무 한 개 념 에 관 한 연 구
- 중 • 고등학교 교과과정을 중심으로 -

부 대 성* • 양 영 오**

A STUDY ON THE CONCEPT OF INFINITY
-Secondary School Curriculum-

Dae Sung Boo • Young Oh Yang

This study intends to analyze the concept of infinity centered on the secondary school curriculum, as a part of the educational guidebook developments for cultivating logical way of thinking and imagining, as well as understanding the fundamental concept of "infinity".

In the chapter Ⅱ, we will investigate and analyze the historical background of the concept for infinities and in the chapter Ⅲ, the infinity concerned areas will be dealt with in the current secondary mathematics curriculum by presenting many as well as theoretical examples about rather intuitional views of definitions and theories. So the students could have the opportunities to enlarge their thinking areas, and also we could develop the educational data concerning the concept of infinity.

* 세화고등학교
** 제주대학교 자연과학대학 수학과

제 I 장 서론

수학은 무한의 과학이다고 주장하듯이 논술의 세계를 무한을 포함하여 확대할 때 중요하고 고도의 수학이 나타나고, 수학적 대상은 무한으로 가득 차 있다.

또한 과학의 급속도로 성장 발달함에 따라 높은 수준의 수학적 사고와 想像力, 推理能力이 수반되는 고도의 수학적 지식이 필요불가결하게 되었다.

중 • 고등학교 수학과 교과과정상의 敎育目標는 수학의 기본적인 개념 및 지식을 바탕으로 사물의 현상을 論理的으로 思考하는 능력을 기르고 創造的으로 문제를 해결하는데 있다. 그러나 오늘날의 현실은 그 목표와는 다르게 入試爲主의 수학교육으로 인하여 직관적 개념에 의한 논리적 思考를 잃은 채 기교만을 익히려는 교육이 교육현장에서 이루어지고 있는 실정이라 생각된다. 물론, 교육의 急進的인 變化나 改革은 자칫 위험스런 일이나 현대수학의 발전 방향에 알맞은 敎育內容으로 漸進的으로 교육방향이 전환되어야 한다는 측면에서 중 • 고등학교 교과과정의 無限槪念에 대한 지도를 직관적인 개념에 의존한 지도에서 直觀的및 理論的인 지도로 방향을 전환하여 논리적인 사고력과 상상력을 涵養시키는데 본 硏究의 목적을 두었다.

본 논문의 제 Ⅱ장에서는 무한의 歷史的 배경을 통하여 신비를 벗기려했던 옛 수학자들의 발자취를 더듬어 봄으로써 무한개념에 대한 기본적인 이해는 물론 논리적 思考力과 哲學的 상상력을 배양하도록 노력하고자 한다.

제 Ⅲ장 에서는 중 • 고등학교의 교과과정상의 무한에 관련된 각 단원별로 무한 개념의 분석을 통하여 특히,

1) 무한집합에서 가부번의 농도(可附番의濃度)라는 원소의 개수를 정의하여 교과서 수준에서 이 개념의 이해에 따른 예를 제시하고

2) 유리수의 조밀성에 의하여 무리수도 상대적으로 조밀하며, 유리수의 절단을 통하여 무리수α, 예를 들면, $\sqrt{2}$의 구성은 물론 이 무리수는 유리수열 $\{a_m\}$ 의 극한으로의 표현에 대해서 분석한다. 또한 실수의 연속성에 대하여도 분석을 한다.

3) 수열의 극한 "$\lim_{n\to\infty} a_m=\alpha$"에서 "한없이 커진다", "한없이 가까워진다"라는 용어의 의미를 이론적으로 설명하고, 직관적 관점에서 정의를 보다 엄밀하게 시도는 물론 무심코 넘길 수 있는 접근방법, 용어의 의미 및 ϵ--δ 방식에 의한 극한의 정의에서 사고의 영역을 넓힐 수 있도록 한다.

4) 함수의 극한, 연속, 미분, 적분개념에서 무한의 개념을 기하학적인 물론 이론적으로 고찰한다. 아울러 직관적으로 오류를 범할 수 있는 무한의 예도 제시한다.

제Ⅱ장 무한의 역사적 배경

그리스어로"무한(無限)"을 "아페이론"(apeion)이라고 하는데 이 말은 "유한(有限)", 즉 한정된 것(페라스, peras)의 부정-본래 일정치 않은 것, 불분명한 것을 뜻하였다. 그리스인들에게는 "아페이론"을 "무한히 큰 것", "분명치 않은 흐릿한 상태", "헤어릴 수 없을 만큼 복잡한 형태"등을 통틀어 나타낸 말이었다.

이 우주를 조화로운 것, 질서 정연하게 이루어진 것. 즉, 코스모스(cosmos, 통일적인 질서세계)로 여겼던 그리스인들로서는 그 반대의 뜻인 "아페이론"에 대해 대단히 거부반응을 일으켰다.

무한에 대한 기호는 8字 모양의 옆으로 누운 곡선으로 전문적으로는 lemniscate라고 불러진다. 이 기호는 처음으로 17세기의 2차 곡선론의 논문(Wallis; Arithmetia Infiniforum, 1656)에서 처음으로 사용하였다. 이 기호는 여러 문헌에서 무한이나 영원성을 나타내는 기호로서, 1700년대에는 마술사나 점성술사들이 사용하였던 트럼프 카드에도 나타나기 시작했고, 헤브라이 문자 ℵ(알레프)와 관계가 있으며 현대에 와서 무한이론의 창시자 칸토르가 무한수를 나타내는데 기호 ℵ(알레프)를 사용하였던 것과 깊은 연관이 있다.

이 장에서는 무한개념은 무엇이며, 무한집합이 존재한다는 것은 무엇을 의미하며, 무한개념이 어떻게 수학속에 들어가는가등에 바탕을 두어 시대별로 여러학자의 무한사상에 대하여 살펴보고자 한다.

1. 그리스 時代의 無限觀

유럽인의 사상에 가장 심각한 영향을 끼친 그리스의 두 찰학자 피타고라스(Pythagoras, B.C. 6세기 쯤)와 플라톤(Platon, B.C. 427~347)이 품었던 宇宙像은 세계의 온갖 현상은 유한개의 자연수의 배열로 나타내어 진다고 믿었으며 (그림 1 참조) 그의 이러한 영향을 받은 플라톤은 세계의 근본원리인 "선(善)" 까지도 유한적인 존재로 믿었다.

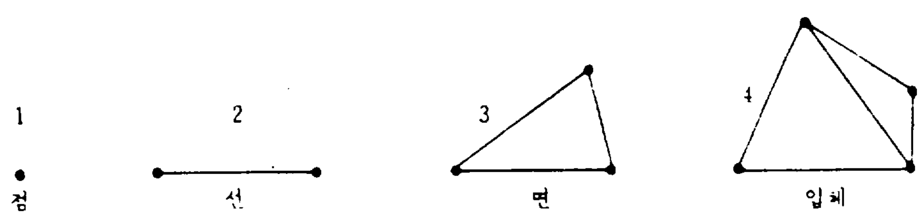


그림1 우주를 구성하는 기본요소로서의 수

이들 사상을 이어 받으면서 논리적으로 더 철저하게 다듬어서 그리스적 무한관(無限觀)을 최종적으로 정리한 자는 아리스토텔레스이다. 그의 표현을 빌면 무한은 "현실적으로 존재하는 것", "완성된 형태로 존재하는 것', 즉 형상(形相, 구체적인 모습)을 지닌 상태로 존재한는 것이 아니고 단지 "가능적인 존재"에 지나지 않는다. 가능적인 존재란 아직 형상을 갖추지 않은 질료(質料)의 상태에 있음을 뜻한다.

1) 아낙시만드로스(Anaximandros)의 무한관

"아페이론"(apeiron)을 萬物의 根源으로 생각하였다는 아낙시만드로스는 古代 그리스 철학에서 제일 처음 등장하는 탈레스(Thales)등과 더불어 형성된 밀레토스(Miletos)학파의 한 사람이다.

그가 만물의 근원으로서 "무한한 것"이 가장 근저에 깔려 있다고 말하였으며 여기서의 "무한"은 끝이 없는 무한의 연장, 즉 우리가 근대에 들어와서 논하는 무한대(無限大)내지 무한소(無限小)와 같은 것을 생각하였던 것이다. 그는 불(火), 물(水), 흙(土), 공기라는 四元素와 같이 이미 限定된 것이 만물의 근원이 아니라-예컨데, 탈레스는 "만물은 물이다"라고 주장하면서 물이라는 하나의 한정된 물질을 萬物의 根源으로 삼았다. -그같은 한정된 것이 생기기 이전의 아직 한정되어 있지 않은 상태의 것을 만물의 근원이라고 말하였다. 그렇기 때문에 아낙시만드로스의 "토 아페이론"을 "무한"이라고 해석하면 오해가 생길 가능성도 없지 않다. 따라서 그의 경우에는 무한이라고 해석하기 보다는 "무한정(無限定)"이라고 이해하는 편이 옳을지도 모르겠다. 아직 한정되어 있지 않은-즉, 아직은 확실한 "페라스"를 가지고 있지 않은-원초적인 카오스(Chaos) 상태를 말하고 있었던 것이다.

따라서 아낙시만드로스가 "토 아페이론"이라는 개념을 만물의 근원으로 간주한 사실은 매우 주목할 만한 일이지만 그의 思想은 오늘날 우리가 생각하고 있는 "무한"이라는 개념과 같이 적극적인 의미가 아니라 아직 한정되어 있지 않은, 다시 말해서 아직 規定되기 이전의 원초적인 상태를 소극적으로 表現한 것에 불과하다.

2) 피타고라스(Phythagoras)의 무한관

피타고라스에게는 "토 아페이론"(무한정)에 대해 "페라스"(한정)라는 또 하나의 원리가 분명한 반대개념으로 등장하게 된다. "아페이론" 상태를 어떠한 방식으로 "페라스" 상태로 함으로써 비로소 이 세계가 自然數라는 規定에 의해서 성립되었다는 것이다.

이와 같은 무한정에 대한 한정이라는 사고방식은 플라톤(Platon)의 이데아(idea)

론을 거쳐 아리스토텔레스(Aristoteles)의 "질료(質料)"에 대한 "형상(刑相)"이라는 사고방식으로 발전해간다. 그래서 희랍철학에서는 일반적으로 한정되어 있지 않은 "질료"가 "형상"에 의해서 한정될 때 비로소 개체가 성립된다는 사고가 성립되기에 이른다.

그의 수학에서 하나의 정사각형이 있고 그 정사각형에 대각선을 그을 때 정사각형의 한변의 길이와 대각선의 길이를 같은 단위의 길이로 측정할 수 있느냐라는 문제가 나온다. 이 사실을 가리켜 피타고라스 학파의 "무리량(無理量)의 발견"이라고 한다. 예컨데 정사각형의 한 변의 길이가 15라고 할 때 대각선의 길이는 18이 되는냐하면 그렇지 않다. 어떤 단위를 가지고도 이것은 불가능하다는 사실을 발견하게 된 것이다. 아무리 해보아도 自然數의 비로는 나타낼 수 없었전 점이다. 이와 같은 수의 비로써 표현할 수 없다는 의미에서 "irrational"이라고 하였다. 따라서"irrational number"를 무리수라고 번역하게 되었던 것이다. ratio라는 단어는 본래 "비(比)"라는 뜻이므로 엄격히 말하면"無理數"가 아니라 "無比數"라고 번역했어야 했다고 한다. 이와 같은 "무지량"내지 "비공약량"의 발견을 "만물은 수로써 성립된다"라는 피타고라스학파의 논제에서 근본적으로 모순이 된다.

다른 말로 바꾸면, 피타고라스 학파는 "연속"의 문제-연속이란 일종의 무한을 뜻함-를 자기들의 학문체계 안에서 소화하지 못하고 이 문제에서 좌절하기에 이른다.

3) 제논의 무한관

엘레아(Elea)학파에 속하는 제논이라는 철학자가 있었다. 그는 "제논의 逆理"를 내놓는 것으로 유명하다. "제논의 페러독스"가운데에서 대단히 걸음이 빠른 아킬레스(Achilles)와 걸음이 대단히 느린 거북이의 경쟁에서도 무한이라는 문제가 제기되고 있으며 여기에서도 극한이라는 사고방식은 전혀 나타나지 않고 있다. 다른 말로 표현한다면, 무한이란 한없이 진행하는 것이지만 이 무한의 과정을 극복해 나갈 수 있는 사고방식이 전혀 작용하고 있지 않다.

이와 같이 희랍적인 사고방식은 무한의 문제를 적극적으로 처리하지 않고 패러독스 상태에 계속 머물러 있었다고 간주할 수 있다.

4) 유클리드의 무한관

유클리드(Euclid)의 유명한 저서인 「원론(原論」이라는 수학책 안에는 "평행선의 공리"라는 것이 있다. 그런데 이 "평행선의 공리(公理)"중의 「제 5공리」는 근대인이 생각하고 있는 것과 같이 "무한히 연장해도 만나지 않는 두 직선의 존재"를 요청하

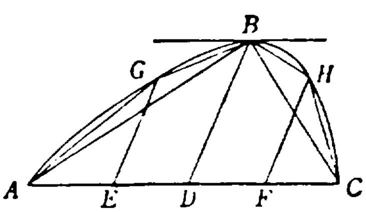
는 형식으로 표현되어 있는 것이 아니다. 그것은"한 직선이 두개의 직선과 만나서 같은 쪽에 형성되는 內角의 합이 두 직각(180°) 보다 작을 경우에는 두개의 직선이 한없이 연장될 때 2직각보다 작은 각이 있는 측에서 교차하게 된다."고 표현하고 있다. 여기서 "한없이" (aperion) 라는 말은 무한의 연장을 뜻하고 있는 것이 아니라 "계속 연장해 나가면 어딘가 有限一定한 곳에서 두 직선은 만나게 된다."고 말하고 있다. 즉 "무한하게 교차하지 않는 평행선의 존재"가 同側內角의 合이 2직각보다 작은 측의 一定有限한 거리에서의 두 직선이 교차점의 존재"라는 문제로 대치되고 있다. 평행선이란 동일 평면상에서 양쪽으로 한없이 연장하여도 어느 방향에서도 서로 만나지 않는 직선을 말하고 있으며, 여기서 '한없이"도 역시 무한한 연장을 의미하는 것이 아니라 "공리"의 경우에서와 같이 그 의미가 "무한정으로 연장해가면 有限一定한 어느 지점에서 만나는 법이 없다."고 말하는 것으로 해석되어야 할 것이다.

따라서 여기서도 "아페이론"은 근대적인 "무한개념"이 아니라 아낙시만드로스 이래로 피타고라스와 플라톤을 통해서 그랬던 것과 같이 역시 "무한정"이라는 뜻으로 해석하는 것이 옳다고 생각되는 것이다.

5) 아르키메데스의 무한관

영이 아닌 수는 아무리 작아도 그것을 충분히 많은 회수를 더한다면 얼마든지 큰 수가 된다는 주장은 아르키메데스에 의하여 처음으로 명확히 서술되었다. 이런 성질을 실수가 갖는 아르키메데스적 성질이라 한다. 그는 모든 수는 아르키메데스 적이다. 즉, 무한소는 존재하지 않는다고 주장하였다.

그러나 그는 포물선 기하학의 모든 문제를 해결하기 위하여 무한소와 그의 물리학적 직관을 사용하였다. 그 때 무한소는 존재하지 않으므로 그는 간접적 추론과 순수하게 유한인 구성법에 따른 "착출법(method of exhaustion)"을 사용하여 그의 모든 결과의 "엄밀한 증명"을 주었다. 이 엄밀한 증명은 "포물선의 구적에 관하여"라는 논문에서 주어지고 있다. 여기서, "포물선ABC상의 한 점 B에서의 接線과 평행한 線分AC로서 절단한 절편의 면적은 同低同高의 삼각형 ABC의 면적의 $\frac{4}{3}$와 같다."는 것을 증명하고 있다."



$AE = ED = DF = FC$
$GE // BD // HF$

그 림 2

무한을 피한 아르키메데스의 착출법은 19세기가 되어 해석학에서 무한소법을 추방하는데 바이어쉬트라스와 그의 후계자가 생각한 ϵ- -δ방법과 정신에 가까운 것이다.

6) 플라톤의 무한관

플라라톤은 그의 후기의 「對話篇」(philebus)에서 소크라테스의 입을 빌어 모든 존재는 이 "아페이론"(희랍의 경우는 무한정이라고 번역하는 편이 더 적합하다)과 "페라스"(한계내지는 한정)의 혼합에 의해서 생긴다고 말하고 있으며 이 경우에 "아페이론"을 "보다 많은 것과 보다 적은 것이 가능한 것"이라고 정의하고 있다.

이와 같이 무한정한, 보다 더 커질 수도 있고 보다 더 작아질 수도 있는 것으로서 이 무한은 아리스토텔레스의 "가능한 것으로서의 무한"이라는 개념의 선구적인 역할을 담당하게 된다.

7) 아리스토텔레스의 무한관

아리스토텔레스는 피타고라스나 플라톤의 사고방식을 계승받지만 이것을 더욱 논리적으로 철저하게 고찰하여 희랍적인 무한의 개념을 마지막으로 손질하고 완성한 사람이라고 말할 수 있다. 그에 의하면 무한은 그의 용어를 빌어 말한다면 "완성감에서 존재하는 것"이지 "현상태에서 존재하는 것"은 아니다. 즉 형상을 갖춘 완결된 개체로서 존재하는 것이 아니라는 뜻이다. 따라서 그에게 이는 "가능적 존재"에 불과하다. 가능적으로 존재는 그에게 아직 형상을 지니기 이전의 자료 상태를 말하게 된다.

아리스토텔레스는 무한의 본질을 "항상 그 어떤 것이 그 밖에 있다"고 말하고 있으며 이와 같은 것을 "그 어떤 것이 그 밖에는 있을 수 없는" 전체와 대조시키고 있다. 여기서 말하는 무한이란 "이미 취해진 것 이외에는 항상 그 어떤 것을 더욱 취할 수 있는 것"이라는 뜻이 된다. 무한이란 이와 같이 완료라는 것을 모르는 것을 의미한다. 즉, 끝남이 없는 것이다. 여기서 그는 "통과해 갈 수 없는" 것에다 그 말의 정당한 의의를 둔다. 그의 무한은 "극한"이나 "초한 순서수(超限順序數)"와 같이 무한의 과정을 통해서 존재할 수 있는 하나의 종합된 전체로서 파악할 수 없는 것을 말하고 있는 것이다. 이런 의미에서 "그는 무한은 현실적으로 존재하는 것이 아니라 가능적으로 존재하는 것"이라고 말하고 있다. 이와 같은 그의 무한개념이 그 후에 무한론의 하나의 커다란 원천인 포텐셜 인피니티(potential infinity, 가능적 무한)라는 사고방식의 출발점을 이루게 된다.

8) 필론의 무한관

신을 처음으로 무한이라고 부른 사람은 알렉산드리아의 유태 사상가 필론(philon)이다. 이 필론에 이르러 희랍에서는 소극적으로 존재 이하의 것으로 취급되었던 무한이 최초로 존재 이상인 신의 속성으로 화하는 것이다. 그는 신의 초월성을 주장하면서 아무리 하여도 인식을 초월하고 있는 신의 속성을 "무한"이라고 표현하였던 것이다.

9) 그리스 시대의 무한의 성격

희랍수학에서는 무한이란 이미 우리가 살펴온 바와 같이 적극적으로 대상화되는 일이 없었고, 결국은 무한정 한 "indefinitum에 머물렀다고 말할 수 있다. 존재가 일반적으로 형상을 가짐으로써 비로소 존재로서 이해된다고 하면 무한이란 그와 같은 형상을 결하고 있기 때문에 말하자면 존재이라가 되는 것이다. 따라서 여기서는 "무한"이란 완결된 "한정"을 지니고 있는 유한이하의 것이라는 말이 된다. 그러나 근대의 우리들은 무한이라는 것을 유한이상으로 생각하는 경향이 있으며 그러한 방향에서 평가하는 것이 통례로 되어 있다. 유한이란 오히려 무한이 어떤 제한을 받아서 이루어진 것이라고 생각하고 있는 것이다.

2. 중세 시대의 무한관

중세 시대의 무한관은·종교적인 것에 매개되면서 점차 유한 우위로부터 무한 우위로 전개되기 시작하였다. 실제로 아우구스티누스(A. Augustinus, 354~430)에 이르러서는 무한성이야말로 바로 신의 完全性의 표현이 되어 버리고 만다. 중세 초기에 와서는 신의 초월성을 나타내는 속성으로서 "무한"을 적극적으로 평가하는 사고방식을 신플라톤 학파로부터 받아들였으며 그것을 그들의 신학의 발전 과정에서 점차 인간인식 안으로 가져 오려고 노력하기에 이르는 것이다.

중세기 기독교 철학의 사상가 스코투스 에리우게나(Gohannes Scotus Eriugena, 800~877)는 신플라톤파적인 神 개념을 받아들여 신은 그의 완전성에 의해서 인간의 유한적 인식능력을 훨씬 초월하고 있는 超存在(supress)로 이해하고 있다. 신은 무한과 의식을 가지며, 처음도 끝도 없고, 시간도 없으며, 공간도 없고, 또한 운동도 없는 존재라고 말한다.

또한 토마스 아퀴나스(Thomas Aquinas, 1255~1274)는 가장"현실적으로 존재하는 최고도로 인식가능한 자"로서 신의 무한성이 표면화였다는 사실이 주목된다.

1) 니콜라우스 쿠사누스의 무한관

쿠사누스에게는 인식은 일반적으로 아직 한정되어 있지 않은 것을 한정함으로써 그 비를 규정하는 것으로 성립된다. 그러나 무한은 그것이 무한인 한 모든 관계나 비를 뛰어넘고 있기 때문에 접차 인수가 없다. 모든 有限量은 아무리 크다 할지라도 그보다 더 큰 것이 있게 마련이고 같은 이유에서 제아무리 작은 것이라도 그보다 더 작은 것이 있게 된다. 이에 反해서 보다 더 큰 것이 존재하지 않는 것이 無限大이고 보다 더 작은 것이 존재하지 않는 것이 無限小가 된다. 그러므로 유한과 무한 사이에는 어떠한 관계도 비도 존재할 수 없다.

無限에 관한 論理는 유한에 관한 논리를 초월하여 원(圓)이 직선(直線)일 수도 있고 전체가 部分과 같아지는 소위"반대의 일치"가 가능해지는 구조를 갖는다.

예를 들어, 그는 무한한 것에서는 "圓周와 같아지는 소위 "반대의 일치"가 가능해지는 구조를 갖는다.

예를 들어, 그는 무한한 것에서도 원주가 직선과 일치"하는 것을 다음과 같이 논하고 있다. 아래 그림에서 원을 점차 크게 그려 나가면 원주는 ***gh, fe,*** 그리고 ***cd***로 커져서 직선 ***ab***로 접근해 나가면서 결국 그 원이 無限大가 되면 ab라는 직선과 일치하게 된다는 것이다. (그림3 참조)

또한 원에다 정다각형 내접시켜 그 정다각형의 변을 점차 늘려가면 마지막에는 변의 합과 원주와 일치하게 된다. (그림 4 참조)

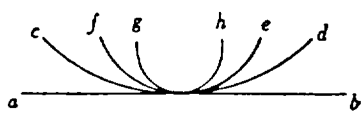


그림3

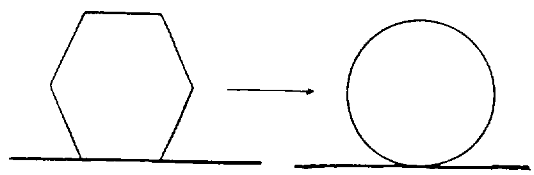


그림4

2) 중세시대 무한의 성격

위에서 살펴본 바와 같이 고대 희랍의 무한은 결론적으로 소극적인 것이었지만 중세에 들어서는 무한은 신의 속성으로 적극화되었으며 가치적으로나 실제적으로 유한 이상이 되었다. 즉 신앙의 대상으로 적극화된 "무한"을 인식의 대상으로 대자화(大自化)하고 논리화하려는 계보를 중세의 무한론에서 볼 수 있게 된다. 이 과정에서 가능적 무한의 과정적 성격은 현실적 무한의 존재적 성격으로 바뀌게 된다. 이와 같은 과정의 근대적인 구체적 예로서 미적분학에서의 극한의 개념과 집합론에서의 초한순서수(transfinite ordinal number)의 개념을 들 수 있다. 이 두가지는 현실적 무한의 가장 현저한 두개의 형태로 말할 수 있을 것이다.

3. 근세의 무한관

1) 갈릴레이의 무한관

갈릴레이의「신과학 대화(新科學 對話, 1683)」는 무한, 연속등이 그 내용으로 하고 있는데 여기서 그는 유한이 지닌 개념이 무한의 경우에는 통하지 않는다는 것을 다음과 같은 실례를 들어 설명하고 있다.

자연수와 제곱수와의 대응

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots\ldots \end{array}$$

은 자연수의 집합 $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$과 제곱수의 집합 $\{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$이 일대일로 대응한다. 따라서 자연수 전체와 그 일부인 제곱수 전체의 개수가 같다는 것을 보여준다. 제곱수는 커질수록 분포상태가 회박해진다. 여기서 부분과 전체는 같음을 보여준다.

$\boxed{1}$ 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 8 $\boxed{9}$ 10 11 12 13 14 15
$\boxed{16}$ 17 18 19 20 21 22 23 24 $\boxed{25}$...

「제곱수의 분포상태」

이 사실로부터 자연수 전체의 개수와 제곱수 전체의 개수는 어느 쪽이 더 많다 또는 더 작다고 말할 수 없다는 결론이 내려진다. 요컨데, "같다", "크다", "작다"등의 성질은 유한의 세계에서만 의미를 지닐 뿐 무한의 세계에서는 통용되지 않는다. 이 제곱수에 관한 "무한의 파라독스"는 역사적으로 많은 흥미를 끈다. 엄격한 의미의 무한수(無限數)의 이론인「超限數」의 이론이 세워진 것은 19세기 일이지만 데데킨드(Dedekind, 1831-1916)의 저서 「수란 무엇이며 무엇이어야 하는가」(1888년)에 의해서 무한의 정의로 쓰인 것은 「무한집합이란 부분과 전체의 "크기"가 같은 집합이다.」

2) 볼차노의 무한관

볼차노(B. Bolzano, 1781～1848년)의 「무한의 파라독스」(Paradxxiendes unendichen) (1851)에 실린 예를 통해 무한의 성격을 알아보자

다음과 같은 형의 무한급수가 있다고 하자

$$S = a - a + a - a + \cdots \tag{1}$$

이 급수의 합을 구하기 위해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = (a - a) + (a - a) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots \tag{2}$$

이것으로 부터 S=0 이라는 결과를 얻는다. 또(1)은

$$S = a - (a - a) - (a - a) \cdots = a - 0 = a \tag{3}$$

(3)에(2)를 대입하면

$$S = a - S, \text{즉 } S = \frac{a}{2} \tag{4}$$

결국, 식(1)로부터는 서로 모순된 세가지 답을 얻을 수 있다. 이 급수는 수학적으로 의미가 없는 것이다. 왜냐하면 아무도 한없이 덧셈을 계속할 수는 없다.

예를 들어, 우리가 식

$$S = \Sigma a_i = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$$

을 생각할 때, 수열

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, \cdots$$

즉 수열 $S_n = \Sigma a_i$가 수렴하고 극한값S를 갖는다는 것을 전제로 삼는다.

그러나

$$a, a - a, a - a + a, \ldots$$

즉 $a, 0, a, 0 \ldots$과 같은 수열을 수렴하지 않는다(수렴하지 않는 수열을 수렴하는 것으로 간주했다는 점이 혼란의 원인이다). 따라서 식(1)은 무의미하다. 이 예는 무한급수에 산수의 덧셈의 규칙을 무턱대고 적용하면 모순이 생긴다는 점, 즉 유한개의 합에 관한 산수의 법칙을 형식적으로 나타내어진 무한급수에 그대로 옮길 수 없음을 논리적으로 설명하고 있다.

3) 파스칼의 무한관

무한이 사람들의 마음속에 자리잡게 되기까지에는 고난에 찬 아주 긴 세월이 흘러야 하였지만, 이 무한없이는 근세에 있어서의 천체운동에 관한 이론도, 수리적 자연과학도, 심지어는 미적분학 조차도 탄생하지 않았을 것이다.

"팡세"의 저자 파스칼은 "수학적 귀납법(數學的 歸納法)"이라는 방법을 처음으로 사용한 수학자이다. 이것이야말로 무한의 개념을 정면에서 다룬 수학적인 방법이다. 수학적 귀납법이란"어떤 사실이 모든 자연수에 관해서 성립한다"는 것을 증명하는데

쓰이는 것이다.

자연수는 1에서 시작하여 차례차례 나아감으로써 비로서 그 전체를 파악할 수있다. 바로, 이 사실 때문에 어떤 성질 $P(n)$이 모든 자연수에 대해서도 성립한다는 것을 밝히기 위해서는 먼저 $n=k$일때를 따져보고 $n=k$일때 성립한다고 할 때 $n=k+1$일 때에도 성립한다는 것을 밝히는 두 단계의 증명법에 의하여 그 가치를 인정하게 된다.

자연수 1, 2, 3, . . . 은 오래 전부터 알려져 있으나 이것을"n 다음에 $n+1$이 이어진다"라는 규칙, 즉 생성규칙(生成規則)을 지닌 "한없이 계속하는 수열"로 보고, 그 전체를 하나로 묶어서 생각하게 된 것은 그렇게 오래 된 일이 아니다.

"자연수 전체"를 "무한"으로 파악하기 위해서는 "수학적 귀납법"을 사용해야 된다는 점이다. 즉 수학적 귀납법이 확립되었을 때 비로소 자연수 전체라고 하는 "무한"이 수학에 등장하게 된 것이다.

4) 칸토르의 무한관

17세기에 미적분학이 성립되었고 18세기에는 수학의 경험론적 기초를 닦는 방향으로 움직여 물리학을 위시하여 다른 분야에 널리 응용되었다.

그런데 19세기에 들면서 18세기에 세워진 합리적인 기반에 대한 반성이 시작된다. 즉 미적분이라는 극한 계산법(lim)에 대하여 희랍식의 기하학적 기초에 만족하고 있었던 종래와는 달리, 속속 나타나는 역설적인 사고로 인하여 문제의 기초를 자연수의 이론부터 시작하여 「실수란 도대체 무엇이냐?」라고 묻는 등의 근원적인 문제부터 재음미해 나가야 하겠다는 기운이 싹트기 시작하였다.

칸토르는 무한 집합론의 비약적인 변화를 일으켰다. 즉 "超限順序數의 이론"이라고 불리는 것으로서, 종전까지는 무한집합의 농도, 즉 요소의 개수가 문제였던 것이 개수를 계산하기 이전에 그 무한집합의 배열방법, 즉 그 "순서"의 계산방법을 생각하게 되고, 이에 따라 농도-개수-의 계산에 어떤 변화를 가져오게 하려는 사고방식으로 바뀌게 된다.

0에서 시작하여 자연수를 순서대로 나열하고 각 수와 바로 그 앞까지의 수열과의 관계에 착안한다. 0의 앞은 문자 그대로 0이므로 "공집합"이며 1의 앞에는 0이 하나, 2앞에는 0과 1 두개 나란히 서있다. 따라서 보는 방법을 역으로 하면 0, 1, 2의 순서로 나란히 서있는 순서가 3이라 말해도 무방할 것이다. 그러나 칸토르는 무한집합이라는 실무한을 적극적으로 보고 그 나열방법을 ω(오메가)라고 부르게 되었다. 그러면 {0, 1, . . . n. . . ω}라는 形의 배열법은 새로운 것이므로 이것을 $\omega+1$이라고 부르고, ω 다음에 붙인다. 그러면 새로운 배열순서가 되기 때문에 이것을 $\omega+2$라고

부른다. 여기서 중요한 것은 무엇을 나란히 배열하고 있느냐가 아니라, 그 배열 방법의 순서라는 형인 것이다. 예컨대 우수를 대소순으로 전부 배열한 순서형은 ω, 그리고 그 다음에 1을 놓을 순서 形은 $\omega + 1$, 만약 우수를 대소 순으로 전부 배열하였다고 하면 그 순서形은 $\omega + \omega$, 즉 $\omega\times2$라는 것이 된다.

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{0, 1, 2, \cdots n\text{-}1, n}^{n\text{形의 순서}}, \cdots}_{\omega\text{形의 순서}}, \omega}_{\omega+1\text{ 形의 순서}}, \omega+1, \cdots, \omega\times 2, \cdots$$

그림5

이와 같은 수열은 계속되지만, 개개의 자연수의 경우에는 n개의 것을 제아무리 배열을 바꾸어도 그 순서형은 변하지 않는데 반하여, 可算集合이 되면 여러가지 배열방법이 나타난다는 사실이다. 그러나 여기서 더욱 중요한 것은 가산집합의 그와 같은 배열방법을 전부 모으면 그 개수는 이미 가산이 아니라는 것이 증명된다. 이것은 유한의 순서수, 즉 자연수의 배열이 어디서 끊기더라도 그 바로 앞에서는 유한이지만 유한 순서수의 전체는 유한개가 아니고 可算濃度로 비약하는 것과 흡사하다. 요컨데 가산순서수 전체집합의 농도는 가산농도 다음으로 큰 농도가 된다는 것으로, 여기에서 다시 무한집합의 「크기」에 관한 제2의 비약이 나타난 것으로 생각할 수 있다.

칸토르는 이와 같은 방법을 더 발전시켜 가능한 모든 超限順序를 만들어내거나 이를 인식하면서 그 수열 안에서 "개수"가 비약하는 장소로서, 농도라는 것을 超限順序 또는 알레프수라 불렀다.

초한순서수, 超限順序 (알레프수) 사이에서도 자연수의 산법이나 무한수열의 극한산법(極限算法)을 모형으로 삼으면서 加算法, 勝算法 그리고 거듭제곱 계산법을 조립해 나갔다. 그의 무한 집합론 또는 새로운 實無限的 數의 이론을 정립시켰다.

5) 데데킨드의 무한관

데데킨드(Richard Dedekind, 1831~1916)의 著書「연속과 무리수 (Stetigkeit and irrational zahlen, 1872년)」에는 무한한 "생성(生成)하는 무한" (="假無限") 이 아니라 "존재하는 무한", 즉"實無務限"으로 다루어 지고 있다.

데데킨드는 유리수를 바탕으로 무리수를 다음과 같이 정의하였다. 유리수 전체를 다음 4 조건을 만족하는 A_1, A_2의 두 분류로 분할하였다고 하자.

(1) A_1, A_2에 공통으로 포함하는 유리수는 존재하지 않는다.

(2) 어떤 유리수도 A_1아니면 A_2에 속한다.

(3) A_1 에 속하는 모든 수는 A_2에 속하는 수보다 작다.

(4) A_1, A_2에는 각각 무한히 많은 유리수가 포함되어 있다.

이러한 유리수 전체의 분할을 "절단(切斷)(Schnitt, cut)이라 부르고 (A_1, A_2)로 나타난다. 그는 유리수와 무리수를 이렇게 정의하였다.

「일반적으로 어떤 절단(A_1, A_2)에서 A_1에 최대수가 없고, 또 A_2에 최소수가 없을 때 이것을 무리수라 하며 A_1에 최대수가 있거나 A_2에 최소수가 없을 때 이것을 유리수라 부른다」

양의 유리수 전체 중에서 그 제곱이 2보다 큰 수의 전체를 A_2, 그 밖의 양, 음의 유리수 전체를 A_1라고 하면, 이 A_1, A_2는 위의 네 조건을 모두 만족시키므로 A_1, A_2에 의해 하나의 「절단」을 정의할 수 있다. 즉 이(A_1, A_2)에서는 A_1에 최대(유리)수가 없고, 또 A_2에도 최소(유리)수는 없다. 여기서 데데킨드는 이 절단을 $(A_1, A_2)=\sqrt{2}$로 나타낸다.

이 데데킨드의 정의는 우리가 생각한는 $\sqrt{2}$ 와는 아무런 상관이 없다.

여기서 새로 정의된 유리수는 종래의 유리수와는 표현이 다르기는 하지만 실질적으로는 같은 내용임을 알 수 있었다. 이 "절단"에 의한 정의를 바탕으로 그는 임의의 두 "절단"의 상등, 대소 그리고 사칙연산등을 정의하여 더 나아가서 유리수, 무리수 사이의 상등, 대소, 4칙등을 정의했다.

4. 동양의 무한사상

1) 인도의 무한사상

인도의 수학발달에 큰 영향을 미친 것은 숫자이다. 현재 우리가 사용하고 있는 아라비아 숫자는 원래 인도에서 발명되었는데 이것을 유럽에 알린 것이 아라비아인이었기 때문에 그렇게 불리어지고 있다. 현재 세계 공통의 숫자가 어떻게 탄생하였는지는 알 수 없지만, 처음에 1에서 9까지의 아홉가지 숫자를 써서 숫자를 나타내였다가 나중에 0의 기호가 만들어짐으로써 10진 위치적 기수법이 확립되었다. 또, 인도에는 한자표기로는

一十百千萬億兆京汰悌穰溝澗正載極

그리고, 이것들 위에

恒河沙 何僧祇 那由他 不可思議 無量大數

등이 數詞가 있고 그 위에 많은 수사가 있다는 사실을 2500년 전의 석가의 경전 "草嚴徑"속에서 볼 수 있다.

인도인들은 뺄셈의 기호를 써서 음수를 만들었다. 즉 "양(陽)의 양(量)의 뺄셈"을

"음(陰)의 양(量)의 뎃셈"으로 고쳐 생각하였던 것이다.

양수를 "재산", 음수를 "부채"로 보는 등, 음 양의 수에 구체적인 의미를 부여하여 사용했던 것이다. 특히, 그들은 0이라는 수를 창조하였다.

영(零)은 산스크리트어로는 "슈나"(Sunya)라고 부르는데 이 말은 불교(大佛敎)에서 "공(空)"을 뜻한다. 영은 처음에 "."로 나타냈으나 나중에 "O"으로 바뀌었다. A.D 870년에는 기호로서 "O"이 쓰였으나 그후 0의 모양을 갖추었고 13세기 쯤에는 현재와 같은 형태로 정착되어 유럽으로 전해졌다.

바스카라의 「비자 가니타」(Vija Ganita)에서 처음으로"0으로 나눈 몫은 무한이다"라는 명제가 등장한다.

"명제: 피젯수 3, 젯수 0일 때 몫은 $\frac{3}{0}$인데, 분모가 0인 이 분수는 무한량이라 불리어 진다. 젯수가 0인 분수로 된 무한량에 있어서는 아무리 많은 수가 더하거나 뺀다 하여도 불변이다. 그것은 마치 무한이자 불변인 신에게서는 모든 일이 불변인 것과 같다."

인도의 수학은 사원(寺院)의 명상적 생활 속에서 태어난 천문학과 깊은 연관이 있었으며 실용상(實用上)의 필요, 특히 상거래나 무역등에 의해서도 크게 작용을 받았다.

2) 중국의 무한사상

중국의 고전시대로 일컬어지는 전국시대(B.C 5세기경)의 묵가(墨家)는 일종의 기술자 집단이었는데, 그 최초의 맹주인 墨子의 저술로 알려진 같은 이름의 책 「묵자」에는 유클리드의 「원론」의 일부를 연상케 하는 가하학에 관한 논리적 기본 명제가 실리어 있다. 즉,

"점은 넓이가 없는 선의 맨 끝에 있는 부분이다."

"평행이란 같은 높이를 뜻한다'"(平, 同高也)

"원의 중심은 원주로부터 같은 거리에 있다."(中, 同長也)

근대 이전의 수학의 수준을 평가하는 한 가지 기준은 원주율의 정밀도이다. 또 그만큼 원주율의 정확한 계산은 고대이래 수학자들의 숙원이기도 하였다. 중국에서도 예외는 아니었고 「구장산술(九腸算術」에서 쓰인 3이라는 값은 편의상 그랬을 뿐이고 3.15(유흠(劉歆), 1세기) $\frac{92}{29} \doteqdot 3.17$ (張衡, 2세기) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$등이 값이 알려지고 있다. 이에 대해 획기적이고 정밀한 값을 산출해 낸 사람이 유회(遊戱)였다. π의 계산은 조충지(條蟲志)에 이르러 절정에 달한다. 「수서(隋書)」, 「율력지(律曆志)」에 간단히 소개된 그의 산법만으로는 자세한 내용을 알 수 없으나 그는 원주율π 의 값

을 3.14152926 < π < 3.1415927과 밀률(地雷) $\frac{355}{115}$과 약률(約率) $\frac{22}{7}$를 구하였다. 밀률인 3.141492는 소수점 아래 6자리까지 정확하다.

중국 수학의 또 하나의 중요한 업적은 「구장산술」을 주석(註釋)하였던 유휘는 구의 체적을 계산하는 과정에서 무한급수의 합을 셈하였던 것으로 알려지고 있다. 북송(北送)시대의 자연과학자 심괄(沈括, 11세기 후반)도 「몽계필담(夢係筆談)」이란 책 속에서 "격적술(隔積術)"이란 이름으로, 술통을 부채꼴 모양으로 쌓아 올렸을 때 그 총수를 구하는 계산에서 급수의 합을 셈하고 있다.

제Ⅲ장 교과과정에서의 무한

1 현행 중.고등학교 교과과정과 무한의 관련성

현재 중.고등학교 교과과정에 나타난 무한에 관련된 수학교과의 구성은 아래 표와 같다

1) 중학교

학 년	단 원	무한에 관련된 교과 내용
1학년	Ⅰ. 집합과 자연수 1. 집합 Ⅳ. 함수 1. 함수 Ⅶ. 평면도형 2. 다각형	# 유한집합 # 무한집합 # 원소의 개수 # 두 집합의 원소 사이의 대응 # 일대일 대응 # 다각형
2학년	Ⅰ. 수와 연산 1. 유리수	# 유리수와 유한소수, 무한소수 # 순환소수
	Ⅴ. 확률 2. 확률의 계산	# 확률의 정의 # 확률의 계산
3학년	Ⅰ. 수와 연산 1. 무리수와 실수	# 무리수와 무한소수 # 실수의 대소관계와 수직선
	Ⅳ. 이차함수 1. 이차함수와 그래프	# 이차함수의 정의구역, 치역

2) 고등학교

학 년	단 원	무한에 관련된 교과 내용
1학년	Ⅰ. 집합과 수의 체계 1. 집합과 명제 2. 수의 체계	# 부분집합 # 유리수의 조밀성 # 실수의 연속성
	Ⅴ. 함 수 1. 함수	# 함수의 정의구역, 공역, 치역
	Ⅶ. 지수함수와 로그함수 1. 지수의 확장 2. 지수함수	# 지수의 확장 # 지수함수
2학년 3학년 (수학Ⅰ 수학Ⅱ)	Ⅱ. 수 열 1. 등차수열, 등비수열	# 수열의 정의 # 유한수열 # 무한수열
	Ⅲ. 극 한 1. 수열의 극한 2. 무한급수 3. 함수의 극한과 연속성	# 무한수열의 수렴, 발산 # 무한급수의 합 # 함수의 극한 # 함수의 연속성
2학년 3학년 (수학Ⅰ 수학Ⅱ)	Ⅱ. 미 분 법 2. 도함수	# 미분계수의 정의 # 삼각함수의 극한 # 함수의 극대, 극소
	Ⅲ. 적 분 법 1. 정적분	# 구분 구적법 # 정적분

2. 무한개념의 현황 및 분석

1) 집합에서의 무한개념

(1) 교과서의 현황

가. 유한집합이란 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있는 집합이고 무한집합이란 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없는 원소수가 무한히 많은 집합을 말한다.

나. 집합의 원소의 개수는 유한집합 $A=\{a_1,a_2,...a_k\}$라 할 때 A의 원소의 개수를 $n(A)=k$로 나타낸다.

다. 일대일 대응이란 집합 A에서 집합 B로의 대응에서 A의 어떤 원소a에도 $a\rightarrow b$ 되는 B의 원소 b가 단 하나 뿐이고 B의 어떤원소 b에도 $b\rightarrow a$되는 A의 원소 a가 단 하나뿐일 때 A에서 B로 일대일 대응이라 한다.

(2) 지도상 유의점 및 지도방향

가. (집합의 형) 원소의 개수를 주목한다면 집합은 다음과 같이 세 부류로 나누어 생각할 수 있다.

첫째는 $\{x: x$는 대한민국의 국민$\}$, $\{x: 0<x<10, x$는 정수$\}$ 등과 같이 유한개의 원소로 된 집합을 유한집합이고,

둘째는 $\{x: x$는 자연수$\}$, $\{x: x$는 짝수$\}$ 등과 같이 무한개로 된 집합을 무한집합이라 하는데 이들은 모두 원소끼리 띄엄띄엄 떨어져 있는 경우이다. 이들은 무한집합이면서도 원소들 사이에 "간격"이 있다는 점에서 위의 유한집합의 경우와 같다. 이러한 집합을 "이산형"(離散型)의 집합이라고 한다.

셋째는 $\{x: 0<x<1, x$는 유리수$\}$, $\{x: x$는 어떤 선분상의 모든 점$\}$ 등과 같이 어떤 구간(무한구간을 포함해서)내에 꽉 차있는 점(또는 수)의 집합이다. 이것들로 무한집합에는 틀림없겠지만, 위의 둘째 경우와는 다른 종류의 무한 잡합이다. 이러한 집합을 "조밀형(稠密型)"의 집합이라고 한다.

나. (원소의 개수) 원소의 개수는 유한집합에서만 한정하여 사용하고 있다.

가령, 책상 위에 있는 책들의 집합을 $\{$국어, 영어, 수학$\}$라 하고 편의상 이들을 $\{a,b,c\}$로 한다. 이들 수는 3이라는 것을 금방 알 수 있다. 이 3이라는 수는 $\{a,b,c\}$로 한다. 이들 수는 3이라는 것을 금방 알 수 있다. 이 3이라는 수는 a, b, c의 차례로 셈한다고 할때, $a\leftrightarrow1$, $b\leftrightarrow2$, $c\leftrightarrow3$과 같이 셈하며 그 개수를 "3"이라고 정한 것이다. 물론, $b\leftrightarrow1$, $c\leftrightarrow2$, $a\leftrightarrow3$과 같이 셈하는 순서를 아무렇게나 바꿔도 결과는 마찬가지다. 이 대응은 $A=\{a,b,c\}$와 $B=\{1, 2, 3\}$이라는 집합의 원소 사이의 대응

이다. 그런데, 이 대응에서 다음 두 가지 조건이 지켜지고 있다.

첫째, **A**의 서로 다른 원소에는 B의 서로 다른 원소가 대응된다.

둘째, A, B의 원소들 모두가 대응에 쓰이고 있다. A, B 사이에 일대일 대응이라고 하며, A={a, b, c}의 원소의 개수가 3이라는 것은 이 A와 B={1, 2, 3} 사이에 일대일 대응이 성립하기 때문이다.

다. (대응) 두집합 A, B 사이에 일대일 대응이 성립한다는 것은 전단사 함수 f : A →B가 존재한다는 뜻이다. 두 집합 A, B 사이에 일대일 대응이 성립할 때, 즉 전단사 함수f가 존재할 때 A, B를 대응이라 하고 이 관계를 A∼B로 나타낸다.

이상을 요약하면, 「집합A와 집합B의 원소의 개수가 같다」라는 것은 "A, B 사이에 일대일 대응이 성립하는 것", "A, B 사이에 전단사 함수가 존재하는 것", "A와 B가 대등인 것"을 뜻한다"

이산형 집합의 경우, 즉 원소들이 띄엄띄엄 떨여져 놓여있는 집합에 대해서 생각하면 그 원소에 하나씩 번호를 붙여나갈 수 있다. 집합의 원소에 번호를 붙일 때, 마지막 번호가 그 집합의 원소의 개수를 나타낸다. 이것이 k라면 그 집합의 농도(cardinality)는 k라고 한다.

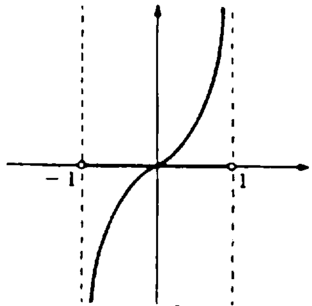
무한집합의 원소가 얼마나 되는가를 나타내기 위해서는 "원소의 개수"라는 용어가 부적당하기 때문에 대신 "농도"라는 용어를 사용한다. (칸토르가 처음으로 무한집합과 관련하여 농도라는 말을 사용하였다.) 집합A의 농도를 나타내는 데에는 $n(A)=k$ 또는 $\#(A)=k$등으로 쓰인다. "자연수 전체의 개수와 짝수의 개수는 같다.", "자연수 전체의 개수와 유리수 전체의 개수는 같다.", "짧은 선분도 긴 선분도 같은 개수의 점들로 이루어지고 있다."등은 자연수의 집합과 대등인 무한집합에 "가부번의 농도"라는 원소의 개수를 정의함으로써 위의 명제를 이끌어 낼 수 있다.

이때 "가부번의 농도"라는 말은 집합 A가 무한집합일 때 A와 자연수의 집합 {1, 2, 3...} 사이에 일대일 대응이 성립하는 경우, 즉 A와 자연수 전체의 집합이 같은 농도를 가질 때, A를"가부번"인 집합 또는 가산인 집합이라고 한다.

보기 1. 자연수 전체의 집합 N과 짝수 전체의 집합 E는 다음과 같이 일대일 대응이 되기 때문에 E는 가부번이다.

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots\ n \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
E: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots 2n\text{-}2 \ldots
\end{array}
$$

보기 2. 개구간(-1, 1)에서 R로 보내는 사상 $f: (-1, 1)\to R,\ f(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$로 놓으면 f는 전단사이다. 따라서 개구간(-1, 1)과 실수 전체의 집합은 대등이다.

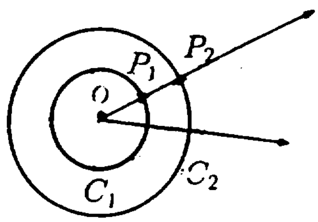


그 림 6

또한 실수의 집합 R내의 모든 개구간 (a,b)는 집합 R과 대등이다. 즉 이들 집합은 모두 같은 농도를 갖는다.

주의. 위에서 본 바와 같이 R과 R의 진부분집합$(-1,1)$과 대등이라는 말은 이들 집합의 원소들이 일대일 대응된다는 관점이고 길이 개념의 입장에서 본 관점이 아님을 분명히 밝혀둬야 한다.

보기3. 동심원 C_1, C_2 위의 점을 P_1, P_2라 하고 $f:C_1 \to C_2$, $f(p_1)=p_2$로 놓으면, f는 전단사이며 집합 C_1, C_2는 대등이다. 즉 모두 같은 농도를 갖는다. (원C_1상의 점의 수$=C_2$상의 점의 수)



그 림 7

보기4. 개구간 $I=(0,1)=\{x \mid 0<x<1\}$, 개정사각형 $I^2=\{(x,y): 0<x<1, 0<y\}$일 때 I와I^2은 서로 대등이다. 증명은 다음과 같다. 단위 정사각형 내의 점의 좌표(x,y) 를 무한소수로 나타내면

$$x=0.x_1x_2\,x_3\ldots,\ y=0.y_1\,y_2\,y_3\ldots$$

(이때 유한소수 0.3은 0.3=0.29999으로 나타낸다.) 이고 이 점 (x, y)에 점

$$h(x,y)=0.x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,x_3\,y_3\ldots$$

을 대응시키면, 이 대응 $h=I^2 \to I$ 는 전단사이다.(아래 그림 참조) 가령,$(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\pi}{10}) \in I^2$ 일 때

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = 0.141421356\ldots$$

$$\frac{\pi}{10} = 0.3141592653\ldots$$

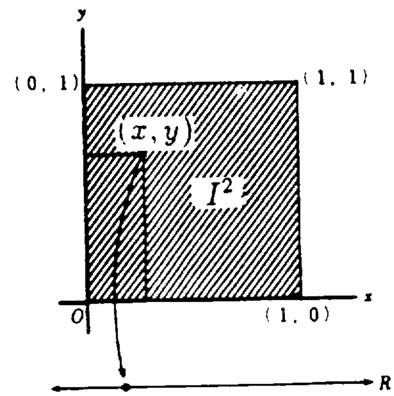
이므로 $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\pi}{10})$에 I의 점

$$h(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\pi}{10}) = 0.1341144125193256 65\ldots$$

를 대응시키고, 역으로 위의 점$\frac{\pi}{10}$ 에 대응하는 정사각형 I^2의 점은

$$(0.34525\ldots, 0.11963\ldots)$$

이 된다



그 림 8

라. [페아노 곡선 (peano curve)] .

선분 $I=(0, 1)$에서Euclid 평면 E^2 에로의 연속사상 f에 의한 상 $f(I)$로서 정사각형 $[0, 1]\times[0, 1]$을 빈틈없이 완전히 매우는 연속곡선이다.

페아노 곡선은 아래 그림 10과 같이 보통의 곡선의 수열 $C_1, C_2, C_3 \ldots$를 차례로 만들어 갔을 때, 그 수열의 극한으로서 정의되는 "곡선" C를 말한다. 이때 C_1은 정사각형을 4등분 했을때 생기는 4개의 정사각형 중심을 통과하고, C_2는 다시 같은 정사각형을 16등분 하였을 때의 모든 정사각형 중심을 통과한다. 이러한 과정을 거듭했을 때 극한으로서의 곡선 C 는 정사각형의 중심을 통과한다.

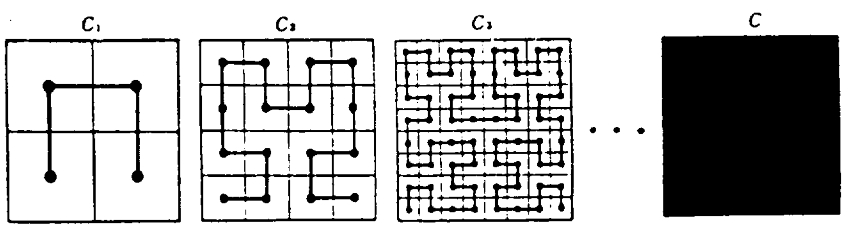


그림 9 페아노 곡선(힐버트(1862-1943))에 의해 개량된 것

마. (소수의 무한성) 수 2, 3, 5, 7...는 소수 1과 자신외에 다른 수의 곱으로 분해할 수 없는 수, 즉 소수이다. 몇개의 소수들의 목록은 다음과 같다.

2 3 5 7 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113......

유클리드는 무한개의 소수가 있음을 다음과 같이 증명하고 있다. 이의 증명은 우아하여 제시하고자 한다. 소수 P_m 에 이르기 까지 모든 소수의 완전한 목록이 있다고 하자. P_m에 이르기까지 모든 소수의 곱에 1을 더하여 얻어지는 정수 $N=(2\cdot3\cdot5\cdots P_m)+1$을 생각하면

$N \geq P_m$. N 을 2으로 나누면 몫을 $3 \cdot 5 \cdots P_m$, 나머지는 1로 된다. N을 3으로 나누면 몫은 $2.3.5...,P_m$이고 나머지는 1이된다. 마찬가지로 소수 $2,3,5,...,P_m$ 의 어느 수로 나누어도 나머지는 1이 된다. 따라서 N은 소수이거나 소수가 아니다. 만약 N이 소수라면 N은 P_m보다 큰 소수이다. 만약 N이 소수가 아니라면 그것은 소수의 곱으로 인수분해할 수 있다. 그러나 우리들이 본 바와 같이 N의 소인수 수는 $2,3,5... ,P_m$의 어느 것도 아니다. 그러므로 P_m보다 큰 소수가 있다. 이 논증에 의해 소수의 목록이 끝나지 않음을 알게 된다.

2) 식과연산에서의 무한개념

(1) 교과서의 현황

가. 유리수란 정수 m,n을사용하여 $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$의 꼴로 나타낼 수 있는 수이며 소수점 아래 0이 아닌 숫자가 유한개인 소수를 유한소수, 무수히 많은 소수를 무한소수라 한다.

나. 실수는 수직선 위의 점과 일대일로 대응시킬 수 있고 이 수직선은 전혀 빈틈이 생기지 않는다. 이러한 실수 전체의 집합이 가지는 성질을 실수의 연속성이라 한다.

(2) 지도상의 유의점 및 지도방향

가. (유리수의 조밀성) 교과서에 나타난 유한소수, 무한소수, 실수의 연속성등은 직관적으로 설명되어 계산되고 있다. 지금 수직선 위에 $a<b$인 두 유리수 a b에 대하여 중점을 $\frac{a+b}{2}$라 하자. 이때 $a<\frac{a+b}{2}<b$ 인유리수 $\frac{a+b}{2}$가 존재하고 같은 방법으로 계속하면

$$a< \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}<\frac{a+b}{2}< \cdots$$

이 되어 a와 b 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다. 이렇게 한없이 다른 유리수를 취해 나갈 수 있으므로 유리수의 집합에서는 "다음의 수"라는 것이 존재하지 않는다. 이것이 "다음의 수"라고 생각해도 그것과 처음의 수 사이에는 또 다른 유리수가 있기 때문이다. 이와 같이 틈이 없이 꽉 차있는 상태, 좀 더 엄격히 말하면, "임의의 두 실수 사이에 반드시 또 다른 원소가 있는 상태"를 유리수의 조밀성이라고 한다.

나. (무리수의 조밀성) 임의의 두 실수 $a,b(a<b)$에 대하여 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\frac{b}{\sqrt{2}}$도 실수이다. 이때 유리수의 조밀성에 의하여 $\frac{b}{\sqrt{2}}< r<\frac{b}{\sqrt{2}}$ 인 유리수 r가 존재한다. $a<\sqrt{2}r<b$이고 $\sqrt{2}r$은 무리수이다. 그러므로 "임의의 두 실수 사이에 반드시 적어도 하나

의 무리수가 존재한다"와 같이 무리수의 집합도 유리수의 집합의 조밀성의 성질을 상대적으로 갖고 있음을 분명히 해야 한다.

다. (유리수의 불연속성) 직선은 유리수를 나타내는 점들로 완전히 메워지는가 하면 그렇지 않다. 대각선의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 끝점에 대응하는 유리수는 없다. (유리수인 점만으로 된 직선은 틈이 많다). 수직선 위의 모든 부분이 빈틈없이 매끄럽게 이어진 직선이 되기 위해서는 이 틈을 무리수를 나타내는 점들로 메워주어야 한다.

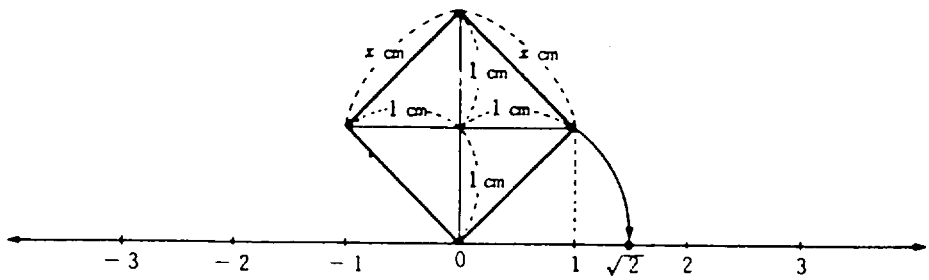


그림10 대각선의 길이가 2인 정사각형의 한변의 길이는 유리수가 아니다.

라. (실수의 연속성) 무리수는 유리수 집합의 여집합으로 보통 정의하나 데데킨드 (R. Deddkind)는"유리수의 절단"이라는 방법에 의하여 엄밀히 무리수를 정의했다.

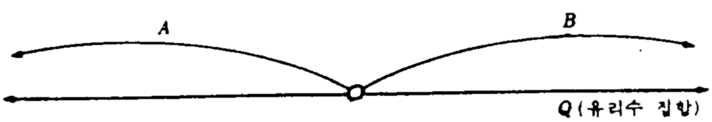


그림 11

유리수는 서로 대소 관계가 있기 때문에 유리수 전체의 집합을 Q, 다음 두 조건을 만족하도록 "유리수의 전체의 집합을 두 집합 A,B로 나누는 것을 유리수의 절단"이라 부르고 이것을 (A,B)로 나타낸다.

(a) $Q=A\cup B,\ \ A\cap B=0\ \&\ A,\ B\neq \varnothing$

(b) A의 수보다 B의 수 쪽이 크다. 즉 $a\in A,\ b\in B$이면 $a<b$

유리수의 절단에서 B에 최소수가 없고, A에도 최대수가 없는 경우에 예를 들면, 다음과 같다.

$X=\{p\in Q: p^2<2,\ p>0\},\ Y=\{p\in Q: p>0,\ p^2>2\}$

이면 X는 최대원소를 갖지 않고 Y는 최소원소를 갖지 않는다. 왜냐하면, (가) 만약 $p\in X$이고 $q=p-\dfrac{p^2-2}{p+2}=\dfrac{2p+2}{p+2}$이면 $q>p$이고 $p^2<2$이므로 $q\in X$이다. X는 최대원소를 갖지 않는

다. (나) 만약 $p \in Y$이고 $q = p - \frac{p^2-2}{p+2}$이면 $0<q<p$이고 $q^2>2$이므로 $q \in Y$이다. 따라서 Y는 최소원소를 갖지 않는다.

여기서 $A=X \cup \{0\} \cup Q^-$이고 $B=Y$로 놓으면 절단 (A,B)는 $(A,B)=\sqrt{2}$ 이다.

이 수직선을 절단하는 "칼날"이 유리수에 마주치지 않는 경우의 절단자체를 데데킨드는 하나의 무리수로 본 것이다. 즉, $(A,B)=\alpha$(무리수)

유리수 전체의 집합은 조밀성을 지니고 있지만, 따지고 보면 곳곳에 빈틈이 있었다. 그 틈을 무리수로 매워주면 한치의 틈도 없는 수직선이 된다. 이런 뜻으로 유리수와 무리수로 된 실수집합을 실수의 연속성(連續性)이라 한다.

마. (무리수의 수열 표현) 무리수를 나타내는 절단(A,B) 에서는 B에 최소수가 없고, A에도 최대수가 없다. 이때 B에 속하는 유리수 b_1에 대하여 그 보다 작은 B의 유리수 b_2가 있고 이 역시 최소수가 아니므로 이들보다 작은 B의 유리수 b_3가 있으며 결국, B에 속하는 유리수의 수열(有理數의 數列)

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots (b_1>b_2>b_3 \ldots).$$

을 얻는다. (이 소수전개는 절단으로 얻어지는 무리수의 소수전개이다) 마찬가지 방법으로 하면, 집합 A에서도 유리수의 수열

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots (a_1<a_2<a_3 \ldots)$$

을 얻는다.

$\{a_n\}$과$\{b_n\}$의 n의 번호가 커질수록 이웃하는 항 끼리의 차는 자꾸 0에 가까와지고, 결국 $b_1, b_2, b_3, \ldots$의 소수 전개도 $a_1, a_2, a_3 \ldots$ 의 소수 전개와 윗자리부터 차츰 일치해 간다. 따라서 실수의 연속성에 의하여

$$a_1<a_2<a_3<\ a_4< \ldots <\alpha< \ldots b_3>b_2>b_1$$

인 α가 꼭 하나 있게 된다. 이것을"무리수α는 유리수의 수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$(또는 $b_1, b_2, b_3, \ldots$)의 극한"이라고 한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \ = \alpha$$

따라서 무리수는 유리수의 "절단"이며 유리수열의 극한이다. 특히 무리수의 절단에 집합 A,B 는 무한집합임을 전제하고 있다.

3) 함수에서의 무한개념

(1) 교과서의 현황

가. (지수를 실수까지 확장) 지수를 실수의 범위까지 확정하여 보자. 우리는 앞에서 지수가 유리수일 때, 지수의 법칙이 성립하는 것을 공부하였다. 이를 테면, 지

수가 무리수인 $2^{\sqrt{2}}$의 뜻을 알아보자. $\sqrt{2}=1.41421356......$이므로, $\sqrt{2}$에 얼마든지 가까운 유리수를 얻을 수 있다.

즉

$$1,\ 1.4,\ 1.414,\ 1.4142,\ \ldots \qquad (1)$$

유리수(1)을 지수로 하는 수열

$$2^{1},\ 2^{1.4},\ 2^{1.414},\ 2^{1.4142}\ldots$$

은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$로 정한다. 일반적으로, 무리수는 유리수로 얼마든지 가깝게 근사시킬 수 있음을 이용하여 지수 x가 실수일 때 $a^{x}(a>0)$을 정할 수 있다. $a>0$, x, y가 실수일 때도 지수법칙이 성립함이 알려져 있다.

나. 실수전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y=a^{x}(a>0,\ a\neq1)$를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

(2) 지도상의 유의점 및 지도방향

가. 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 실수전체의 진부분집합인 양의 실수의 집합 R^{+}이므로 R와 R^{+}는 일대일 대응이 된다.

나. 지수를 유리수에서 실수로 확장시킬 때, 지수 n이 무리수일 때 a^{n}의 뜻을 직관적으로 인정하여 학습하게 됨으로 인하여 학습자로 하여금 학습의 진행에 부자연스러움을 주고 있다.

지수의 범의를 양의 정수에서 정수로, 정수에서 유리수로 확정할 때 그 원리는 지수법칙이 보존되게 확장했다. 그러나 지수의 정의를 우리수에서 실수로 확장하는 데에는 연속의 형식이 보존된다는 원리 이외에 연속성이 보장되도록 해야 한다.

이를 테면 "실수의 연속성"에서 무리수x는 유리수로 된 수열 $\{x_n\}$의 극한값이 된다. 이때 수열

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ldots a^{x_3},\ \ldots$$

의 극한값으로 a^{x}를 정의한다.

지금 $2^{\sqrt{2}}$의 정의에서 $r_1=1$, $r_2=1.4$, $r_3=1.414,\ldots$등으로 놓으면 $r_n<r_n+1$이고 $r_n\in Q$임을 알 수 있다. 그렇다면 "임의의 실수 x는 x보다 작은 유리수의 증가수열의 극한으로 표시가 가능한가?" 임의의 실수 x는 x보다 큰 유리수의 감소수열의 극한으로 표시가 가능한가?" x보다 작은 유리수의 증가수열$\{r_n\}$과 $\{s_n\}$이 x에 수렴할 때 $\{a^{r_n}\}$의 극한과 $\{a^{s_n}\}$의 극한은 같게 되는가?" 라는 의문이 제기되는데 모두 "그렇다". 따라서 무리수 x에 수렴하는 어떤 수열$\{x_n\}$을 택해도$\{a^{x_n}\}$의 극한은 일정하다는 점에서 위 정의는 잘 정의한다.

다. 지수함수 $y=a^{x}\ (a>1)$의 예로서 $y=2^{x}$에 대하여 함수값이 간단하게 계산되어지는 유

리수 x의 수치만을 이용하여 대응표를 만들고 이의 그래프를 그리고 있다. 대응표상에 있지 않은 실수x에 대해서 2^x의 값이 정해진다고 하여 그래프는 연속적으로 이어진 연속곡선이 된다고 하면, 학습자들이 부담을 느끼나 위의 "지수의 확장"이 선행되어 학습한다면 지수에서 지수함수 또는 지수함수에서 그의 역함수인 로그함수로 전개시키는 이론과정이 훨씬 용의해질 것이다.

4) 극한에서의 무한개념

(1) 교과서의 현황

가. 자연수의 집합 N에서 실수의 집합 R로의 함수 $f:N \to R$를 수열이라 하며, 수열 f를 차례로 $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$ 또는 $\{a_n\}$으로 간단히 나타낸다.

수열 a_n에서 항의 개수가 유한인 수열을 유한수열, 항의 개수가 무한인 수열을 무한수열이라 한다.

나. 무한수열 a_n에서 항의 번호 n이 "한없이 커짐"에 따라, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α 에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 a_n의 극한값이라 한다. 이것을 기호로 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to \alpha$

보기. $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n} \to 0$이므로

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$$

무한수열$\{a_n\}$에서

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

을 무한급수라 하고, 첫째 항부터 n째항까지의 합을 S_n으로 나타낸다. 이때 S_n을 부분합이라고 하면

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

부분합의 수열 S_n이 S에 수렴하면 무한급수 Σa_n은 S에 수렴한다고 하고 이를 무한급수의 합이라 한다. 이를 $\Sigma a_n = S$와 같이 나타낸다.

라. 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고 α를 $f(x)$의 극한값이라 한다. 이것을 기호로

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = \alpha$$

또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \alpha$

마. 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이라고 하는 것은

(a) $x=a$에서 정의되고

(b) $\lim_{n\to\infty} f(x)$가 존재하며

(c) $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(a)$를 만족해야 한다.

(2) 지도상의 유의점 및 지도방향

가. (수열의 정의) 항의 개수가 유한개인 수열을 유한수열, 무한개인 수열을 무한수열이라고 정의하고 있으나 엄밀히 따지면 논란의 대상이 된다. 유한수열은 정의역 $D=\{1, 2, 3...n\}$에서 정의되는 함수를 말하므로 자연수 전체의 집합 N에서 정의한 수열의 정의에 위배된다. 따라서 자연수 또는 자연수의 유한집합 $D=\{1, 2, 3...n\}$에서 정의되는 함수를 수열이라 정의하는 것이 바람직하다.

나. "한없이 커진다", "한없이 가까워진다"의 의미를 직관적으로 설명하는 것보다 좀 더 이론적인 설명이 필요하다.

가) "항의 번호 n이 한없이 커진다(또는 $n \to \infty$)"의 의미는 임의의 양수M에 대하여 $n>M$인 자연수 n을 적어도 하나 택할 수 있음을 의미하고, 특히 n은 커지는 방법에 무관하다.

나) "x가 a에 한없이 가깝다(또는 $x \to a$)"은 임의의 양수ε에 대하여 $(a-\varepsilon, a)\cup(a, a+\varepsilon)$에 속하는 실수$x$를 택할 수 있음을 의미한다. (이때 x는 변수로 간주해야 하며 (가)와 마찬가지로 x가 a에 접근하는 방법에 대해서 무관하다.)

다) "$x \to a+0$"의 의미는 양수ε에 $(a, a+\varepsilon)$에 속하는 실수x를 택할 수 있음을 뜻한다. 다시 말해 "변수 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때"를 말한다.

라) "$x \to a-0$"의 의미는 마찬가지로 임의의 양수ε에 대하여 $(a-\varepsilon, a)$에 속하는 실수x를 택할 수 있다는 점이며, "변수 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때"를 말한다.

마) 복소수 $z=x+iy\to\infty$의 의미는 $|z|\to\infty$를 뜻한다.

바) 복소수 $z=x+iy \to a=a_1+ia_2$의 의미는 임의의 양수 ε에 대하여$\{z: a<|z-a|<\varepsilon\}$에 속하는 복소수 z를 택할 수 있다는 점이다. 이는 $x \to a_1$이고 $y \to a_2$의 의미와 같다.

다. (수열의 극한의 ε--N 정의) 교과서에서 수열의 극한을 직관적으로 다루고 있는 실정이다. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$의 엄밀한 ε--N정의는 다음과 같다.

어떠한 작은 양수 ε 을 택해도 이것에 대하여 자연수 N을 적당히 택하면 $n \geq N=N(\varepsilon)$인 모두 n에 대하여

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

이 된다.

주의: 여기서 선택되는 자연수 N은 ε에 의존함을 강조되어야 된다. 이 정의에 따라 교과

서의 보기 "$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$"를 증명하면 다음과 같다. "임의의 양수 ϵ 에 대하여 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ 이 되는 자연수 N을 택하면 $n \geq N$일 때

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \epsilon$$

이 된다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

라. (급수) 항수가 유한개인 유한수열의 합

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

에서의 + 는 덧셈이라는 연산기호이지만, 무한급수

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

의 + 는 덧셈이라는 연산기호가 아니고 단지 형식적인 기호일 뿐이다(덧셈은 대수적 연산이므로 유한개의 수에서만 합이 정의되고 무한개의 원소나 수에서는 합의 정의는 표현적 상징이다.) 따라서

$$\text{“}0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots\text{”}$$

의 계산은 제 n항 까지의 부분합 $S_n=0$(유한개의합)이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

이 된다.

마. (함수의 극한) 함수의 정의에서 "$f(x)$가 α 에 한없이 가까워진다"의 의미는 "$f(x)$와 α와의 차가 얼마든지 작아진다"$\leftrightarrow$ $|f(x)-\alpha$는 얼마든지 0에 가까워진다$\leftrightarrow$ $|f(x)-\alpha| < \epsilon$로 나타낼 수 있다. 위 표현의 의미를 고려하여 코시에 의하여 처음으로 사용된 함수의 극한 에 대한 ϵ-δ 의 정의는 다음과 같다.

임의의 양수 ϵ에 대하여 적당한 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하여 $0 < |x-a| < \delta$ 일 때 $|f(x)-\alpha| < \epsilon$이 된다.

바. (함수의 연속) 실함수 $f(x)$가 $x = a$에서 연속이라는 것은 다음의 성립함을 말한다.

임의의 양수 ϵ에 대하여 적당한 양수 $\delta = \delta(\epsilon)$가 존재하여 $|x-a| < \delta$일때 $|f(x)-f(a)| < \epsilon$이다.

다음 정리는 함수의 연속성을 수열을 이용하여 판정하는 데 편리한 정리이다.

정리:"실함수 $f(x)$가 한점 $x=a$에서 연속이기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

(이의 증명은 부록 참조하라.)

5) 미 • 적분법에서의 극한의 개념

(1) 교과서의 현황

가. 변수 x가 x_1에서 $x_1 + \triangle x$까지 변할 때, 함수 $y=f(x)$의 평균 변화율

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}$$

에서 $\triangle x \to 0$일 때 극한값

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_1+\triangle x)-f(x_1)}{\triangle x}$$

이 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 "미분가능하다"고 한다.

나. 반지름 길이가 r 인 원에 내접하는 정 n각형의 S_n이라고 하면

$$S_n=\triangle OAB,\ \triangle OAB=\frac{1}{2}r^2 sin\frac{2\pi}{n}$$

이때 $n\to\infty$이면 S_n은 어떻게 되겠는가?

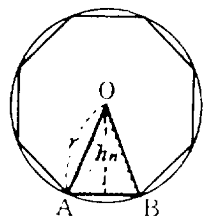


그림 12

다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a$, $x=b(b, a>0)$및 x축으로 둘러싸인 부분의 면적은?

(2) 지도상의 유의점 및 지도방향

가. 함수 $y=f(x)$에서 x가 x_1에서 $x_1 + \triangle x$까지 변할 때 y는 $f(x_1)$에서 $f(x_1 + \triangle x)$까지 변한다. 이 때 $\triangle x$을 x의 증분, $\triangle y=f(x_1 + \triangle x)-f(x_1)$를 y의 증분이라고 한다.

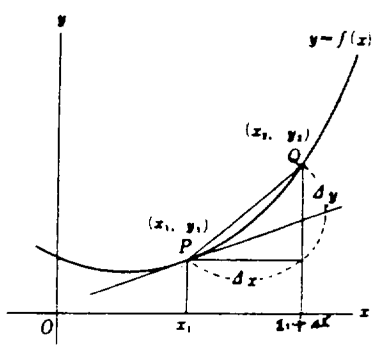


그림 13

이때 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

에서 $x\to 0$일 때 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 미분가능하다고 한다.

Δx를 0으로 한다는 것은 미소삼각형을 0으로 한다는 것이며, 이에 따라 Δy도 0이 되고, 결과적으로 $\frac{dy}{dx}$ 도 $\frac{0}{0}$ 이 되므로 라이프니츠(Leibniz)는 $\frac{dy}{dx}$ 를 절대적인 0이 아니라 상대적인 -분명히 말한다면, 유한량으로서의 -$\frac{0}{0}$으로 생각하여 이 위기를 넘겼다. 만약 $\frac{dy}{dx}$가 $\frac{0}{0}$ 이 아니라 어떤 미소한 유한량으로 생각한다면 극한은 유한 확정치로 계산할 수가 있다고 하였다. (배로의 생각) 그러나 이와 같이 하면 $\frac{0}{0}$ 이라는 분수가 직면하는 위기는 벗어날 수 있으나 또 다른 문제에 부딛치게 된다.

또한 그는 $\frac{dy}{dx}$가 하나의 유한 확정치를 얻기 위해서는 이것이 유한의 미소량 이어야 함을 물론이지만 동시에 단순한 유한량이어서도 안된다. 오히려 그것은 무한의 개념을 내포하고 있어야 한다. 즉, 유한이자 무한이어야 한다는 것이다. 이 두 개념을 결합시키기 위해서는 dx 가 하나의 "근사값"일 수도 있고 또 0은 아니지만 0으로 간주할 수 있는 "무한소량"이라고 표현할 수 있다. 실제 그는 이것을 "무한소" (Unendlichklener), "미분량"(Diffential)이라 했다. 이렇게 하여 유한량은 점차 무한소량으로 옮아가게 되었다.

실제로 $\frac{dy}{dx}$ 는Δx가 0에 가까울 때 유한량을 갖는 평균변화율 함수$\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한이다.

나. 반지름 길이가 r인 원에 내접하는 정 n각형의 길이를 l_n이라고 하면,

$$S_n=nOAB=n\frac{1}{2}(AB)\cdot h=\frac{1}{2}hl_n\ (l_n=n\times AB)$$

이 때 $n\to\infty$일 때 $h\to r$, $l_n\to 2\pi r$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}hl_n=\pi\ r^2$$

(반지름이 r인 원의 면적)

특히, 반지름 $r=1$이면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\pi$ 이다.

다. (정적분의 개념) 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 정의된 양의 유계함수라고 하고 구간 $[a,b]$에서 $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$되도록 $[a,b]$의 분할 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ 을 생각하자. 이때 소구간 $[x_{i-1}, x]$ 상에서 $f(\xi_i)$를 직사각형의 세로로 취하는 직사각형의 면적은 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$가 된다. 이 때 곡선으로 둘러싸인 면적과 직사각형으로 된 면적들의 합과는 어떠한 오차가 생기는가가 생각해야 할 문제이다.

구간 $[x_{i-1},x_i]$에서 $f(x)$의 최소값을 m_i, 최대값을 M_i라 할 때

$$m_i < f(x) < M_i, \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$f(\xi_i)$를 직사각형의 세로로 취하는 직사각형의 면적은 $f(\xi_i) \cdot \triangle xi$가 된다. 이때 곡선으로 둘러싸인 면적과 직사각형으로 된 면적들의 합과는 어떠한 오차가 생기는가 생각해야 할 문제이다.

구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서의 $f(x)$의 최소값을 m_i, 최대값을 M_i라 할 때

$$m_i < f(x) < M_i, \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

따라서 $m_i < f(x) < M_i$ (단, $\xi_i \epsilon [x_{i-}, x_i]$).

$$\Sigma\ m_i \triangle x \leq \Sigma f(\xi_i) \triangle x_i \leq \Sigma M_i \triangle x_i$$

에서 극한을 생각한다면,

$$\Sigma\ m_i \triangle x,\ \Sigma f(\xi_i) \triangle x_i,\ \Sigma M_i \triangle x_i$$

는 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적 S와 거의 일치한다고 볼 수 있다. $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \triangle x_i$로 놓으면 이 수열 $\{S_n\}$의 극한값이 존재할 때 함수$f(x)$의 정적분이라 한다. 이 정적분을 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S_n$$

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 적분가능하다. 이를 증명하면 다음과 같다. 가정에 의하여 "임의의 양수ϵ에 대하여 $|x - x_1| < \delta$이면

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

되는 양수$\delta = \delta\ (\epsilon)$가 존재한다.

각 소구간$[x_{i-1}, x_i]$에서의 최소, 최대값을 m_i, M_i라 할때 $\triangle x_i$의 최대의 길이가 δ보다 작은 분할에 대해서는

$$M_i - m_i < \frac{\delta}{b-a}$$

이므로

$$\Sigma\ M_i \triangle x_i - \Sigma\ m_i \triangle x_i < \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon$$

보기. 함수 f가 $[0, 1]$에서 다음과 같이 정의할때

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{는 유리수} \\ 0, & x\text{는 무리수} \end{cases}$$

f가 $[0, 1]$에서 불연속 함수이고 임의의 $[0, 1]$의 분할 p에 대하여 $\Sigma m_i \cdot \triangle x_i = 0$이고 $\Sigma M_i \cdot \triangle x_i = 1$이므로 적분가능하지 않다.

라. (임의의 점에서 연속이지만 미분가능한 함수)

바이에르쉬트라스 (K. Weierstrass, 1815-1897)는 수학에서 엄밀성이 중요함을 강

조하여 그 한예로 모든 점에서 미분가능하지 않는 연속함수가 존재한다는 사실을 들어 직관은 수학에 혼란을 가져올 수 있음을 경고하였다.

실수의 집합 R에서 연속이지만 임의의 점에서 미분불가능한 실함수의 구성은 다음과 같다.

$$\varphi(x)=|x|\ (-1\leq x\leq 1),\ \varphi(x+2)=\varphi(x)$$

로 놓으면

(a) $|\varphi(s)-\varphi(t)|\leq|s-t|\ \forall s,\ t\in R$

(b) φ는 R에서 연속함수이지만 $x=0,\pm1,\pm2\ldots$에서만 미분불가능하다.

(c) $0\leq\varphi\leq1.$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\varphi(4^n x)$로 놓으면 이함수 f가 R에서 연속이지만, 임의의 점 $x\in R$에서는 미분불가능 함수가 된다.

결 론

수학은 무한의 과학이라 할 만큼 수학의 각 영역에 무한개념이 차지하는 비중은 대단히 크다. 자신의 理性과 영혼을 수학이란 제단 앞에 바치고 "무한"의 신비를 벗기려 했던 옛 수학자들의 숨결을 음미하면서, "무한"은 이제 完成된 것이 아니라 앞으로 계속 수학상의 主題가 될 것이며, "무한의 신비"를 벗기려 하는 시도가 끊임없이 계속되어야 한다.

또한 교육현장에서 무한에 대한 연구와 무한 개념에 대한 지도자료의 개발과 학습지도가 개선되어야 한다

본 論文의 理論전개를 통해 다음과 같은 결론을 예상할 수 있다.

(1) 무한의 역사를 통해 논리적 사고력과 상상력을 함양할 수 있는 계기가 된다.

(2) 유리수의 조밀성, 유리수의 절단, 유리수의 수열의 극한의 존재성, 지수의 확장, 극한개념 등은 서로 별개의 단원이 아니라 서로 밀접한 관계에 있다는 것을 알고 연속적으로 이해의 폭을 넓힐 수 있을 것이다.

(3) "한없이 커진다", "한없이 가까워진다"라는 막연한 개념에서 탈피하여 논리적 사고의 영역을 넓힐 수 있고 교과과정상의 내용에 중심을 두어 예를 제시할 수 있다.

(4) 이론적 사고에의 전환에 의하여 진학 후 대학 교양수학에서는 물론 높은 수준의 수학학습에서도 문제해결능력의 향상과 사고력의 증진에 기여할 수 있을 것이다.

(5) 특별활동을 중심으로한 수학반 운영에 참고도서는 물론 교사의 교재연구에 지참서가 될 것이다.

부 록

1. "제논의 파라독스"의 수학적 표현

달리기 명수 아킬레스와 느림보 거북이가 달리기 시합을 한다고 가정했을 때, 아래 그림에서 거북이의 출발점을 $(0,a)$, a를 지나고 t축에 평행인 직선과 OB의 교점 P_1의 좌표를 (t, x_1)이라 하면

$$OT_1 = t_1,\ \ x_1 = a$$

이고, t_1은 아킬레스가 거북이의 출발점까지 왔을 때의 시간이다.

t_1에 대한 AB위의 점을 $Q_1(t_1, x'_i)$로 하면

$$x'_1 > x_1$$

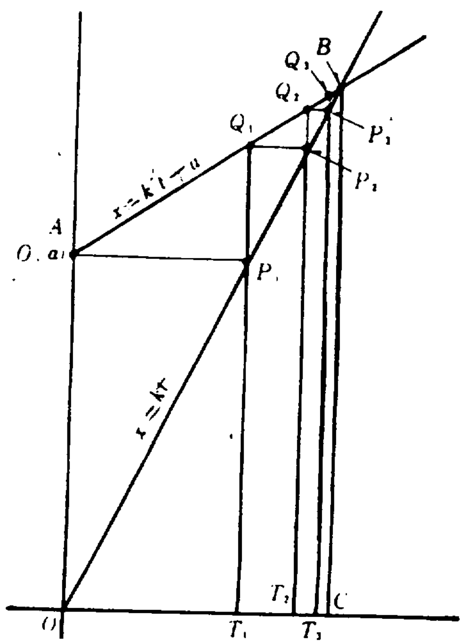


그림 14

즉, 거북이는 아킬레스 앞에 있다.

다음에, 아킬레스가 Q_1과 같은 위치 P_2 까지 왔을 때 거북이의 위치는 Q_2이고, P_2의 위쪽에 있다……

이렇듯 Q_i가 A와 B 사이에 있는 한, Q를 지나는 평행선은 O,B 사이의 점 P_{i+1}에서 직선 OB와 만나게 되고, 따라서 다음의 위치 Q_{t+i}은 P_{i+1} 위쪽에 있게 된다. 즉, 거북이는 아킬레스 앞에 있다.

지금 P_n, Q_n에 대한 t 를 t_n이라 하면

$$P_n Q_n>0,\ t_n<\frac{a}{k-k'}$$

$$P_n Q_n=k't_n+a-kt_n=a-(k-k')t_n$$

또, $k't_{n-1}+a=kt_n$. 따라서, $P_{n-1}Q_{n-1}=k't_{n-1}+a-kt_{n-1}=kt_n-kt_{n-1}=k(t_n-t_{n-1})$,

$$P_nQ_n=k't_{n-1}+a-kt_n=k'(t_n-t_{n-1}).$$

$$\therefore\ \frac{P_nQ_n}{P_{n-1}Q_{n-1}}=\frac{k'}{k}<1\ (n\geq 1, P_0Q_0=a)$$

수열$\{P_n Q_n\}$은 첫째항 a,공비 $\frac{k'}{k}$ 인무한등비 수열을 이룬다

$$P_n Q_n=a\left(\frac{k'}{k}\right)^n>0$$

따라서, $P_nQ_n=a-(k-k')t_n$으로부터

$$(k-k')t_n=a-a\left(\frac{k'}{k}\right)^n=a\left\{1-\left(\frac{k'}{k}\right)^n\right\}$$

$$\therefore\ t_n=\frac{a}{k-k'}\left\{1-\left(\frac{k'}{k}\right)^n\right\}<\frac{a}{k-k'}$$

그런데 n이 증가하면 $\left(\frac{k'}{k}\right)^n$은 점차 감소하고 0에 한없이 가까워진다. 즉, t_n은 아킬레스가 거북이를 따라 잡는 시간 $\frac{a}{k-k'}$에 한없이 가까워진다. t_n은 n이 아무리 커져도

$$t_n<\frac{a}{k-k'}$$

이고, 이때 Q_n은 항상 P_n 위쪽에 있다.

아킬레스가 거북이를 따라 잡을 수 없다는 것은 영구적인 일이 아니고, 일정시간인 $\frac{a}{k-k'}$ 동안 뿐인 것이다.

거북이가 아킬레스 앞에 위치하게 되는 점이 무한이라하는데 문제가 있지만 각 위치에 있을 때 거북이와 아킬레스 사이의 거리 P_nQ_n은 등비수열로 단축하게 되고, 따라서 그 사이를 달리는 시간도 축소되어 총시간 t_n은 한정되어 있다.

시간과 거리가 1대1로 대응하는 것은 직선상의 한 점을 정하는 것을 뜻한다.

2. 아르키메데스의 포물선의 구적

1) 내용: 포물선 ABC상의 한 점 B에서의 접선과 평행한 선분 AC로서 절단한 절편의 면적은 $\triangle ABC$의 면적의 $\frac{4}{3}$와 같다.

2)증명:

아래 그림에서 현 AC와 포물선 ABC로 둘러싸인 면적을 구하기 위하여 먼저 현 AC 의 중점을 지나고 포물선의 주축에 평행인 직선과 포물선의 교점을 B라 하자.

이때 점 B에서의 접선은 현 AC에 평행이다.

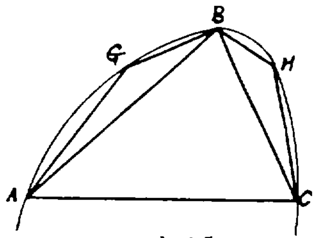


그림 15

$\triangle ABC$의 면적을 $\triangle$라 하면, 다각형 $AGBHC$의 면적은

$$\triangle+\frac{1}{4}\triangle$$

이와 같은 방법을 계속하면, 구하는 면적은

$$\lim_{n\to\infty}\left(\triangle+\frac{1}{4}\triangle+\frac{1}{4^2}\triangle+\ldots.+\frac{1}{4^n}\triangle\right)$$

이다.

위의 등비수열의 합을 구하는데 아르키메데스는 다음과 같은 방법을 사용했었다.

$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},a_n$이 각각 직전에 있는 항의 $\frac{1}{4}$인 크기라 하자. 즉,

$$a_2=\frac{1}{4}a_1 \quad a_3=\frac{1}{4}a_2$$

그리고 $b_2,b_3,\ldots,b_{n-1},b_n$을 $a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},a_n$의 $\frac{1}{3}$인 크기라면, $a_2=\frac{1}{4}a_1$, $b_3=\frac{1}{4}a_2$이므로

$$a_2+b_2=\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{3\times4}a_1=\frac{1}{3}a1$$

마찬가지 방법으로 하면,

$$a_3+b_3=\frac{1}{3}a_2,\ldots,\ a_n+b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}$$

따라서

$$(a_2+a_3+\ldots+a_n)+(b_2+b_3+\ldots+b_n)=\frac{1}{3}(a_n+a_2+\ldots+a_{n-1})$$

그런데

$$b_2+b_3+\ldots+b_n=\frac{1}{3}(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})+\frac{1}{3}a_n$$

이므로

$$a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_n$$

이때 a_1 대신에 $\triangle$를 대입하면

$$\triangle+\frac{1}{4}\triangle+\frac{1}{4^2}\triangle+\ldots.+\frac{1}{4^n}\triangle=\frac{4}{3}\triangle-\frac{1}{3\times4^n}\triangle.$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\times4^n}\triangle.=0$ 따라서 구하는 면적은 $\frac{4}{3}\triangle$, 즉 $\triangle ABC$의 면적의 $\frac{4}{3}$와 같다.

3. 포물선은 타원 및 쌍곡선의 극한

아폴로니우스가 원추곡선을 타원, 포물선, 쌍곡선의 서로 다른 세가지 類型으로 나누었던 데 반해서, 케플러는 이것들을 동일한 원추곡선의 특수한 경우로 파악했다. 즉, 원추곡

선은 한 쌍의 직선으로부터 원까지의 5가지를 연속적으로 취해 나간다고 생각했다. 즉, 처음에 두 焦점이 F, F'이 일치한 F를 중심으로 하는 원으로부터 출발하여, 焦점 F'를 F로부터 차츰 멀리하게 되면, F와 F' 를 焦점으로 하는 원추곡선은 점점 큰 타원이 되고, 마침내 F'이 무한히 멀리 멀어지면 그 극한으로 포물선이 생기고, 계속 F'이 무한원을 지나서 반대방향에 나타나면 쌍곡선이 된다. 또한 나중에 곡선은 하나의 직선에 일치한다는 것이다.

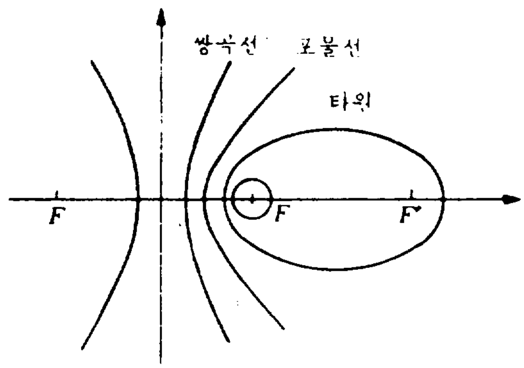


그림 16

4. 무에서 유의창조(자연수의 구성)

공집합 ø 로부터 시작하여 만들어진 집합 전체의 집합을 차례로 한없이 되풀이 만들어 가는 과정에서 생기는 집합을 순서수(順序數)라고 직관적으로 정의해두자.

예를 들면, 하나의 순서수 a는 a보다 작은 모든 순서수의 집합 즉, $a=\{b: b<a\}$이다. 이것은 $b<a$인 b의 집합으로부터 자동적으로 다음 단계의 순서수 a가 정의됨을 뜻한다. 이 정의를 바탕으로 순서수를 만들어 보면, 처음 순서수는 1이 아닌 0부터 시작하는 것으로 한다. 먼저 $\emptyset$ 를 "0"이라 이름 짓고, 다음 순서수의 정의에 따라 "만들어진 전체의 집합",즉 집합 0으로 부터 만들어진 집합은 $\{0\}$이다. 이 집합 $\{0\}$을 "1"이라고 이름짓는다. 세번째 순서수는 "만들어진 집합 0,1로 된 집합", 즉 $\{0,1\}$를 "2"라고 이름짓는다.

이와 같은 과정을 한 없이 되풀이 하면, 다음과 같은 순서수의 수열과 그 명칭(수사:數詞)의 열이 생긴다.

순서수:0, {0}. {0, 1}, {0, 1, 2}, . . . 명칭: 0 1 2 3, . . .

임의의 자연수가 모든 자연수로서 만들어지는 과정을 알 수 있다. 즉, 자연수 n 다음에 자연수(순서수)는 "만들어진 순서수 전체의 집합"즉, $\{0,1,2\cdots,n\}$이고, 이것을 "$n+1$"로 이름 짓는다. 일반적으로 $n+1=\{0,1,2,\ldots n\}$이다. "n"의 원소의 갯수가 n개라는 사실에 유의할 필요가 있고 이것이 집합$\{0,1,2,\ldots,n-1\}$을 "n"이라고 이름짓게 된 이유 중의 하나인 것이다.

5. 칸토르의 대각선 논법

「실수이 집합 R과 자연수의 집합 N이 대등이 아니다.」의 증명은 구간(0,1)과 집합 N사이에 1대1 대응이 성립하지 않음을 증명하면 되므로 칸토르는 이의 증명은 대각선 논법으로 다음과 같이 했다.

증명. 0과 1 사이의 실수전체의 집합과 자연수 전체의 집합 사이에 "1대1 대응이 성립한다"고 가정하자. 즉, $(0,1)\sim N$이라고 하자. 이때 0과 1 사이의 모든 실수를 소수로 나타낸다. 이때 유리수는 유한소수가 아니면 (무한) 순환소수가 되는데, 유한소수에 대해서는 0.1=0.999...와 같이 생각하여 순환소수로 나타낸다. 0과1 사이의 실수 각각에 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 등을 대응시켜 아래 표와 같이 배열한다.

$$
\begin{array}{l}
a_1 = 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \cdots\cdots \\
a_2 = 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \cdots\cdots \\
a_3 = 0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \cdots\cdots a_{3n} \cdots\cdots \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
a_n = 0.\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \cdots\cdots a_{nn} \cdots\cdots \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots
\end{array}
$$

(단, a_{nn}은 0부터 9 사이의 어떤 정수임)

표

만일, 이 수열에 들어가지 않는 0에서 1 사이의 무한소수가 있다면 이 무한소수의 집합의 가부번의 아니다. (가부번이라는 가정에 어긋나기 때문) 그런데, 다음과 같은 무한소수 b를 생각하자. $b=0.b_1\ b_2\ b_3\ldots$(단, a_{nn}이 1이 아니면 b_n은1, a_{nn}이 1이면 b_n은 2)이 수 b는 위의 표에 적힌 어떤 수와도 다르다. 따라서 0과 1 사이의 모든 실수는 표에 들어 있다는 가정에 어긋나므로 (0,1)은 가부번 집합이 아니다.

위의 표에서 사선으로 이은 숫자의 열 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$는 이 표의 대각선 부분에 위치한다. 그래서 이 증명방법을 對角線論法이라 한다.

6. 수 e의 성질

정의

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

여기서 $n!=1.2.3\ldots n$ 이고 $0!=1$이라 한다

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

이므로, 이 級數는 수렴하고 위의 정의는 意味를 갖는다.

정리1.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

증명.

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, T_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

이라 놓는다.

이항 정리에 의하여

$$T_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\dots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n})$$

따라서 $T_n\le S_n$이므로,

$$\limsup_{n\to\infty} T_n\le\limsup_{n\to\infty} S_n=e \qquad (1)$$

다음엔 $n\ge m$이면

$$T_n\ge 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{m-1}{n})$$

m을 고정시키고, $n\to\infty$로 하면

$$\liminf_{n\to\infty} T_n\ge 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!}$$

이므로

$$S_n\le\liminf_{n\to\infty} T_n$$

따라서 m $\to\infty$로 하면 결국

$$e\le\liminf_{n\to\infty} T_n \qquad (2)$$

(1), (2)에 의하여 즉,

$$\lim\sup_{n\to\infty} T_n\le e\le\liminf_{n\to\infty} T_n$$

이므로 위 정리는 성립한다.

정리 2. e를 무리수이다.

증명 e를 유리수라 하고 $e=\frac{p}{q}$ (p, q는 양의 정수)라 놓자. 일반적으로

$$e-S_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\}=\frac{1}{n!n}$$

이므로

$$0<e-S_n<\frac{1}{n!n}$$

따라서

$$0<q!(e-S_q)<\frac{1}{q}$$

이고 가정에 의해 $q!e$는 자연수이다. 또

$$q!S_q=(1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})$$

도 자연수이므로 $q!(e-Sq)$는 자연수이다. $q<1$이므로 (1)는 0과 1 사이에 자연수가 있음을 나타내어 모순이 된다.

7. 수열을 이용한 극한의 판정법

(I) $\lim_{n\to\infty} f(x)=f(a) \leftrightarrow$ (II) a에 수렴하는 임의의 수열$\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$$

증명 (I)→(II)은 명백하다. (II)→(I)의 증명은 (II)가 성립하고 (I)이 성립하지 않는다고 가정하자. 그러면, 다음은 만족하는 양수 ϵ이 존재한다.

"임의의 양수 δ에 대하여 $|x-a|<\delta$ 이고

$$|f(x)-f(a)|\geq\epsilon \qquad (1)$$

을 만족하는 $x\in I$가 존재한다."

이때, $\delta=\frac{1}{n}(n=1,2,...)$로 놓으면, (1)에 의하여 각 n에 대한 집합

$$A_n=\{x\in I: |x-a|<\frac{1}{n} \,\&\, |f(x)-f(a)|\geq\epsilon\}$$

은 공집합이 아니다. 따라서 각 집합 A_n에서 한 점 a_n을 택할 수 있다. 이들 a_n에 대하여

$$|a_n-a|<\frac{1}{n}$$

이고 $|f(a_n)-f(a)|\geq\epsilon(n=1,2...)$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$이지만

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)\neq f(a)$$

이다. 이것은 가정(II)에 어긋난다. 그러므로(I)은 성립한다.

8. R에서 연속이지만 미분불가능한 함수

정리: 실수의 집합 R에서 연속이지만 임의의 점에서 미분불가능한 실함수(實演續函數)가 存在한다.

증명:

$\phi(x)=|x|(-1<x<1)$이라 정의하고 $\phi(x+2)=\phi(x)$라 하여 $\phi(x)$의 정의를 모든 실수x에 확장하자. 그러면 모든 s와t에 대하여

$$|\phi(s)-\phi(t)|\leq|s-t|$$

특히, ϕ는 R위에서 連續이다.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n(4^n x)$$

라고 정의하자 . $0 \leqq \phi \leqq 1$이므로, 급수(2)은 R 위에서 一樣收檢(또는 평등연속)하고, f는 R 위에서 連續이다.

이제, 실수x와 양의 정수 m을 고정하자. 그리고 $\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$으로 놓자. 여기서 符號는 $4^m x$와 $4^m(x + \delta_m)$ 사이에 어떠한 정수도 존재하지 않도록 선택한다. 이것은

$$4^m |\delta_m| = \frac{1}{2}$$

이므로 가능하다. 또 r_m 을 다음과 같이 정의하자.

$$r_m = \frac{\phi(4^m(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}$$

그러면 $n>m$일 때, $4^n\delta_m$은 짝수이고, 따라서 $r_n=0$이다. $0<n<m$일 때 (1)에 의하여 $|r_n|$ 4^n이다. $|r_n|$ $=4^m$이므로

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} x\left(\frac{3}{4}\right)^n r_n\right|$$
$$\leqq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m+1)$$

$m \to \infty$일 때, $\delta_m \to 0$이고, 따라서 f는 x에서 미분불가능하다.

참고문헌

1. 김용운, 김용국 공저, 수학사 大全, 우성문화사, 1990
2. 김용운, 김용국 공저, 집합론과 수학, 우성문화사, 1991
3. 김용준 역, 유한과 무한, 지식산업사, 1989
4. 문교부, 교과과정 해설, 문교부 발행, 1988
5. 박을룡 외 6인, 수학대사전, 창원사, 1976
6. 중 고등학교 교과서 (5종)및 교사용 지침서
7. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Inc, 1976
8. R. Rucker, Infinity and mind, Birkhauser, 1982