2 차원 $^3He-{}^4He$ 묽은 용액의 미시적 이론

강 영 봉*

Microscopic Theory of Two Dimensional $^3He-{}^4He$ Dilute Solutions.

Kang, Young-Bong

Abstract

The chemical potential and the total pressure of $^3He-{}^4He$ mixture are obtained from the internal energy which is determined by the grand partition function for a mixture of fermion and boson.

Finally the osmotic pressure is derived from the chemical potential.

I. 서 론

Landau 와 Pomeranchuk[1]이 초유체 ^4He 내의 ^3He 입자는 불순물로 행동한다고 제시한 이래, Bardeen, Baym 과 Pines[2](이후 BBP)는 이 분야에 대한 현상론적 이론을 개발하여 ^3He 준입자는 인력 유효 퍼텐셜을 가지고 서로 상호작용함을 보였다.

그후 이 분야에 대한 연구는 현상론적 접근에서 벗어나 미식적 이론으로의 전환이 이루어졌다. McMillan[3] 은 액체 ^4He에서 2 개의 ^3He 원자를 고려하여 유효질량 및 상호작용을 계산했고 Woo, Tan 과 Massey[4]는 변분법을 사용하여 같은 양을 얻었다. Saam[5]은 포논—준입자 상호작용을 미시적 이론으로 계산하였고 Van Leewen 과 Cohen[6]은 hard-sphere 모델을 조사하였다.

최근에 와서 Fabrocini[7]등은 Jastrow 파동함수와 변분법을 사용하여 에너지와 화학퍼텐셜 등을 계산하였다. 그리고 Isihara 와 Kojima[8]는 Ring-diagram 방법에 의해 바닥 상태에너지와 화학퍼텐셜 등을 구하였다.

*제주대학교 사범대학 과학교육과

본 논문에서는 2차원 초유체 ^4He에 미소량의 ^3He가 녹아있는 혼합용액의 화학페텐셜, 압력 및 삼투압 등을 Ring-diagram 방법에 의해 얻어진 큰 분배함수와 바닥상태에너지를 사용하여 계산한다.

우리는 soft-sphere와 hard-sphere를 모두 다룰 수 있는 퍼텐셜을 택하였으며, 운동량 공간에서의 표현은 다음과 같다.

$$U_i(q)=\begin{cases} U_i(0)(1-q^2/q_m^2), & q<q_m \\ 0, & q>q_m \end{cases}$$

여기서 $i=B$이면 ^4He, $i=F$이면 ^3He 그리고 $i=FB$이면 ^3He-^4He 상호작용에 대한 것이다. q_m은 퍼텐셜이 영이되는 임계파수이다.

II. 바닥 상태에너지(ground state energy)

앞서 발표한 논문[9]에서, ^3He-^4He 묽은 용액의 큰 분배함수를 상호작용이 없는 경우의 ^3He와 ^4He에 의한 기여와 ^3He와 ^4He에 대한 first order exchange 및 first order direct coupling의 기여 그리고 ^3He와 ^4He가 혼합된 mixed ring-diagram에 의한 기여로 구분하여 계산하였다. 그 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}\ell n\,\Xi =& \frac{1}{2}\frac{\beta P_F^2\hbar^2}{2m_F}n_F^{(0)}+n_B^{(0)}-\frac{\beta}{2}U_B\,(n_B^{(0)}+n_F^{(0)})^2\left\{1-\frac{f}{Q_1}A_0\right\}\\ &-\beta\left(\frac{U_{FB}}{U_B}-1\right)U_B\left(n_B^{(0)}+n_F^{(0)}\right)n_F^{(0)}\left\{1-\frac{U_{FB}+U_B}{U_B}\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^2}B_0\right\}\\ &+\beta U_B\left(n_B^{(0)}+n_F^{(0)}\right)n_F^{(0)}\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^2}B_0\\ &+\frac{\beta}{2}\frac{U_F^2}{U_B^2}U_B\,(n_F^{(0)})^2\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3}C_0-\frac{\beta}{4}Y\,(n_F^{(0)})^2+\frac{\beta}{4}\frac{U_{FB}^2}{U_B}(n_F^{(0)})^2\quad\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

여기서

$U_B=U_B(0)$, $U_F=U_F(0)$, $U_{FB}=U_{FB}(0)$, $r^2=r^2(0)$,

$$f=\frac{m_B U_B q_m^2}{2\pi\hbar^2},\quad y=\frac{n_F^{(0)}}{n_B^{(0)}},\quad n^{(0)}=n_B^{(0)}+n_F^{(0)},$$

$$Y=U_B\left\{2+\frac{U_F}{U_B}-4\frac{U_{FB}}{U_B}+\frac{U_{FB}^2}{U_B^2}\right\},\quad X=\frac{U_{FB}+U_B}{U_B},$$

$$Q_s=q_m^2-sr^2(1+y),\quad r^2(0)=\frac{4m_B n_B^{(0)}U_B(0)}{\hbar^2}$$

$A_0=I_0-1$,

$$B_0 = \frac{1}{q_m^2}\left\{ q_m^4\left(I_0-\frac{3}{4}\right)+q_m^2 r^2(1+y)\left(\frac{3}{8}-I_0\right)+\frac{3}{8}r^4(1+y)^2 I_0 \right\},$$

$$C_0 = q_m^4\left(I_0-\frac{7}{4}\right)+q_m^2 r^2(1+y)\left(I_0-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}r^4(1+y)^2 I_0 ,$$

$$I_0 = \frac{q_m}{\sqrt{r^2(1+y)-q_m^2}} \arcsin\sqrt{1-\frac{q_m^2}{r^2(1+y)}}$$

그리고 A는 혼합용액의 총면적, $\beta=1/k_B T$, m_B와 m_F는 보존과 페르미온의 질량, $n_F^{(0)}=p_F^2/2\pi$ 와 $n_B^{(0)}$ 는 각각 페르미온과 보존 이상기체의 수밀도이며, $\hbar p_F$는 페르미온의 운동량이다.

혼합용액의 내부에너지는 (1)식으로부터 얻을 수 있으며, 이상기체 밀도 $n_B^{(0)}$ 와 $n_F^{(0)}$ 와 실제 용액밀도 n_B와 n_F의 관계를 이용하여 실제밀도로 표현하고 절대 영도 극한을 취하면 바닥상태 에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{E}{A} = {} & \frac{1}{4\pi}\frac{h^2 p_0^4}{2m_F}+\frac{1}{4}Y n_F^2-\frac{1}{4}\frac{U_{FB}^2}{U_B}n_F^2+\frac{1}{2}n^2 U_B\left\{1-\frac{f}{Q_1}A_1\right\} \\ & + n\, n_F(U_{FB}-U_B)\left\{1-X\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^2}B_1\right\} \\ & - n\, n_F U_B \frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3}B_1-\frac{1}{2}n_F^2\frac{U_F^2}{U_B}\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3}C_1 \quad . \qquad \cdots\cdots\cdots (2)\end{aligned}$$

여기서 $p_0^2=2\pi n_F$, $n=n_B+n_F$이며, A_1, B_1 및 C_1은 각각 A_0, B_0및 C_0에서 $n^{(0)}$를 n으로 표현한 것이다. (2)식에서 ³He의 농도가 ⁴He에 비해 아주 작으므로 n_F^2항을 무시할 수 있으며 이때 에너지는 Baym의 에너지 형태, 즉 $E=E_0(N)+N_F E_1(N)$인 N_F의 선형함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E(N) = \frac{1}{2}n N U_B\left\{1-\frac{f}{Q_1}A_1\right\} . \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$E_1(N) = n(U_{FB}-U_B)\left\{1-X\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^2}B_1\right\}-n U_B\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^2}B_1 . \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

이 에너지표현은 Baym에 의해 현상론적으로 소개됐던 에너지 형태와 일치하며 미분부피계수 (differential volume coefficient)에 대응하는 2차원에서의 $\alpha=\frac{A_F-A_B}{A_B}$를 구하는데 중요한 역할을 하며 앞으로 화학퍼텐셜 등을 계산하는데 큰 도움이 된다.

III. 화학퍼텐셜

BBP 등에 의하면 다음과 같은 형태의 화학퍼텐셜로 부터 유효 퍼텐셜을 구하였다.

$$\mu_3(\underline{\underline{x}}) = \mu_f(\mathrm{T}, x) + \mu_3'(x)$$

$$\mu_3'(x) = \mathrm{E}_0 + n_3 \mathrm{V}_0 - \int \mathrm{V}k \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (k \langle k_f) \quad \cdots\cdots (5)$$

여기서 μ_f (T, x)는 질량 m_F, 밀도 $n_3 = nx$인 상호작용이 없는 페르미 기체의 화학퍼텐셜이며, k_f는 ^{3}He 의 페르미운동량이다. V_0는 운동량 $k=0$ 에서의 유효 퍼텐셜이며, 다음과 같이 보존의 음속도 C_B와 미분부피계수 α 와 순수한 ^{4}He의 밀도 $\bar{n}_B$ 를 포함하고 있다.

$$V_0 = -\frac{\alpha^2 m_B C_B^2}{\bar{n}_B}$$

본 논문에서는 미지적이론으로 화학퍼텐셜을 유도하고 이로부터 유효퍼텐셜을 구하려 한다.

1. ^{4}He의 화학퍼텐셜

^{4}He 의 화학퍼텐셜과 내부에너지의 관계는 다음과 같다.

$$\mu_B = \left.\frac{\partial E(N)}{\partial N_B}\right|_{N_F} \cdots\cdots (6)$$

여기서 N_F는 상수로 취급된다.

(6)식의 계산 결과는

$$\mu_B = n U_B \left\{1 - \frac{f}{Q_1^2} A_2'\right\} + n_F (U_{FB} - U_B)\left\{1 - X\frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{Q_1^3} B_2\right\} + n_F U_B \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{Q_1^3} B_2 \cdots (7)$$

이다. 여기서

$$A_2' = I_2\ Q_{1/4} - \frac{5}{4} Q_{2/5},$$

$$B_2 = I_2\left\{q_m^2\ Q_{1/2} + \frac{5}{8}\ \frac{r^4(1+y)^2}{q_m^2} Q_{3/10}\right\} - \frac{5}{4} q_m^2\ Q_1 - \frac{3}{4} r^2 (1+y) Q_{-1/4}$$

이며, I_2는 I_0에서 $n^{(0)}$를 n 으로 대치한 것이다.

2. ^{3}He의 화학퍼텐셜

^{3}He의 화학퍼텐셜은

특히 $k=0$에서의 유효 페텐셜의 값은

$$V(0) = -\frac{\alpha\alpha' m_B C_B^2}{\bar{n}_B}$$

이 된다.

IV. 압력과 삼투압

압력은 내부에너지를 면적에 대해 미분함으로서 계산 될 수 있으며, 절대 영도에서의 압력은 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{4\pi}\frac{\hbar^2 P_0^4}{2m_F} + \frac{1}{4} Y n_F^2 - \frac{1}{4}\frac{U_{FB}}{U_B} n_F^2 + \frac{1}{2} n^2 U_B \left\{ 1 - \frac{f}{Q_1^2} A_2 \right\}$$
$$+ n n_F (U_{FB} - U_B) \left\{ 1 - X \frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3} B_2 \right\} \cdots\cdots (15)$$
$$- n n_F U_B \frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3} B_2 \ .$$

순수한 액체 ⁴He의 압력은

$$P_O = \frac{1}{2}\bar{n}_B^2\ U_B \left\{ 1 - \frac{f}{q_m^2(1)}\ A_3 \right\} \cdots\cdots (16)$$

이다. 여기서

$$A_2 = I_2\, Q_{1_{-1/2}} - \frac{3}{2} q_m^2 \ ,$$

$$A_3 = I_3 q_m \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} q_m^2$$

이다. (10)식을 이용하면

$$r^2 (1+y) \approx \bar{r}^2 \left(1 - \frac{\alpha n_F}{n_B} \right) \cdots\cdots (17)$$

이 된다. 물론 $\bar{n}_B$는 압력 P_o에서의 값이며, n_F 및 n은 $P+\pi$ 하의 밀도이다. (10)식과 (16)식을 사용하여 (15)식을 다시 쓰면

$$P = P_O + \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar^2 P_0^4}{2m_F} + \frac{1}{4} Y n_F^2 - \frac{1}{4}\frac{U_{FB}^2}{U_B} n_F^2$$

$$+\frac{1}{2}\alpha^2\ n_F^2\ U_B\ [\ 1-\frac{f}{q_m^2(1)}\{\ q_m^2\ (\ I_3-\frac{3}{2})+\frac{3}{2}\ I_3\ \bar{r}^2\}$$

$$+\frac{1}{q_m^2(1)}\{\ 3\bar{r}^4+4q_m^2\bar{r}^2\ (\ I_3-\frac{3}{2}\ \}\ ]$$

$$-\alpha n_F^2 U_B \left(\frac{U_{FB}-U_B}{U_B}\right)\frac{m_F}{m_B}\ \frac{Xf}{q_m^3(1)}\left\{\frac{1}{2}q_m^2\ \bar{r}^2\ (\ I_3-1\ )-\frac{1}{4}\ \bar{r}^4\ (\ 5I_3-\frac{3}{2}\ )\right.$$

$$\left.+\frac{9}{16}\ \frac{\bar{r}^6}{q_m^2}\ I_3+\frac{\bar{r}^2}{q_m^3(1)}B_3\right\}$$

$$-\alpha n_F^2 U_B\ \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{q_m^3(1)}\left\{\frac{1}{2}q_m^2\ \bar{r}^2\ (\ I_3-1\ )-\frac{1}{4}\ \bar{r}^4(\ 5\ I_3-\frac{3}{2})+\frac{9}{16}\frac{\bar{r}^6}{q_m^2}\ I_3+\frac{\bar{r}^2}{q_m^3(1)}B_3\right\}$$

$$-\alpha n_F^2 U_B\left(\frac{U_{FB}-U_B}{U_B}\right)\left\{1-X\frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{q_m^3(1)}\ B_3\right\}$$

$$+\ \alpha n_F^2 U_B\ \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{q_m^3(1)}\ B_3 \quad\cdots\cdots(18)$$

로 주어진다. (18)식으로부터 $^3He-^4He$ 혼합용액의 열역학적 성질을 이해하는데 유용한 삼투압 $\pi=P-P_o$를 쉽게 구할 수 있다.

V. 결과 및 논의

초유체 ^4He에 미소량의 ^3He가 녹아있는 혼합용액에 대한 큰 분배함수를 Ring-diagram에 의해 구하였으며 이로부터 바닥상태에너지를 Baym의 에너지 형태로 표현할 수 있었다. 앞에서 구한 내부에너지로부터 ^3He와 ^4He의 화학퍼텐셜을 BBP의 현상론적 화학퍼텐셜과 같은 형태로 계산하였다. 그리고 화학퍼텐셜의 형태로부터 유효 퍼텐셜을 유도하였다. 더불어서 평형상태에서의 $^3He-^4He$ 묽은용액의 열역학적 성질을 파악하는데 중요한 역할을 하는 삼투압을 얻기위해 계의 총 압력과 순수한 용액^4He의 압력을 계산하였으며 이 압력으로부터 삼투압을 구할 수 있음을 보였다.

본 논문에서 미시적이론으로 구한 2차원에서의 열역학적 물리량들은 $^3He-^4He$ 묽은용액의 수치적 값이 주어진다면 그 용액의 성질을 이해하는데 큰 도움이 될 것이다.

$$\mu_F = \left.\frac{\partial E(N)}{\partial N_F}\right|_{N_B}$$

$$= \mu_B(n_B, n_F, P_0) + \frac{\hbar^2 p_0^2}{2m_F} + E_1(N) + \frac{1}{2} Y n_F - \frac{1}{2}\frac{U_{FB}^2}{U_B} n_F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

로 주어진다. 여기서 P_o는 절대영도에서 계의 압력이다.

우리는 위의 결과를 이용하여 n_B 혹은 n_F와 $\bar{n}_B$ 사이의 관계를 유도하겠다. 삼투압은 헬륨 λ 점 이하의 온도를 유지하는 두개의 용기를 고려함으로서 정의 될 수 있다. 한 용기는 오직 순수한 액체 ^{4}He 로 완전히 채워있고 다른 하나는 농도 x 를 갖는 ^{3}He-^{4}He 혼합용액으로 채워져 있다. 그리고 두 용기는 초유체 ^{4}He 는 통과할 수 있고 ^{3}He 는 통과하지 못하는 아주 이상적인 관으로 연결되어 있다. 완화시간이 지난후 평형상태에 도달했을 때, 순수한 ^{4}He 에서의 압력이 P_o가 되고 혼합용액의 압력이 $P_o+\pi$ 가 되도록 삼투압 π 를 정의하면, ^{4}He 의 화학퍼텐셜은

$\mu_B(P_o+\pi, T; x) = \mu_B(P_o, T : 0)$

의 관계를 갖는다. Taylor 급수 전개하면

$$\mu_B(n_B, n_F, P_o, T) = \mu_B(\bar{n}_B, 0, P_o, T) - \pi\, \bar{a}_B \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

이 된다. 여기서

$$\bar{a}_B = \frac{\partial \mu_B(\bar{n}_B, 0, P_o, T)}{\partial \underline{P}}$$

이며, ^{4}He의 평균 부분 면적이다. (9)식을 정리하면

$$n \simeq \bar{n}_B - \alpha n_F - \frac{\hbar^2 p_0^2}{4m_F}\ \frac{n_F}{\bar{n}_B U_B} + O(n_F^2) \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

이다. 여기서 미분부피계수가 대응하는 2 차원의 값α 는

$$\alpha \simeq \left(\frac{U_{FB}-U_B}{U_B}\right)\left\{1 - X\frac{m_F}{m_B}\ \frac{f B_2}{q_m^3(1)}\right\} - \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f B_2}{q_m^3(1)} \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

이다. (10)식을 사용하여 (8)식을 정리하면

$$\mu_F = [E_0] + \mu_{free}\left\{1 - \frac{1}{2}(1+\alpha')\frac{n_F}{n_B}\right\} + \frac{1}{2} Y n_F - \frac{1}{2}\frac{U_{FB}^2}{U_B} n_F$$

$$- \alpha\alpha' U_B n_F \left[1 - \frac{f}{q_m^3(1)}\left\{ q_m^4\left(I_3 - \frac{7}{4}\right) + q_m^2 \bar{r}^2\left(I_3 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\bar{r}^4 I_3\right\}\right] \cdots (12)$$

이다. 여기서

$$[E_0] = \mu_B(\bar{n}_B, 0, P_0, T=0)$$

$$+\ \bar{n}_B(U_{FB}-U_B)\ \left\{1-X\frac{m_F}{m_B}\ \frac{fB_3}{q_m^2(1)}\right\}-\bar{n}_B U_B\frac{m_F}{m_B}\ \frac{fB_3}{q_m^2(1)}$$

$$\mu_{free}=\hbar^2 p_0^2/2m_F$$

$$\alpha=\frac{\partial(\bar{n}_B\alpha')}{\partial\bar{n}_B}$$

그리고

$$q_m(s)=q_m^2-s\bar{r}^2,$$

$$\bar{r}^2=4m_B\ \bar{n}_B U_B/\hbar^2,$$

$$B_3=q_m^4\ \{I_3-\frac{5}{4}\}-q_m^2\bar{r}^2\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I_3\}+\bar{r}^4\{\frac{5}{8}I_3-\frac{3}{16}\}-\frac{3}{16}\ \frac{\bar{r}^6}{q_m^2}I_3,$$

$$I_3=\frac{q_m^2}{\sqrt{\bar{r}^2-q_m^2}}\ \arcsin\sqrt{1-\frac{q_m^2}{\bar{r}^2}}$$

이다. 화학 퍼텐셜은 음속도에 의해 간단히 표현할 수 있으며 음속도는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$C^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{T=0}$$

순수한 ^{4}He에 대하여

$$C_B^2=\frac{\bar{n}_B}{m_B}\left(\frac{\partial\mu_B}{\partial\bar{n}_B}\right)_{T=0}$$

$$=\frac{\bar{n}_B}{m_B}U_B\ [\ 1-\frac{f}{q_m^3(1)}\{q_m^4(I_3-\frac{7}{4})+q_m^2\ \bar{r}^2(I_3-\frac{1}{8})-\frac{1}{8}\bar{r}^4\ I_3\}\ ]\quad\cdots(13)$$

로 주어진다. 이 음속도를 (12)식에 대입하면

$$\mu_F=[E_0]+\mu_{free}\ \{1-\frac{1}{2}(1+\alpha')\ \frac{n_F}{n_B}\}-\alpha\alpha'\frac{m_B C_B^2}{\bar{n}_B}n_F$$

$$+\frac{1}{2}\ \{Y-\frac{U_{FB}^2}{U_B}\}\ n_F+\mathcal{O}(n_F^2)\quad\cdots\cdots(14)$$

이 된다.

BBP 등이 현상론적 이론에 의해 유도한 화학퍼텐셜과 (14)식을 비교함으로서 2 차원에서의 유효페텐셜을 구할 수 있다. BBP 이론에서의 교환 적분 $V_k\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}$ 는 $\{Y-\frac{U_{FB}}{U_B}\}$ 에 대응되며 $\mu_f(T,x)$는 $\mu_{free}\ \{1-\frac{1}{2}(1+\alpha')\ \frac{n_F}{\bar{n}_B}\}$에 대응된다.

참 고 문 헌

1) L. D. Landau, I. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk, USSR 59, 669(1948).
2) J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, Phys, Rev. 156, 207(1967).
3) W. L. McMillan, Phys, Rev. 175, 266(1968) : 182, 299(1969).
4) C. W. Woo, H. T. Tan and W. E. Massey, Phys, Rev, 185, 287(1969).
5) W. F. Saam, Ann. Phys, 53, 219(1967).
6) J. M. J. van Leeuwen and E. G. D. Cohen. Physica 27, 1157(1961).
7) A. Fabrocini, A. Polls, Phys, Rev. B25, 4533(1982) : B26, 1438(1982).
8) A. Isihara, D. Y. Kojima, Z. F. Phys. B37, 1(1980) : Physica, 103B, 247(1981).
9) 강영봉, 과학교육(제주대학교), 제 4 권, 77(1987).