n-2} + \cdots + a_{in-(n-2)} p + a_{in-(n-1)}$라 하면 $0 \leqq t_i < s$ (단, $1 \leqq i \leqq \alpha$)이고 $a = t_\alpha t_{\alpha-1} \cdots t_2 t_{1(s)}$이다.

(증명) 우선 $i = 1, 2, \cdots, \alpha$에 대해서 $0 \leqq t_i < s$임을 보이자.

$$0 \leqq t_i = a_{in} p^{n-1} + a_{in-1} p^{n-2} + \cdots + a_{in-(n-2)} p + a_{in-(n-1)}$$

$$\begin{aligned} &\leqq (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \cdots + (p-1)p + (p-1) \\ &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1) \end{aligned}$$

$$= p^n - 1$$
$$< p^n = s$$

이제, $a_{\alpha n} \cdots a_{(\alpha-1)n+1} \cdots a_{3n} \cdots a_{2n+1} a_{2n} \cdots a_{n+1} a_n \cdots a_2 a_{1(p)}$

$= (a_{\alpha n} p^{\alpha n-1} + \cdots + a_{(\alpha-1)n+1} p^{(\alpha-1)n}) + \cdots + (a_{3n} p^{3n-1} + \cdots + a_{2n+1} p^{2n})$

$+(a_{2n} p^{2n-1} + \cdots + a_{n+1} p^n) + (a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1)$

$= (a_{\alpha n} p^{n-1} + \cdots + a_{(\alpha-1)n+1}) s^{\alpha-1} + \cdots + (a_{2n} p^{n-1} + \cdots + a_{n+1}) s$

$+(a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1)$

$= t_\alpha t_{\alpha-1} \cdots t_2 t_{1(s)}$ □

(예 21) 2진수 $110101_{(2)}$를 8진수로 나타내려면 (정리 6.1)에 의해 두자리 8진수가 된다. 그러므로 $110101_{(2)} = t_2 t_{1(8)}$ 이라 놓고 (정리6.1)에 의해

$$t_1 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2 + 1 = 5$$
$$t_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 6$$

따라서 $110101_{(2)} = 65_{(8)}$.

(예 22) 이진수 $11011_{(2)}$ 을 8진수로 고치려고 할 때는 $11011_{(2)} = 011011_{(2)}$ 이므로 $011011_{(2)} = t_2 t_{1(8)}$ 이라 놓고

$$t_1 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 3$$
$$t_2 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 3$$

따라서 $011011_{(2)} = 11011_{(2)} = 33_{(8)}$ 이다.

p^n진수를 p진수로 나타내고자 할 때는 (정리6.1)의 $t_1 = a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$을 p로 계속 나누어 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$을 구할 수 있다.

$p|\ a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$ .... (나머지)

$p|\ a_n p^{n-2} + \cdots + a_2$ .... a_1

$p|\ a_n p^{n-3} + \cdots + a_3$ .... a_2

$p|\ a_n p^{n-4} + \cdots + a_4$ .... a_3

$\vdots$

$p|\ a_n p^{n-(n-1)} + a_{n-1}$ .... a_{n-1}

$p|\ a_n$ .... a_n

0

같은 방법으로 t_2에서 $a_{2n}, \cdots, a_{n+1}$

$\vdots$

t_α에서 $a_{\alpha n}, \cdots, a_{\alpha n-(n-1)}$

을 구할 수 있다.

(보조 정리 6.2) $p > 1$, $s = p^n$일때 한자리의 양인 s진수는 n자리 이하의 p진수가 된다.

즉, $m \leqq n$ 이고

$$a_{(s)} = a_m p^{m-1} + a_{m-1} p^{m-2} + \cdots + a_2 p + a_1$$

$$= a_m a_{m-1} \cdots a_{1(p)}$$

(증명) a는 한자리의 양인 s진수 이므로 $0 \leqq a < s = p^n$인 정수이다. (정리 4.2)에 의하여 $a = a_m p^{m-1} + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_2 p + a_1$와 같이 나타낼 수 있다. (단, $0 \leqq a_i < p$, $a_m \neq 0$. $i = 1, 2, \cdots, m$) 만일 $m > n$이라면 $m - 1 \geqq n$이므로 $p^{m-1} \geqq p^n$이다. 따라서 $a \geqq a_m p^{m-1} \geqq p^n = s$가 되어 모순이다. 그러므로 $m \leqq n$이다. □

(참고) 위 (보조 정리 6.2)에 의하면 한자리의 양인 s진수 $a_{(s)}$는 n자리 이하의 p진수 $a_m a_{m-1} \cdots a_{1(p)}$이 되므로 $m < n$인 경우에는 $a_n = 0, a_{n-1} = 0, \cdots, a_{m+1} = 0$인 자리수를 p진수 앞자리에 추가하여 꼭 n자리의 p진수로 나타낼 수 있다. 즉, $a_{(s)} = a_n a_{n-1} \cdots a_{1(p)}$이고 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $0 \leqq a_i < p$이다.

(정리 6.3) $p > 1$, $s = p^n$일때 양의 정수인 s진수 $a = a_\alpha a_{\alpha-1} \cdots a_{1(s)}$에 대해서 위 (보조정리 6.2)와 (참고)에 의하여 a의 각 자리수를 꼭 n자리의 p진수로 다음과 같이 나타난다고 하자.

$$a_i = b_{in} p^{n-1} + b_{in-1} p^{n-2} + \cdots + b_{(i-1)n+1}, \quad (1 \leqq i \leqq \alpha)$$

그러면

$$a = b_{\alpha n} b_{\alpha n-1} \cdots b_{1(p)}$$

이다.

(증명) $a = a_\alpha a_{\alpha n-1} \cdots a_{1(s)}$

$= a_\alpha s^{\alpha-1} + a_{\alpha-1} s^{\alpha-2} + \cdots + a_2 s + a_1$

$$= a_\alpha p^{n(\alpha-1)} + a_{\alpha-1} p^{n(\alpha-2)} + \cdots + a_2 p^n + a_1$$

$$= (b_{\alpha n} p^{n-1} + b_{\alpha n-1} p^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1}) p^{n(\alpha-1)}$$

$$+ (b_{(\alpha-1)n} p^{n-1} + b_{(\alpha-1)n-1} p^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1}) p^{n(\alpha-2)}$$

$$+ \cdots$$

$$+ (b_{2n} p^{n-1} + b_{2n-1} p^{n-2} + \cdots + b_{n+1}) p^n$$

$$+ (b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_1)$$

$$= b_{\alpha n} p^{\alpha n-1} + b_{\alpha n-1} p^{\alpha n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1} p^{n(\alpha-1)}$$

$$+ b_{(\alpha-1)n} p^{(\alpha-1)n-1} + b_{(\alpha-1)n-1} p^{(\alpha-1)n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1} p^{n(\alpha-2)}$$

$$+ \cdots$$

$$+ b_{2n} p^{2n-1} + b_{2n-1} p^{2n-2} + \cdots + b_{n+1} p^n$$

$$+ b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_1$$

$$= b_{\alpha n} b_{\alpha n-1} \cdots b_2 b_{1(p)} \quad \square$$

(예 23) 8진수 $574_{(8)}$ 를 2진수로 나타내려면 8진수서 한자리 수는 2진수에서 최대로 3자리 수에 대응된다. 따라서

$$574_{(8)} = b_9 b_8 b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_{1(2)} \text{ 라 두고}$$

(정리 6.3)에 의해

$$4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1$$

$$7 = b_6 \times 2^2 + b_5 \times 2 + b_4$$

$$5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$$

이 되고 $4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1$ 의 양변을 2로 나누어 b_1, b_2, b_3 를 구한다. 실제로 구하여 보면 $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$이된다. 같은 방법으로 $7 = b_6 \times 2^2 +$

$b_5 \times 2 + b_4$ 에서 $b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ 그리고 $5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$ 에서 $b_7 = 1, b_8 = 0, b_9 = 1$ 을 구할 수 있다.

따라서, $574_{(8)} = 101111100_{(2)}$ 이다.

(예 24) 27진수 $84_{(27)}$ 를 3진수로 나타내보자.

$$84_{(27)} = b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_{1(3)} \text{ 라 두고}$$

(정리 6.3)에 의해

$$4 = b_3 \times 3^2 + b_2 \times 3 + b_1$$

$$8 = b_6 \times 3^2 + b_5 \times 3 + b_4$$

가 된다. $4 = b_3 \times 3^2 + b_2 \times 3 + b_1$ 에서 양변을 3으로 나누어서 b_1, b_2, b_3 를 구한다. 따라서, $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 0$ 이다. 같은 방법으로 $8 = b_6 \times 3^2 + b_5 \times 3 + b_4$ 에서 $b_4 = 2, b_5 = 2, b_6 = 0$ 을 구할 수 있다.

따라서, $84_{(27)} = 22011_{(3)}$ 이다.

마지막으로 p^n 진수와 p^m 진수와의 관계를 생각해 보자. 중학교에서 다루어지는 기수법에 관한 내용은 십진수가 아닌 어떤 진수를 다른 진수로 고치려고 할 때 반드시 십진수를 거쳐야 가능하다. 그러나 p^n 진수와 p^m 진수 사이에는 반드시 10진수를 거치지 않고도 다음과 같이 p진수를 이용하여 p^n 진수를 p^m 진수로 또는 p^m 진수를 p^n 진수로 고쳐질 수 있음을 알 수 있다.

$$p^n \text{진수} \rightleftarrows p\text{진수} \rightleftarrows p^m \text{진수}$$

즉 우리가 흔히 쓰고 있는 10진수를 반드시 거쳐야만 어떤 진수를 다른 진수로 나타낼 수 있는 것이 아니다라는 의미가 있다.

Ⅲ. 결론 및 제언

사람들이 숫자를 사용하기 시작한 후 수를 표기하는 방법으로 기수법이 등장하는데 지금 우리가 쓰고있는 기수법은 자리의 원리에 의한 기수법으로서 아라비아 숫자의 기수법이다. 중학교 교육과정에 소개되는 기수법은 10진법을 토대로 하여 2진법과 5진법에 한정되어 있다. 그러나 여러 곳에서 여러 가지 진법이 사용된 흔적이 있으며 또한 같은 수일지라도 여러 가지 방법으로 기수할 수 있도록 학생들에게 지도하는 것이 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 키우는 데 도움이 된다. 그러므로 지도하는 교사의 입장에서 기수법에 대한 이론적 기초를 정립해 두는 것이 매우 의미있는 작업이라 생각되었고 또한 교육과정에 의하면 임의의 p진수는 10진수를 거쳐야 다른 s진수로 나타낼 수 있는데 "임의의 p진수를 반드시 10진수를 거치지 않고 다른 임의의 s진수로 나타낼 수 있는 일반적인 방법이 없을까?" 라는 발상(Idea)을 하게 되었다. 그러나 일반적으로 p진수를 s진수로 나타내는 데는 어려움이 따르게 되었고 특별한 경우 즉 p진수와 p^n진수 사이에는 10진수를 거치지 않고 서로 다른 진수로 고칠 수 있는 일반적인 정리를 만들 수 있었다. 따라서 p^n진수와 p^m진수 사이에도 10진수가 아닌 p진수를 거치면 서로 다른 진수로 표현이 된다.

본 연구에서는 기수법의 종류, 여러 가지 기수법의 사용 흔적을 알아 보고 중학교에서 0과 자연수 범위에서 소개된 기수법을 진법의 기본정리를 토대로 하여 유리수 범위로 확장시켜 생각해 보았고 p진수와 p^2진수의 관계 더 나아가 p진수와 p^n진수 사이의 관계에 대하여 알아 보았다. 이를 토대로 p^n진수와 p^m진수 사이의 관계를 생각해 볼 수 있다. 앞으로 p^n진수와 p^m 진수 사이에 10진수 또는 p진수를 거치지

않고 직접 고칠 수 있는 일반적인 방법에 대하여 계속 연구해 볼 가치가 있다고 여겨진다. 본 연구에서는 기수법에 대한 이론적인 기초를 마련하였는데 중학교에서 기수법을 지도하는 교사들에게 많은 도움이 되었으면 한다.

참 고 문 헌

[1]. 최민아 (1995), "수의 기원과 관련된 수의 발전사 연구", 석사학위논문, 경북대학교 교육대학원.

[2]. 한국사전연구원 (1989), "최신 수학사전",교육문화원.

[3]. 김용운·김용국 (1990), "재미있는 수학여행",김영사.

[4]. 박두일·신동선·강영환 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)교학사.

[5]. 구광조·황선욱 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), 지학사.

[6]. 김연식·김흥기 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)동아출판사.

[7]. 최용준 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)천재교육.

[8]. 박배훈·정창현 (1995),"중학교 수학 1"(교과서), (주)교학사.

[9]. 김호우·박교식·신준국·정은실 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)지학사.

[10]. 김응태·박승안 (1979), "정 수 론", 이우출판사.

[11]. 제주도중등수학교육연구회 (1984), "수학 교육"(제12집), 대동원색인쇄사.

[12]. D.M. Burton (1980), "Elementary Number Theory", Allyn and Bacon, Inc.

< Abstract >

A Basic Theory of Numeration System*

Ko, Young-Jong

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Yang, Sung-Ho

In this thesis, we enlarge the numeration system from the set of natural numbers which is introduced in the curriculum of middle school to the set of rational numbers, by extending the Theorem 4.2. Futhermore, we investigate the relationship between p-adic number and p^2-adic number and generalize the relationship bewteen p-adic number and p^n-adic number.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1996.

감사의 글

이 한편의 논문이 완성되기까지 세심하게 지도해 주신 양성호 교수님께 진심으로 감사드립니다. 그리고 그동안 깊은 관심을 가지고 충고와 격려를 아끼지 않으신 수학교육과, 수학과 교수님들께도 고마운 말씀을 드립니다.

또한 5학기 동안 함께 고생하며 저에게 큰 의지가 되었던 김정두,양창길,김순찬,김영희 선생님께도 감사의 마음을 전하며 항상 행운이 함께 하길 빌겠습니다. 아울러 학교업무의 어려움 속에서도 대학원 과정을 마칠 수 있도록 배려해 주신 서귀여자중학교 김권용 교장선생님을 비롯한 여러 선생님께 감사드립니다.

끝으로 헌신적인 사랑으로 학업에 매진할 수 있도록 도와주신 부모님, 많은 어려움을 불평없이 이겨내며 항상 옆에서 격려해준 사랑하는 아내, 예쁘고 건강하게 자라는 딸 상아, 수정이와 함께 이 작은 기쁨을 나누고자 합니다.

1996년 8월

고 영 종 드림