

碩士學位 請求論文

方程式의 解들의 近似的 推定  
Approximations of Solutions of Equations

指導教授 高 鳳 秀



濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻


金 大 元

1990年度

---

方程式의 解들의 近似的 推定  
Approximations of Solutions of Equations

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

 제주대학교 중앙도서관  
濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 金 大 元

指導教授 高 鳳 秀

1990年 月 日

金大元の 碩士學位 論文을 認准함

1990年 月 日



제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

主審

인

副審

인

副審

인

濟州大學校 教育大學院

# 目 次

英文抄錄.....	(ii)
I. 序 論.....	1
II. 振動微分方程式의 紹介.....	4
III. 3차 方程式의 解의 近似的 推定.....	7
IV. 聯立方程式의 解의 近似的 推定.....	12
V. 5차方程式의 解의 近似的 推定.....	19
VI. 結 論.....	24
參考文獻.....	25

(Abstract)

## Approximations of Solutions of Equations

Kim, Dae-Won

*Mathematics Education Major*

*Graduate School of Education, Cheju National University*

*Cheju Korea*

*Supervised by Assistant Professor Ko, Bong-Soo, ph. D.*

In this thesis, approximations of solutions of the cubic equation

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0,$$

system of equations

$$\begin{cases} x^2 + x + y + 2u = 1 \\ 2x + y - y^2 + u = 0 \\ x + 2y + u + u^2 = 0, \end{cases}$$

and the equation of 5th order

$$x^5 + x + 1 = 0$$

are obtained by the perturbation method which is used to get approximate solutions of perturbed differential equations.

## I. 序 論

中學交 또는 高等學校 教育現場에서 나타나는 方程式(equation)들을 考察해 볼 때 大部分의 方程式들의 係數(coefficient)들은 簡單한 整數(integer)들로 이루어지고, 學習者(學生)들은 그러한 方程式의 解(solution)의 計算方法을 익히게 된다.

本 著者의 見解에서 學習者들을 觀察할 때 學習者들이 日常 익혀온 方程式의 形態와 若干 다른 形의 方程式들. 例를 들면 方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0$$

을 學習者들이 만난다면 위 方程式의 解를 求할 수 있다는 自信感을 學習者들이 느낄 수 있을지 疑問스럽다. 學習者들은 “方程式의 解를 求한다”라는 目的을 前提條件으로 하고 問題를 풀기 때문에 위 方程式을 解한다는 것은 쉽지 않다고 大部分 생각하리라 본다. 萬若 위 方程式이 日常生活에 關聯되어 있고 그 解들은 매우 重要的 事實을 說明한다고 假定하면 위 方程式은 人間들이 어떤 現象을 類推 解析하여 이루어진 것이기 때문에 그 現象을 위 方程式에 依하여 完璧하게 說明하였다고 볼 수 없고, 따라서 그 解들도 그러한 重要的 事實을 正確하게 說明한다고 볼 수가 없다. 그러면 모든 事實들이 近似的인 關係로 맺어져 있기 때문에 위 方程式의 解를 近似的으로 求하여도 그 重要的 事實을 說明하는 데 無理는 아니라고 생각하는 것이 通念이다. 特히 學習者들이 이러한 觀點을 느낌으로써 日常生活에서 일어나는 여러가지 事物의 現象을 數理的 論理的으로 思考하고 問題를 合理的으로 處理할 수 있는 態도와 能力을 기를 수 있다고 본다.

方程式의 近似的 解를 求하는 方法에는 區間二等分法(half-interval search method), 斜線法(secant method), 固定點逐次法(fixed-point iteration), Newton-Raphson方法, 漸近的 擴張法 등 여러가지가 있는데 이들 方法의 共通되는 點은 中間值定理(intermediate value theorem)를 利用하여 根이 存在하는 區間을 確認한 後 그

區間 內에 있는 任意의 한 點을 近似根으로 取히 適當한 方法에 따라 參根에 接近 시켜 간다는 點이다.

本 論文에서는 擾動微分方程式論(perturbed differential equation)에서 使用되 는 擾動方法(perturbation method)을 利用해 一般의인 方程式의 解들을 近似的으로 推定하고 여러가지 問題點을 提起하고자 한다.

本 論文의 II에서는 擾動微分方程式

$$y'' = \epsilon f(x)y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

을 紹介하고 그 方程式의 解를 찾는 데 利用되는 擾動方法을 紹介한다

III에서는 三次方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0$$

의 解를 近似的으로 求하는 過程에서 擾動方法을 利用하여 近似的인 解를 計算하고 그 誤差(error)를 求하며 또한 주어진 三次方程式을 三次方程式의 一般의인 解法. 即 카르다노(Cardano)의 方法으로 그 解를 求하여 擾動方法을 利用한 近似的인 解와 比較한다.

IV에서는 三元二次聯立方程式

$$\begin{cases} x^2 + x + y + 2u = 1 \\ 2x + y - y^2 + u = 0 \\ x + 2y + u + u^2 = 0 \end{cases}$$

의 解를 近似的으로 求한다.

마지막 V에서는 五次以上인 方程式의 解들을 求하는 方法은 一般的으로 公式化 되어 있지 않으나 次數(order)가 홀수인 境遇에서 中間值定理에 의하면 그 方程式 들은 적어도 하나의 實根을 갖는다는 事實을 알 수 있으므로, 五次方程式

---

$$x^5 + x + 1 = 0$$

의 解를 近似的으로 求한다.

위에서 나타나는 計算過程들은 特殊한 形態의 方程式 또는 聯立方程式에서 이루어지고 있지만, 簡單한 몇 가지 條件들만 갖춘다면 모든 形態의 方程式 또는 聯立方程式에도 그 方法들은 適用 可能하다.



## II. 振動微分方程式의 紹介

振動微分方程式에서 使用되는 振動方法은 작은 媒介變數(parameter)  $\varepsilon$ 을 包含하는 問題들에 대한 近似的인 解를 얻기 위하여 反復的으로 施行하는 過程이다. 例를 들면, 다음과 같은 初期值 問題(initial-value problem)

$$y'' = f(x)y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

(단,  $f(x)$ 는 連續函數(continuous function)이다.)

을 紹介한다. 위의 方程式은  $f(x)$ 가 特殊한 形態를 갖는 境遇를 除外하고는 方程式의 解를 適切한 形態로 表現할 수 없다. 그러나 媒介變數  $\varepsilon$ 을 갖는 微分方程式

$$y'' = \varepsilon f(x)y \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

로 고쳐서 常數(constant)  $\varepsilon$ 이 0과 1사이에서 變數(variable)로 取扱한다면 위의 微分方程式은 1개의 微分方程式이 아니고 無限(uncountable)개의 微分方程式으로 생각할 수 있다. 媒介變數  $\varepsilon$ 이 變함에 따라 各各의 解들의 形態와 聯關性을 研究하는 것을 振動理論(perturbation theory)이라 하고 媒介變數  $\varepsilon$ 을 갖는 微分方程式을 振動微分方程式이라고 한다. 위의 振動微分方程式의 解는  $\varepsilon$ 에 따라 變하기 때문에 다음과 같은 振動擴張(perturbation expansion)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$$

으로 表現되고 各 項別로 微分할 수 있다고 假定하면  $y''(x)$ 를 다음과 같이 얻는다.

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n''(x)$$

$y(x)$ 와  $y''(x)$ 의 振動擴張 形態를 振動微分方程式에 代入(substitution)하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n''(x) = \varepsilon f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$$

이 되고, 위의 等式(equality)이 滿足되려면,  $y_n(n=1,2,\dots)$ 들은 다음 微分方程式

$$y_0''(x) = 0 \quad y_0(0) = 1 \quad y_0'(0) = 1$$

$$y_n''(x) = f(x)y_{n-1}(x) \quad y_n(0) = y_n'(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

을 滿足하여야 한다. 여기서 간단히

$$y_0(x) = x + 1$$

임을 알 수 있다.

$y_1(x)$ 는 다음 微分方程式

$$y_1''(x) = f(x)y_0(x) = f(x)(1+x)$$

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0$$

의 解이다. 따라서

$$y_1(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s)(1+s) ds$$

가 되며 一般的으로  $y_n(x)$ 는

$$y_n(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s)y_{n-1}(s) ds$$

가 된다.

그러므로

제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y(x) = (1+x) + \varepsilon \int_0^x dt \int_0^t f(s)(1+s) ds + \varepsilon^2 \int_0^x dt \int_0^t f(s) ds \int_0^s dv \\ \times \int_0^v f(u)(1+u) du + \dots$$

가 된다. 만일 常數  $k$ 가 區間(interval)  $0 \leq |t| \leq |x|$  위에서 函數  $|f(t)|$ 의 上界(upper bound)라고 하면,  $y(x)$ 의  $N$  번째 項의 絕對值(absolute value)는  $\varepsilon^{N-1} k^{N-1} \{(x^{N/N!} + (x^{N+1}/(N+1)!)\}$ 보다 작다. 따라서  $y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$  는 모든  $x$ 에 대

하여 收斂(convergence)하므로 위의 擾動方程式의 解가 되고 媒介變數  $\varepsilon$ 에 따라서 解들의 形態 및 聯關性을 研究할 수 있다.

위의 方法은 작은 媒介變數를 갖지 않은 어려운 問題에 人爲的으로 媒介變數  $\varepsilon$ 을 導入하여 媒介變數  $\varepsilon$ 을 갖는 問題(perturbed-problem)로 바꾸어서 그 問題를 解決하고 原來 주어진 問題를 풀기 위하여 작은 媒介變數  $\varepsilon$ 을 1로 바꾸면 解의 妥當性(validity) 與否를 確認할 수 있다. 왜냐하면  $\varepsilon=1$  일 때

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

는 初期值 問題의 解가 되기 때문이다.

擾動方法은 매우 어려운 問題를 그 問題와 聯關된 매우 쉬운 無限 個의 問題로 分離하고, 첫 번째, 두 번째, 또는 세 번째까지만 計算하여 近似的인 解를 求하여 도 그 解들의 重要的 性質들을 說明할 수 있다는 것이 擾動微分方程式論에서의 一般的인 觀點이다.



### Ⅱ. 三次方程式의 解의 近似的 推定

三次方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0 \quad (1)$$

의 解를 擾動方法에 依하여 近似的으로 推定해 보면, 方程式(1)은 媒介變數  $\varepsilon$ 이 없기 때문에 擾動問題는 아니지만, 다음과 같이 人爲的으로  $\varepsilon$ 을 導入하여, 三次方程式의 媒介變數群(one-parameter family)

$$x^3 - (4 + \varepsilon)x + 2\varepsilon = 0 \quad (2)$$

을 만든다. 여기서  $\varepsilon = 0.001$ 라 하면, 方程式(2)는 方程式(1)이 된다.

學習者들은 方程式(1)보다 오히려 方程式(2)가 더 익숙하게 보이고 方程式(2)의 解決 可能性이 더 많을 것이라고 여긴다. 마찬가지로 方程式(1)의 近似的인 解를 求하는 것보다 方程式(2)의 近似的 解를 求하는 것이 더 쉽게 느껴진다. 그 理由는 方程式(2)의 解들은  $\varepsilon$ 을 變數(variable)로 갖는 函數  $x(\varepsilon)$ 이라고 생각되고,  $x(\varepsilon)$ 은  $\varepsilon$ 에 관한 擾動級數(perturbation series)

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad (a_n \text{은 常數}) \quad (3)$$

로 表現할 수 있다고 假定할 수 있기 때문이다. 그러면 擾動級數(3)을 方程式(2)에 代入하여 다음 式을 얻는다.

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \right)^3 - (4 + \varepsilon) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \right) + 2\varepsilon = 0 \quad (4)$$

擾動級數(3)의 첫째 項  $a_0$ 을 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法(method of indeterminate coefficients)을 使用하면

$$a_0^3 - 4a_0 = 0 \quad (5)$$

을 얻고, 方程式(5)를 풀면  $a_0 = -2, 0, 2$

를 얻는다. 여기서  $-2, 0, 2$  들을 方程式(2)의 零 번째 近似的 解(zeroth-order perturbation approximation)라고 부른다.

擾動級數(3)의 두 번째 項  $a_1$ 을 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法을 使用하고  $a_0 = -2$ 라고 하면

$$12a_1 - 4a_1 + 4 = 0 \quad (6)$$

을 얻고, 方程式(6)을 풀면

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

을 얻는다. 여기서  $a_0 = -2$ 와  $a_1 = -1/2$ 을 使用하여 얻은

$$x = -2 - \frac{1}{2}\epsilon$$

을 方程式(2)의 첫 번째 近似的 解(the first-order perturbation approximation)라고 부른다.

擾動級數(3)의 세 번째 項  $a_2$ 를 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法을 使用하고  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -1/2$ 을 代入하면

$$8a_2 - a_1 - 6a_1^2 = 0 \quad (7)$$

을 얻고 方程式(7)을 풀면

$$a_2 = \frac{1}{8}$$

을 얻는다. 여기서  $a_0 = -2$ ,  $a_1 = -1/2$ ,  $a_2 = 1/8$ 을 使用해서 얻은

$$x = -2 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 \quad (8)$$

을 方程式(2)의 두 번째 近似的 解(the second-order perturbation approximation)라고 부른다.

두 번째 近似的 解  $x$ 와 方程式(2)의 解와의 誤差를 計算하기 위하여 近似的 解(8)을 方程式(2)에 代入하면

$$\left(-2 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2\right)^3 - (4 + \epsilon)\left(-2 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2\right) + 2\epsilon = 0$$

이 되고, 그 誤差는

$$\frac{1}{2}\epsilon^3 - \frac{3}{128}\epsilon^5 + \frac{1}{8^3}\epsilon^6$$

이다. 따라서 方程式(1)의 近似的 解는  $\epsilon=0.001$ 이므로

$$x = -2 - \frac{1}{2} \times 0.001 + \frac{1}{8} \times 0.001^2$$

$$= -2.000499875$$

이고, 誤差는

$$\frac{1}{2} \times 0.001^3 - \frac{3}{128} \times 0.001^5 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times 0.001^6$$

$$< \frac{1}{2} \times 10^{-9}$$

인 데, 이것은 近似的인 解  $x$ 가 갖는 誤差는 많아야  $1/2 \times 0.001^3$ 임을 뜻한다.

위에서 얻은 方法과 마찬가지로 零 번째 近似的인 解 0과 2를 使用하여 方程式(2)의 나머지 2개의 近似的인 解를 計算할 수 있고 그 近似的 解들이 갖는 誤差들도 計算된다.

한편, 三次方程式의 一般的인 解法에 의해서 方程式(1)의 解를 求하여 위에서 求한 近似的인 解와 比較하기 위하여 우선 三次方程式의 一般的인 解法을 紹介한다.

三次方程式

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (9)$$

에서

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

이라 하면, 方程式(9)의 解는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \quad (i = \sqrt{-1}) \end{cases}$$

여기서  $a_1, a_2, a_3$ 가 實數이고 判別式(discriminant)  $D=Q^3+R^2$ 이라 하면

(1)  $D>0$ 일 때 한 개의 實根과 두 개의 켄레複素數(complex conjugate)를 根으로 갖는다.

(2)  $D=0$ 일 때 세 개의 實根을 갖는데 적어도 두 개의 根은 같다.

(3)  $D<0$ 일 때 서로 다른 세 개의 實根을 갖는다.

만약  $D<0$ 이면 三角法(trigonometry)을 使用하여 간단하게 다음과 같이 解를 求할 수 있다.

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ\right) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ\right) - \frac{1}{3}a_1 \end{cases} \quad (10)$$

단,  $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$

이제 三次方程式의 一般的인 解法에 依하여 方程式(1)의 解를 求하는데, 여기서 使用한 計算機는 scientific calculator Casio-550 S(10-digits)이다.

方程式(1)에서  $a_1=0, a_2=-4.001, a_3=0.002$ 이므로

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = -1.333666667$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = -0.001$$

이고,  $D = Q^3 + R^2 = -2.372147592$  이다.  $D < 0$ 이므로 方程式(1)은 서로 다른 세 實根을 갖는다.

式(10)을 利用하여 解를 求하면

$$\theta = \cos^{-1} \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \cos^{-1}(6.492755594 \times 10^{-4}) = (89.963)^\circ$$

이고,

$$\frac{\theta}{3} = (29.98766667)^\circ$$

가 된다. 따라서

$$\cos \frac{\theta}{3} = 0.866133012$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^\circ\right) = -0.865917755$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ\right) = -0.2152572146 \times 10^{-3}$$

이므로 三次方程式(1)의 세 根  $x_1, x_2, x_3$ 는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) = 2.000498527 \\ x_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ\right) = -2.00000135 \\ x_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ\right) = -0.0004971773787 \end{cases} \quad (11)$$

여기서 解(11)의  $x_2$ 를 方程式(1)에 代入하여 誤差를 求하면

$$\begin{aligned} & (-2.00000135)^3 - 4.001 \times (-2.00000135) + 0.002 \\ & = 3.9892013 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

인데 擺動方法에 의한 두 번째 近似的인 解가 갖는 誤差가 많아야  $1/2 \times 10^{-9}$ 과 比較해 볼 때 擺動方法에 의한 近似的인 解가 얼마나 正確한지를 알 수 있다.



#### N. 聯立方程式의 解의 近似的 推定

다음은 聯立方程式의 解를 近似的으로 推定하여 計算하는 것이다.

$$\begin{cases} x^2 + x + y + 2u = 1 \\ 2x + y - y^2 + u = 0 \\ x + 2y + u + u^2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

聯立方程式(12)의 近似的인 解를 推定하기 위하여 다음과 같이 擾動問題로 바꾼다.

$$\begin{cases} \epsilon x^2 + x + y + 2u = 1 \\ 2x + y - \epsilon y^2 + u = 0 \\ x + 2y + u + \epsilon u^2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

聯立方程式(13)의 解들은 擾動級數

$$x(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n \quad y(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^n \quad u(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \epsilon^n$$

으로 表示된다고 假定하고 그 解들을 聯立方程式(13)에 代入하면

$$\begin{cases} \epsilon \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n \right]^2 + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n \right] + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^n \right] + 2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \epsilon^n \right] = 1 \\ 2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n \right] + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^n \right] - \epsilon \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^n \right]^2 + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \epsilon^n \right] = 0 \\ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n \right] + 2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \epsilon^n \right] + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \epsilon^n \right] + \epsilon \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \epsilon^n \right]^2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

을 얻는다.

零 번째 近似的인 解를 얻기 위하여 方程式(14)에서 未定係數法을 利用하면

$$\begin{cases} a_0 + b_0 + 2c_0 = 1 \\ 2a_0 + b_0 + c_0 = 0 \\ a_0 + 2b_0 + c_0 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

을 얻고, 이 聯立方程式(15)를 풀면

$$a_0 = -\frac{1}{4} \quad b_0 = -\frac{1}{4} \quad c_0 = \frac{3}{4}$$

을 얻는다. 따라서  $a_0 = -1/4$ ,  $b_0 = -1/4$ ,  $c_0 = 3/4$ 은 方程式(13)의 零 번째 近似的인 解가 된다.

擾動級數들의 두 번째 項  $a_1, b_1, c_1$ 을 얻기 위하여 零 번째 近似的인 解를 使用하여 式(14)를 다음과 같이 表示한다.

$$\varepsilon \left[ -\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right]^2 + \left[ -\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + \left[ -\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + 2 \left[ \frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] = 1$$

$$2 \left[ -\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + \left[ -\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] - \varepsilon \left[ -\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right]^2 + \left[ \frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] = 0$$

$$\left[ -\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + 2 \left[ -\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + \left[ \frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right] + \varepsilon \left[ \frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right]^2 = 0$$

여기서  $o(\varepsilon^2) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \varepsilon^n$  이다.

未定係數法을 利用하면 다음과 같은 聯立方程式을 얻는다

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + a_1 + b_1 + 2c_1 = 0 \\ 2a_1 + b_1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + c_1 = 0 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

따라서 行列(matrix)을 使用하여 다음 關係式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ -\frac{9}{16} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4^3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4^3} \begin{pmatrix} 13 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

그러므로  $a_1=13/4^3$ ,  $b_1=-27/4^3$ ,  $c_1=5/4^3$  이다. 그리고

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4^3}\epsilon \\ y_1 = -\frac{1}{4} - \frac{27}{4^3}\epsilon \\ u_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4^3}\epsilon \end{cases}$$

은 聯立方程式(13)의 첫 번째 近似的인 解이다.

마찬가지로 振動級數들의 세 번째 項  $a_2, b_2, c_2$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2a_0a_1 \\ 2b_0b_1 \\ -2c_0c_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \times (-\frac{1}{4}) \times \frac{13}{4^3} \\ 2 \times (-\frac{1}{4}) \times (-\frac{27}{4^3}) \\ -2 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{4^5} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \\ -15 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2^9} \begin{pmatrix} 83 \\ -85 \\ 27 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

따라서 聯立方程式(13)의 두 번째 近似的인 解는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{13}{2^6}\epsilon + \frac{83}{2^9}\epsilon^2 \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{27}{2^6}\epsilon - \frac{85}{2^9}\epsilon^2 \\ u = \frac{3}{4} + \frac{5}{2^6}\epsilon + \frac{27}{2^9}\epsilon^2 \end{cases}$$

여기서  $\epsilon=1$  이라고 하면

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{13}{2^6} + \frac{83}{2^9} \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{27}{2^6} - \frac{85}{2^9} \\ u = \frac{3}{4} + \frac{5}{2^6} + \frac{27}{2^9} \end{cases}$$

은 聯立方程式(12)의 近似的인 解이다. 近似的인 解의 誤差는

$$2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{83}{2^9}\right) + \left(\frac{13}{2^6}\right)^2 + 2\left(\frac{13}{2^6}\right)\left(\frac{83}{2^9}\right) + \left(\frac{83}{2^9}\right)^2$$

$$2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{85}{2^9}\right) + \left(-\frac{27}{2^6}\right)^2 + 2\left(-\frac{27}{2^6}\right)\left(-\frac{85}{2^9}\right) + \left(-\frac{85}{2^9}\right)^2$$

$$2\left(+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{27}{2^9}\right) + \left(\frac{5}{2^6}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{2^6}\right)\left(\frac{27}{2^9}\right) + \left(\frac{27}{2^9}\right)^2$$

들 가운데 가장 큰 값이 된다.

다음 定理(theorem)은 聯立方程式(13)의 n번째 近似的인 解를 求하는 過程에서 震動級數들의 n번째 項을 求하는 一般的인 公式이다.

(定理) 聯立方程式(10)의 解들은 震動級數

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad y(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^n \quad u(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

로 表現된다고 하면, 震動級數들의 n번째 項  $a_{n-1}$ ,  $b_{n-1}$ ,  $c_{n-1}$ 들은 다음과 같은 벡터 方程式(vector equation)을 滿足한다.

$n = 1$ 일때

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$ 일때

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-2-k} \\ \sum_{k=0}^{n-2} b_k b_{n-2-k} \\ -\sum_{k=0}^{n-2} c_k c_{n-2-k} \end{pmatrix}$$

(證明) 聯立方程式(10)의 解들이 震動級數

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad y(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^n \quad u(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

으로 表示된다고 했으므로 그 解들을 聯立方程式(13)에 代入하여 未定係數法을 使用하면 震動級數들의 첫 번째 項  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ 들은 다음 벡터 方程式을 滿足한다.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

같은 방법으로 하면, 振動級數들의 두 번째 項  $a_1, b_1, c_1$ 들은 다음 벡터 方程式을 滿足한다.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_0^2 \\ b_0^2 \\ -c_0^2 \end{pmatrix}$$

마찬가지로 振動級數들의 세 번째 項  $a_2, b_2, c_2$ 들은 다음 벡터 方程式

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(a_0 a_1 + a_1 a_0) \\ b_0 b_1 + b_1 b_0 \\ -(c_0 c_1 + c_1 c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^1 a_k a_{1-k} \\ \sum_{k=0}^1 b_k b_{1-k} \\ -\sum_{k=0}^1 c_k c_{1-k} \end{pmatrix}$$

을 滿足하고, 또한 振動級數들의 네 번째 項  $a_3, b_3, c_3$ 들은 다음 벡터 方程式

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) \\ b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0 \\ -(c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^2 a_k a_{2-k} \\ \sum_{k=0}^2 b_k b_{2-k} \\ -\sum_{k=0}^2 c_k c_{2-k} \end{pmatrix}$$

을 滿足하므로 一般的으로 擾動級數들의  $n$ 번째 項  $a_{n-1}$ ,  $b_{n-1}$ ,  $c_{n-1}$ 들은 다음 벡터 方程式을 滿足할 것이다.

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-2-k} \\ \sum_{k=0}^{n-2} b_k b_{n-2-k} \\ -\sum_{k=0}^{n-2} c_k c_{n-2-k} \end{pmatrix} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

(參考) 위 定理은 特殊한 聯立方程式(13)에 關係된 內容이지만 計算上의 複雜性을 勘案한다면 一般的인 形態의 聯立方程式에도 위 定理의 方法을 적용할 수 있다. 그러나 近似的인 解를 求하는 過程에서 零 번째 近似的인 解는 반드시 存在하여야 한다. 즉 非擾動問題(unperturbed problem)을 擾動問題로 바꿀 때,  $\varepsilon=0$ 인 경우에 解가 存在하도록 媒介變數를 導入하여야 한다.

V. 五次方程式의 解의 近似的 推定

다음은 五次方程式

$$x^5 + x + 1 = 0 \tag{17}$$

의 解들을 近似的으로 推定하는 것이다.

위 五次方程式(17)의 近似的인 解를 推定하기 위하여 먼저 다음과 같은 擾動問題로 바꾼다.

$$x^5 + \epsilon x + 1 = 0 \tag{18}$$

여기서 方程式(18)의 解들은 擾動級數

$$x(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon^n$$

로 表示된다고 假定하고 그 解들을 方程式(18)에 代入하면

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon^n\right)^5 + \epsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon^n\right) + 1 = 0 \tag{19}$$

을 얻는다. 方程式(19)에서 未定係數法을 利用하여 零 번째 近似的인 解를 求하면

$$x_0 = -1$$

을 얻고, 擾動級數들의 두 번째 項  $x_1$ 을 얻기 위하여 方程式(19)를 다음과 같이 表示한다.

$$(-1 + x_1 \epsilon + o(\epsilon^2))^5 + \epsilon(-1 + x_1 \epsilon + o(\epsilon^2)) + 1 = 0$$

여기서  $o(\epsilon^2) = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \epsilon^n$  이다. 多項定理(multinomial theorem)에 依해서

$$(-1 + x_1 \epsilon + o(\epsilon^2))^5 = \sum_{p,q,r} \frac{5!}{p!q!r!} (-1)^p (x_1 \epsilon)^q (o(\epsilon^2))^r$$

(단,  $p, q, r$ 은  $p+q+r = 5$  인 음이 아닌 정수)

로 表示된다.



따라서  $(-1+x_1\varepsilon+o(\varepsilon^2))^5$ 의 展開式에서  $\varepsilon$ 의 係數는  $p=4, q=1, r=0$ 일 때이므로

$$\frac{5!}{4!1!}(-1)^4x_1 = 5x_1$$

이다. 方程式(19)에서 未定係數法에 依하여

$$5x_1 + x_0 = 0$$

을 滿足하고,  $x_0=-1$ 을 代入하면

$$x_1 = \frac{1}{5}$$

이다. 따라서 方程式(18)의 첫 번째 近似的인 解는

$$x = -1 + \frac{1}{5}\varepsilon$$

이다. 擾動級數들의 세 번째 項  $x_2$ 를 얻기 위하여 方程式(17)을 다음과 같이 表示한다.

$$\left(-1 + \frac{1}{5}\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)\right)^5 + \varepsilon\left(-1 + \frac{1}{5}\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)\right) + 1 = 0$$

여기서  $o(\varepsilon^3) = \sum_{n=3}^{\infty} x_n \varepsilon^n$  이다. 위와 마찬가지로 多項定理를 利用하면

$$\left(-1 + \frac{1}{5}\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)\right)^5$$

의 展開式에서  $\varepsilon^2$ 의 係數는

$$\begin{aligned} & \frac{5!}{4!1!}(-1)^4x_2 + \frac{5!}{3!2!}(-1)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ & = 5x_2 - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

이다. 따라서 方程式(19)에서 未定係數法에 依하여

$$\left(5x_2 - \frac{2}{5}\right) + x_1 = 0$$

이므로  $x_2 = \frac{1}{5^2}$

이고, 方程式(18)의 두 번째 近似的인 解는

$$x = -1 + \frac{1}{5}\epsilon + \frac{1}{5^2}\epsilon^2$$

이 된다. 마찬가지로 方法으로 擾動級數들의 네 번째 項  $x_3$ 을 計算하여 세 번째 近似的인 解를 求하면

$$x = -1 + \frac{1}{5}\epsilon + \frac{1}{5^2}\epsilon^2 + \frac{1}{5^3}\epsilon^3 \quad (20)$$

이 된다. 여기서 近似的인 解(20)에서  $\epsilon=1$ 이라고 하면

$$x = -1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = -0.752$$

은 五次方程式(17)의 近似的인 解이며 그 誤差는

$$(-0.752)^5 + (-0.752) + 1 = 0.00751432991$$

이다.

五次方程式(17)의  $n$ 번째 近似的인 解를 求하는 過程에서 擾動級數  $x(\epsilon) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon^n$ 의  $n$ 번째 項  $a_{n-1} (n \geq 2)$ 을 求하는 一般的인 公式을 誘導하기 위해서 먼저 다음과 같은 定義(Definition)가 必要하다.

(定義) 陰이 아닌 整數를 元素(element)로 갖는  $m \times n$ 行列  $A = \langle a_{ij} \rangle$ 가 다음을 滿足한다고 하자

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij} = 5 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(2) \sum_{j=1}^n (j-1)a_{ij} = n-1 \quad (n \geq 2)$$

여기서 行列  $A$ 와 벡터  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ 의 새로운 결합을 다음과 같이 定義한다.

$$A * \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \frac{5!}{a_{i1}! a_{i2}! \dots a_{in}!} (x_0)^{a_{i1}} (x_1)^{a_{i2}} \dots (x_{n-1})^{a_{in}}$$

(参考)

$$A * \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varepsilon^n \right)^5 \text{을 전개했을 때 } \varepsilon^{n-1} \text{의 係數}$$

$x_{n-1}$ 의 값을 뜻한다.

(定理) 五次方程式(18)의 擾動級數를

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varepsilon^n$$

이라 하면,  $n$ 번째 項  $x_{n-1}$ 은

$$x_{n-1} = - \sum_{i=2}^n \frac{4!}{a_{i1}! a_{i2}! \dots a_{i(n-1)}!} (x_0)^{a_{i1}-4} (x_1)^{a_{i2}} \dots (x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} - \frac{1}{5} x_{n-2}$$

이다. (단,  $n \geq 2$ )

(證明) 五次方程式(18)의 擾動級數를

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varepsilon^n$$

$\langle a_{ij} \rangle$ 를 위 定義에서의 條件을 만족하는  $m \times n$ 行列이라 하면,  $n$ 번째 項  $x_{n-1}$ 은 다음 方程式을 滿足한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + x_{n-2} = 0$$

(단,  $n \geq 2$ )

위 行列에서  $a_{1n}=1, a_{in}=0 (i \geq 2)$ 이라 해도 一般性を 잃지 않으므로  $a_{11}=4, a_{1j}=0$

( $2 \leq j \leq n-1$ )이다. 따라서

$$\sum_{i=1}^m \frac{5!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{in}!} (x_0)^{a_{i1}} (x_1)^{a_{i2}} \cdots (x_{n-1})^{a_{in}} + x_{n-2} = 0$$

$$\sum_{i=2}^m \frac{5!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{in}!} (x_0)^{a_{i1}} (x_1)^{a_{i2}} \cdots (x_{n-1})^{a_{in}} + \frac{5!}{a_{11}! a_{12}! \cdots a_{1n}!} \times (x_0)^{a_{11}} (x_1)^{a_{12}} \cdots (x_{n-1})^{a_{1n}} + x_{n-2} = 0$$

여기서  $a_{1n} = 1$   $a_{in} = 0 (i \geq 2)$   $a_{11} = 4$   $a_{1j} = 0 (2 \leq j \leq n-1)$  이므로

$$\sum_{i=2}^m \frac{5!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{i(n-1)}!} (x_0)^{a_{i1}} (x_1)^{a_{i2}} \cdots (x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} + \frac{5!}{4!1!} (x_0)^4 x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

$$-5x_0^4 x_{n-1} = \sum_{i=2}^m \frac{5!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{i(n-1)}!} (x_0)^{a_{i1}} (x_1)^{a_{i2}} \cdots (x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} + x_{n-2}$$

따라서

$$x_{n-1} = - \sum_{i=2}^m \frac{4!}{a_{i1}! a_{i2}! \cdots a_{i(n-1)}!} (x_0)^{a_{i1}-4} (x_1)^{a_{i2}} \cdots (x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} - \frac{1}{5} x_{n-2}$$



제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

(단,  $n \geq 2$ )

(중평 끝)

以上에서 살펴본 바와 같이 振動微分方程式論에서 使用되는 振動問題를 利用해 一般的인 方程式의 近似的인 解를 求하는 過程을 綜合해 보면 다음과 같다.

1. 주어진 非振動問題에 媒介變數  $\varepsilon$ 을 導入하여 振動問題로 바꾼다. 여기서 媒介變數를 導入할 때는 반드시 零 번째 近似的인 解가 求할 수 있도록 해야 한다.

2. 振動問題에 대한 方程式의 解들은 振動級數로 表示된다고 假定하고 未定係數法을 利用해 그 振動級數의 係數들을 計算한다.

3. 주어진 問題에 해당하는 媒介變數  $\varepsilon$ 의 값을 使用하여 級數의 總으로 주어진 問題의 답을 求한다. 이 過程은 쉬울 수도 있고 어려울 수도 있다. 만약 振動級數가 收斂한다면 그 總은 주어진 方程式에 대한 近似的인 解가 된다.

4. 많은 振動級數들은 종종 發散(divergence)한다. 만약 計算된 振動級數들이 發散할 경우 最初로 誤差가 極小이 되는 項까지 計算하여 주어진 方程式의 近似的인 解를 求하면 되는데, 媒介變數  $\varepsilon$ 이 매우 작을 경우에 첫 번째, 두 번째 可能하면 세 번째 項까지 取하여 두 번째 近似的인 解만 求하여도 좋은 近似值을 얻을 수 있다.

## 參考文獻

- (1) Carl M.Bender and Steven A.Orszag, **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers**, McGraw-Hill, Inc.,1978
- (2) Murray R.Spiegel, **Mathematical Handbook of Formulas and Tables**, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc.,1968
- (3) 文炳洙, **數值解析**, 二友出版社, 1982



## 感謝의 글

이 한 편의 論文이 完成될 수 있도록 바쁘신 가운데도 많은 時間을 割愛하여 親切하고 細心하게 指導해 주신 高鳳秀 教授님과, 그 동안 깊은 關心을 갖고 忠告와 激勵을 아끼지 않았던 數學科 여러 教授님께 眞心으로 고마운 말씀을 드립니다.

아울러 學校 授業進行의 어려움 속에서도 課程을 마칠 수 있도록 配慮해 주신 濟州第一高等學校 校長先生님을 비롯한 동료 先生님께도 感謝드리며 어려움을 참으면서 끊임없는 忍耐와 사랑으로 內助해준 아내와 하루하루 건강하고 씩씩하게 자라는 志恩, 聖俊과 함께 이 조그마한 成就의 기쁨을 나누고자 합니다.



제주대학교 중앙도서관  
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

1990년 6월