碩士學位 請求論文

發問에 의한 問題解決 戰略 訓鍊의 效果

指導敎授 方 銀 淑

濟州大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

文 成 鍾

1997年 8月

發問에 의한 問題解決 戰略 訓鍊의 效果

指導教授 方銀淑

이 論文을 教育學碩士 學位論文으로 提出함.

1997年 7月

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 文 成 鍾

文成鍾의 教育學 碩士學位論文을 認准함.

1997年 7月

審査委員長 김 도 현

審 査 委 員 방 은 숙

審 査 委 員 윤 용 식

<抄錄>

發問에 의한 問題解決 戰略 訓鍊의 效果

文 成 鍾

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻
指導敎授 方 銀 淑

본 연구의 목적은 발문과 설명에 의한 문제해결 전략 훈련이 문제해결에 미치는 효과를 규명함으로써 문제해결 지도의 한 시사점을 얻는 데 있다. 이를 위해 고등학교 수준에서 문제를 해결하는 데 필요한 전략을 다양하게 선정하고 전략에 따라 발문을 위계적으로 구성하여 문제해결 전략을 훈련한 집단과 교사의 설명으로 훈련한 집단에서 첫째로 문제해결 전략을 선택하는 경향, 둘째로 문제해결력의 성취수준, 셋째로 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도를 비교·분석하였다.

문제해결 전략을 선택하는 경향을 보면, 발문에 의한 훈련집단이 교사설명에 의한 집단보다 훈련받은 전략 중 일부(특수화, 규칙성 찾기, 기호화, 도형화, 조작의 생각, 수식에 대한 생각, 기본 성질의 생각, 함수적인 생각, 귀납, 보조요소 이용하기)를 사용한 빈도가 크게 나타났으나, 다른 전략(단순화, 일반화, 예상과 확인, 거꾸로 풀기, 일반화, 통합화)의 경우 그렇지 않았다. 문제해결력의 성취 수준, 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도를 비교한 결과 두 집단간에 통계적으로 유의한 차이가 없었다.

목 차

표 목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

제 6차 수학과 교육과정에서 "수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하여, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다."[1] 라고 규정한 것은, 수학교육의 궁극적인 목적이 학습내용의 습득보다 풍부한 창출력을 지닌 인간 육성에 있음을 시사한다.

문제해결이란 문제해결자에게 익숙치 않는 문제적 상황의 해결 요구에 적합한, 이미 획득된 개인적 지식, 기술, 이해력 등을 사용하는 과정[2]이며, 이 과정에서 네트워크를 통해 지적 탐색을 유도하는 매카니즘이 작용한다. 정보-처리 이론에 따르면, 이러한 매카니즘은 문제를 해석하고, 저장된 지식과 절차를 탐색하고, 분리 저장된 항목들 사이에 새로운 관계를 생성할 수 있는 일련의 문제해결 전략(strategy)으로 설명한다.[3] 이는 문제해결자가 문제해결에 곤란을 느낄 때 해결을 진전시키는 기술로써, Polya등은 학교학습을 통하여 훈련되어야 한다고 강조하였다.

한편, 문제해결 연구는 (1)문제해결의 과정(Kilpatrick, 1967 : Dalton, 1974 : Lucus, 1974 : Webb, 1975 : Kantowski, 1977 : Putt, 1978 : Proudfict, 1980 : Johnson, 1986), (2)문제해결 과정 자체 평가 또는 평가 도구의 개발을 중심으로 이루어져 왔으며, 우리 나라의 경우 문제해결 학습-지도 방법에 대한 연구가 주류를 이루어 왔다.[4] 그 중에서도 문제해결 전략의 지도에 대한 연구물

1) 교육부(1995), 「고등학교 수학과 교육과정 해설」, 교육부, p.76.
2) 백석윤(1995), "수학 문제해결 교육과 연구에 대한 반성적 일고", 「논문집」,제 5권, 제1호, p.371.
3) 구광조 외(1995), 「수학 학습 심리학」, 교우사, p. 265.
4) 백석윤(1995), 상게서, p.377.

을 많이 찾을 수 있다. 한 예로 한국교육개발원은 초등학생을 대상으로 문제해결에 필요한 전략을 정리하고 이를 촉발할 수 있는 과제를 통하여 문장화된 발문에 따라 해결해 나갈 수 있는 자료를 개발한 바 있다.

그러나 문제해결에 대한 연구의 노력과 관심에 비하여 학교현장에서 특히, 중등학교 수업현장에서 교사들의 인식이나 실천적 의지의 부족, 내용이나 형식의 부적절성[5]으로 효과적이지 못하다는 비판이 있다. 문제해결교육에 대한 이런 비판은 초등학교 수준에서는 문제해결 전략이 체계적으로 정리·보급되었으나,[6] 고등학교 수준에서는 "특별한 의식 없이"[7] 사용됨으로써 학교수업현장에서 소홀하게 다루어지는 점이 큰 문제다. 이런 분석은 본 연구자가 문제해결 전략에 대한 훈련 실태 조사에서도 확인되었다. 조사에 따르면, 고등학교 수학과 수업에서 대부분의 교사들은 문제해결 전략의 효용성과 훈련의 필요성을 인정하고는 있으나 실제적으로 훈련의 빈도가 낮고, 훈련 방법 또한 교사의 설명에 의존하고 있는 것으로 나타났다.[8] 이런 문제해결 전략의 훈련 실태와 방법이 학생들에게 전략 사용의 가치를 충분히 인식시키고, 전략 사용 능력을 제고시킬 수 있는지 의문시 된다. 더욱이 문제해결 전략이 중등학교 참고서에 일부분만 소개되고 있을,뿐으로 고등학교 수준에서 문제해결 전략을 효과적으로 연습시킬 수 있는 방안이 제시되어 있지 않다.

그러므로 고등학교 수준의 다양한 문제의 해결에 이용될 수 있도록 문제해결

5) 백석윤(1994), "메타인지적 문제해결 지도와 평가를 위한 개발", 「수학교육」, 제 33권, 제 2호, 한국수학교육학회, p. 177.

6) 한국교육개발원(1990), 「수학과 문제해결력 신장을 위한 교수-학습 개발연구」, 한샘교육개발연구소, pp. 26-39.

7) 우정호(1993), "대학수학능력 시험의 대비 방향- 교수학습 방법의 탐색", 「제주교육 문제 세미나 3차 발표대회」(미간행).

8) 본 연구자는 1996년 4월 일반계 고등학교 교사 13 명을 대상으로 문제해결 전략 훈련에 대한 실태를 조사하였다. 이 조사에서 문제해결 전략을 훈련하는 빈도를 묻는 질문에 '비교적 충분히 훈련시킨다'는 응답은 7.7%에 지나지 않았으며, 문제해결 전략을 훈련하는데 발문과 권고의 방법 사용은 30.8%만이 '항상 활용한다', '비교적 활용하는 편이다'로 답하였다. 이와는 달리 발문과 권고를 이용한 문제해결 전략 훈련의 필요성을 묻는 질문에 조사 대상자의 92.3%가 그 필요성을 인정하고 있는 것으로 나타났다.

전략의 체계적 정리와 이를 문제해결에 적절히 활용할 수 있는 방안이 모색되어야 하겠다.

2. 연구의 목적

본 연구의 목적은 문제해결에 사용될 수 있는 전략(Strategies)을 다양하게 선정하고, 발문식과 설명식으로 문제해결 전략을 훈련했을 때, 학생들이 문제해결시

1) 문제해결 전략을 선택하는 경향의 차,

2) 문제해결력의 차,

3) 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도를 비교·분석함으로써 고등학생의 문제해결 지도를 위한 시사점을 얻는 데 있다.

3. 연구 문제

Kantowski는 그의 연구에서 문제해결 전략을 사용하는 경향이 많을수록 문제해결의 성공도가 증가한다고[9] 밝혔다. 특히, Schoenfeld는 전략을 촉발할 수 있는 과제를 선정하고 "만일 ~이라면, 그때는 ~하라."라는 형식으로 전략을 사용하는 조건적 상황을 분명히 제시하는 것이 과제의 특성과 그 과제의 해결에 사용하는 전략의 가치를 인식시킬 수 있는 중요한 요인이라고 하였다.[10] 그러므로 문제해결 지도에서 특정 문제해결 전략을 촉발할 수 있는 과제를 어떻게 선정하고, 그 과제의 해결 과정에서 학생들로 하여금 특정 전략의 사용을 유도하는 조건적 상황을 어떤 방법으로 제시해야 하는가 하는 점이 중요하다.

---

9) 길양숙(1991), "문제해결 전략의 지도에 관한 연구 동향", 「교육학 연구」, 제 29집, 제 4호, 한국교육학회, p.105.

10) 길양숙(1991), 상게서, p.105.

주어진 문제를 해결하기 위해서는 문제해결자의 적극적인 노력과 사고활동이 요구된다. 이 점에서 문제해결을 위한 전략 사용의 조건적 상황의 제시는 교사의 일방적인 설명보다 특정 과제에 대하여 사고할 수 있는 기회를 더 많이 줄 수 있는 발문식이 효과적일 것이라는 가설을 세울 수 있다. 모든 수학적 지식의 이해는 교사의 설명에 의한 수동적인 과정이 아니라 학생들 자신의 인지적 개념구조에 근거하여 적극적으로 해석하는 과정[11]이기 때문이다. 설명식 수업에서 교사가 너무 많은 것을 설명함으로써 학습자의 참여 감소와 과제를 자발적으로 탐구하려 들지 않는다.[12] 는 점을 감안하면 이 가설은 설득력을 가진다.

그러므로 본 연구는 연구문제를 다음과 같이 설정하였다. 문제해결 전략을 발문식과 설명식으로 각각 훈련했을 때, 학생들이 문제 해결시

1) 문제해결 전략을 선택하는 경향에 차이가 있는가?

2) 문제해결력의 성취수준에 차이가 있는가?

3) 문제해결의 가치에 대한 인식도에 차이가 있는가?

4. 용어의 정의

1) 문제해결력

문제해결력이란 문제를 이해하는 능력, 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하여 해결 계획을 수립하는 능력, 연산 능력, 검증 능력, 일반화의 능력, 수학의 기초 개념·원리·법칙을 발견하는 능력, 얻어진 수학적 개념을을 활용하여 창의적으로 문제를 해결하는 능력[13] 등을 포함하는 개념으로, 본

11) 류희찬(1994), "수학교육 평가의 새로운 방향", 「수학교육」, 제 33권, 제 12호, 한국수학교육학회, p.209.

12) 박성택(1994), 전게서, pp. 49~50.

13) 강시중(1985), "문제해결능력의 평가방안",「산수과 문제해결능력 신장을 위한 세니마집」 한국교육개발원, p. 68.

연구에서는 문제해결력 검사 결과 얻은 점수를 의미한다.

2) 문제해결 전략의 선택 경향

문제해결자는 문제풀이 과정에서 여러 가지 전략을 사용하게 된다. 이때 선택하는 전략은 개인에 따라 다를 것이며, 또 적절한 전략의 선택 여부가 문제해결에 영향을 준다. 문제해결 전략 선택 능력이란, 적절한 전략을 선택하는 능력이라 정의하며, 코딩 시스템(coding system)으로 측정된다.

3) 발문에 의한 문제해결 전략 훈련

문제해결 전략에 따라 위계적으로 구성한 발문을 G.Polya의 문제해결 단계에 근거하여 해결과정에 예상되는 일련의 절차를 교사의 발문-학생의 응답으로 진행되는 수업형태를 말한다.

4) 설명에 의한 문제해결 전략 훈련

교과서적인 방법으로 교사 설명에 의하여 훈련과제를 해결하고 해결과정에 필요한 전략을 강조하는 수업형태를 말한다.

5. 연구의 한계

1) 본 연구에 사용된 문제해결 전략 선택 경향 및 문제해결력 검사지는 표준화된 것이 아니라 연구자가 자작하였다.
2) 문제해결 전략 선택 경향의 분석은 문제해결 단계를 구분하지 않고 이루어졌으며, 선정된 전략의 일부만을 검증 대상으로 하였다.
3) 연구의 대상을 3학년 2개 학급으로 한정했기 때문에 보편적인 해석에는 유의하여야 한다.

Ⅱ. 문헌 연구

본 장에서 문제해결, 발문 기법, 문제해결 전략과 발문 제시의 효과, 문제해결 전략별 발문 구성에 대하여 살펴보고자 한다.

1. 문제해결에 대하여

1) 문제

문제(problem)란 처음에는 정확한 해의 길을 알지 못하지만, 해의 결과를 요하는 개인 또는 단체에게 부과된 양적인 장면이다. 즉 개인이나 집단이 해결하려 하지만, 구체적이거나 확실한 해결 방법을 쉽게 얻을 수 없는 어떤 상황이라 정의할 수 있으며[14), 이는 학습 경험을 되살려 대답할 수 있는 질문이나, 어떤 내용을 학습한 후에 여기서 얻은 지식을 보다 확실히 학습자에게 정착시키기 위해 반복하여 과하는 연습과는 구별된다.

Shoen과 Oenmke는 어떤 문제 장면이 A라는 사람에게 참으로 문제가 되기 위하여 다음과 같은 조건이 충족되어야 한다고 했다.[15)

(1) 그 문제는 어떤 특정한 조건 하에서 해를 요구해야 한다.

(2) A는 그 과제를 이해하고 있지만 해를 이끄는 즉각적인 방법을 알지 못해야 한다.

(3) A는 해를 찾기 위한 동기가 유발되어야 한다.

예컨대, 고등학교 3학년 학생에게 $2x+4=6$을 풀게 하면, 어떤 도전이나 당혹감을 느끼지 못하며, 즉시 해를 얻을 수 있으므로 문제라 할 수 없다.

---

14) 신현성(1992), 「수학 교육론」, 경문사, p.152.

15) 김철환(1987), "문제 해결력과 수학 문제의 분류 관점에 관한 연구", 한국교원대학교 석사 학위논문, p.10.

이처럼 문제의 유형에 따라 어떤 사람에게 그것이 문제가 되지만, 다른 사람에게 문제가 될 수 없는 경우도 있다.

학자마다 문제의 유형을 서로 다르게 분류하고 있다. 한국교육개발원은 이를 정형 문제, 비정형 문제, 실생활 문제 등으로 나누고 있다.[16)]

정형 문제란 이미 제시된 일반적인 알고리즘을 회상하고 그 변수에 특별한 수치를 대입하여 해결될 수 있는 문제 또는 이미 알려진 전형적인 보기의 해법에 따라 해결할 수 있는 연습 문제 등, 말하자면 교과서적인 문제를 말한다.

비정형 문제란 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르며 문제해결 전략의 사용이 공식화되지 않는 독자적인 해결 방법을 요구하는 문제를 말한다.

실생활 문제란 취급되는 소재가 생활 주변에서 얻어진다.

비정형 문제는 대학입학 수학능력 시험에서 수학내적인 문제로 볼 수 있으며, 실생활 문제란 수학외적인 문제로 분류될 수 있을 것이다. 문제해결 지도의 소재가 될 수 있는 과제는 몇개의 수학적인 개념과 전략이 표함되는 것이어야 하므로 비정형 문제와 실생활 문제라 할 수 있다.

2) 문제해결

문제해결(problem solving)은 여러 가지 의미가 있다.[17)]

(1) 수학 교육의 어떤 하나의 도달 목표로서의 의미를 지닌다.

(2) 새로운 지적 과정을 체계화하는 과정으로 정의한다.

(3) 학교 수학의 교육과정에서는 기호 기능으로서 위치 지워진다.

다시, 위의 정의 (2)는 과정으로서의 문제해결이라고 할 수 있으며 문제해결자자가 사용하는 방법, 절차, 전략, 발견 포함된다. 따라서 문제해결이란 발견에

16) 한국교육개발원(1990), 전게서, p.20~21.

17) 양인환(1990), "수학적 문제해결에서의 소집단 활동의 인지적 효과 분석", 한국교원대학교 박사학위논문, P. 12.

초점을 맞추어 보면, 첫째로 구체적인 문제에 한정이나 가정을 더해서 수학적인 문제로 재구성하고, 둘째로 이것에 수학적인 처리, 예컨대 수, 식, 도형, 표, 그래프 등 수학적인 형식으로 표현하여 수학적으로 해결하고, 셋째로 그것을 이용하여 구체적인 해석을 하고 구체적인 해결을 하는 계산, 식변형, 방정식, 해법, 도형, 조작, 표나 그래프의 사용 등 수학적 조작을 하는 전체 프로그램에 걸쳐 있는 주제이며,[18] 학습할 수 있는 개념과 기능을 포함하고 있는 일련의 과정이다.

문제해결자에게 가장 크게 영향을 주는 요인은 다음과 같다.[19]

① 문제 기술 및 문형의 복잡성, 주어진 정보의 분량, 조건과 변수의 개수, 문제의 수학적인 내용 등은 문제의 곤란성에 큰 영향을 준다.

② 문제의 제시와 표현의 방법, 문제가 그 개인에게 어떤 모습으로 자리잡는가에 따라 문제해결이 영향을 받게 된다.

③ 문제해결자가 해결에 사용하는 방법에 대한 숙지도, 특별한 해결 방법을 쓰지 않으면 안될 때, 그와 유사한 문제에서 그 방법을 사용한 경험이 있는 경우보다 쉽게 된다.

④ 부정확한 해나 해법에 따른 오해, 문제가 지니고 있는 양식 또는 그 문제의 본질로부터 정확하지 않은 해나 해법이 시사된다.

⑤ 문제의 하위 목표 찾아내기의 곤란성, 어떻게 손을 대야할지, 무엇을 하면 좋을지 모르는 것, 이것은 잘 되지 않을 것이라는 두려움과 예감을 갖는 것 등이 문제해결에 영향을 준다.

⑥ 문제 속에 있는 정보의 오해로 그 문제가 변질되는데, 이것이 문제해결 실패의 공통적인 요인이다.

⑦ 그 문제에 대한 문제해결자의 반응에 관련된 정의적 요인이나 문제에

---

18) 구광조 · 박한식(1988), 「수학과 교수법」, 교육과학연구사, PP.65~66.

19) 양인환(1990), 전게서, p.18.

대한 관심, 동기의 부족이 문제를 곤란한 것으로 만들어 버린다.

3) 문제해결 지도

문제해결 지도란 교사의 지도로 학생들이 문제해결을 습득하는 과정이라 할 수 있다. 결국, 문제해결 지도는 수업을 통하여 학생들의 문제해결력을 향상시키자는 것이다. 문제해결 수업은 네 가지 전제가 있다.[20]

첫째로 수업은 잘 구조화된 지식의 존재를 확신하여야 하며, 관련된 개념과 절차와의 연결을 극대화시켜야 한다.

둘째로 수업은 문제해결의 주된 자극으로서 과제 환경의 역할을 고려해야 한다.

셋째로 특별한 문제해결 전략을 가르칠 수 있는 수업 구성이 가능하다.

위의 첫째 전제는 다양한 상황에서 새로운 절차와 개념을 연습시킬 기회를 제공하고, 가능한 많은 수학적 지식을 가르치는 것을 의미한다. 선행조건이 되는 지식이 부족한 학생들에게 능숙한 문제해결을 기대할 수 없기 때문이다.

둘째 전제는 문제해결 전략을 연습시키기 위해서는, 문제와 무관한 정보를 최소화하여 문제를 분명하게 진술한다. 이때 문제의 진술은 그림이나 도해를 통하여 과제의 환경을 자세히 살펴보도록 가르쳐야 한다.

셋째 전제는 Polya(1945/1957), Wickelgreen(1974) 등에 의하여 제시된 일반화된 문제해결 기능을 가르친다는 의미이다. 즉 Polya의 질문 전략, 예컨대 "모르는 것(자료, 구하는 것)은 무엇인가?"는 관련된 지식을 재생하고 적절한 해결 전략을 선택하는데 기여한다.

이상의 내용은, 문제해결 지도는 새로운 절차와 개념의 연습 기회를 제공하며, 문제의 진술을 명료화하고, 일반화된 문제해결 기능을 가르쳐야 한다는 고 정리할 수 있다.

---

20) 구광조 외(1995) , 전게서, pp.291 ~ 292.

그러므로 문제해결 지도의 과제는 특정 전략을 촉발할 수 있는 문제의 선정과 문제해결 전략을 연습할 수 있는 기회를 풍부히 제공하는 일이다. 여기서 취급될 문제는 적당한 난이도와 해법의 다양성, 해결에 여러 가지 전략을 필요로 하는 것이어야 한다.

(1) 훈련 과제 제시

문제해결 지도시에 어떤 유형의 문제를 제시하느냐 하는 것이 대단히 중요하다. 이는 문제에 따라 학생들의 태도가 달라지기 때문이다.

문제해결을 위해 제시되는 문제는 다음과 같은 조건을 갖추면 좋은 문제라 할 수 있다.[21)]

① 문제 풀이 과정에 여러 가지의 수학적 개념이나 기능 등을 포함해야 한다

② 일반화할 수 있거나 다양한 문제 장면으로 확장될 수 있어야 한다.

③ 다양한 해법을 가지고 있어야 한다.

다음으로 '좋은 문제'를 어떻게 준비할 것인가? 문제해결 교육이 수학 교육현장에서 자연스럽게 이루어지고 있지 못하는 것은, "문제해결 지도에 전형적으로 사용되는 문제와 교과서나 참고서에 있는 기존의 문제를 구별하려는 선입견에서 비롯되었다."[22)]는 지적은 기존의 문제라도 위의 조건에 맞게 재구성함으로써 문제해결 지도의 좋은 과제가 될 수 있음을 시사한다.

(2) 문제해결 전략

전략은 문제에서 해(solution)의 길(paths)을 찾는 기술이다. 전략은 해답발견을 보장하지는 않으나 문제해결을 돕는 안내의 역할을 한다.[23)] 즉, 전략은 노하우(know-how)이며, 문제를 풀고 증명하고, 해답과 증명을 비판적으로 검토하는 능력과 정신적 태도를 포함한다. 문제해결의 기술적인 측면만을 고려

---

21) 신현성(1992), 전게서, pp.156~159.

22) 백석윤(1994), "메타인지적 문제해결 지도와 평가를 위한 개발", 「수학교육」, 제 33권, 제 2호, 한국수학교육학회, p. 177.

23) 김선유(1995), "문제해결의 전략과 평가방법", 「논문집」,제5호, 제1권, 대한수학회, p.82.

고려할 때, 두 가지 기본적인 전략이 있다. 곧 시행착오와 발견적 전략이 그것인데, 시행착오란 문제를 해결하기 위한 정보를 체계적으로 사용하지 않고 무작위적으로 문제를 해결하는 전략이다. 반면에 발견적 전략은 문제공간의 크기를 효과적으로 수정하기 위한 전략으로 문제의 최종 상태, 즉 해답에 이를 지도 모르는 몇 가지 가능성을 검토하여 가망성있는 부분을 검색하는 전략이다.[24] 발견적 전략은 문제해결의 진전에 도움을 주는 기술로써 경험에서 나온 규칙으로 문제해결자가 어려움에 직면할 때, 이를 극복하게 한다.

촬스와 레스터(Charles & Lester)는 문제해결 전략을 일반적 전략과 보조전략으로 나누었다. 일반적 전략으로 규칙성 찾기, 일반화하기, 연역(또는 귀납)하기, 거꾸로 생각하기, 추측하여 체크하기, 먼저 유사한 문제 풀기(유사한 것, 또는 조건이나 변수를 줄여서 간단히 한 것 등)이 있다. 보조전략으로 문제를 다시 읽어보기, 핵심이 되는 말이나 구절을 찾기, 중요한 정보를 기록하기, 조직화된 목록・표・도표 만들기, 삽화・도구・그래프 이용하기, 모의 및 실험하기, 보다 간단한 수를 사용하기 등이 있다.[25]

다시 발견적 전략은 일반적 전략과 특수 전략으로 나누고 있다. 일반적 전략이란 모든 문제를 해결하는 데 활용될 수 있는 전략을 말하며, 특수 전략은 특수 영역의 내용에 관련된 문제를 해결하는데 사용된다. 전자에 바로 풀기(working forward), 유추 등이 있으며, 특수전략으로 식 세우기, 예상과 확인, 그림 그리기, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화 하기, 거꾸로 풀기, 수형도 그리기, 실험해 보기 등이 있다.[26]

우정호는 수학적인 문제해결에 유용한 사고 방법으로 다음을 들고 있다. 즉, 거꾸로 풀기, 그림 그리고 기호 도입하기, 표 만들어 정리하기, 사고 패턴 적

---

24) 성인서(1987), "교사・학생이 수학문제 해결에서 사용하는 전략에 관한 연구", 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원, p.25.

25) 신화섭(1990), 전게서, P.22.

26) 성인서(1987), 전게서, pp.25~28.

용하기, 일반화 해보기, 특수화 해보기, 보조 문제 사용하기, 추측하고 수정해가기, 문제를 달리 진술하여 해결하기 등이다. 이러한 사고 방법은 대부분 학교 수학에서 상당한 정도로 사용해 왔으면서도 이를 의식하고 있지 못한 방법이라고 했다.[27)]

한국교육개발원에 따르면, 발견술(heuristics)이란 문제해결자가 어려움을 겪을 때, 어려운 문제를 이해하고 진전하게 하는 규칙으로서 유추, 일반화, 특수화, 보조문제 이용하기, 거꾸로 풀어가기 등을 그 예로 들었으며,[28)] Lenchner(1983)은 초등학교에서 지도할 수 있는 일반적인 전략으로 그림이나 다이어 그램 그리기, 규칙성 찾기, 표 만들기, 더 간단한 문제 해결하기, 시행착오, 예상과 확인, 문제를 실제로 확인하기, 식으로 나타내기, 연역법으로 하기, 관점 바꾸기 등이라 했다.[29)]

4) 문제해결 교수-학습 모형

임재규는 문제해결을 종합적 전략이라 하였으며, 예컨대 Polya의 4단계 교수·학습모형, 가따기리 시게오의 문제해결 과정을 말한다.

(1) G. Polya의 문제해결 모형

G· Polya은 <표1>과 같이 문제해결을 4단계로 나누고 각 단계의 진전을 도와주는 발문과 권고의 형식을 제시하였다.[30)]

27) 우정호(1993), 전게서, p.31.
28) 한국교육개발원(1989), 전게서, p.28.
29) 신화섭(1993), 전게서, pp.24~27.
30) 임재규(1989), "수학과 문제해결 학습의 지도에 관한 연구", 「과학교육연구」, 제 13집, 경북대학교 . p. 77.

<표1> G·Polya의 문제해결 단계에 따른 발문과 권고

단 계	발 문 과 권 고
문제 이해	o 문제를 읽어라. 관건이 되는 말이나 문장은 어느 것인가? o 구하고자 하는 것은 무엇인가? o 주어진 것은 무엇인가? o 조건은 무엇인가? o 그림을 그리거나 표를 만들어라. 적당한 기호를 도입하여라. o 구하는 것과 구하고자 하는 것 사이의 관련성을 찾아라.
계획 수립	o 비슷한 문제를 알고 있는가? o 몇 가지 구체적이고 특수한 사례를 알고 있는가? o 구체적인 사례에서 구하는 것을 충분히 이해할 수 있겠는가? o 구체적인 사례에서 규칙성이나 공통성을 찾아 볼 수 있겠는가? o 구체적인 사례에서 일반화하여 보아라. o 자료와 조건은 모두 사용하였는가? o 문제에 포함된 본질적인 개념을 모두 고려하였는가?
계획 실행	o 각 단계가 옳다는 것을 분명히 인정할 수 있겠는가? o 풀이 계획을 실행하고, 각 단계를 검토하여라.
반 성	o 결과를 시험해 볼 수 있겠는가? o 전개한 내용을 시험해 볼 수 있겠는가? o 전개를 다른 방법으로 얻을 수 있겠는가? o 다른 문제에 그 결과나 방법을 응용할 수 있겠는가?

찾기, 관건이 되는 말이나 표현 찾기 등의 전략이 쓰이고 있다. 계획 수립에서 유추, 특수화, 단순화, 규칙성 찾기, 공통성 찾기, 일반화, 귀납화 전략이 사용되고 있다.

(2) 가따기리 시게오(片桐重男)의 문제해결 단계

기따기리 시게오는 문제해결 단계를 문제의 형성, 파악, 개괄적 구상, 해결의 실행, 논리적 조직화, 검증으로 구분하고 각 단계에 작용하는 수학의 방법에 관련된 생각, 수학의 내용에 관련된 생각을 구조적으로 분석하였다.[31)]

31) 가따기리 시게오(片桐重男), 이용률 외 역(1992).「문제해결과정과 발문분석」, 경문사, p.9.

〈표2〉 수학적인 생각의 구조

문제해결의 과정	방법에 관련된 생각	내용에 관련된 생각							
		단위의생각	표현의생각	조작의생각	알고리즘의 생각	개괄적파악의 생각	기본성질의생각	함수의생각	식에 대한 생각
문제의 형성·파악	추상화 (이상화,조건의 명확화,구체화), 단순화,기호화(수량화,도형화)							o	
개괄적 구상	유추적,특수화,기호화 (수량화,도형화)	o				o			
해결의 실행	귀납화,연역적,유추적,단순화, 특수화, 기호화,구체화	o	o	o		o		o	o
풀이의 논리적 조직화	일반화,연역적,귀납적						o		o
검 증	통합화,발전적, 일반화				o			o	o

5) 교사의 역할

문제해결 지도에서 교사는 학생과 더불어 또 다른 주체이다. 학급의 규모가 작고 학습 시간이 충분하며 학생의 학습 능력이 높으면 수동적 개입을, 학급의 규모가 크고 학습 시간이 부족하며 학생의 능력이 우수하지 못할수록 적극적인 교사의 역할을 요구한다.[32]

문제해결 지도에서 교사는

① 성공할 수 있는 분위기를 만든다.

② 학생들이 실제 문제를 해결해 보도록 고무한다.

③ 학생들이 문제를 제대로 읽을 수 있도록 가르친다.

④ 학생들이 스스로 문제를 만들어 보도록 요구한다.

⑤ 학생들이 짝을 지어 또는 소집단을 이루어 문제를 같이 해결해 보도록 고무한다.

32) 한국교육개발원(1989), 「수학적 사고력 신장 프로그램 개발을 위한 방안탐색」, 방문사, pp.41~42.

⑥ 학생들이 기구 사용없이 그림을 그려보도록 고무한다.

⑦ 현재 가능한 정보를 모두 사용했을 때는 대안을 제시한다.

⑧ 창조적이고 구성적인 질문을 한다.

⑨ 사고의 창의성을 강조한다.

⑩ 학생들 자신의 문제해결 과정을 순서도로 나타내게 한다.

⑪ 한 단계 이상을 요구하는 문제도 포함시킨다.

⑫ 문제해결을 지도하는 동안에는 새로운 수학을 가르치지 않는다.

Schoenfeld는 문제해결 지도를 위한 수업에서 지향해야 할 점을 다음과 같이 제시하였다.[33)]

① 전략이 포함된 단계를 보다 자세한 수준으로 분석하라.

② 각각의 전략이 유용한 조건적 상황을 분명히 하라.

③ 특정한 전략을 촉발할 수 있는 훈련 과제를 선택하라.

④ 문제해결 과정이 충분한 숙고 뒤에 택해졌는지, 또는 해결 과정이 유용한지를 정기적으로 확인하는 경영 전략을 가르쳐라.

또한 교사는 수업 장면에서 분석적이고 비판적인 질문하기, 문제해결을 위한 단서나 암시가 될 수 있는 질문을 자주하기, 질문을 하고 생각할 시간을 충분히 주기, 학생들의 질문이나 생각을 진지하게 받아들이기, 학생들이 생각할 수 있는 다양한 경험 자료 활용하기 등의 전략을 사용할 때, 학생의 사고를 더욱 촉발할 수 있다.[34)]

6) 문제해결의 평가

문제해결 지도 목표 가운데 문제해결의 행동 영역은 다음과 같이 3가지로 요약할 수 있다.[35)]

---

33) 김양숙(1991), 전게서 , p.105.

34) 김선유(1995), 전게서, p.85.

35) 박성익(1985), "사고력 신장을 위한 교수-학습방안", 「교육연구」,제14권 제11호, 교육연구사, p.29.

첫째, 문제해결 과정의 부분적 기능으로써 문제를 이해하는 능력, 해결 전략을 개발하고 실행하는 능력, 그를 통해 정답을 얻는 능력

둘째, 문제해결 과정을 이해하여 문제를 해결하는 능력

셋째, 문제해결 성취에 영향을 미치는 정의적 영역으로 문제해결에 대한 인식, 가치부여, 흥미, 호기심, 적극성, 비판력, 계속성 및 끈기, 자아개념 등 인지적 성향, 인지발달의 수준에 밀접하게 관련되어 그 효과는 매우 복합적인 방식을 통하여 나타난다.

따라서 문제해결의 평가는 기능적인 측면과 정의적인 측면에서 평가되어야 한다. 평가 방법으로 학생과의 일대일 면담 방법이 바람직하겠으나 시간이 많이 소요되고 면담기술이 요구되는 등 애로점이 많기 때문에 학교 현장에서 지필 검사 방법이 간편하게 활용된다.

(1) 문제해결력의 평가

지필 검사의 한 방법으로 푸트(I.J.Putt)의 3단계 평가 방법이 있다. 이는 측정의 관점을 〈표3〉와 같이 문제의 이해, 해결 전략의 선택과 실행, 답하기의 세 단계로 나누어서 문제해결 과정을 각 단계별로 등급 평정을 주어 문제해결능력의 측정 방법을 구안하였다.[36)]

36) 현종익(1996), 「수학과 교수-학습방법의 탐구」, 학문사, p.148

〈표3〉 푸트의 3단계 평가 방법

단 계	점수	측 정 의 방 법
문제의 이해	0	문제를 완전히 오해한다.
	1	문제의 일부분을 오해한다.
	2	완전하게 이해한다.
전략의 선택과 실행	0	전혀 시도하지 않았거나 전혀 부적당한 전략
	1	올바르게 해석한 문제의 일부분에 대한 부분적인 올바른 전략
	2	실수가 없다면 정답을 이끌어 낼 수 있는 전략
답하기	0	답을 하지 않았거나 부적당한 해결 전략에 의한 틀린 답
	1	이기 잘못, 계산 잘못, 많은 답을 가지는 문제에 대한 부분적인 답, 틀리게 호칭이 된 답
	2	정답

(2) 문제해결 전략의 선택 경향 평가

피험자가 문제해결 중에 나타난 사고 과정이나 전략을 분석하는 도구로 코딩 조직(coding system)이 있다. 이것은 피험자가 문제를 풀이할 때 나타나는 인지 활동 및 전략을 일정한 기준에 따라 구분하고 구분된 인지 활동 및 전략의 각 항목에 일정한 기호를 부여한 것이다. 예컨대, 폴야가 제시한 일반적인 전략을 세분해서 R, D, T, C 등과 같은 기호로 학생의 풀이 행위를 분석한다.[37]

코딩 조직을 개발하게 된 이유는 피험자의 인지 활동을 보다 신뢰성 있게 표면화시킴으로써 문제해결 과정이 어떻게 진행되었는지 또는 어떤 전략을 사용하여 해결했는지 알아보려는 것과 분석자의 주관을 배제하려는 데 있다.

37) 성인서(1987), 전게서, pp.38~39.

2. 발문 기법에 대하여

1) 발문의 정의와 목적

발문은 수업 목표를 향하여 학습자의 사고나 논리를 자극·유발하고 발전시켜 나가기 위한 문제 제기[38]이며, 곧 학습자가 의식하고 있지 않았던 것에 대하여 문제 의식을 갖게 한다든가, 사고 활동을 유발시킨다든지, 표현 활동을 돕는데 그 목적이 있다.

발문을 통하여 교사는 학습자의 비판적 사고, 반성적 사고, 합리적 사고 등을 자극하고 이끌어 준다. 교사와 학생, 또는 학생 상호간의 문답을 통하여 학생들은 스스로 탐구하는 능력을 키우고 학습하는 방법을 배우게 된다는 점에서 발문법의 가치는 높이 평가되고 있다.

Carin과 Sund(1971)는 발문은 사고 촉진 이외에도 여러 가지 부수적인 목적을 가진다고 했다.[39]

① 이전에 알고 배운 정보를 복습하게 한다.

② 학생의 질문과 교수 목표 달성 수준을 평가한다.

③ 학생의 필요와 학력 수준을 진단한다.

④ 어떤 주제나 문제에 관해 토의하도록 자극한다.

⑤ 학생의 비판적·창의적 사고를 조장한다.

⑥ 학생의 흥미를 유발한다.

⑦ 학생의 행동을 통제한다.

⑧ 학습을 개별화한다.

⑨ 수업시 학생의 참여를 유도한다.

⑩ 수업시 다른 학생을 새롭게 보게 하는 기회를 제공한다.

---

38) 이성국(1991), "교사의 발문수준이 아동의 창의력 신장에 미치는 영향", 석사학위논문, 한국교원대학교 대학원, p.17.

39) 변홍규(1995), 「질문제시의 기법」, 교육과학사, pp.13~14.

⑪ 교사 자신의 교수 효과를 평가한다.

2) 발문의 유형

이성호는 발문의 목적에 따라 여러 가지 유형으로 분류하고 있는데, 이를 요약하여 제시하면 〈표4〉 와 같다.[40)]

〈표4〉 발문의 유형

분류의기준	분 류
교육 목표	지식, 이해, 적용, 분석, 종합, 평가에 기초한 발문
사고 수준	구체적 사고, 추상적 사고,창의적 사고에 관한 질문
교수 행위	개시적인 발문, 초점을 맞추기 위한 발문, 사고의 차원을 끌어올리기 위한 발문, 부가적인 보조 발문
인지 과정	개념적 과정, 경험적 과정, 평가적 과정, 형이상학적 과정
사고의 폭	제한형, 확장형
인지 능력 개발	개념의 귀납적 개발 능력 증진을 위한 발문, 비교와 대조 능력 개발을 위한 발문, 절차 능력 개발을 위한 발문, 개념의 연역적 능력 개발을 위한 발문, 목적에 대한 설명 능력 개발을 위한 발문 등

3) 응답 처리의 기법

교사의 발문이 아무리 훌륭했어도 발문만 해 놓고 응답에 대한 적절한 지도가 이루어지지 않으면 학생들의 학습 의욕이나 학습력, 사고력의 향상에 부정적인 영향을 끼치게 된다. 그러므로 학생의 응답을 어떻게 처리하느냐 하는 문제는 대단히 중요하며, 교사의 발문은 학생의 사고를 진작시키고 정서적안정을 해치지 않도록 의도적이어야 한다.

(1) 맞은 응답의 처리

좋은 질문은 바람직한 응답을 이끌어 내는데 필수적이지만, 그 처리 여하는 학생의 정의적 특성 형성에 영향을 준다.

---

40) 이성호(1995), 「교수방법의 탐구」, 양서원, pp.84~97.

"그래 맞아". "아주 훌륭한 대답이었어요".
등과 같이 칭찬과 격려로 성공감과 자신감을 갖도록 배려한다.

(2) 불완전한 응답의 처리

불완전한 응답이란 학생의 대답 내용 중 일부가 틀린 경우이다. 교사가 적절히 추가(부가) 질문함으로써 학생으로 하여금 다시 답을 찾아보도록 격려하는 기법이다. 질문은 한 학생에게만 계속적으로 할 필요는 없으며, 질문의 어떤 부분을 적절히 다른 학생에게로 돌려서 여러 학생들의 참여를 유도할 수도 있다.

이같은 부가 질문에는 다음과 같은 종류가 있다.[41)]

① 확장 : 학생들에게 대답을 좀더 깊게 혹은 자세히 하도록 요청하는 것을 말한다.

예컨대, "좀더 자세히 말해 주세요".
"그리고 나서는 어떤 일이~".
"지금 학생이 말한 것이 참이라면 논리적인 다음 단계는 무엇인가?"
"그 부분을 좀더 자세히 설명해 주세요"

② 명료화 : 대답을 좀더 분명하게 설명해 달라는 부가 질문이다. 예컨대,
"그 대답을 학생의 말로 다시 말해 주세요."
"답을 다른 말로 표현해 보겠습니까?"
"~은 무슨 뜻이지요?", "~의 예를 들어주세요?"
"...이 무엇을 의미하는지 좀더 분명히 말해 주겠습니까?"

③ 정당화 : 학생의 주장에 대해 자신의 주장을 뒷받침해 줄 만한 증거나 이유를 대라는 부가 질문이다. 이는 학생이 별 생각 없이 주장을 편다는 느낌이 들거나, 대답의 근거가 분명치 않을 때 사용할 수 있다.

---

41) 길양숙(1992), "오답의 유형과 교사의 발문", 「교육연구」, 통권 281호, 교육연구사, pp.40~41.

(3) 틀린 응답의 처리

학생의 응답이 완전히 틀렸을 때, 옳은 답을 제공하거나 아니면 문제를 수정하는 경우이다.[42)]

① 직접적 교정의 예 :

"~의 답은 부분적으로 옳다. 그렇지만 전체적으로는 옳다고 볼 수 없다."

"옳다. 그러나‥‥".

"......하니까 그렇게 생각할 수도 있겠군.". "그런 점도 있지."

"~의 생각도 옳은데 그 생각에는 어떤 것이 빠져 있나 하면‥‥."

개념의 정의나 예 등과 같은 힌트를 제공하여 학생이 다시 대답해 볼 수 있는 기회를 주는 것이다.

② 간접적으로 오답에 반응하는 방법 : 질문을 잘게 쪼개어 다시 질문을 하는 것이다. 이는 질문이 복잡했다고 판단될 때, 아무도 대답을 하지 못한 경우에 사용하면 좋다.

4) 발문의 난이도

발문의 난이도를 판별하기가 어려우며, 다분히 교사의 주관에 따라 다를 수 있지만, 학급학생의 3/4 정도가 답변할 수 있는 발문이어야 한다. 교사의 발문에 전혀 반응할 수 없을 정도의 어려운 것이라면 그 발문은 무의미하다. 또한 주제에 대하여 몇 차례 질문을 할 필요가 있을 때에는 쉬운 발문부터 어려운 발문으로 단계적으로 제시하는 것이 바람직하다.[43)]

42) 김양숙(1992), 전게서, p.41.
43) 이태근(1992), "질문과 오답 유형의 처리", 「교육연구」, 통권291호, 교육연구사. p.33.

5) 발문 기법 운영상의 유의점

발문을 할 때 교사가 유의해야 할 점은 다음과 같다.[44)]

① 발문은 전체에게 하되 답은 가급적 특정 학습자에게 하고, 전체에게 고르게 한다.

② 해답까지는 충분한 시간을 주고 언어적 분위기를 부드럽게 하여 깊이 생각하도록 이끈다.

③ 개인차를 고려해서 대답을 하도록 하며, 해답 불능자에 대한 취급 방법이나 지도에 교육적으로 배려한다.

④ 의미있는 발문에 확신을 가지며, 때와 장소, 내용에 따라 적절히 발문을 한다.

⑤ 발문은 주로 교사만 하는 것이 아니라 학습자에게도 기회를 준다.

⑥ 손이 올라가지 않은 학생이나 열등한 학생에게도 발문과 응답의 기회를 준다.

⑦ 학생이 질문한 내용은 명확히 해답을 내려 주어야 한다.

⑧ 학생의 대답을 이용해서 수업을 진행하는 것을 염두에 두어야 한다. 학생이 질문을 자꾸 해서 수업의 전체 과정을 흐리거나 엉뚱한 방향으로 흘러가 화제의 초점이나 주제를 모호하게 만들어서는 안된다.

⑨ 발표 방법, 표현 태도, 언어 구사력 등의 학습 능력 및 태도 등에 대해서도 무관심해서는 안된다.

6) 발문의 절차

발문은 학습을 돕고, 호기심을 충족시키는 원천적인 방법이므로 발문을 효과적으로 제시하여야 하며, 이를 위해 다음 세 가지의 단계가 필요하다.[45)]

44) 김원경(1988), "수업과 문답 및 발문방법", 「교육연구」, 제8권, 제5호, 교육연구사, p.31.
45) 자롤리・맥저, 김내복 역(1985), 「인지・정의・기능 학습을 위한 전략」, 배영사, pp.213~217

(1) 발문을 안출하고 말하는 일 : 발문은 원하는 반응을 나타낼 수 있도록 분명하게 해야 한다.

(2) 발문을 계열화하는 일 : 발문은 적절한 순서로 이루어져야 한다.

(3) 발문 속도를 조절하는 일 : 한 발문과 관련된 아이디어를 생각해 내는데 허용되는 시간이 거의 없이 다른 발문이 나오면, 사려 깊은 대답보다 짧은 대답을 하도록 촉구하는 결과가 되므로 학생이 대답할 수 있는 시간을 충분히 주어야 한다. 또 학생이 즉각적인 반응이 없더라도 그 발문을 다시 고쳐서 말하거나, 학습자에게 단서 제공을 서두르지 말아야 한다. 발문 후 대답할 때까지 기다리지 못한다면, 학생들은 정보의 회상만을 찾는데 급급하게 된다.

3. 문제해결 전략과 발문 제시의 효과에 대하여

1) 문제해결 전략 훈련의 효과

문제해결 전략의 훈련과 문제해결력과의 관계는 <표 5>에서 보는 봐와 같이 훈련의 효과가 긍정적이라고 평가할 수 있다. 특히, Schoenfeld는 연구에서 어떤 전략이 어떤 상황에서 유용한지 명료하게 제시하였으며, 과제의 특성과 그 과제를 해결하는데 적절한 전략 학습이 중요한 요인이고, 그런 연관이 인식될 때 비로소 전략을 효율적으로 사용할 수 있다는 것을 시사해 주었다.[46)]

그러므로 문제 풀이에 어떤 전략이 필요한지에 대한 조건적 상황을 명료화하는 일이 중요하며, 이런 조건적 상황을 어떤 방법으로 암시하고 유도할 것인가하는 것이 문제가 된다.

46) 김양숙(1991), 전게서, pp.102~105.

<표5> 문제해결 전략 훈련의 효과에 대한 연구

연구자	연구의 대 상	방 법	결 과	문제점 및 시 사 점
Willson (1967)	중 3학생중 성적의 중·상위자	교과서적인 방법 Polya가 제시한 발문	Polya가 제시한 발문을 가르친 집단에서 문제해결에 의미있는 변화.	문제해결 전략의 학습여부 미확인
Smith (1973)	대학생	특수전략 훈련 일반전략 훈련	특수전략 훈련집단에서 의미있는 변화를 보임.	훈련집단의 1/3 ~2/3만이 훈련받은 전략 사용
Lucas (1972)	미적분학 강의받은 학생	전략 훈련	문제해결 전략에 따라 훈련의 효과가 다름.	수업 자료, 수업방법이 어떤 전략을 훈련하는데 부적절
Kanowski (1975)	성적의 중·상위자	전략 훈련	전략을 사용하는 경향이 많을수록 문제해결의 성공도가 증가.	
Schoenfeld(1979)	과학, 수학 전공대학생	전략 훈련	전략 사용의 빈도가 증가할수록 문제해결의 성공도가 증가.	

<표5>는 길양숙의 논문을 제재로 연구자가 요약한 것임.

2) 발문 제시의 효과[47)]

발문은 가장 오래된 교수·학습방법으로 소크라테스(Scorates)가 노예 소년 메노와의 대화에서 아무 자료도 사용하지 않고 삼각함수의 원리를 가르쳤다[48)]는 사실에서 알 수 있듯이 발문법은 가장 오래되고 강력한 교수방법의 하나이다.

밀스(Mills)는 이전의 연구를 재분석한 결과, 교사 질문과 학생 반응간에는 50% 정도의 관련성이 있다고 밝혔으며, 그외 많은 연구에서 발문의

47) 변홍규(1994), 「질문제시의 기법」, 교육과학사, pp.38~44.
48) 송용의 외(1987), "효과적인 교사의 발문 기법에 관한 연구", 「논문집」, 제 21집. p.2 인천교육대학. p.2

수준과 학업성취, 발문의 빈도와 학업성취 사이에 상관이 밝혀졌다.

<표6> 발문제시의 효과에 대한 연구

발문의 수준과 학업성취	버기(Buggey), 헌킨스(hunkins) 등은 학업성취와 상위수준 질문 사이에 상관이 높다고 밝혔다.
발문의 빈도와 학업성취	로센샤인(Rosenshine)은 두 차례의 연구에서 질문빈도와 학업성취 간에 정적 상관이 있다고 밝혔다.
발문제시의 기술과 학업성취	갈과 헌킨스(Galls, Hunkins)는 규칙적으로 질문하거나 규칙적으로 질문에 답해 온 학생들이 그렇지 않는 학생들보다 학업성취가 더 높았다고 밝혔다. 갈(Gall)은 대학생들에게 질문 훈련한 결과 정보의 유발, 주의집중 강화, 정보를 깊이있게 처리하고, 연습의 가치를 증대시켜 주었다고 밝혔다.

18개의 대표적인 연구를 개괄한 위니(1979,Winne)의 연구에 따르면, 교사의 고등수준의 질문과 사실적 질문이 학생들의 학습에 미치는 효과가 "의미있는 차이가 없다."고 한 연구가 전체의 64%, "사실적 질문의 효과가 더 크다."가 26%, "고등수준의 질문의 효과가 더 크다."가 10%인 것으로 집계되었다. 그런데 이 연구들을 매타분석법을 사용하여 재분석한 다른 연구(Redfield,1981)에서는 교사가 고등수준의 질문을 하는 것이 보다 효과적이라고 밝혔다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구에 사용된 변인을 규정하고, 검증을 위한 절차를 기술한다.

1. 연구설계 및 절차

1) 실험대상

본 연구에 참가한 학생들은 농어촌 지역에 위치한 일반계 고등학교인 한림고등학교 3학년 자연반 2개 학급 67명이다. 이들이 선택된 이유는 교과진도가 끝났으며 또 문제해결 지도의 과제가 범교과서적인 성격을 갖고 있어 연구의 실천으로 인한 교과진도의 결손 방지와 연구 추진의 용이함에서였다. 피험자 2개 학급은 실험집단과 비교집단으로 나누었으며 실험 결과의 객관적인 비교를 위해 3학년 1학기 중간고사 수학성적을 이용하여 동질성 검사를 했다. 검사 결과 유의한 차이가 없는 것으로 나타나 수학성적에 관한 한 이들을 동질집단으로 볼 수 있다.

2) 실험절차

실험수업은 1997년 6월 16일부터 1997년 6월 30일까지 11시간에 동안 실시되었으며 수업은 본 연구자가 담당하였다. 실험집단의 학생들에게 실험의 대상이 되고 있다는 것을 인지토록 하였다. 실험의 효과를 비교하기 위한 제검사는 7월 2일에 실시되었다.

3) 연구집단의 배정 및 처치방법

본 연구는 준실험으로 이를 도식화 하면 다음과 같다

실험반	T_1	X_1	T_2
비교반	T_3		T_4

T_1 : 사전 문제해결 전략 선택 경향 및 문제해결력, 태도 검사.
T_2 : 사후 문제해결 전략 선택 경향 및 문제해결력, 태도 검사
X_1 : 발문처치

4) 검증도구 및 자료 처리 방법

문제해결 전략의 훈련방법에 따라 문제해결에 미치는 효과는 문제해결 전략 선택 경향, 문제해결력 및 문제해결 전략의 가치에 대한 인식에 유의한 차이가 있는지에 대하여 조사되었다.

(1) 문제해결 전략 선택 경향은 코딩시스템 방법에 의하여 일반화, 특수화, 단순화, 기호화, 귀납적인 생각(귀납화), 예상과 확인, 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 도형화, 통합화, 보조 요소 이용하기, 함수적인 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 기본 성질의 생각, 수·식에 대한 생각 등 15개의 전략을 문제 풀이에 사용한 빈도를 누가 기록하고 백분율로 좌우 비교하였다. 검사지는 모두 5문항으로 구성되었다.

(2) 문제해결력을 Putt의 방법에 따라 문항당 6점을 배정하여 30점 만점으로 채점하였고, 통계처리는 z검증으로 좌우 비교하였다. 검사지는 예비검사를 실시하여 난이도를 조정하였으며, 훈련과제 및 평가문항이 특정 전략을 촉발할 수 있는지에 대하여 동료 교사의 조언과 지도교수의 지도를 받았다.

(3) 문제해결 전략의 가치에 대한 인식 검사지는 선행연구에서 사용된 것이며 '항상 그렇다', '대체로 그렇다', '모르겠다', '대체로 그렇지 않다', '전혀 그렇지 않다' 순서대로 가중치 5점, 4점, 3점, 2점, 1점을 주었으며, 부정적인 질문은 이와는 반대로 가중치를 주었다. 자료의 처리는 z검증으로 좌우비교하였다.

2. 독립변인과 종속변인

본 연구의 독립변인은 문제해결 전략의 훈련 방법이며 종속변인은 훈련의 결과 나타나는 인지적·정의적 효과이다. 실험반의 처치변인이 발문이고 비교반의 처치변인은 교사 설명이다. 발문으로 구성된 전략은 23개의 문제해결 전략과 6개의 운영발문으로 정하였다.

1) 발문 구성의 대상

문헌에 근거하여 발문을 구성할 대상(영역)은 다음과 같다.

(1) 문제해결 전략

첫째로 수학의 방법에 대한 전략 : 일반화, 특수화, 단순화, 기호화, 연역적인 생각(연역), 발전적인 생각, 유추, 귀납적인 생각(귀납화), 예상과 확인, 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 수량화, 도형화(그림 그리기, 벤다이어 그램, 그래프 그리기, 수직선 이용 등), 추상화, 통합화, 보조 요소 이용하기 등.

둘째로 수학의 내용에 대한 전략 : 단위의 생각, 함수적인 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 기본 성질의 생각, 알고리즘의 생각, 수·식에 대한 생각 등.

(2) 운영 발문

① 과정 처리 발문:기다려 주기, 부추기기, 명료화, 초점화, 입증하기, 지지하기, 방향 다지기, 정교화

② 개념 형성을 위한 발문

③ 원리 적용을 위한 발문

④ 자료 해석 능력 개발을 위한 발문

⑤ 관리적 발문

⑥ 학생의 응답 처리 발문

2) 발문 구성의 실재

(1) 문제해결 전략별 발문

문제해결 전략별로 하위 개념을 설정하고 그 하위개념의 형성을 위해 예상

되는 발문을 <표7>과 위계적으로 구성하였다.

〈표7〉 문제해결 전략별 발문

전 략	하 위 요 소	기 본 해 결 과 제
귀납적 추 리	·관련 지식(사례) 회상	T 구체적이거나 특수한 사례를 알고 있는가(수집하라)?
	·공통점 찾기	T 그 사례에서 성질이나 규칙을 찾아보자.
	·추측	T 찾은 것이 일반적으로 성립할까?
	·다른 사례에서 확인하기	T 찾은 것은 또 다른 사례에서도 발견되는가?
유 추	·유사점 탐색	T 주어진 것(문제, 성질 등)과 같은 유사한 것을 찾아보자. ☞미지의 것, 구하는 것이 같거나, 조금 다른 것을 바탕으로 생각하기
	·공통적인 사실 확인	T 그것과 이것에서 공통적인 사실이 있는가?
	·성질, 방법 적용	T 그것의 성질(풀이 방법)을 적용할 수는 없을까?
	·유도하기	T 두 사상(문제 등)의 같은 점(성질)은 무엇인가? T 그 유사성에 근거하여 기지 사항으로부터 미지 사항을 유도(예상)할 수 없을까?
추상화	·비교와 대비	T 어떤 점이 같은가(공통점)? 어떤 점이 다른가?
	·명료화	T 말의 뜻이 무엇인지 분명히 하여라. 일상적인 용어로 말하여 보아라.
연역적 추 리	·기지의 사상 회상	T 알고 있는 것(알 수 있는 것)을 바탕으로 생각하여 보자.
	·조건 확인	T 이 것(사실)이 성립되려면 무엇을 알아야 되는가?
	·판단	T 이러면 된다(이것은 틀린다. 성립하지 않는 경우가 있다.)는 것을 설명할 수는 없는가?
	·근거 대기	T 어떤 사실을 근거로 그렇게 생각하는가? 기지의 사실을 바탕으로 설명할 수는 없는가?
	·이유 확인	T 어찌하여 ~인가?
	·기본적인 규칙(형식)	T 근거는 건전하며 모순이 없는가? T 도출(導出)에는 모순이 없는가? T 도출(導出)이 필연적인 것인가? T 다른 가능한 도출(導出)은 없는가?
일반화	·요약,정리	T 사상(자료,조건, 예 등)을 요약·정리하여 보자.
	·예상	T 무엇이 사실일 것 같은가?
	·판단	T 왜 그것이 사실일 것 같은가?

전 략	하 위 요 소	기 본 해 결 과 제
단순화	·조건 이해	T 조건은 몇 개인가?
	·조건 무시	☞문제의 진술에서 의미 파악이 가능한 최소의 범위(단위)로 쪼개자.
	·다른 조건 고려	T 일시로 몇 개를 무시해서 일부(하나)만을 생각해 보자.
	·처리 방법 탐색	T 그것을 바탕으로 처리(생각)하여 보자
	·간단한 문제로 변형하기	T 남은 조건에 근거하여 풀어 보자.
		T 다른 조건에 근거하여 풀어 보자.
	·방법(원리) 적용하기	T 얻어진 것들을 어떻게 처리하는 것이 좋을까?
	문제를 간단히 하기	T 주어진 문제를 좀더 단순한 문제로 만들어 보자.
		T 그 단순한 문제를 해결하고 그 방법을 주어진 문제에 적용하자
패 턴 찾 기	T 문제를 다시 읽자. 문제를 자기의 말로 고쳐서 말하자	
	T 관건이 될 단어나 구(句)를 찾아보자.	
	T 목록, 표, 도표,그래프를 만들어 보자.	
	T 문제를 푸는데 필요한 정보, 여분의 정보, 부족한 정보가 있는지 알아 보자.	
	T 그 문제를 실험하거나 실연하자.	
예상 과 확인	·예상	T 이 문제를 푸는데 어떤 전략이 좋을까? 어떻게 하면 될까?
	·확인	T 네가 예상한 것이 너무 크지(작지) 않은가?
		그것이 조건을 만족하는가?
	·예상	T 다른 예상을 하여 보아라.
발전적인 생각	·관점 바꾸기	T 다른 관점에서 볼 수는 없는가?
	·조건 변경	T 조건을 변경하면 어떻게 되겠는가?
	·보다 나은 방법 생각하기	T 보다 나은 방법이 없을까?
		보다 능률적으로, 보다 간결하게 할 수 없을까?
	·문제 만들기	T 새로운 문제를 만들어 낼 수 없을까?
	·타당한 방법 찾기	T 너는 어느 방법이 좋다고 생각하는가?
		T 어떤 점에서 그렇게 보았는가?
		T 그것(방법)이, 다른 것(방법)과는 어떻게 다른가(같은가)?
		T 보기를 들어 설명할 수 있는가?
거꾸로 풀 기	·미지수 결정	T 구하는 것을 미지수로 놓아라.
	·식(式) 세우기	T 식을 세워라.
	·역연산 이용	T 역연산을 이용하여 그 식을 풀어라.
	·반성	T 얻어진 것이 가정(조건)에 맞는가?

전 략	하위 요소	기 본 해 결 과 제
기호화	·간결 명확	T 문제의 조건(구하는 것)을 기호나 수학적인 용어로 나타내어라.
통합화	·공통점 탐색 ·분류하기	T 본질적인 공통점은 무엇인가? T 그 점들은 어떤 구조 속에 들어 갈 수 있는가?
수 량 화	·양적(量的) 표현	T 문제의 내용을 양적(量的)으로 나타내어라
도 형 화	·그래프, 수직선, 벤다이어 그램 등	T 수(數)적인 대상이나 관계, 문제의 내용을 그래프(그림, 수직선, 벤다이어 그램) 으로 나타내어라.
단 위 의 생 각	·기준 찾기	T 무엇을 바탕(단위)으로 보면 좋을 것인가? -단위(점 등)를 바탕으로 생각하여 보아라.
수식에 대한 생각	·양(量)을 나열하기 ·변수 결정 ·식(式) 세우기	T 문제에 포함된 양(量)을 나열하여라 T 모르는 것을 문자로 나타내자. T 문제의 표현에 근거하여 수식으로 나타내어라.
	·식(式)을 해석하기	T 주어진 식의 의미는 무엇인가?
함수적인 생 각	·의존 관계 ·표현 방법 ·대응 규칙	T ~을 정하면 --이 정해지는가? T 함수 관계나 표현 방법을 생각하자 T 변수 사이의 대응 규칙은 무엇인가?
표 현 의 생 각	·표현의 생각	T 언어(방법, 나타내고 있는 것)의 의미를 바탕으로 생각하여 보자.
조 작 의 생 각	·조작의 생각	T 어떻게 처리(조작)를 하면 좋을까? (사칙 연산, 제곱 등의 방법 적용)
기본성질의 생각	·기본적인 성질, 법칙에 주목	T 알고 있는 말의 뜻(성질,방법)을 바탕으로 생각하여 보자.
알고리즘의 생각	·처리의 형식화 ·절차 요약	T 정해진 수법(手法)에 따라 계산(처리)해 보자. T 그 절차의 첫 단계는 무엇인가? T 그 절차의 다음 단계는 무엇인가? T 생략하거나 추가해야 할 단계는 무엇인가? T 이 절차는 반드시 이러한 순서로 해야 하는가? T 전체 절차를 요약하여 보자.
특수화	·임의로 ·체계적으로 ·예상하기 ·조건 고정하기	T 임의로 예를 들어 보아라 T 체계적으로 예를 들어 보아라 T 무엇을 예상할 수 있는가? T 조건을 고정시켜(일정하게 해) 보아라.
보조요소 이용하기	·문제 바꾸기 ·보조선 긋기	T문제를 다르게 바꾸어 보아라(예컨대,대우 등) T 보조선을 그어 보아라.

(2) 운영발문

① 과정 처리 발문

과정 처리 발문은 교사의 발문에 대한 보다 정확한 답을 유도하기 위한 발문을 말하며, 〈표8〉 와 같다.

〈표8〉 과정 처리 발문의 내용

구 분	하 위 개념	표 본 질 문
기다려 주기	·신호나 예고하기 ·과정처리질문 하기	T 각자는 신중하게 생각하여 답을 하기 바란다. T 부추기기, 명료화 등의 질문 제시
부추기기	·분명한 용어나 내용으로 고쳐 묻기	T 인수 정리를 설명해 보아라. T 식 f(x)가 x-a로 나누어 떨어지기 위한 조건은 무엇인가?
	·응답에 대한 단서 제공	T 이 문제를 푸는데 어떤 전략을 사용하면 좋을까? T 이 문제의 조건이 ~인 점을 고려할 때, 어떤 전략을 사용하면 좋을까?
	·계열적으로 고쳐 묻기	T 다음 문제를 풀어라. T 주어진 것은 무엇인가? 구하는 것은 무엇인가? T 무엇을 x로 정하면 좋을까?
명료화	·다른 말로 바꾸기 ·불분명할 때 ·정의	T 그 답을 다른 말로 말해 보아라. T 학생이 말한 ~은 무슨 뜻인가? T 학생이 말한 ~을 좀더 분명히 말해 보겠는가? T ~이 되는 예를 들어 봐요? T ~을 정의해 보아라.
초점화	·초점 바로잡아 주기 ·연결짓기 ·초점 압축	T (예)인수 정리는 어떤 경우에 사용되는가? T 학생은 인수 정리의 개념을 말하고 있군요. 인수 정리의 용도에 대하여 말할 수 있겠니? T 무리수의 상등과 복소수에서 배운 것 중에 어떤 것이 서로 관련되는가? T 너는 문제의 어떤 점에 특별히 주의를 기울이는가? T 조건에 대하여 더 말해 주겠니?

입증하기	·원천 ·개인의 체험 ·원리의 일반화	T 그것의 근거는 어디에 있는가? T 그것에 해당되는 조건은 무엇인가? T 그런 방법으로 문제를 풀어 본 적이 있나? T 이것을 주장할 수 있는 근거가 있는가? T ~이 성립한다고 말할 수 있는 근거는 무엇인가?
지지하기	·집단화 ·표찰 ·분류	T A, B, C 등은 함께 묶을 수 있다고 말했다. 이들을 묶을 수 있는 이유는 무엇인가? T 부등식 A, B, C 등은 묶어서 절대 부등식이라고 했는데 그 이유는 무엇인가? T 이차방정식의 근을 분류하여 보아라.
정교화	·다른 응답 유도	T 주어진 식이 너무 복잡하게 보이는데, 좀더 간단히 할 수 있는 방법은 무엇인가? T 예컨대, 치환은 모든 경우에 식을 간단하게 할 수 있는가

② 개념 형성을 위한 발문

개념 형성을 위한 발문은 수학에 대한 개념의 발견, 형성을 목표로 하는 발문으로 〈표9〉 과 같다.

〈표9〉 개념 형성을 위한 발문의 내용

개념 형성 (귀납적 탐구방법)	T1 여기 몇 개의 예가 있다. 어느 것끼리 함께 묶을 수 있는가? T2 어떤 근거로 그것들이 함께 모아져야 한다고 생각하는가? (공통성 중심) T3 이들 묶음을 무엇이라 하는가? T4 다른 예를 들어 보아라

③ 원리의 적용 발문

원리 적용을 위한 발문은 정리, 법칙 및 공식을 문제해결에 적용하도록 돕는데 활용된다.

〈표10〉 원리 적용을 위한 발문의 내용

원리의 적용	귀납적 방법	T 만약 ....이라면 어떻게 될까?(조건이 만족되는가? 등) T 왜 너는 그것이 적용(이용)될 수 있다고 생각하는가? T 무엇 때문에 그것이 성립할 것 같은가?
	연역적 방법	T 주어진 문제에서 단서가 될 수 있는 것을 말해 보아라. T 그것에 근거하여 어떤 개념(원리 · 법칙)이 적용되는가? T 그것이 적용될 수 있는 이유는 무엇인가?

④ 자료의 해석 능력 개발을 위한 발문

이 발문은 문제의 이해, 학습 내용의 이해를 돕는데 활용할 수 있는 발문으로 〈표11〉 과 같다.

〈표11〉 자료의 해석 능력 개발을 위한 발문의 내용

자료의 해석	T 어떤 것들이 있습니까? 구하는 것, 주어진 것, 모르는 것은 무엇인가?(주어진 문제에서) T 그들 사이에 어떤 관계가 성립되는가?(인과관계, 요점의 상호 관계 등) T 이것의 의미는? 당신에게 주는 의미는? 당신의 결론은 무엇입니까? T 다른 예를 들어 보아라.

⑤ 관리적 발문

관리적 발문은 수업의 시작과 더불어 하는 발문과 학습 내용의 회상을 요구하는 발문으로 〈표12〉 와 같다.

〈표12〉 관리적 발문의 내용

종 류	발 문 예 시
개시적 발문	T 이 시간(단원)에 무엇에 대하여 공부하면 좋겠는가?
확인 학습 발문	T 전 시간에 공부한 주제는 무엇인가(경험) T ~의 요지는 무엇인가(이해, 태도)

⑥ 응답 처리 발문

이는 학생의 응답에 대하여 격려 및 교정을 위한 것으로 〈표13〉 과 같다.

<표13> 응답 처리 발문의 내용

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">맞은 응답에 대한 반응</td><td>T 그래 맞아, 아주 훌륭한 대답이었어.</td></tr>
<tr><td>T ~이라고 한 점이 좋았어.</td></tr>
<tr><td rowspan="11">완전히 틀린 응답의 처리를 위한 발문</td><td rowspan="6">직접적인 교정</td><td>T ~의 답은 부분적으로 옳다. 그렇지만 전체적으로는 옳다고 볼 수 없다.</td></tr>
<tr><td>T 개념의 정의나 예 등과 같이 힌트 제공하기</td></tr>
<tr><td>T ~하면 어떨까 .</td></tr>
<tr><td>T 다시 한 번 생각해 보자.</td></tr>
<tr><td>T 더 좋은 방법은 없을까.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">간접적인 교정</td><td>T 질문을 잘게 쪼개기, 다시 고쳐서 질문하기</td></tr>
<tr><td>T 옳다. 그러나 ~</td></tr>
<tr><td>T ~하니까 그렇게 생각할 수도 있겠군.</td></tr>
<tr><td>T 그런 점도 있겠군.</td></tr>
<tr><td>T ~이 생각도 옳지만 그 생각에는 어떤 것이 빠져 있나 하면,</td></tr>
</table>

3) 훈련과제

실험을 위해 특정 전략을 촉발할 수 있는 훈련과제 19문항을 선정하였다. 실험반에 투입된 자료는 Polya의 문제해결 단계에 따라 예상되는 풀이 절차를 발문화한 것이며 비교반에는 선정된 훈련과제만을 유인하여 투입하였다. 시간당 1문제 또는 2문제만을 배부하여 해결하였다.

실험반에 투입한 자료는 <표14>와 같은 양식으로 제작되었다.

<표14> 훈련과제 (예시)

<table>
<tr><td>목 표</td><td colspan="2">변수(미지수) 설정하기, 계획 세우기, 식세우기
① 구하는 것과 관련하거나, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓을 수 있다.
② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세울 수 있다.
③ 세운 식을 조작할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>문 제</td><td>어느 비행기의 탑승객의 남·여의 구성비가 표와 같을 때, 전체 탑승객 중에서 18세 이상인 사람의 비율은?</td><td><table><tr><td></td><td>18세미만</td><td>18세이상</td><td>전체</td></tr><tr><td>남</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>여</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">T1 구하는 것은 무엇인가?
T2 구하는 것을 얻을 수 있는 경우를 생각하여 보아라.
-구하는 것을 (식으로) 간단히 나타내어라.
-구할 수 있는 요소(공식)을 생각하여 본다.
T3 위의 요소를 구할 수 있는 경우를 생각하여 보아라.
T4 주어진 것을 보아라. 주어진 표에서 구분된 숫자는 무엇을 의미하는가?
T5 실제 인원수를 알고 있는가?
T6 실제 인원수를 알려고 하면, 어떻게 하면 될까?
- 미지수를 설정하여라. 무엇을 문자로 두면 좋을까?
T7 식을 세워 보아라.
-구하는 것과 관련시켜 보아라.
T8 풀면 구하는 것은 얼마인가?</td><td></td></tr>
</table>

Ⅵ. 연구의 결과 및 해석

문제해결 전략을 발문식과 설명식으로 훈련했을 때, 학생들이 문제해결 전략을 선택하는 경향, 문제해결의 성취 수준, 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도를 비교·분석하였다.

1. 연구문제의 검증

1) 문제해결 전략 선택경향의 비교

<표15> 문제해결 전략 선택경향의 분석

실험반 N=34, 비교반 N=33

전략 \ 문제번호	집단	실험전 1	실험전 2	실험전 3	실험전 4	실험전 5	실험후 1	실험후 2	실험후 3	실험후 4	실험후 5
특수화	실험반	22 (64.7)					10 (29.4)		6 (17.6)		
	비교반	21 (63.6)					5 (15.2)		1 (3.0)		
단순화	실험반	3 (8.8)		22 (64.7)	10 (29.4)			16 (47.1)	17 (50.0)		13 (38.2)
	비교반	1 (3.0)		23 (69.7)	12 (36.4)			15 (45.5)	7 (21.2)		14 (42.4)
패턴 찾기	실험반			24 (70.6)		17 (50.1)			10 (29.4)		18 (52.9)
	비교반			23 (69.7)		16 (48.5)			5 (15.2)		15 (45.5)
기호화	실험반		20 (58.8)	12 (35.3)		16 (47.1)	13 (38.2)	14 (41.2)		10 (29.4)	15 (44.1)
	비교반		18 (54.5)	12 (36.4)		18 (54.5)	11 (33.3)	12 (36.4)		1 (3.0)	7 (21.2)
도형화	실험반		22 (64.7)	9 (26.5)			2 (5.9)	17 (50.0)	18 (52.9)	4 (11.8)	6 (17.6)
	비교반		25 (75.8)	7 (21.2)			1 (3.0)	12 (36.4)	9 (27.3)		3 (9.1)
조작의 생각	실험반	20 (58.8)	18 (52.9)	9 (26.5)			12 (35.3)	1 (2.9)		7 (20.6)	1 (2.9)
	비교반	19 (57.6)	19 (57.6	8 (24.2)			10 (30.3)	1 (3.0)			

※ ( )안의 수는 백분율을 나타냄.

전략 \ 문제번호	집단	실험전 1	실험전 2	실험전 3	실험전 4	실험전 5	실험후 1	실험후 2	실험후 3	실험후 4	실험후 5
수식에 대한 생각	실험반		18 (52.9)	8 (23.5)	8 (23.5)	16 (47.1)	13 (38.2)	15 (44.1)		10 (29.4)	16 (47.1)
	비교반		17 (51.5)	11 (33.3)	6 (18.2)	17 (51.5)	10 (30.3)	13 (39.4)		1 (3.0)	4 (12.1)
예상과 확인	실험반	7 (20.6)	3 (8.8)	23 (67.6)				5 (14.7)		9 (26.5)	
	비교반	2 (6.1)	6 (18.2)	20 (60.6)				1 (3.0)		14 (42.4)	
기본 성질의 생각	실험반		2 (5.9)	10 (29.4)	10 (29.4)	12 (35.3)	13 (38.2)		8 (23.5)		9 (26.5)
	비교반		2 (6.1)	10 (30.3)	11 (33.3)	13 (39.4)	9 (27.3)		3 (9.1)		12 (36.4)
거꾸로 풀기	실험반		15 (44.1)	12 (35.3)				15 (44.1)			
	비교반		14 (42.4)	13 (39.4)				13 (39.4)			
일반화	실험반					15 (44.1)					17 (50.0)
	비교반					16 (48.5)					18 (54.5)
함수적인 생각	실험반									7 (20.6)	
	비교반										
통합화	실험반										6 (17.6)
	비교반										6 (18.2)
귀납화	실험반	20 (58.8)			8 (23.5)				9 (26.5)	1 (2.9)	
	비교반	20 (60.6)			7 (21.2)				1 (3.0)		
연 역	실험반	3 (8.8)	9 (26.5)								
	비교반		6 (18.2)								
보조 요소 이용하기	실험반						17 (50.0)				
	비교반						12 (36.4)				
기 타	실험반	6 (17.6)		4 (11.8)		1 (2.9)		2 (5.9)			2 (5.9)
	비교반			2 (6.1)		1 (3.0)		1 (3.0)			

<표15>에서 보는 봐와 같이 훈련에 활용된 23개의 전략중 15개의 전략을 코딩 조직으로 문제 풀이에 사용한 빈도를 측정하였다. 사전검사에서 크게는 1번 문항에서 '예상과 확인'을 사용한 빈도는 14%의 차를 보여주고 있으며, 작게는 2번 문항에 사용한 '수식에 대한 생각'은 1.4% 차이를 보여주고 있다. 그러나 이런 차이는 전략을 선택하는 경향성을 나타낸다고 보기는 어렵다. 같은 전략이라도 평가 문제에 따라 사용한 빈도의 비율은 집단내 및 집단외에서 서로 다르게 나타나 있기 때문이다.

그러나 사후검사에서 '특수화', '페턴 찾기', '기호화', '도형화', '조작의 생각', '수식에 대한 생각', '함수적인 생각', '귀납화', '보조요소 이용하기', '거꾸로 풀기' 전략을 사용한 빈도는 실험반이 비교반보다 최대 35% 정도 크게 나타났다. '단순화', '일반화' '예상과 확인', '기본 성질의 생각', '통합화' 등의 전략 사용에 있어서 두 집단간의 뚜렷한 차이가 나타나지 않았다.

2) 문제해결력의 성취 수준 비교

문제해결 전략 훈련 방법에 따라 문제해결력의 성취수준에 차이가 있는지 검증하였다.

<표16> 집단별 문제해결력의 평균 차의 분석(사전)

집단별	N	M	σ	z	차의 의의도
실험반	34	12.97	5.55	1.39	p>0.1
비교반	33	11.06	5.66		

<표17> 집단별 문제해결력의 평균 차의 분석(사후)

집단별	N	M	σ	z	차의 의의도
실험반	34	12.18	6.97	1.90	p>0.05
비교반	33	8..94	5.43		

<표16>와 <표17>에 의하면 두 집단간의 문제해결력 검사에서 성취도에 유의한 차이가 없는 것으로 나타났다. 이는 문제해결 전략의 성취수준은 전략훈련 방법에 영향받지 않았음을 시사해 준다.

3) 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도의 비교

이 검사는 문제해결 전략 훈련방법이 문제해결 전략의 가치에 대한 유의한 인식의 차를 가져올 것인가를 검증하는 것인다.

<표18> 집단별 문제해결 전략의 효과에 대한 인식도 분석(사전)

집단별	N	M	σ	z	차의 의의도
실험반	34	14.52	3.08	1.32	p>o.1
비교반	33	13.30	4.20		

<표19> 집단별 문제해결 전략의 효과에 대한 인식도 분석(사후)

집단별	N	M	σ	z	차의 의의도
실험반	34	14.12	3.19	1.37	p>0.1
비교반	33	12.97	3.54		

<표18>와 <표19>에 의하면, 실험 전후에 문제해결 전략의 가치에 대한 두 집단간의 인식에는 통계적으로 유의한 차이가 없는 것으로 나타났다. 이는 발문식과 설명식에 의한 문제해결 전략훈련이 문제해결 전략의 가치를 인식시키는데 영향을 주지 않았음을 시사해 준다.

2. 논의

<연구문제 1>의 검증과 관련하여 '특수화', '규칙성 찾기', '기호화', '도형화', '조작의 생각', '수식에 대한 생각', '함수적인 생각', '귀납화', '보조요소 이용하기' 및 '거꾸로 풀기' 등의 전략 훈련은 설명식보다 발문식이 더 효과적이었다.

<연구문제 2>와 <연구문제 3>의 검증에서 실험반과 비교반 간의 평균치의 차가 통계적으로 의미가 없다는 해석은, 문제해결이 지적 능력 및 정의적 태도가 어우러진 일련의 과정이라는 점에서 11시간의 실험수업이 그러한 특성을 어느 정도로 연습 기회를 제공하였는가 하는 점도 고려되어야 한다. 또한 발문을 이용한 수업은 학생중심으로 이루어져야 하는데도 불구하고 실험반에서 학생 중심의 문제해결 활동이 곤란하였다. 이런 점에서 실험기간을 본 연구의 경우보다 장기간으로 하고 훈련 방법 또한 발문에 대한 학생의 대답을 중심으로 했을 때, <연구문제 1·2>의 결론과는 다르게 나타날 수 있다고 본다. 이는 학생을 중심으로 한 문제해결 활동 속에서 학생들은 주어진 문제를 해결하기 위하여 전략을 적극적으로 탐색하게 되고, 그러한 과정에서 전략의 가치에 대한 인식이 강화될 수 있기 때문이다.

'특수화', '규칙성 찾기', '기호화', '도형화', '조작의 생각', '수식에 대한 생각', '함수적인 생각', '귀납화', '보조요소 이용하기' 및 '거꾸로 풀기' 등의 전략은 실험반이 비교반보다 문제 풀이에 사용한 빈도가 크지만 두 집단 간의 문제해결력의 성취수준과 문제해결 전략의 가치에 대한 인식 수준에 통계적으로 유의한 차이가 없는 것은, 이러한 전략을 문제 풀이에 성공적으로 사용하지 못하는 경우가 있음을 시사해 준다.

Ⅶ. 결론 및 제언

1. 결론

고등학교 수준에서 문제해결에 필요한 전략을 23개 선정하였다. 훈련을 통해 학생들이 특정 전략을 사용하는 능력이 향상될 것이라는 전제 아래, 특정한 전략을 촉발할 수 있는 훈련과제를 19문항 추출하였다. 이 훈련 과제를 발문에 의하여 해결했을 때와 교사 설명으로 해결했을 때 문제해결에 미치는 효과를 비교·분석한 본 연구에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 문제해결 전략별로 하위개념을 설정하고, 피험자들에게 그 하위 개념을 형성할 수 있도록 위계적으로 발문화한 '기본 해결 과제'를 적용한 실험반과 교사 설명이 적용된 비교반을 대상으로 문제해결 선택경향을 백분율로 비교한 결과, 훈련받은 전략중 '특수화', '규칙성 찾기', '기호화', '도형화', '조작의 생각', '수식에 대한 생각', '함수적인 생각', '귀납화', '보조요소 이용하기', '거꾸로 풀기' 전략을 사용한 빈도는 실험반이 비교반보다 최대 35% 정도 크게 나타났다. 이러한 전략은 교사의 일방적인 설명보다 발문에 의한 훈련이 더 효과적임을 시사해 준다.

그러나 '단순화', '일반화', '예상과 확인', '통합화', '기본 성질의 생각' 등의 전략을 사용한 빈도에 실험반과 비교반 간에 뚜렷한 차이가 없었다. '단순화', '일반화', '예상과 확인', '통합화', '기본 성질의 생각' 인 경우, 발문과 설명에 의한 훈련 방법 간에 효과면에서 차이가 없다고 해석할 수 있다.

2) 발문을 적용한 집단과 설명을 적용한 집단간에 문제해결력의 성취수준, 문제해결 전략의 가치에 대한 인식도에 통계적으로 유의한 차이가 없었다.

2. 제언

본 연구와 관련하여 다음과 같이 제언한다.

1) 문제해결력의 향상은 문제해결 전략의 훈련 뿐만이 아니라 교과 지식 및 기초 계산 기능이 요구됨으로 기초학습 능력의 신장을 위한 지도가 문제해결 지도와 병행하여 이루어져야 하겠다.

2) 본 연구는 한림고등학교의 남학생만을 대상으로 학력의 수준 차이를 고려하지 않았으므로, 본 연구에서 얻은 결론이 학력의 수준별, 여학생, 학력이 높은 학생(예를 들면 제주시내 일반계 고교생)을 대상으로 실험할 때, 같은 결과가 나타날 것인가에 대한 연구가 필요하다.

3) 문제해결 전략의 선택경향 및 문제해결력을 신뢰성있게 평가할 수 있는 표준화된 검사지가 필요하다.

참 고 문 헌

1. 한국문헌

<단행본>

구광조 · 박한식(1988), 「수학과 교수법」, 교육과학사.

구광조 외(1995), 「수학 학습 심리학」, 교우사.

김종서(1987), 「교수 과정의 분석」, 교육 출판사.

교육부(1995), 「고등학교 수학과 교육과정 해설」, 교육부.

변홍규(1995), 「질문 제시의 기법」, 교육과학사.

______(1994), 「질문제시의 기법」, 교육과학사.

신현성(1992), 「수학 교육론」, 경문사.

이성호(1995), 「교수 방법의 탐구」, 양서원.

한국교육개발원(1990), 「수학과 문제해결력 신장을 위한 교수학습 자료 개발 연구」, 한샘교육개발연구소, 방문사.

____________(1989), 「수학적 사고력 신장프로그램 개발을 위한 방안 탐색」 방문사.

현종익(1996), 「수학과 교수-학습방법 탐구」, 학문사.

<논문>

강시중(1985), "문제해결력의 평가 방안", 「산수과 문제해결력 신장을 위한 세미나집」, 한국교육 개발원(미간행).

권녕태(1992), "효과적인 발문과 응답 처리의 기법", 「교육연구」, 통권 제281호, 교육연구사.

국승길(1985), "고등학교 수학 교육과정 분석과 방향", 「과학과교육」.

길양숙(1992), "오답의 유형과 교사의 발문", 「교육연구」, 통권 제281호, 교육연구사.

_____(1991), “문제해결 전략의 지도에 관한 연구 동향”, 「교육학연구」, 제29권, 제4호.
김선유(1995), “문제해결의 전략과 평가 방안”, 「논문집」, 제5권, 제1호, 대한 수학교육학회.
김원경(1988), “수업과 문답과 발문 방법”, 「교육연구」, 제8권 제5호,교육연구사
김철환(1987), “문제해결과 수학 문제의 분류 관점에 관한 연구”, 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.
김태근(1992), “교사의 발문 요건과 계열화”, 「교육연구」, 통권 제281호. 교육연구사
류희찬(1994), “수학교육 평가의 새로운 방향”, 「수학교육」, 제33권 제12호, 한국수학교육학회
박성익(1985), “사고력 신장을 위한 교수-학습 방법”, 「교육연구」, 제14권, 11호. 교육연구사
박성택(1995), “인지 발달에 근거를 둔 수학 학습 유형 탐색”, 「수학교육」, 제34권, 1호, 한국수학교육학회.
백석윤(1994), “메타인지적 문제해결의 지도와 평가를 위한 메타문제 유형의 개발”, 「수학 교육」, 제33권 제2호,한국수학교육학회.
_____(1994), “수학 문제해결 교육과 연구에 대한 반성적 일고”, 「논문집」, 제 5권 제1호
성인서(1987), “교사·학생이 수학 문제 해결에서 사용하는 전략에 대한 연구”, 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.
송병희(1989), “문제해결을 중심으로 한 수학 교육”, 「과학과 교육」.
송용의 외(1987), “효과적인 교사의 발문 기법에 관한 연구”, 「인천교육대학 논문집」, 제 21집.
신요영(1988), “발문과 응답 처리의 방법”, 「교육연구」, 통권 226호.
신화섭(1993), “수학적 문제 해결 전략 학습:실험 처치 방법에 따른 효과 분석”, 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

양미경(1992), "질문에 대한 실증적 연구", 「교육학연구」 제33권 제1호, 교육학연구회.

양인환(1990), "수학적 문제 해결에서 소집단 활동의 인지적 효과 분석", 박사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

우정호(1993), "대학수학능력 시험의 대비방향-교수·학습 방법의 탐색", 「제주교육 문제 세미나 제3차 발표 대회」, (미간행).

유삼열(1992), "응답과 말하기 지도", 「교육연구」, 제281호. 교육연구사.

유시규(1995), "수학 교육에 있어서 탐구적인 어프로치의 실천적 연구", 「수학교육」 제34 권, 제1호.

이상덕(1988), "자율학습을 통한 수학 문제해결력 신장에 관한 실천연구", 석사학위 논문, 한양대학교 교육대학원.

이상준(1990), "학습 능력에 따른 발문 수준이 학업 성취에 미치는 영향", 석사학위 논문, 한국교원대확교 대학원.

이성국(1991), "교사의 발문 수준이 아동의 창의력 신장에 미치는 영향", 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

이정재(1990), "문제해결력 신장을 위한 교수-학습 지도 방안 연구", 「논문집」, 제 31집, 공주교육대학.

이태근(1992), "질문과 오답 유형의 처리", 「교육연구」, 통권 281호.교육연구사

이훈범(1991), "중학생의 수학적 문제해결 기능측정을 위한 평가 도구의 개발", 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

이희종(1993), "고등학교 수학과 학습 흥미 유발을 위한 수학사적인 교수-학습 자료 개발 연구", 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

임재규(1989), "수학과 문제해결 학습지도에 관한 연구", 「과학교육연구」, 제13집, 경북대학교..

정창현 · 신성균(1992), "문제해결에 있어서의 지식", 「학회지」, 제31집, 한국수학교육학회.

정환금(1992), "교사 발문 요건과 계열화", 「교육연구」, 통권 281호. 교육연구사.
조규생(1989), "수학적 사고력 함양을 위한 학습 지도 방법", 「수학교육」, 경북대학교.
진평국(1987), "수학적 사고와 수학적 사고력의 신장", 「사고교육의 내용과 방법에 대한 탐색」.
———(1987), "문제해결의 의미와 지도방향",「제11회 초등수학교육세미나 집」, (미간행)

2. 동양문헌

기따기리 시게오(片桐重男), 이용률외 역(1992), 「수학적 생각의 구체화」, 경문사.
______________________, 「문제해결과 발문 분석」, 경문사.

3. 서양문헌

자롤리 맥, 김내복 역(1985), 「인지·정의·기능학습을 위한 전략」, 배영사.
Lorn C, Larson(1990), *Problem-Solving Through Problems*, Santa Clara University, U.S.A.
Max A. Sobel and Evan M. Maleletsky, *Teaching and Mathematics A Sourcebbook of Aids Activuities, and Strategies*, Montclair State College Upper Montclair, New Jersey.
Kenneth J, Travers & Len Pikaart & Marilyn N. Suydam & Garth E. Runion(1991), *Mathematics Teaching*, Happer & Row, Publishers, New York Hergerstown

<Abstract>

Effect of Problem Solving Strategy Training by Questions in Teaching

Mun, Sung-Jong

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by Professor Bang, Eun-Suk

The purpose of this study is to prove the effect that problem solving is influenced by its strategy training through questions in teaching and explanation, and to get one of the solutions. Therefore I established a diversity of strategies required to solve problems in high school level and divided questions in teaching to each strategy one after another, and then, between the group trained problem solving strategies and the group trained by explanation of teachers. I compared and analyzed the followings; An inclination to select problem solving strategies, An accomplishment level of their ability and recognition on the value of them.

According to the inclination to select problem solving strategies, the group trained by questions in teaching had a high frequency in using some parts of trained strategies. There was, however, little difference between two groups in an accomplishment level of problem solving ability and recognition on the value of problem solving strategics.

---

*A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1997

부 록

1. 문제해결 전략에 대한 태도 검사지

이 검사는 여러분이 문제해결 전략의 가치를 어떻게 생각하는지를 알아보고 문제해결 지도방법을 개선해 보고자 하는 것입니다.

이 검사에는 맞거나 틀린 답이 없습니다. 검사지는 모두 5개의 질문이 있으며, 각 질문에 5가지의 대답(항상 그렇다, 대체로 그렇다, 잘 모르겠다, 대체로 그렇지 않다, 전혀 그렇지 않다)이 있습니다. 여러분의 생각과 일치하거나 가장 가깝다고 생각되는 대답에 ∨표를 하시고, 답을 하지 않은 질문이 없도록 하십시오.

질 문 의 내 용	항상 그렇다	대체로 그렇다	잘 모르겠다	대체로 그렇다	전혀그렇지않다
1. 배운 문제해결 전략은 수학문제 풀이에 도움이 되며, 필요한 사고 요소의 추출에 도움되고 풀이의 방향을 알게 되었다.	____	____	____	____	____
2 문제해결 전략을 배운 것 때문에 내가 수학문제를 풀기 위한 사고 방법에 변화가 생겼다.	____	____	____	____	____
3 문제해결을 위한 사고 전략을 배운 후에도 여전히 수학을 이해하기가 힘들다.	____	____	____	____	____
4 문제해결 전략은 문제를 푸는데 도움이 되나, 기초실력의 부족으로 무의미하다.	____	____	____	____	____
5 문제해결 전략을 배움으로써 수학 문제의 해결에 흥미를 갖게 되었다.	____	____	____	____	____

2.문제해결력 선택경향 및 문제해결력 검사지(사전용)

이 검사지는 여러분이 수학 문제를 해결하는데, 어떤 전략(기술)을 사용하는지를 알아보기 위한 것입니다. 따라서 문제 풀이 과정에서 여러분이 생각하는 바를 자세히 기록해 주기 바랍니다.

제 1학년____반___번 이름______________

1. 임의의 자연수 n에 대하여 $2^{2n+1}+5^{n}+3$을 4로 나눌 때의 나머지는?

2. 실수 전체의 집합에서 R R로의 함수 f에 대하여 $f^2=f\circ f$, $f^{n+1}=f^{n}\circ f$ (n=2, 3, 4 …)라 정의한다. $f(x)=2x+1$ 일 때, $f^{10}=ax+b$일 때, $b-a$ 의 값은?

3. 강가에 접한 지역에 울타리를 쳐서 직사각형 모양으로 소의 우리를 만들려고 한다. 울타리의 길이를 350m, 넓이를 875㎡로 해서 가능한 한 많은 소들이 물을 먹을 수 있도록 하려면 강가에 접한 우리의 길이를 얼마로 하면 좋겠는가?

4. 1번부터 100까지의 번호가 주어진 100개의 바구니가 원을 이루며, 번호 순으로 놓여 있다. 1번 바구니부터 시작하여 매 6번째(1, 7, 13, …)의 바구니에 구슬 한 개씩 담는 일을 계속하여 반복할 때, 구슬이 담겨지는 바구니의 번호를 한 식으로 나타내고, 그 이유를 설명(증명)하시오.

5. 한 모서리의 길이가 1 cm인 정육면체의 각 면에서 1에서 6까지의 자연수를 쓰고, 다시 한 모서리의 길이가 2cm인 정육면체의 각 면에 7에서 12까지의 자연수를 쓰고, 다음에 한 모서리의 길이가 3cm인 정육면체의 각 면에 13에서 18까지의 자연수를 쓴다.

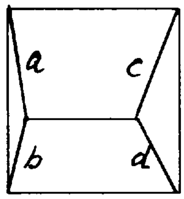
이런 방법으로 정육면체의 각 면에 자연수를 써 나갈 때, 어느 정육면체에 쓰인 자연수의 합 381이었다고 한다. 이 정육면체의 한 모서리의 길이는?

3. 문제해결력 선택 경향 및 문제해결력 검사지(사후용)

이 검사지는 여러분이 수학 문제를 해결하는데, 어떤 전략(기술)을 사용하는지를 알아보기 위한 것입니다. 따라서 문제 풀이 과정에서 여러분이 생각하는 바를 자세히 기록해 주기 바랍니다.

제 1학년____반____번 이름______________

1. 오른 쪽 그림과 같이 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d로 나타낼 때, $a^2+c^2=b^2+d^2$이 항상 성립함을 설명(증명)하시오



2. 시계의 시침과 분침이 겹쳐진 상태에서 90도의 각도를 이루는 모양이 될 때까지 걸리는 최소 시간은?

3. n개의 직선으로 원의 내부를 분할하였을 때의 분할된 영역의 최대 개수를 a_n이라 한다. a_{20}의 값을 구하면?

4. 구입 가격이 1kg에 2000원인 상품을 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며, 가격을 1kg에 10원씩 내릴 때마다 판매량이 2kg씩 증가하고, 1kg에 10원씩 올릴 때마다 판매량이 2kg씩 감소한다고 한다. 1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값은 얼마인가?

5. 1번에서 100번까지 번호가 주어진 100명의 사람이 원을 이루며 번호순으로 앉아 있다. 1번부터 시작하여 매 15번째 번호(1, 16, 31, 46, …)의 사람에게 선물을 한 개씩 주는 일을 계속하여 반복할 때, 선물을 받는 사람의 번호를 식으로 나타내어라

4. 훈 련 과 제

훈 련 과 제 - 1

목 표	변수(미지수) 설정하기, 계획 세우기, 식 세우기 ① 구하는 것과 관련하거나, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓을 수 있다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세울 수 있다. ③ 세운 식을 조작할 수 있다.	
문 제	어느 비행기의 탑승객의 남·여의 구성비가 표와 같을 때, 전체 탑승객 중에서 18세 이상인 사람의 비율은?	

	18세미	18세이	전체
남	2	4	5
여	1	3	3

T1 구하는 것은 무엇인가?

T2 구하는 것을 얻을 수 있는 경우를 생각하여 보아라.

-구하는 것을 (식으로) 간단히 나타내어라.

-구할 수 있는 요소(공식)을 생각하여 본다.

T3 위의 요소를 구할 수 있는 경우를 생각하여 보아라.

T4 주어진 것을 보아라. 주어진 표에서 구분된 숫자는 무엇을 의미하는가?

T5 실제 인원수를 알고 있는가?

T6 실제 인원수를 알려고 하면, 어떻게 하면 될까?

- 미지수를 설정하여라. 무엇을 문자로 두면 좋을까?

T7 식을 세워 보아라.

-구하는 것과 관련시켜 보아라.

T8 풀면 구하는 것은 얼마인가?

훈 련 과 제 - 2

목 표	단순화, 기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각 ① 구하는 것과 관련하거나, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓을 수 있다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세울 수 있다. ③ 세운 식을 조작할 수 있다.
문 제	어느 회사원의 연간 소득액은 Y원이다. 이 소득액의 a%에 대해서는 세금이 부과되지 않고, 그 나머지 소득에 대해서만 b%의 세금이 부과된다. 이 사람은 세금을 납부하고 난 후의 소득 중 c원을 소비하고 나머지는 모두 저축한다. 이 사람의 연간 저축액은?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 구하는 것을 얻으려면 어떻게 하면 좋을까? -어떤 절차를 거치면 좋을까? T3 연간 소득액은 얼마인가? T4 세금이 부과되지 않는 돈은 소득액의 몇 %인가? T5 세금이 부과되는 것은 어떤 경우인가? T6 세금은 얼마인가? T7 연간 소득액 중 세금을 납부 후에 얼마가 남는가? T8 소비하는 금액은 얼마인가? T9 저축액을 구할 수 있는가? -연간 소득액 중 총 지출액을 구하여 보자. T10 저축액은 얼마인가?	

훈 련 과 제 - 3

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각 활용하기 ① 구하는 것과 관련하거나, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작(해결)한다.
문제	운동에 사용되는 공을 전문적으로 생산하는 어떤 회사에는 하루에 농구공 100개, 축구공 120개, 야구공 320개, 골프공 450개를 생산하여 각각의 공을 한 개씩 정육면체 모양의 상자에 넣어 창고에 쌓아 놓는다. 이렇게 공이 들어있는 상자들을 쌓아서 만들어진 입체의 부피를 V라 하면 공의 부피의 총합은? 단, 각 상자는 공이 들어갈 수 있는 최소 부피를 갖는다.)

T1 구하는 것은 무엇인가?
T2 농구공, 축구공, 야구공, 골프공은 몇 개씩 있는가?
T3 각 공의 부피를 알 필요가 있을까?
 -이의 판단을 위해 근거가 표현이나 용어를 찾아 보아라.
T4 농구공, 축구공, 야구공, 골프공의 부피를 각각 문자로 놓아라.
T5 농구공, 축구공, 야구공, 골프공은 각각 몇 개씩 있는가?
T6 각 공의 부피의 총합을 문자(기호)로 나타내어라.
T7 각 공의 상자의 부피의 총합은 얼마인가?
 -문제를 다시 읽어 보아라.
T8 각 공의 상자의 부피의 총합 V를 각 공의 부피의 합으로 나타낼 필요가 있을까?
 - 왜 그렇게 생각하는가?
 -문제를 다시 보아라. 이것을 판단하는데 근거가 될 표현이나 용어를 찾아 보아라.
T9 각 공의 상자의 부피를 문자로 놓아라.
T10 각 공의 상자의 부피의 총합 V를 각 공의 상자의 부피의 합으로 나타낼 수 있는가? 그렇다면 나타내어 보아라.
T11 구하는 것은 어떤 기호로 나타내어야 하는가?
 -문제를 보아라. 문제에 나오는 기호는 무엇인가? -그것으로부터 판단하여라.
T12 각 공의 부피와 각 공의 상자의 부피 사이의 관계를 알 필요가 있을까?
T13 각 공의 부피의 총합과 각 공의 상자의 부피의 총합 사이의 관계를 알 필요가 있을까?
 - 문제에 나오는 기호와 우리가 임의로 설정한 문자를 보아라.
T14 각 공의 부피와 각 공의 상자의 부피, 또는 각 공의 부피의 총합과 각 공의 상자의 부피의 총합 사이의 관계식를 세워 보아라.
T15 세운 식을 처리하여 구하는 값을 알아 보아라.
T16 구하는 것은 얼마인가?

훈 련 과 제 - 4

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각 활용하기 ① 구하는 것과 관련하거나, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작(처리)한다.
문제	오른 쪽 그림과 같이 3개의 톱니바퀴 C_1, C_2, C_3가 각각 점 p_1, P_2, P_3, P_4에서 연결되어 있다. 각 톱니바퀴의 반지름의 길이가 6,10,8일 때, 세 톱니바퀴가 돌기 시작하여 다시 이런 상태로 돌아오려면 C_1은 최소한 몇 번 돌아야 하는가? (단, 중심은 고정되어 있다)

T1 구하는 것은 무엇인가?

T2 3개의 톱니바퀴 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 얼마인가?

T3 3개의 톱니바퀴는 어디에서 연결되어 있는가?

T4 톱니바퀴 C_1, C_2가 돌기 시작하여 다시 p_1, P_2에서 만나는 것은 각각 몇 번 돌았을 때인가?

-알 수 있는가?

-각각 a, b번 돌았을 때, 다시 만난다고 하면 이를 식으로 나타낼 수 있을까?

T5 톱니바퀴 C_2, C_3가 돌기 시작하여 각각 b, c번 돌았을 때, 다시 p_3, P_4에서 만난다고 하면, 식으로 나타낼 수 있는가?

T6 3개의 톱니바퀴 C_1, C_2, C_3가 돌기 시작하여 p_1, P_2, P_3, P_4에서 다시 만난다고 하면, 이를 식으로 나타내어라.

T7 세운 식의 뜻을 생각하여 보자.

T8 다시 만나기까지 점 P_1, P_2, P_3, P_4의 이동거리는?

T9 구하는 것은 무엇인가?

T10 구하는 것과 관련하여 P_1의 이동거리를 얼마로 하여야 하는가?

T11 톱니바퀴 C1의 회전수는 얼마인가?

T4, T5에서 3개의 톱니바퀴 C_1, C_2, C_3가 돌기 시작하여 각각 a, b, c번 회전했을 때, p_1, P_2, P_3, P_4에서 다시 만난다고 하자. 이를 식으로 나타내어라.

훈 련 과 제 - 5

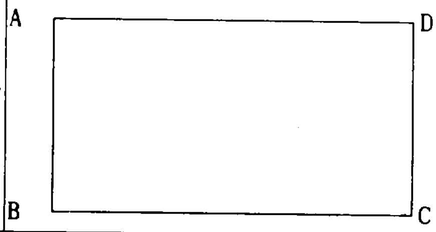
목표	기호화, 식에 대한 생각, 거꾸로 풀기, 표현의 생각, 조작의 생각 ① 구하는 것과 관련하여, 구하는 것을 문자(미지수)로 놓을 수 있다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세울 수 있다. ③ 세운 식을 조작(처리)할 수 있다.
문제	시계의 시침과 분침이 겹쳐진 상태에서 90도의 각도를 이루는 모양이 될 때까지 걸리는 최소 시간은?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 주어진 것(알고 있는) 것은 무엇인가? T3 시침과 분침은 어떤 상태에 있는가? T4 시침과 분침이 처음 어디에 있다고 하면 좋을까? T5 그림으로 나타내어라. T6 시침과 분침이 결쳐진 상태에서 몇 도를 이룬다고 했는가? T7 이를 식으로 나타내어라. -식을 세우려면 어떤 가정(예상)하면 좋을까? -식을 세우려면 문자가 필요하다는 점을 생각하여라. -시침과 분침이 1분에 몇 도를 회전하는가를 알 필요가 있을까? -식을 세울 수 있느냐? T8 세운 식을 풀어라. T9 x의 값은 얼마인가? T10 구한 값을 분초로 나타내어라.	

훈 련 과 제 - 6

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화, 통합화 전략 활용하기 ① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다.. ③ 세운 식을 조작한다.	
문제	1번에서 100번까지 번호가 주어진 100명의 사람이 원을 이루며 번호순으로 앉아 있다. 1번부터 시작하여 매 15번째 번호(1, 16, 31, 46, …)의 사람에게 선물을 한 개씩 주는 일을 계속하여 반복할 때, 다음 설명 중 옳은 것은? (단, k는 0또는 자연수) ① 모든 사람이 선물을 받을 수 있다. ② (15k+1)번호의 사람만 선물을 반복하여 받는다 ③ (5k+1)번호의 사람만 선물을 반복하여 받는다 ④ (35k+1)번호의 사람만 선물을 반복하여 받는다 ⑤ (3k+1) 또는 (5k+1) 번호의 사람만 선물을 반복하여 받는다	
T1 구하는 것은 무엇인가? T2 학생들은 몇 명이고, 어떻게 앉아 있는가? T3 선물을 주는 횟수는 얼마인가? T4 제 1회 선물을 준다고 하자. 선물을 받은 사람의 번호는? -나열하여 보아라. T5 제 1회 선물에서 마지막으로 선물을 받는 사람의 번호는? T6 제 2회에서 선물을 받는 사람의 번호는? T7 제 2회에서 마지막 선물을 받는 사람의 번호는? T8 제 3회에서 선물을 받는 사람의 번호는? T9 제 3회에서 마지막 선물을 받는 사람의 번호는? T10 제 4회에서 선물을 받는 사람의 번호는? -문제의 진술 내용을 확인하여 보아라. -근거가 될 표현은? -그림을 그려 알아 보아라. T11 이와 같이 선물을 주는 일을 계속할 때, 어떤 규칙이 발견되는가? -제 5회에서 선물을 받는 사람의 번호를 나열하여 보아라. -제 6회에서 선물을 받는 사람의 번호를 나열하여 보아라. -제 7회에서 선물을 받는 사람의 번호를 나열하여 보아라. T12 선물을 받는 사람의 번호에 대한 규칙을 찾을 수 있는가? T13 구하는 답은 주어진 답항 중에서 어느 것인가? -답항을 보아라. -답항에는 선물을 받는 사람의 번호가 어떻게 제시되고 있는가? -이와 관련하여 선물을 받는 사람의 번호를 하나의 식으로 나타내어 보아라.		

훈 련 과 제 - 7

<table>
<tr><td>목표</td><td colspan="2">기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화 활용하기
① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다.
② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다.
③ 세운 식을 조작한다.</td></tr>
<tr><td></td><td>직사각형 ABCD에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 위의 점 P,Q에 대하여 △ABP=2, △PCQ=3, △ADQ=4일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1 구하는 것은 무엇인가?
T2 알고 있는 것은 무엇인가?
T3 직사각형 ABCD의 넓이를 구하려면, 직사각형 ABCD의 어떤 요소를 알아야 하는가?
T4 직사각형 ABCD의 넓이를 구하는데, △ABP=2, △PCQ=3, △ADQ=4를 이용해야 한다고 보는가?
-그렇다면 △ABP,△PCQ,△ADQ의 어떤 요소를 문자로 나타낼 필요가 있는가?
T5 식을 세워 보아라.
T6 세운 식을 어떻게 처리해야 하는가?
T7 식을 풀고, 구하는 것을 말해 보아라.</td><td></td></tr>
</table>

훈 련 과 제 - 8

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화 활용하기 ① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작한다.
문제	삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$··(*)를 A군은 a, b를 잘못 보고 풀어서 세 근 -3, 0, 2를 얻었고, B군은 b, c를 잘못 보고 풀어서 세 근 1+i, 1-i, -2를 얻었고, C군은 a,c를 잘못 보고 풀어서 세 근 -2, 0, 1/2을 얻었다. 이들이 각각 잘못 본 방정식을 정확히 풀었을 때, 방정식(*)의 옳은 근은?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 주어진 방정식은 몇차 방정식인가? T3 A군은 무엇을 잘못 보고 풀었는가? -무엇을 옳게 보고 풀었는가? -A군의 풀이에서 얻을 수 있는 것은 무엇인가? -식을 세워 알아 보아라. -어떤 개념을 이용하면 좋을까? T4 B군은 무엇을 잘못 보고 풀었는가? -무엇을 옳게 보고 풀었는가? -B군의 풀이에서 얻을 수 있는 것은 무엇인가? -식을 세워 알아 보아라. T5 C군은 무엇을 잘못 보고 풀었는가? -무엇을 옳게 보고 풀었는가? -C군의 풀이에서 무엇을 얻을 수 있는가? -식을 세워 알아 보아라. T6 주어진 방정식(*)을 정확히 말하여라. T7 옳은 근을 구하여라.	

훈 련 과 제 - 9

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화 활용하기 ① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작한다.
문제	타기만, 걷기만, 가기만은 함께 여행을 하기로 하였다. 걷기만과 가기만은 걷기를 잘하여 각각 p ㎞씩 걷는다. 터가만은 잘 걷지 못하므로 두 사람이 탈 수 있는 소형차를 운전한다. 이 차에는 세 사람은 탈 수 없고, 이 차의 속력은 매시간 c ㎞씩 유지한다. 세 친구는 다음과 같은 방법으로 여행하기로 하였다. 이 일행은 한 시간에 평균 몇 ㎞씩 나아겠는가? (단 $c>p$) ① 가기만과 타기만은 차를 타고, 걷기만은 걸어서 동시에 출발한다. ② 적당한 곳에서 가기만은 차에서 내려 걸어간다. ③ 타기만은 가기만이 내린 즉시 뒤돌아와, 걷고 있던 걷기만을 태우고 가기만을 따라잡을 때까지 달린다. ④ 그 지점에서 가기만과 걷기만은 서로 교대한 후, 출발할 때와 같은 과정을 도착 할 때까지 반복한다.

T1 구하는 것은 무엇인가?
T2 걷기만과 가기만이 걷는 속력은 얼마인가?
T3 소형차의 속력은 얼마인가?
T4 출발점에서 도착점까지의 이동 방법은 어떠한가?
-그림을 그려 보아라.
T5 구하는 것과 관련하여 문제의 진술에서 무엇을 알아 낼 수 있고, 무엇을 모르는가?
- 구하는 것을 구할 수 있는 공식이나 내용을 생각하여 보아라.
- 일행의 한 시간에 평균 이동 속력을 묻고 있다.
이 점에 대하여 생각하여 보아라.
발점에서 도착점까지의 이동 방법중에서 각각 이동 시간을 알 수 있는가?
T8 각각의 이동 시간을 각각 문자로 나타내어라.
-타기만과 가기만이 차를 타고 이동한 시간은?
-타기만이 혼자서 차를 탄 시간은?
-타기만과 걷기만이 차를 타고 이동한 시간은?
T9 각각 이동한 거리를 구하여 보자.
-가기만이 이동한 것리는? -타기만이 이동한 거리는?
-걷기만이 이동한 거리는?
T10 각각의 이동 거리는 어떠 한가? 같은가? 다른가?
-판단하고 식을 세워라.
T11 무엇을 구하려 하는가? -구할 수 있는 경우를 생각하여 보아라.
T12 T11에 근거하여 식을 세우라
T13 구하는 것을 얻으려면, 구한 식에서 문자가 없어져야 한다고 생각하는가?
T14 그렇다면 문자를 소거할 방법을 생각하여 보고, 문자를 소거하여 보아라.
-위에서 세운 식을 활용하여라.
T15 구하는 것은 얼마인가?

훈 련 과 제 - 10

목 표	그림 그리기, 기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화 전략 활용하 기 ① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작한다.
문 제	한 변의 길이가 k인 정삼각형 ABC의 변 AB위를 점 P가 움직일 때, $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$의 최소값은?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 그림을 그려라. T3 점 P는 삼각형의 어떤 변 위를 움직인다고 했는가? T4 무엇을 문자로 나타내는 것이 좋을까? -구하는 것을 보아라. T5 구하는 것에서 다른 요소를 기호로 나타내어라. T6 구하는 것을 문식으로 나타내어 보아라. -구하는 것의 의미를 알아 보아라. T7 최소값을 구하여라. -최소값을 구할 수 있는 방법을 생각하여 보아라. -구하는 것을 식으로 나타내면 x에 대한 몇 차식인가?. T8 구하는 것은 얼마인가?	

훈 련 과 제 - 11

목표	그림 그리기, 단순화, 규칙성 찾기 등의 전략 활용하기 ① 그림을 그린다. ② 10등분하여 버리는 시행을 첫 번째, 두 번째, 세 번째, …한후 규칙을 찾는다 ③ 찾은 규칙에 의하여 답을 찾는다.
문제	구간 [0, 1]을 10등분하여 앞에서부터 여섯 번째 구간을 버린다. 두 번째 시행에서도 남은 9개의 구간별로 10등분하여 여섯 번째 구간들을 버린다. 이와 같은 시행을 계속 반복할 때, 세번 째 시행에서 버려지는 구간에 있는 수는? 0.45237, 0.52421, 0.77533, 0.89154, 0.99175

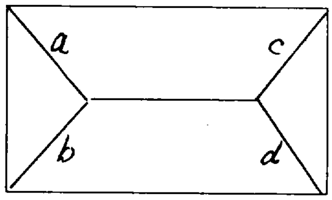
T1 구하는 것은 무엇인가? T2 그림을 그려라. T3 구간 [0,1]을 몇 등분한다고 했는가? T4 첫 번째로 버려지는 구간은? -버려지는 구간에 있는 숫자를 예로 들어 보아라. T5 두 번째 시행에서 버려지는 구간은? -버려지는 구간에 있는 숫자를 예로 들어 보아라. T6 세 번째 시행에서 버려지는 구간은? -버려지는 구간에 있는 숫자를 예로 들어 보아라. T7 어떤 규칙을 발견할 수 있는가? -버려지는 구간에 있는 숫자와 관련하여 생각하여 보아라. -위의 시행을 다시 살펴 보아라. T8 답은 찾을 수 있는가? T9 만일, 10 번째 시행을 한다면 버려지는 구간에 있는 수를 알 수 있는가?	

훈 련 과 제 - 12

목표	기호화, 식에 대한 생각, 표현의 생각, 조작의 생각, 단순화, 보조선 긋기 전략 활용하기 ① 구하는 것을 문자(미지수)로 놓는다. ② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다. ③ 세운 식을 조작한다.
문제	이 문제는 시간, 거리, 속도 관계의 전형적인 문제이다. 주어진 상황 속의 시간, 거리, 속도를 기호로 나타내어 둔다. A, B 두 사람이 자동차로 두 지점 P, Q를 각각 출발하여 상대방을 향하여 일정한 속도로 달렸다. 그들이 도중에서 만났을 때, A는 B보다 90㎞를 더 달려 왔음을 알았다. 그들이 만난 후 A는 4시간이 걸려 Q에, B는 9 시간이 걸려 P에 도착하였다. 이때, P, Q 사이의 거리는?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 그림을 그려라. T3 두 사람의 출발점은 각각 어디인가? T4 두 사람은 어디를 향해 출발하였나? -그림을 그려라. T5 출발 후 두 사람은 어디에서 만났는가? T6 A, B가 달린 속도를 알고 있는가? 같은가? 다른가? T7 A, B의 속도를 각각 기호로 나타내어라. T8 만나기까지 A, B가 달린 시간은 같은가? 다른가? T9 만나기까지 A가 달린 시간은? T10 만나기까지 B가 달린 시간은? T11 달린 거리와 문제의 진술을 바탕으로 식을 세우라. -그림에서 생각하여 보아라. -세운 식에서 미지수(문자)의 값을 알 수 있는가? -문자의 값을 구하려면, 식이 하나 더 필요한가? T12 다른 식을 세우라. -문제의 진술을 바탕으로 생각하여 보아라. -만자기까지 A는 B보다 얼마나 달렸는가? T13 얻은 식을 풀어라. -문자의 값은 얼마인가? T14 구하는 것을 얻을 수 있는가? -모른다면 문자의 식으로 나타내고 구하여 보아라 -만나기까지 A는 B보다 얼마를 더 달렸나? T15 구하는 것은 얼마인가?	

훈 련 과 제 - 13

<table>
<tr><td>목표</td><td colspan="2">특수화 또는 보조선 긋기, 기호화, 식에 대한 생각 활용하기
① 특수한 경우를 조사함으로써 일반적인 답을 유추한다.
또는 보조선 긋기, 기호화, 수식에 대한 생각 등을 이용하여 해결한다.
② 구하는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 파악하고 식을 세운다.
③ 세운 식을 조작(처리)한다.</td></tr>
<tr><td>문제</td><td>오른 쪽 그림과 같이 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d로 나타낼 때, $a^2+c^2=b^2+d^2$이 항상 성립함을 설명(증명)하시오..</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>T1 선분 PQ를 이동시켜 보자.(특수화의 생각)
-변 AB 쪽으로 이동시켜 나가면, 답을 예상할 수 있는가?
-변 BC 쪽으로 이동시며 나가면, 답을 예상할 수 있는가?
-변 BC에 일치시키면, 답을 예상할 수 있는가?
T2 보조선을 그어 보아라.
T3 주어진 식과 관련하여, 연상되는 공식이나 성질은 무엇인가?
T4 그것을 바탕으로 하여 설명하여라.

다른 방법을 찾아 보자.
T1 주어진 그림에서 보조선을 그어 보아라.
T2 그리고 선분 또는 변 사이의 관계를 알아 보아라.
- 주어진 식과 관련시켜 보아라.</td><td></td></tr>
</table>

훈 련 과 제 - 14

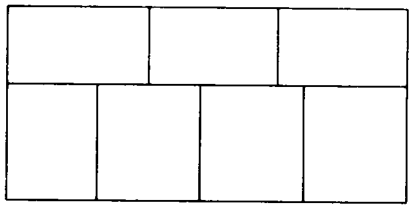
목표	귀납적 추론, 일반화, 단순화, 실험하기, 규칙성 찾기 등의 전략 익히기 ① n=1, 2, 3, …의 경우를 조사하여 본다. ② 어떤 규칙이 있는가?. ③ 찾아낸 규칙을 일반화한다.	
문제	n 개의 직선으로 원의 내부를 분할하였을 때의 분할된 영역의 최대 개수를 a_n이라 한다. a_{20} 의 값을 구하면?	211
T1 구하는 것은 무엇인가? T2 n=1일 때, a_1을 구하여라? -그림을 그려라. -분할된 영역의 개수를 세어라. T3 n=2일 때, a_2을 구하여라? -그림을 그려라. -두 개의 직선을 그릴 수 있는 경우는 몇 가지인가? -각각의 경우에 a_2의 값을 구하여라. -최대 얼마인가? T4 n=3일 때, a_3은 얼마인가? -그림을 그려라. -3개의 직선을 그릴 수 있는 경우는 몇가지인가? -각각의 경우에 a_3의 값을 구하여라. -최대 얼마인가? T5 n=4일 때, a_4은 얼마인가? -위의 n=1, 2, 3, 으로부터 예상하여라. -어떤 규칙이 발견되는가? -4개의 직선을 그릴 수 있는 경우는 몇가지인가? -각각의 경우에 a_4의 값을 구하여라. T6 항과 항 사이의 규칙은 무엇인가? -잘 안되면, 얻은 자료를 다시 보아라. -직선을 하나 더 그으면 몇 개의 영역이 더 생기는가? T7 발견되 규칙을 일반화하여라. - a_n과 a_{n+1} 사이의 규칙은? -최대 얼마인가? T6 이상에서 항과 항 사이의 규칙(관계)를 찾아 보아라. -잘 안 되면 얻은 자료를 다시 검토하여 보아라. -규칙(관계)가 발견되는가? T7 일반적으로 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계를 추론할 수 있는가? T8 구하는 것은 얼마인가?		

훈 련 과 제 - 15

목표	특수화, 일반화 하기, 표현의 생각, 조작의 생각 전략 익히기 ① 몇 개의 특수한 경우를 조사하여 일반적인 결과를 예상한다(유추).
문제	임의의 자연수 n에 대하여 $2^{2n+1}+5^{n}+3$을 4로 나눌 때의 나머지는 ?

T1 n=1 일 때, 나머지를 구하여 보아라. T2 n=2 일 때, 나머지를 구하여 보아라. T3 n=3 일 때, 나머지를 구하여 보아라. T4 임의의 자연수(모든 자연수) n에 대하여 4로 나누면, 나머지는 무엇인가?	

훈 련 과 제 - 16

목표	기호화, 단순화, 수식에 대한 생각, 조작의 생각, 표현의 생각, 기본 성질의 생각 활용하기 ① 구하는 것과 주어진 것에 관련하여 기호로 나타낸다. ② 식을 새운다. ③ 식을 조작한다.	
문제	오른 쪽 그림.은 모양과 크기가 똑같은 카드 7장을 늘어 놓은 것이다. 사각형 ABCD의 넓이가 336이라고 한면, 사각형 ABCD의 둘레의 길이는? 76	

T1 구하는 것은 무엇인가?

T2 직사각형의 면적을 식으로 나타내려면, 무엇을 알아야 하는가.

T3 7장의 카드는 크기와 모양이 어떤가?

T4 직사각형의 둘레의 길이를 알려면 어떻게 해야 하는가?

-문제의 진술을 바탕으로 생각하여 보아라.

-카드의 가로, 세로의 길이를 알 필요가 있는가?

T5 카드의 가로, 세로의 길이를 각각 기호로 나타내어라.

T6 직사각형의 가로의 길이는?

T7 직사각형의 세로의 길이는?

T8 주어진 면적으로부터 식을 세워라.

T9 미지수는 몇 개인가?

T10 세운 식에서 미지수의 값을 구할 수 있는가?

T11 식을 하나 더 세울 수 있는가?

-그림을 보아라.

T12 세운 식을 풀어라.

T13 구하는 것은 얼마인가?

훈 련 과 제 - 17

목표	귀납적 추론 (유추), 단순화, 표현의 생각, 기본 성질의 생각. ① $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$을 차례로 구해봄으로써 a_n을 유추해 낸다(귀납적 추론)
문제	자연수 n에 대하여, a_n 은 $n!$을 100으로 나눈 나머지이다. 이때 $\sum_{n=9}^{100} a_n$의 값은 ? 80

T1 구하는 것은 무엇인가? -구하는 것을 달리 나타내어 보아라. T2 a_2을 구하여 보아라. - 2!을 계산하면? T3 a_3을 구하여 보아라. - 3!을 계산하면? T4 a_4을 구하여 보아라. - 4!을ㄹ 계산하면? T5 a_5을 구하여 보아라. - 5!을 계산하면? T6 a_6을 구하여 보아라. T7 a_7을 구하여 보아라. T8 a_8을 구하여 보아라. T9 a_9을 구하여 보아라. T10 a_{10}을 구하여 보아라. T11 a_{11}을 구하여 보아라. T12 어떤 규칙(사실)이 발견되는가? -모른다면 a_{12}을 구하여 보아라. T13 구하는 것은 얼마인가?	

훈 련 과 제 - 18

목표	귀납적 추론 (유추) ① $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$을 차례로 구해봄으로써 a_n을 유추해 낸다(귀납적 추론)
문제	자연수 n(n≥4)에 대하여 A_n = {x| x는 한 변의 길이가 1인 정 n각형의 대각선의 길이}라 하고, a_n을 집합 A_n의 원소의 개수하 하자. 예를 들어, a_4 = 1 이다. 이때 $\sum_{n=4}^{25} a_n$의 값은? 132

T1 구하는 것은 무엇인가?
T2 구하는 것을 달리 표현하여 보아라.
T3 A_n의 의미는?
-n의 처음 값은 얼마인가?
-n=4일 때, 그림을 그려 보아라
- A_4의 의미는?,
- 원소나열법으로 나타내어 보아라.
- 그 필요성이 있는가를 생각하여 보아라.
- a_4의 의미는? a_4의 값은?
T4 n=5일 때, A_n, a_n의 값을 구하여라.
-그림을 그려 보아라.
T5 n=6일 때, A_n, a_n의 값을 구하여라.
-그림을 그려 보아라.
T6 n=7일 때, A_7, a_7의 값을 구하라. -그림을 그려 보아라.
T7 어떤 규칙이 발견되는가? -발견하지 못하면, A_n, a_n을 구하여 보아라.
T8 n의 마지막 값은 얼마인가?
-그림을 그려 보아라.
-대각선을 생각하여 보아라.
대각선의 대수를 생각하여 보아라.
T9 구하는 것을 구할 수 있겠는가?
-식으로 나타내어라.
T9 구하는 것은 얼마인가?
T10 n=100일 때, a_n의 값을 구하여 보아라.
그림을 그려 생각하여 보아라.

훈 련 과 제 - 19

목표	귀납적 추론, 단순화, 표현의 생각, 기본성질의 생각, 조작의 생각 등 활용하기 ① 일반항 a_n 을 구한다.
문제	두 그릇 A, B에 각각 1 l 의 물이 들어 있다. 먼저 A에 들어 있는 물의 반을 B에 붓고, 다시 B에 들어 있는 물의 반을 A에 붓는다. 이와 같은 시행(A→B→A)을 무한히 반복했을 때, A에 들어 있는 물의 양은 얼마인가?

T1 구하는 것은 무엇인가? T2 두 그릇 A, B에 각각 물이 얼마나 들어 있는가? T3 두 그릇 A, B에 들어 있는 물을 어떻게 다른 그릇으로 옮긴다고 했는가? T4 이런 시행을 기호 A→B→A로 나타내기로 하자. T5 이런 시행을 몇차례 한다고 했는가? T6 첫 번째로 A→B→A을 시행하자. -새행의 결과 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 부피는 어떻게 되는가? -어느 그릇의 물을 얼마나 다른 그릇으로 옮긴다고 했는가? -그릇에 남아 있는 물의 부피를 표로 나타내어 보아라. T7 두 번째로 A→B→A을 시행하면 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 부피는 어떻게 되는가? -그릇에 남아 있는 물의 부피를 표로 나타내어라. T8 세 번째로 A→B→A을 시행하면 두 그릇 A, B에 들어 있는 물의 부피는 어떻게 되는가? -그릇에 남아 있는 물의 부피를 표로 나타내어라. T9 이런 시행을 반복할 때, 그릇 A에 남아있는 물의 부피를 정리하여 나타내어 보아라. T10 정리된 물의 부피는 무엇을 의미하는가? -문제의 조건을 바탕으로 생각하여 보아라. -판단의 근거가 될 표현은 무엇인가? T11 구하는 것은 얼마인가?	

훈 련 과 제 -20

목표	기호화, 식에 대한 생각, 단순화, 조작의 생각, 표현의 생각 등을 활용하기 ①구하는 것과 주어진 것을 관련하여 기호로 나타내어라. ②식을 세워라. ③세운 식을 풀어라.
문제	구입 가격이 1kg에 2000원인 상품을 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며, 가격을 1kg에 10원씩 내릴 때마다 판매량이 2kg씩 증가하고, 1kg에 10원씩 올릴 때 마다 판매량이 2kg씩 감소한다고 한다. 1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값은 얼마인가?

T1 구하는 것은 얼마인가? T2 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 얼마를 판매할 수 있는가? T3 1kg에 10원씩 내리면, 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T4 1kg에 10원씩 올리면, 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T5 1kg에 20원씩 내리면, 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T6 1kg에 30원씩 내리면, 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T7 1kg에 가격을 내리는 것을 어떻게 하면, 좋을까? T8 1kg에 10x원씩 내린다면 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T9 1kg의 판매가격은 얼마를 기준으로 할 것인가? T10 1kg의 판매가격을 3000-10x로 하면, 하루의 판매량은? T9 구하는 것은 무엇인가? T10 P를 구하는데, 조건은 무엇인가? T11 물건을 팔 때, 이익금은 어떻게 구하는가? T12 이익금에 대한 식을 세워 보아라. T13 세운 식을 구하는 조건과 관련하여 풀어라. - P의 값은 얼마인가? T14 1kg에 10x원씩 올리면, 하루의 판매량은 어떻게 되는가? T15 1kg당 판매가격을 3000+10x원씩 하면, 하루의 판매량은 얼마인가? T16 이익금에 대한 식을 세워 보아라. T17 최대의 이익을 내려면 P를 얼마로 하면 되는가?	

감 사 의 글

기대하는 마음으로 문을 두드리던 일이 어제 같은데 이제 과정을 마치게 되었습니다.

그 동안 지도와 조언을 해 주신 방은숙, 김도현 교수님을 비롯한 여러 교수님, 강의와 논문 준비에 시간 배려를 해주신 한림고등학교 교장 선생님을 비롯한 선생님들, 특히 3학년 동료 담임 선생님들, 과정을 함께 이수한 동료 및 후배 원생들에게 깊은 감사를 드립니다.

그리고 자식만을 믿고 70성상을 인내하며 살아 오신 어머니, 인내와 지혜로 가정을 꾸려온 친구같은 아내와 나의 아이 금지, 정환, 지환과 더불어 이 작은 기쁨을 나누고자 합니다.

1997년 8월

문성종 드림