

Nd: YAG 레이저의 기울기 효율과 문턱 여기 전력의 계산

김 수 련* · 김 규 용**

A Calculation of the Slope Efficiency and Threshold
Pumping Power of Nd:YAG Lasers.

Kim, Soo-Ryeon · Kim, Kyu-Yong

ABSTRACT

It is very important to map out a little more effective laser system in the laser development. A slope efficiency and threshold pumping power of Nd:YAG laser become different in accordance with the length of laser medium and the reflexivity of output reflection mirror that apply the crystallization of $Y_3Al_5O_{12}$ that some of Y^{3+} ion are replaced with Nd^{3+} ion as laser medium in the solid laser.

When the reflexivity of output reflection mirror is fixed, a slope efficiency becomes better if the length of the laser medium becomes short. But the laser medium which becomes short in length isn't suitable for the effective medium as threshold pumping power per unit area is elevated on the contrary when the length becomes short. And it will be different in accordance with the kinds of the laser medium to design the effective laser system. Therefore it will be necessary to choose the suitable magnitude of the laser medium.

* 창곡중학교 교사 (경기 성남)

** 제주대학교 사범대학 과학교육과

I. 서 론

LASER라는 것은 복사 유도 방출된 전자기파 복사에 의해 빛이 증폭된다는 뜻으로 Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation의 머리 글자를 따서 만든 것이다. 유도 방출에 관한 이론은 1900년 초에 Max Plank나 Albert Eienstein의 광양자설과 열평형 이론이 뒷받침되고 있으나 그것을 이용하여 광파의 증폭이나 발진을 시킨다는 것을 불가능하다고 생각해 오다가¹⁾ 1945년에 이르러 C. H. Townes²⁾는 마이크로파의 약한 빔을 흡수하여 적당한 에너지 공급이 있는 경우에 정확히 같은 종류의 강한 빔을 방출하는 장치를 고안했다. 복사 유도 방출에 대한 마이크로파의 증폭(Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation)이란 의미로 이 과정을 머리 글자만 따서 메이저(Maser)라고 불렀다. 마이크로 파로서 증폭이 가능하면 똑같은 시스템으로 다른 파장, 예를들어 가시광선을 증폭시킬 수 없을까 하는 생각을 하게 되었다.

A. L. Schawlow 와 C. H. Townes³⁾는 1958년에 " Infrared and Optical Masers " 에서 이 가능성을 처음으로 지적하였다. 그 후 1960년에 미국의 물리학자 T. H. Maiman⁴⁾ 은 가시광선을 증폭시킬 목적으로 합성루비봉을 이용하여 최초의 루비 레이저를 발진했다. 루비(Al_2O_3) 결정체는 흡수대에서 더 낮은 에너지 준위 ($^4A_2 \rightarrow ^4F_2$)로 전이되면서 5600 Å 복사선을 방출한다. T. H. Miaman, R. H. Hoskins, I. J. D'Haenens, C. K. Asawa, V. Evtuhov⁵⁾는 루비에 Cr^{3+} 이온을 첨가하여 분광학적으로 분석하였다. E. Snitzer⁶⁾는 실온에서 Nd^{3+} 이 함유된 유리메이저를 개발하였으며, D. F. Nelson 과 W. S. Boyle⁷⁾은 아주 새로운 광여기 방법을 사용하여 루비 메이저의 연속적인 작동에 대하여 연구를 수행하였다.

루비 레이저의 뒤를 이어 1963년에 Z. J. Kiss, H. R. Lewis 그리고 R. C. Duncan⁸⁾은 액체 네온 온도(27K)에서 여기원(pumping source)으로 태양을 이용하여 $CaF_2:Dy^{2+}$ 결정체 내에서 광학 메이저를 작동시켰다. 1964년에는 처음으로 L. F. Johnson 과 K. Nassau⁹⁾는 Nd^{3+} 이온을 $CaWO_4$ 에 첨가하여 고체 네오디뮴 레이저(neodymium laser)를 만들었다. 같은 해 J. E. Geusic¹⁰⁾등은 실온에서 텅스텐 램프로 Nd:YAG (보통 YAG라고 하며 Yttrium aluminum garnet의 약어) 레이저를 연속적으로 여기 시키는데 성공하였다. 1966년에 C. G. Young¹¹⁾은 직접 태양 여기 레이저로 1W의 출력을 얻는데 성공하였으며, C. W. Renp¹²⁾는 Nd^{3+} 이 첨가된 Nd:YAG에서 태양광 여기 레이저를 만들었다.

W. Koechner는 70년대에 들어와서 광여기 레이저가 펄스로만 동작하는 것이 아니고, 이들에 일정한 조건만 충족시키면 연속적으로 동작될 수 있도록 Nd:YAG 결정

체에서 연속파(CW, continuous wave)를 이용하여 12kW의 입력으로 250W의 레이저 출력을 얻는데 성공하였다.¹³⁾

구 소련의 V. M. Batenin 등은 80년대에 들어와서 광여기 색중심 레이저의 이론적 연구에서 태양 상수가 약 100 solar constant(s.c) 일때 출력은 10~60W이며, 효율은 1~6% 정도임을 밝혔으며, 일본의 H. Arashi 등은 18W의 연속파 레이저를 개발했으며, 1988년 이스라엘의 M. Weksler¹⁴⁾ 등은 세계 최대의 연속파 레이저 출력인 100W를 태양로 여기를 사용하여 Nd:YAG 레이저를 제작하였다.¹⁴⁾

이 논문의 연구 목적은 In Heon Hwang 와 Ja H. Lee²⁶⁾가 고체 레이저인 루비 레이저, Nd:YAG 레이저, Nd:Cr:GSGG 레이저, Alexandrite 레이저의 출력거울 반사율에 따른 기울기 효율과 문턱 여기 전력을 계산하였는데, 본 연구는 Nd³⁺ 이온이 첨가된 Nd:YAG 레이저 매질(laser medium)에 대해서 섬광관(flashlamp)을 태양광으로 대신하는 여기원으로 활용하여 Nd³⁺ 결정체 레이저에서 매질의 길이에 따라 레이저 매질에 입력된 전력의 변화량에 대해서 공진기의 한 쪽 거울로 출력되는 전력이 어느 정도 변하는 지를 나타내는 기울기 효율과 레이저 발진이 개시되는 전력값으로 나타내는 문턱 여기 전력을 이론적으로 계산하여 레이저 시스템을 설계할 때 레이저 매질의 최적조건을 조사함에 있다. 이 연구 결과 레이저 시스템을 설계하는데 있어서 고출력 태양광 여기 고체 레이저를 개발하는데 기여 할 것이다.

II. 이 론

1. 레이저에 관한 일반적인 이론

1) 레이저의 발진 원리

레이저는 전자기파가 어떠한 물질과 상호 작용을 할 때 발생하는 자발적 방출 (spontaneous emission), 유도 방출(stimulated emission), 흡수 (absorption)의 과정을 이용한다.¹⁵⁾

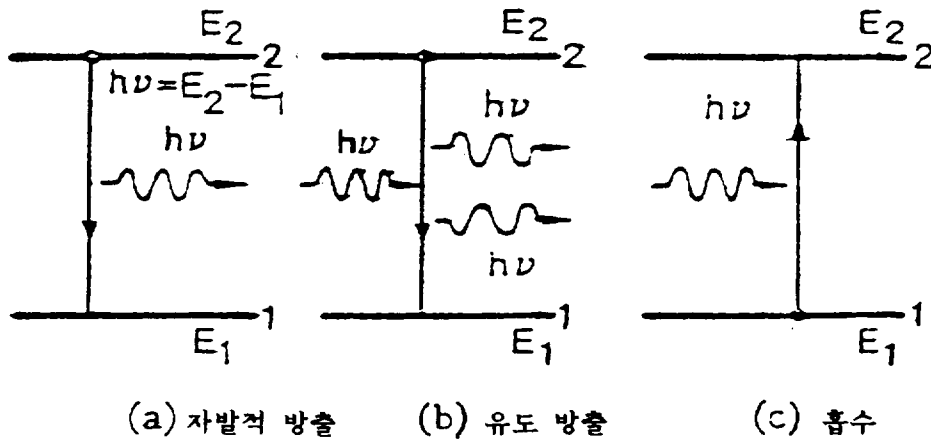


그림 1. 레이저의 발진 원리

그림 1(a)는 어떤 주어진 물질의 임의의 2개의 에너지 준위 1과 2를 나타 낸 것인데, $E_2 > E_1$ 의 상태이다. E_1 은 가장 안정된 상태로 기저 상태 (ground state)라 하고, 기저 상태 이외의 상태인 E_2 는 여기 상태(excited state)라 부르며, 원자들은 이 여기 상태에 오래 머물러 있지 못하고 일정한 수명이 지나면 다시 E_1 상태로 돌아간다. 이때 광자 하나를 방출하게 되는데 이것을 자발적 방출이라 부르며, 여기서 방출된 빛은 여러 가지 파장이 혼합되어 있어 파장과 위상은 일치하지 않는다.¹⁶⁾

한편, E_1 상태에 머물러 있던 매질에 $h\nu$ 에 해당하는 빛이 입사되면 이 빛을 흡수하여 E_2 상태로 이동하는 그림 1(c)와 같은 상태를 흡수라고 한다. 그림 1(b)는 E_2 상태에 있는 매질의 수명이 다하기 전에 ΔE 에 해당하는 빛이 입사하면 서로 상호 작용하여 그것과 똑같은 에너지를 갖는 빛을 방출하게 되는데 이것을 유도 방출이라

부른다.

유도 방출의 경우 입사해온 에너지와 방출되는 에너지와는 파장과 위상은 거의 동일하다. 따라서 하나의 광자에 대해서 2개의 광자가 생겨나고 이것들이 다시 또다른 유도 방출을 일으켜 방출되는 빛은 계속 증폭된다. 이것이 레이저 발진의 원리이다.¹⁶⁾ 이러한 레이저는 태양 광선처럼 섞여진 光이 아니라 하나의 光이므로 단색성, 지향성, 가간섭성, 고휘도성, 에너지 집중도의 특성을 갖는다.

2) 레이저의 기본 구성

레이저 장치는 크게 세 가지로 이루어져 있다. 그것은 외부로부터 에너지를 흡수해서 빛을 방출하게 하는 물질인 레이저 매질과 이 레이저 매질에 에너지를 공급하는 여기매체(pumping source), 그리고 레이저 매질로부터 방출된 빛을 모아 내보내는 공진기(resonator)로 대별된다.¹⁶⁾ 그림 2는 기본적인 레이저 구성도를 보여준다.

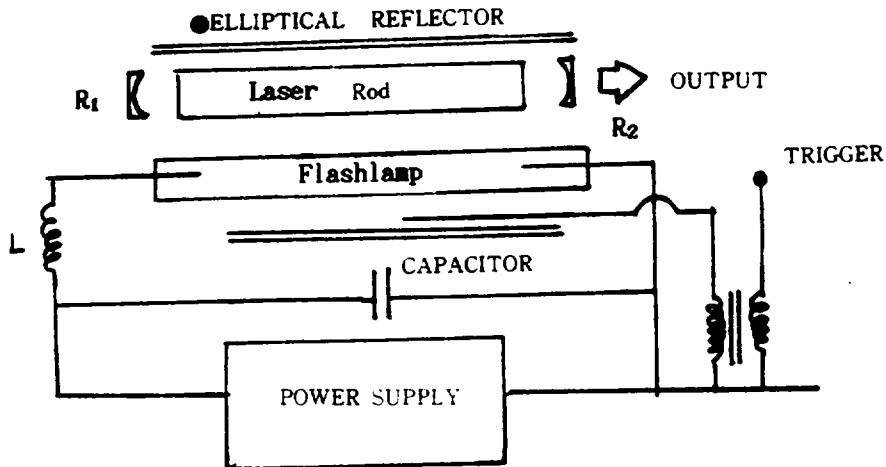


그림 2. 레이저의 기본 구성

(1) 레이저 매질

레이저 매질로서는 고체, 액체, 기체 상태가 모두 가능하다. 기체 레이저에는 CO₂, He-Ne, Ar, N₂, F₂, HF, XeF, I₂ 등 매우 많은 종류의 기체 들이 사용되고 있다. 액체 레이저에는 색소를 알콜등의 용매에 녹여 사용 하고 있으며, 색소의 종류로서는 Rhodamine계, Coumarine계, Cyanine계등 수백가지의 레이저용

색소가 개발되어 있다. 17) 고체 레이저에는 Nd:YAG, 루비, 유리, KCl, RbCl 등이 사용되고 반도체로서 GaAs, InP, GaAs-P, InAs등이 사용된다.

(2) 여기 매체

레이저의 발진에서 유도 복사 방출은 가장 중요한 과정이다. 이 유도 방출의 효율이 커지기 위해서는 어떤 두 개의 에너지 준위 사이에서 상태 밀도 반전(population inversion)이 생겨야 한다.¹⁷⁾ 이 상태 밀도 반전을 형성하기 위해서는 외부에서 강력한 에너지를 투여해야 한다. 이러한 여기 매체에는 다음과 같은 것이 있다.¹⁶⁾ 예를 들면 여기 매체로 방전을 사용 하는 것은 He-Ne 레이저, Ar 레이저, Kr 레이저, N₂ 레이저, CO₂ 레이저, He-Cd 레이저 등이 있고, 전류를 사용하는 것은 반도체 레이저가 있으며, 섬광관을 사용하는 것은 Nd:YAG 레이저, Nd:YLF 레이저, Nd:Cr:GSGG 레이저, 루비 레이저, 색소 레이저, 유리 레이저가 있다.

(3) 공진기

일반적으로 레이저 공진기는 그림 2와 같이 매질 양쪽에 각각 거울이 놓여져 있다. 한 쪽의 거울(R₁)은 전반사경이며, 다른 쪽 거울(R₂)은 출력경으로 되어 있어서 반사율은 100% 보다 작은 부분 반사경으로 되어 있다. 레이저의 출력광이 이 거울로부터 나오도록 되어 있다. 이러한 공진기를 Fabry - Perot형 공진기라고 부른다. 이 형태의 공진기 내에서는 레이저 광파가 정상파로서 존재한다. 따라서 레이저 발진이 가능한 파장 λ 는 두 개의 거울사이의 거리를 D라고 할 때, $N\lambda = 2D$ 의 관계식을 만족시켜야 한다. 여기서 N은 정수이다.

레이저 공진기를 구성할 때 양쪽에 평행판 거울을 사용한 공진기는 외부의 진동에 의해 매우 민감하게 작용하므로 불안정하다. 그러나 공진기의 길이보다 큰 곡률반경의 오목거울을 사용한 공진기는 이러한 진동에 대하여 안정화되어 있다. 그러므로 거울의 형태에 따라 특성이 조금씩 다르다. 주로 고출력 레이저인 경우에는 임의의 광선이 2개의 거울 사이에서 앞뒤로 튀겨 공진기 축으로 부터 무한정 벗어나려고 하는 불안정 공진기를 사용하여 레이저 매질에 높은 에너지가 모이는 것을 막으며 저출력 레이저에서는 임의의 광선이 두 거울 사이에 남아 있는 안정화된 공진기를 사용하여 출력광의 모드(mode)를 깨끗하게 한다.¹⁷⁾

이러한 기본 구성으로 레이저 광선은 그림 3과 같이 형성된다.

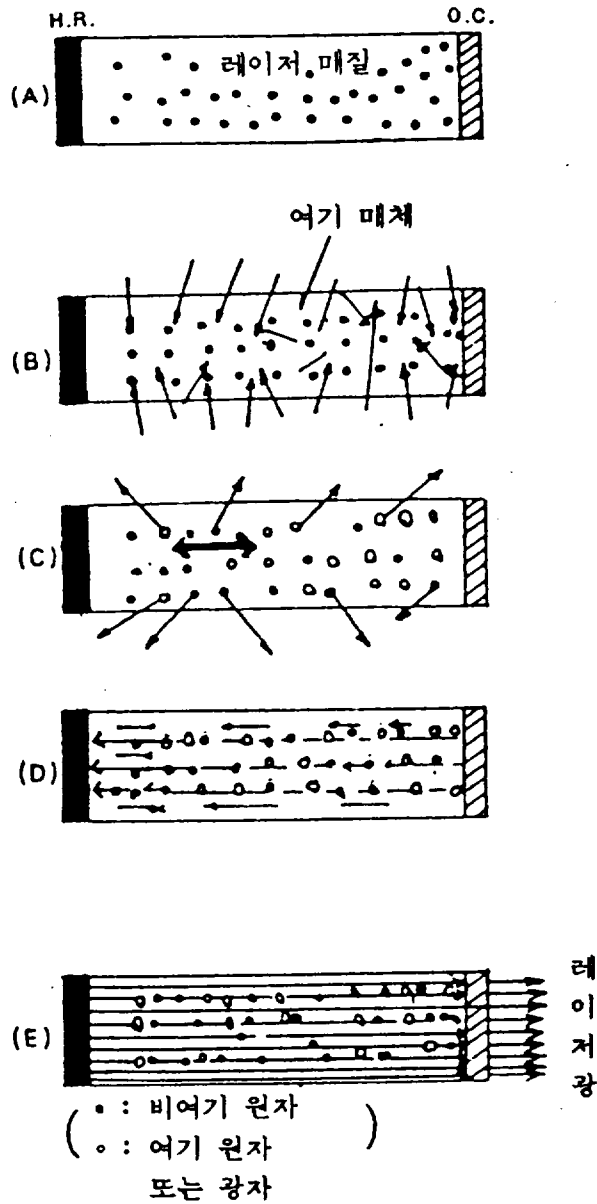


그림 3. 레이저 증폭 작용

그림 3(A)는 레이저 매질의 양끝에 거울을 붙인 공진기로서 여기 매체에 의해 대부분의 원자가 여기 상태로 이동한다. 즉시 다음에 여기 상태의 원자들은 기저 상태로 떨어지기 시작하면서 그림 3(C)와 같이 자발적 방출도 하고, 다른 일부는 그림

3(B)에서 보는 바와 같이 준안정 상태로 머물러 있게 된다. 이때 기저 상태로 떨어지기 전에 여기 매체가 계속 작용을 하면 준안정 상태에 점차 많은 원자들이 머물러 있게 된다. 이 때를 상태 밀도 반전이라 부르며 레이저 동작이 일어나려면 반드시 있어야 할 상태이다. 곧 준안정 상태에서 기저 상태로 떨어지면서 방출되는 광자는 옆에 있는 준안정 상태의 다른 원자들을 자극하여 추가적으로 또 하나의 광자를 발생케 하며 준안정 상태에 있는 모든 원자들은 기저 상태로 떨어지게 된다.

그림 3(D)에서 보는 바와 같이 광자가 매질 안을 통과할 때 일부는 매질의 측면으로 손실되나 나머지는 반사 표면에서 반사하여 다시 매질을 지나가며, 오고 가는 광자들이 다른 원자들을 자극하여 더욱 많은 광자를 방출케 한다. 결국 광자의 흐름은 그림 3(E)처럼 충분히 세게 되어 부분적으로 투명한 거울을 통하여 밖으로 나옴으로써 단색 또는 단일 진동수를 갖고 간섭성이 높은 광파 레이저광이 출력된다.¹⁸⁾

이처럼 레이저 발진이 일어나기 위해서는¹⁶⁾ 레이저 매질의 이득이 공진기의 손실보다 커야 한다는 조건이 있어야 한다. 즉, 이득과 손실이 같을 때를 문턱(threshold)이라고 부르는데, 이 문턱이 형성되어야만 레이저 발진이 일어난다.

3) 레이저의 종류

레이저가 발명된지 30여년이 흐르는 동안 수없이 많은 레이저가 개발되었다. 따라서 레이저의 분류도 매질의 형태, 동작하는 파장 영역, 공진기의 모양, 동작 형태에 따라 각양각색이다. 가장 일반적인 방법인 매질의 형태에 따라 분류하면 다음과 같다.¹⁹⁾ 그리고 그림 4는 레이저의 발진 파장에 대한 레이저의 종류를 나타낸 것이다.

(1) 기체 레이저

기체 레이저는 고체 레이저와 함께 레이저 발명 초기부터 많은 연구 개발이 진행되었는데 동작할 수 있는 파장 영역도 원적외선 영역($25\mu\text{m}\sim 1\text{mm}$)에서 X선 영역($0.02\text{\AA}\sim 100\text{\AA}$)까지 광범위하다. 기체 레이저는 원자와 분자의 회전, 진동, 전자 레이저 상태 사이의 전이에 의해 얻어진다. 이 레이저가 다른 레이저에 비해 뛰어난 점은 먼저 매질이 균일하다는 점이다. 따라서 광학적으로 매우 균일한 光을 얻을 수 있다. 또한 다른 레이저에 비해 매질의 부피를 마음대로 조절할 수 있기 때문에 얻고자 하는 출력을 자유자재로 얻을 수 있다. 대표적인 기체 레이저에는 헬륨 네온(He-Ne) 레이저, 아르곤(Ar) 레이저, 이산화탄소(CO_2) 레이저, 엑시머(excimer) 레이저 등이 있다.

(2) 고체 레이저

고체 레이저는 결정이나 비결정 물질을 모체로하여 여기에 미량의 활성 이온을 혼합한 매질을 이용한다. 따라서 레이저 매질은 매질을 구성하는 중성원자가 아닌 이온의 전자 전이에 의해 이루어진다. 고체 레이저는 다른 종류의 레이저에 비해 기계적으로 견고하고 다루기 쉬운 장점이 있다. 그러나 안정한 연속 동작의 면에서는 기체 레이저에 미치지 못하며 여기 방법도 강한 광원에서 나온 빛이 매질에 흡수하여 상위 에너지 준위로 원자의 에너지를 올리는 방법인 광펌핑으로 한정되어 있다. 대표적인 고체 레이저에는 Nd:YAG 레이저, 유리(Nd:Glass) 레이저, 루비 레이저, 티타늄 사파이어(Ti:Sapphire) 레이저등이 있다.

(3) 액체 레이저

액체 레이저의 대표적인 것으로는 색소 레이저가 있다. 색소 레이저는 화학 염료인 유기 색소를 능동 매질로 이용하는데 보통 여기에는 고체 레이저와 마찬가지로 광펌핑이 이용된다. 색소 레이저의 가장 큰 장점은 동작과장 영역이 지극히 넓다는 점이다. 현재 실용화되어 있는 레이저는 근적외선 영역($0.75\mu\text{m} \sim 3\mu\text{m}$)에서부터 적외선 영역($3\mu\text{m} \sim 25\mu\text{m}$)까지 동작이 가능하다. 대표적인 액체 레이저에는 색소(dye) 레이저가 있다.

(4) 반도체 레이저

반도체 레이저는 다른 레이저와는 달리 결정중의 자유 전자나 자유 정공(hall) 과 같은 자유 캐리어(carrier)를 이용한 레이저로 폭이 넓은 에너지띠 사이의 전이에 의해 동작한다. 또한 반도체 레이저는 매질이 극히 큰 전이율을 갖기 때문에 수십에서 수백 미크론(μ)의 크기로도 동작하며 효율도 50% 이상인 것이 있다. 따라서 반도체 레이저는 다른 종류의 레이저로는 불가능했던 응용이 가능해져 소위 광전자학(Optonics)의 중요한 소자로 폭넓게 이용되고 있다. 더욱이 반도체의 에너지 준위나 자유 캐리어의 특성은 온도, 압력, 전류, 자계등에 의해 쉽게 변하기 때문에 원하는 특성의 출력을 쉽게 얻을 수 있는 장점이 있다. 대표적인 반도체 레이저에는 갈륨비소(GaAs) 레이저, 인듐인(InP) 레이저, 인듐비소(InAs) 레이저 등이 있다.

(5) 자유전자 레이저

전자가 가속도 운동을 하면 제동복사의 형태로 전자기파를 발생한다. 따라서 광속에 가까운 속도로 전자를 가속시켜 주기적으로 배열된 자장구 조속을 나선운동시키

면, 전자기파와의 상호작용에 의해 유도 방출이 일어나고, 레이저 광이 발생된다. 이와 같은 자유전자의 운동 에너지를 레이저 광으로 변환시키는 자유전자 레이저는 다른 종류의 레이저와는 그 동작 메카니즘이 근본적으로 다르다. 이 레이저의 장점은 이론적으로는 발진 파장을 마이크로파에서 X선 영역에 이르기까지 전자의 속도를 제어함으로써 자유자재로 변환시킬 수 있다는 점이다.

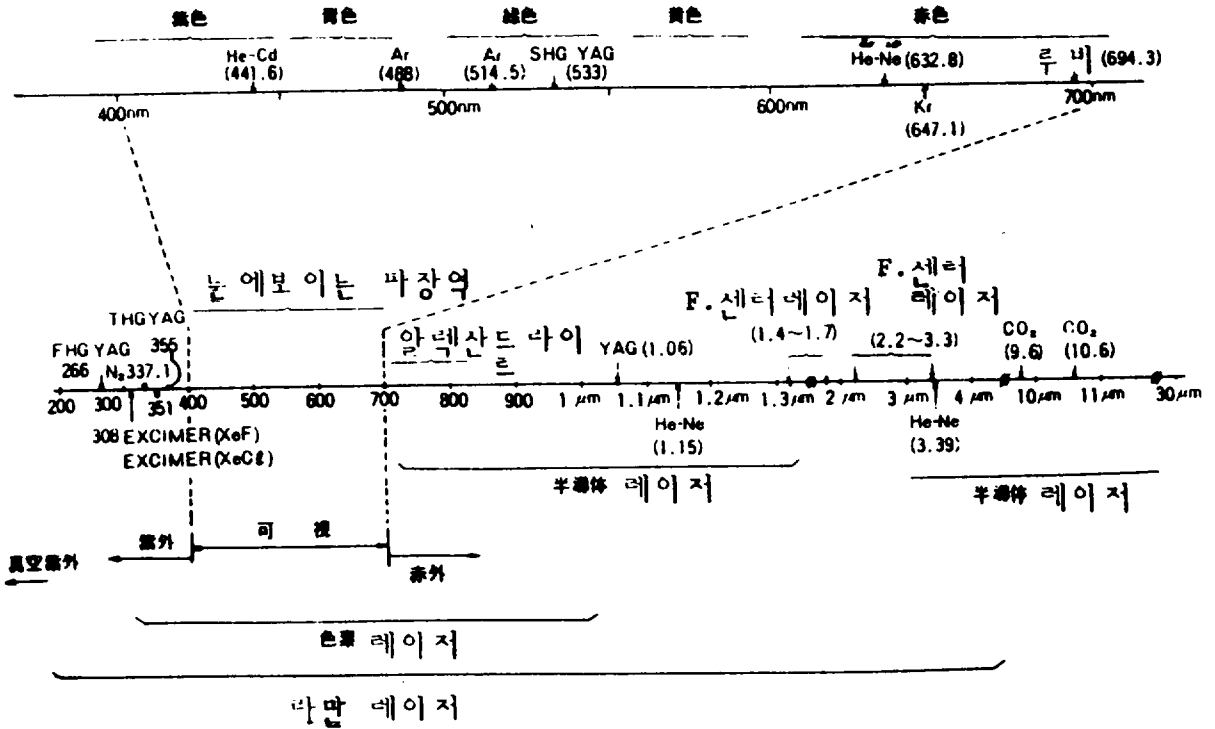


그림 4. 레이저의 종류와 발진 파장

2. 고체 레이저

1) 고체 레이저

능동 매질(active medium)이라 함은 상태 밀도 반전을 가지는 매질을 말하는데 고체 레이저는 보통 결정이나 유리로 된 능동 매질을 가지는 레이저이다. 흔히 이온 결정내에 불순물 이온을 넣어 능동 요소로 사용한다 이 불순 이온들은 보통 주기율표의 전이 원소열에 속해 있다. 레이저 용은 3가 희토류산화물 이온(Nd^{3+} , Er^{3+} , Ho^{3+} , Ce^{3+} , Tm^{3+} , Pr^{3+} , Gd^{3+} , Eu^{3+} , Yb^{3+}), 2가 희토류산화물 이온 (Sm^{2+} , Dy^{2+} , Tm^{2+}), 그리고 전이 금속 (Cr^{3+} , Ni^{2+} , Co^{2+} , Ti^{2+} , V^{2+})이 유리과 같은 다양한 주물 질에 끼워 넣음으로써 이루어진다.²⁰⁾

네오디뮴 레이저는 고체 레이저의 가장 일반적인 형이며, 레이저 매질은 Y^{3+} 이온의 일부가 Nd^{3+} 이온들로 대체된 $Y_3Al_5O_{12}$ 의 결정이거나 단순히 Nd^{3+} 이온으로 첨가된 유리이다. 네오디뮴 레이저는 몇개의 선으로 발진하며, 가장 강하고 일반적으로 사용되는 파장 영역은 $\approx 1.064\mu m$ 에서 이다.¹⁵⁾

고체 레이저는 대표적으로 4준위 레이저이며, 그림 5는 Nd : YAG의 단순화된 에너지 준위를 나타낸 것이다.

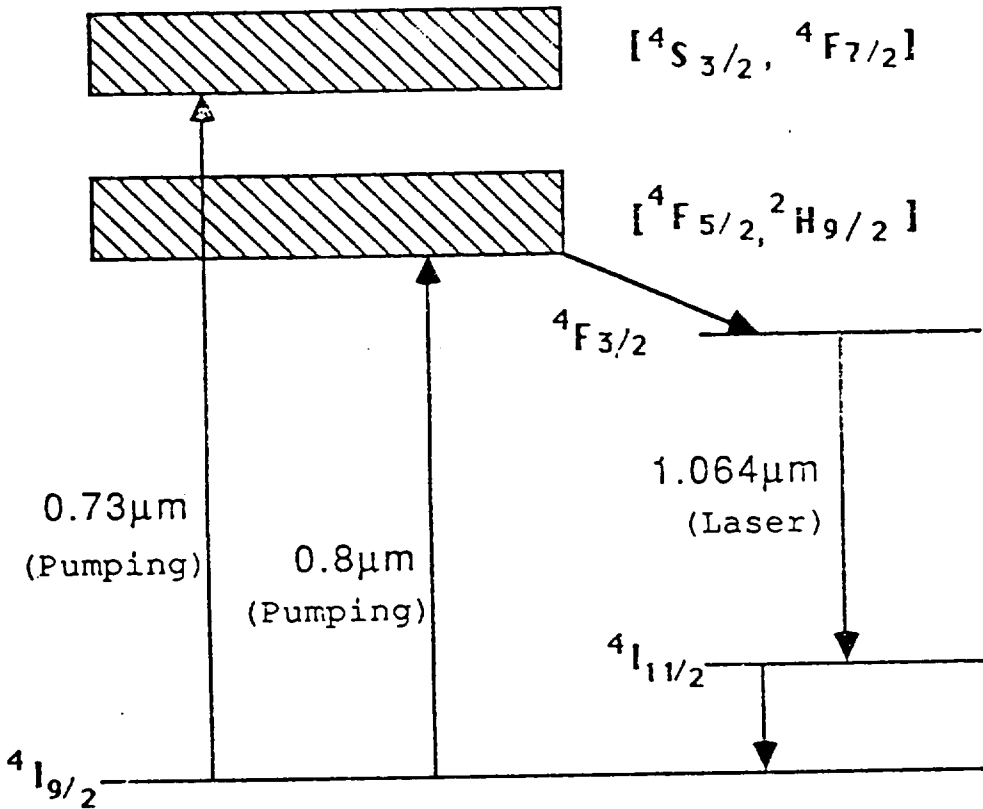


그림 5. Nd:YAG 레이저의 에너지 준위

레이저 전이는 $4F_{3/2}$ 와 $4I_{11/2}$ 사이에서 일어난다. 이 전이에서 레이저 파장은 $1.064\mu m$ 이고 주펌프 준위는 $0.73\mu m$ 와 $0.8\mu m$ 에서 일어난다. 이 전이들은 빠른 비복사성 감쇠에 의해 $4F_{3/2}$ 로 연결되는 반면, 더 낮은 $4I_{11/2}$ 준위는 빠른 비복사성 감쇠에 의해 $4I_{11/2}$ 기저 준위로 결합된다. 다른 감쇠는 $4F_{3/2}$ 와 $4I_{11/2}$ 사이에서 일어나며, 이 전이에 필요한 시간을 상준위 수명 또는 형광시간이라 한다. Nd:YAG 에서 형광시간은 $230\mu s$ 이지만 결정내의 네오디뮴 농축에 의해 결정된다.²⁰⁾

고체 레이저는 고에너지 밀도를 가지며, 구조가 간단하고 지속성이 높은 것이 다른

레이저에 비해 장점이지만 열적으로 많은 변화를 하는 것이 가장 큰 단점으로 지적되고 있다. 또 산란과 흡수 손실이 크다는 점과 근 적외선에서 발진파장영역이 좁혀지고 가간섭성이 낮다는 단점이 있다. 이 산란과 흡수 손실은 레이저 매질을 연구 개발하면 훨씬 더 감소시킬 수 있을 것이다.

그러나 아직까지 기울기 효율과 레이저 매질 요소간의 관계와 문턱 여기의 세기와 레이저 물질 요소사이의 관계가 명확하지 못한 실정이다. M. Weksler¹⁴⁾ 등도 이 두 요소가 레이저 물질의 전이에 의존한다는 것을 증명하지 못하였다. 더욱이 매우 높은 여기 강도에서의 레이저 특성은 레이저가 기하학적으로 아주 다르다는 것을 알아내었다.²¹⁾

2) 광펌핑(light pumping)

하위 에너지 준위에서 상위 에너지 준위로 원자의 에너지를 올리는 과정을 펌핑 과정이라고 한다. 보통 이 과정에는 두 가지 방법이 있는데, 그 하나는 강한 광원으로 부터 나온 빛은 능동 매질에 흡수되고, 그것에 의해 원자는 상위 펌프 준위로 여기되는 광펌핑이고, 두번째는 충분히 강한 전기 방전에 의해 이루어지는 전기 펌핑이다.

(1) 펌프 공동 (pump cavity)

가장 일반적으로 사용되는 펌핑 시스템의 중요한 세가지 예를 그림 6 에서 보여주고 있다.¹⁵⁾

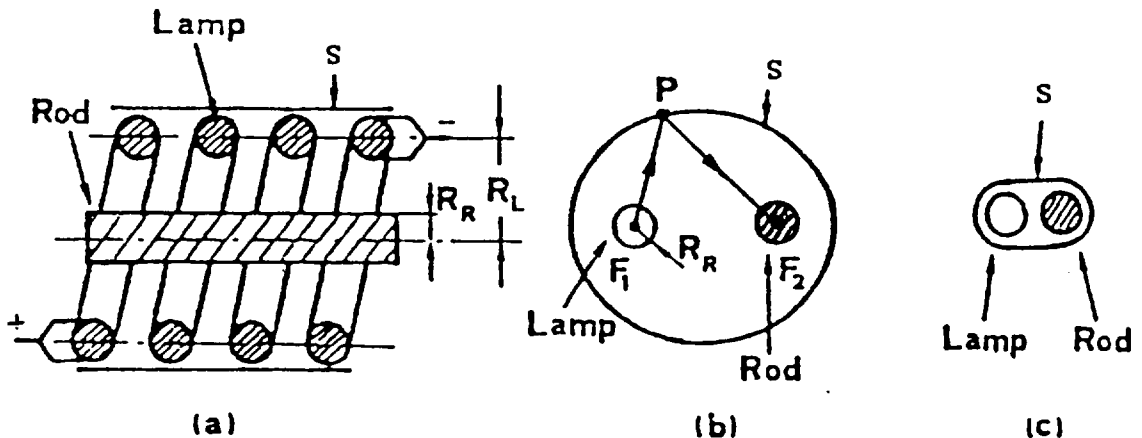


그림 6. 가장 일반적으로 사용되는 펌핑 시스템

그림 7(a)는 램프는 나선형이고, 빛은 직접 또는 반사형 원통 표면 s에서 능동 매질에 도달한다. 이 시스템은 처음에 루비 레이저에 사용되었고, 아직도 펄스 레이저 용으로 널리 사용되고 있다. 그림 7(b)의 램프는 레이저 매질과 같은 길이와 반지름을 가지는 원통형으로 선형 램프이다. 그림에서 s로 표시하고 있는 거울같이 반사하는 타원형 원통의 2개의 초점 중의 하나인 F_1 에 램프를 놓고 레이저 매질은 둘째 초점 F_2 에 둔다. F_1 을 떠난 광선 F_1P 는 타원 표면에서 반사한 후, 광선 PF_2 와 같이 F_2 를 지나 가는 것이 타원의 성질이다. 그러므로 램프에 의해 방출된 빛의 대부분이 타원형 원통에 의해 능동 매질로 운반된다는 것이다. 그림 7(c)는 매질과 선형 램프는 가능한 한 가까이 놓고 가까이 결합된 원통형 반사경에 둘러 싸이게 만들어 놓은 근접 결합 배열을 나타낸 것이다. 근접 결합 배열의 효율은 보통 타원형 원통의 효율보다 크게 낮지는 않다.¹⁵⁾

(2) 섬광관 (flashlamp)

섬광관은 루비나 Nd:YAG 등과 같은 고체 레이저의 광펌핑용으로 많이 사용된다. 일반적으로 레이저들은 높은 준위로 펌핑하는 것이 요구되며, 그래서 2개 혹은 그 이상의 램프들이 필요하다. 그러나 좀 더 효율적인 펌프 공동(pump cavity)을 설계 할때 하나의 섬광관은 낮은 전력 레이저에 사용된다.²²⁾

j. h Goncz²³⁾는 Xe 섬광관의 경우, 섬광관이 방전할 때 섬광관 내부의 전기 저항은 전류의 제곱에 반비례한다는 사실을 실험적으로 측정하였다. Ar, He, Kr 등과 같은 다른 불활성기체 섬광관에서도 Goncz의 결과와 같은 결과를 얻었으므로 길이가 l 이고 섬광관의 내경이 d 이며 전류가 i 인 섬광관의 전기저항 R 은

$$R = K(l/d) \sqrt{I} \quad (1)$$

로 주어진다. 여기서 K 는 기체에 따라 정해지는 상수이다. 기체의 종류에 따른 K 의 값은 Xe 일때 1.45, Kr 일때 1.3, Ar 일때 1.2 로서 Xe 이 가장 크다.²⁴⁾ 이 점 때문에 일반적으로 섬광관에 Xe를 사용한다. 즉, 섬광관의 저항이 다른 기체를 사용할때 보다 크므로 전력소모가 섬광관에서 주로 일어나 광출력이 커진다. 그리고 섬광관은 가장 좋은 결합과 좋은 램프 수명 시간을 위해 램프의 외부 직경은 일반적으로 YAG 봉의 직경보다 작은 것을 선택한다.

3) 문턱 개시

레이저는 어떠한 개시조건이 형성되어야만 레이저를 발생시킨다. 즉, R_1 과 R_2 의 반사율을 가진 두 개의 거울과 길이 l 인 능동 매질로 구성된 레이저 발진기의 레이저 개시조건을 얻기위해 능동 매질을 통과할 때 생기는 이득이 레이저 공동내에서 발생하는 원자수의 손실을 입력과 출력의 광자속 사이의 비의 값으로 표현되는 능동 매질에서 각 경로의 이득은 $\exp(\sigma(N_2-N_1)l)$ 이며, 여기서 l 은 능동 매질의 길이이다. 만일, 공동내에 나타나는 손실이 전송 손실뿐이라면, 개시조건은,

$$R_1 R_2 \exp [2\sigma(N_2 - N_1) l] = 1 \quad (2)$$

이다. 여기서 R_1 과 R_2 는 두 거울의 출력 반사율이고, σ 는 흡수 전이 단면적이며, N_2 와 N_1 은 대표적인 상위와 하위 에너지 준위에서의 원자수를 말한다. 상태 밀도 반전에 대해서 풀면,

$$(N_2-N_1)_c = \frac{-\ln(R_1 R_2)}{2\sigma l} \quad (3)$$

로 주어진다.

이 식은 상태 밀도 반전이 임계 반전이라고 알려진 임계값 $(N_2-N_1)_c$ 가 될때에 개시 조건에 도달하는 것을 보여주고 있다. 한번 임계 반전에 도달하면 발진은 자발적 방출로부터 이루어지게 되며, 실제로 공동축을 따라서 자연적으로 방출된 광자는 증폭 과정을 일어나게 한다.^{15, 20)}

4) 펌핑률 (pumping rate)

만일 상위의 펌프 준위가 비어 있다면, 상위의 레이저 준위 2 가 펌핑에 의해 상태 밀도로 되는 비율 $(dN_2/dt)_p$ 는,

$$\left[\frac{dN_2}{dt} \right]_p = W_p N_g \quad (4)$$

로 주어지며, 여기서 N_g 는 기저 상태에서의 상태 밀도, 매질내에서 주어진 펌핑을 만드는데 필요한 최소 가능 전력과 이 펌핑을 만드는데 필요한 램프에 대한 실제의 전력 입력 P 와의 비로 정의할 수 있는 W_p 는 펌핑률이다.¹⁵⁾ 개시 조건을 만족하기 위해서 W_{cp} 로 표시되는 임계값 또는 개시 조건에 도달해야만 한다. 간단하게 W_p 를 계

산하기 위해 전반적인 펌핑 효율 η_p 가 도입되는데 먼저 펌핑 효율에 대해서 살펴 보면 다음과 같다. 펌핑 효율 p 는 램프에 들어가는 전력 P 와 레이저 준위의 상태 밀도가 되는데 이용된 전력의 비로 정의 되므로 식으로 표현하면,

$$\eta_p = \frac{h\nu \int_v \left[\frac{dN_2}{dt} \right]_p dV}{P} \quad (5)$$

로 주어진다. 여기서는 레이저 진동수, h 는 플랑크 상수, $(dN_2/dt)_p$ 는 펌핑 과정에 의해 상위 레이저 준위로 여기된 단위 시간, 단위 체적당 원자의 수이며, 적분은 봉전체의 체적 V 에 걸친 것을 말한다. 전 펌핑 효율은 네 가지 형태로 나눌 수 있는데, 다음과 같다.

첫째, 레이저 매질의 효과적인 펌핑 준위가 존재하는 파장 범위 $\lambda_1 \sim \lambda_2$ 에서 광출력에 대한 전기 입력의 전환 효율인 램프 복사 효율 η_r 은,

$$\eta_r = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P_\lambda d\lambda}{P} \quad (6)$$

로 주어진다. 여기서 P_λ 는 램프에 의해 방출된 단위 파장당 복사 전력이고, 적분은 상위 준위로 펌핑시키는데 유용한 $\lambda_1 \sim \lambda_2$ 파장 영역에 걸친 것이다.

둘째, 실제로 봉으로 들어가는 펌핑 전력과 램프에 의해 방출된 전력과의 비로 정의되는 전달 효율 η_t 는,

$$\eta_t = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P_{e\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P_\lambda d\lambda} \quad (7)$$

a

로 주어진다. 여기서 $P_{e\lambda}$ 는 봉 내에 들어가는 단위 파장당 전력이다.

셋째, 봉에 의해 실제로 흡수되는 유용한 복사의 부분을 나타내는 흡수 효율 η_a 는,

$$\eta_a = \frac{P_a}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} P_{e\lambda} d\lambda} \quad (8)$$

a

로 주어진다. 여기서 P_a 는 봉 내에 흡수되는 총전력이다.

넷째, 흡수전력 P_a 와 레이저 매질의 레이저 준위의 상태 밀도가 되는데 이용된 전

16 Nd:YAG 레이저의 기울기 효율과 문턱 여기 전력의 계산

력 사이의 비로 표현되어지는 전력 양자 효율 η_{pq} 는,

$$\eta_{pq} = \frac{h\nu \int_v \left[\frac{dN_2}{dt} \right] dV}{P_a} \quad (9)$$

로 주어진다.

그러므로 펌핑 효율 p 는 4개의 효율 인자의 곱, 즉 $\eta_p = \eta_i \eta_a \eta_{pq}$ 으로 주어짐을 알 수 있다. 이 4개의 효율인자는 CW 펌핑에 적합한 것이다.^{15,25)}

식 (4)와 식 (5)를 이용하여 W_p 계산에 이 펌핑 효율 η_p 를 도입하면 체적 V 에 걸친 펌핑을 W_p 의 평균값 $\langle W_p \rangle$ 는,

$$\langle W_p \rangle = \eta_p \frac{P}{VN_g h\nu} \quad (10)$$

로 쓸 수 있다.

5) 기울기 효율과 문턱 여기 전력

레이저 방정식은 전 상태 밀도의 변화율과 레이저 광자 밀도 사이에 평 형이 되도록 간단한 기법으로 유도된 율방정식 근사(rate equation approximation)에서 4준 위 레이저 매질에 대한 율방정식은²⁶⁾

$$dN/dt = W_p(N_i - N) - \rho \sigma cN - N/\tau_o \quad (11)$$

$$d\rho/dt = (c/L')(\sigma lN - \gamma)\rho \quad (12)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 W_p 는 펌핑률, N 은 상태 밀도 반전, N_i 는 레이저 매질내의 활동적인 총 원자의 밀도수, c 는 진공속에서의 광속, σ 는 유도 방출 단면적, ρ 는 레이저 공동내의 광자 밀도를 나타낸다. 그리고 L' 은 효율적인 공동 길이로서,

$$L' = L + (n-1)l \quad (13)$$

으로 나타낼 수 있다. L 은 공동내의 두 거울 사이의 거리이며, l 은 레이저 매질의 거리, n 은 레이저 매질의 굴절률이다.

또, γ 는 레이저 매질내에서 레이저 광의 산란과 흡수에 의한 손실과 두 개의 레이

저 공동 거울의 전송에 의한 손실이며,

$$\gamma = \alpha l + (1/2) [\ln(1/R_1) + \ln(1/R_2)] \quad (14)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 α 는 단위길이당 산란과 흡수의 손실이며, R_1 은 전반사 거울의 반사율, R_2 는 출력결합 거울의 반사율이다. CW 레이저가 작동할 수 있는 중요한 조건은 상태 밀도 반전인데 앞에서 보았듯이 레이저가 발전하는 동안 레이저 공동내의 상태 밀도 반전은 식 (12)에서 찾을 수 있다. $d\rho/dt = 0$ 일 때 N_c ,

$$N_c = \gamma / \sigma l \quad (15)$$

이다. 그러므로 CW 레이저의 출력 P_{out} 은,

$$P_{out} = [\text{광자 밀도}] \times [\text{공동내의 레이징 체적}] \times [\text{출력거울을 통과한 광자 손실률}] \times [\text{에너지/광자}] \quad (16)$$

이다. 식(3)와 식(6)를 이용하면,

$$P_{out} = (A h \nu / \sigma) \{ (N_t \sigma l - \gamma) / \gamma \} \{ (1/2) \ln(1/R_1) + \ln(1/R_2) \} \times [W_p - \gamma / \tau_e (N_t \sigma l - \gamma)] \quad (17)$$

로 쓸 수 있다. CW 레이저로 부터 출력전력계산에서 가장 중요한 변수중 하나가 펌핑률이다. 태양 여기에 있어서 펌핑률 W_p 는,

$$W_p = \theta W_p' = \theta (1/N_t) (4/D) \cdot \int F(\lambda) \xi(\lambda) [1 - \exp(-\sigma_a N_t D)] d\lambda \quad (18)$$

이다. 여기서 θ 는 태양 집중도(solar concentration), W_p' 는 태양 상수 조도에 의한 펌핑률, D 는 레이저 붕의 직경, $F(\lambda)$ 는 태양 상수 복사에 의한 스펙트럼 광자률, $\xi(\lambda)$ 는 흡수된 광자에 의한 상위 레이저 준위에 있는 레이저 원자의 광양자 파장 영역을 나타내며, σ_a 는 흡수 단면적을 나타낸다.

식(17) 과 식(18)에서부터 태양 여기 레이저의 효율은,

$$\eta = P_{out} / \pi D I_s \theta = (\eta_s' W_p' / \pi D I_s) (1 - W_{pth} / W_p' \theta) \quad (19)$$

18 Nd:YAG 레이저의 기울기 효율과 문턱 여기 전력의 계산

이다. 여기서 I_s 는 단위 면적당 전력 단위로서의 광도이며,

$$\eta_s' = (Ah\nu/\sigma) [(N_t\sigma_l - \gamma)/\gamma] [(1/2)\ln(1/R_2)] \quad (20)$$

$$W_p' = \gamma/\tau_e(N_t\sigma_l - \gamma) \quad (21)$$

을 나타낸다.

그러므로 식(19)에서 기울기 효율은

$$\eta_s = \eta_s' W_p' / \pi D I_s \quad (22)$$

이다.

Orazio. Svelto 에 의하면¹⁵⁾ 문턱 여기 전력을 구하기 위해 먼저 임계 펌핑률 W_p 를 구한다. 이것은 식(11)에서 $dN/dt = 0$, $N = N_c$ 그리고 $\rho = 0$ 으로 놓을 때 구할 수 있다. 그때,

$$W_{cp} = N_c / [(N_t - N_c)/\tau_e] \quad (23)$$

이다. $N_c \ll N_t$ 라고 가정할 때 식 (15)를 이용하면,

$$W_{cp} = N_c / N_t\tau_e = \gamma/N_t\sigma_l\tau_e \quad (24)$$

이다. 앞에서 살펴 보았던 식(10)을 이용하면,

$$\begin{aligned} P_{th} &= \frac{W_{cp} \cdot V N_t h \nu}{\eta_p} \\ &= \frac{\gamma}{N_t\sigma_l\tau_e} \frac{V N_t h \nu}{\eta_p} \\ &= \frac{\gamma}{\eta_p} \cdot A \cdot \frac{h}{\sigma\tau_e} \end{aligned} \quad (25)$$

로 쓸 수 있다. 그리고 η_s 는 $\eta_s = \eta_p\eta_c\eta_A$ 로 표시할 수 있는데, 여기서 η_p 는 펌핑 효율, η_c 는 $\eta_2/2\gamma$ 로 레이저 매질에서의 레이저 광의 산란과 흡수에 의해 생기는 것과 레이저 공동의 두 거울의 전송에 의해 생기는 손실에 대해 어느 만큼 출력결합 거울의 전송에 의한 손실이 생기는가를 나타내는 출력결합 효율이며, η_A 는 A_e/A 로서

레이저 빔의 면적에 대해서 실제로 레이저의 발진 모우드가 점유한 레이저 영역의 증가 단면적이 어느 정도 인가를 나타내는 모우드 단면 효율이다.¹⁵⁾

Ⅲ. 계 산 결 과

Nd:YAG 레이저 매질에 대해서 이론적으로 기울기 효율과 문턱 여기 전력을 계산하기 위해 Allied - Synthetic Crystal Products사가 제작한 Nd:YAG 레이저 물질의 특성의 재원을 이용하였으며 그 값들은 표 1과 같다. 표 1에서 주어진 값을 이용하고, 공진기 내의 전반사 거울의 반사율은 99.8%, 출력거울 반사율은 50%로 사용하고, 레이저 매질의 지름은 1cm, 레이저빔의 크기도 1cm 정하고, 레이저 매질의 길이는 10cm, 20cm, 50cm, 100cm 로 달리하면서 식 22와 식 25에서 기울기 효율과 문턱 여기 전력을 계산한 결과는 표 2와 같다. 표 2를 비교 분석하기 위해 x 축은 레이저 매질의 길이로 놓고, y축에는 각각 기울기 효율, 문턱 여기 전력, 단위 면적당 문턱 여기 전력으로 놓은 후 그래프로 나타낸 것이 그림 7, 그림 8, 그림 9이다.

표 1. Nd:YAG 레이저 물질의 재원

레이저 물질	Nd ³⁺ 이온 밀도 (/cm ³)	펌프율 (/s(s.c))	유도방출면적 (cm ²)	상위준위수명 시간(μs)	손실 계수 (/cm)
Nd:YAG	1.4×10^{20}	1.12×10^{-3}	3.5×10^{-19}	230	2×10^{-3}

표 2. 기울기 효율과 문턱 여기전력

길 이 (cm)	10	20	50	100
기울기 효율 (%)	4.9	4.7	4.3	3.5
문턱여기전력 (kW)	1.04	1.12	1.25	1.52
단위 면적당 문턱여기전력 (W/cm ²)	33.1	17.8	7.7	4.8

1) 레이저 매질의 길이에 따른 기울기 효율

그림 7에서 보는 바와 같이 레이저 매질의 길이가 점점 길어 질수록 기울기 효율은 선형적으로 감소하고 있음을 알 수 있다. 기울기 효율이 낮다는 것은 입력 전력의 변화율에 대해서 레이저의 출력 전력 변화가 작다는 것이다. 즉 입력 전력을 강하게 해주더라도 그 변화만큼 레이저의 출력 전력을 얻을 수 없다. 그러므로 기울기 효율을 좋게 하기 위해서는 레이저 매질의 길이가 짧을수록 좋다.

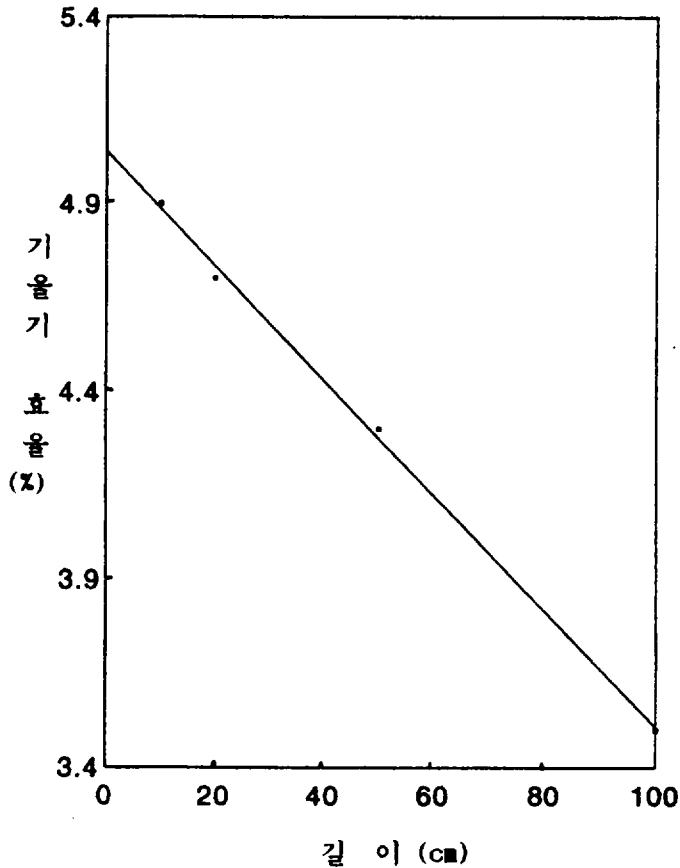


그림 7. 길이에 따른 기울기 효율

2) 레이저 매질의 길이에 따른 문턱 여기 전력

그림 8에서 보는 바와 같이 레이저 매질의 길이에 따라서 문턱 여기 전력은 비례하고 있음을 알 수 있다. 그러나 이 값은 레이저 매질 전체에 대한 값이므로 레이저 설계할 때 그리 중요한 요소는 아니다.

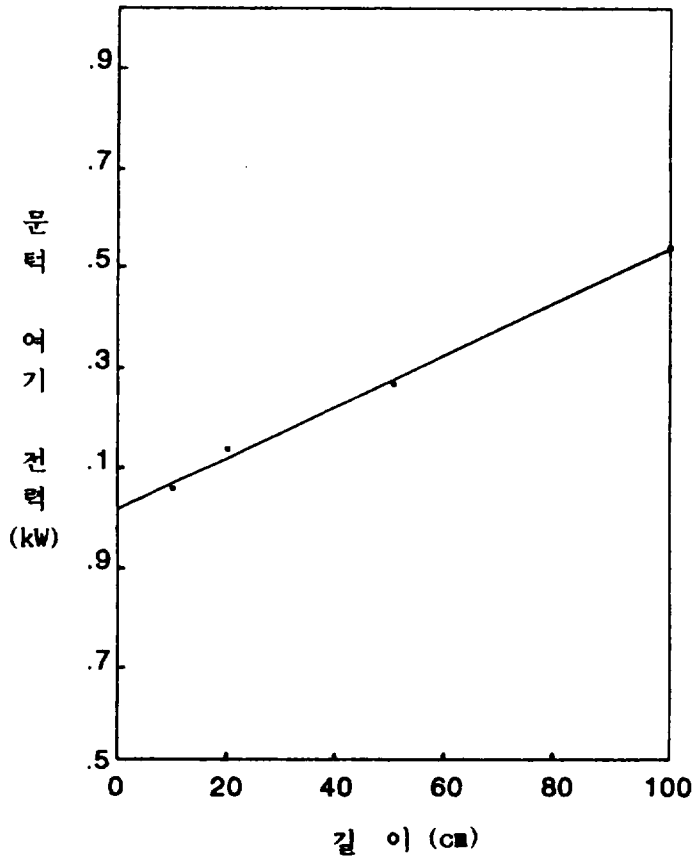


그림 8. 길이에 따른 문턱 여기 전력

3) 레이저 매질의 길이에 따른 단위 면적당 문턱 여기 전력

그림 9에서 보는 바와 같이 레이저 매질의 길이에 따라서 단위 면적당 문턱 여기 전력은 길이가 짧을 수록 낮은 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 즉 낮은 전력에서도 레이저 발진이 시작되므로 좋은 레이저 설계에 있어서 단위 면적당 문턱 여기 전력의 레이저 요소만 생각했을 때는 레이저의 매질이 길이가 짧을수록 좋다.

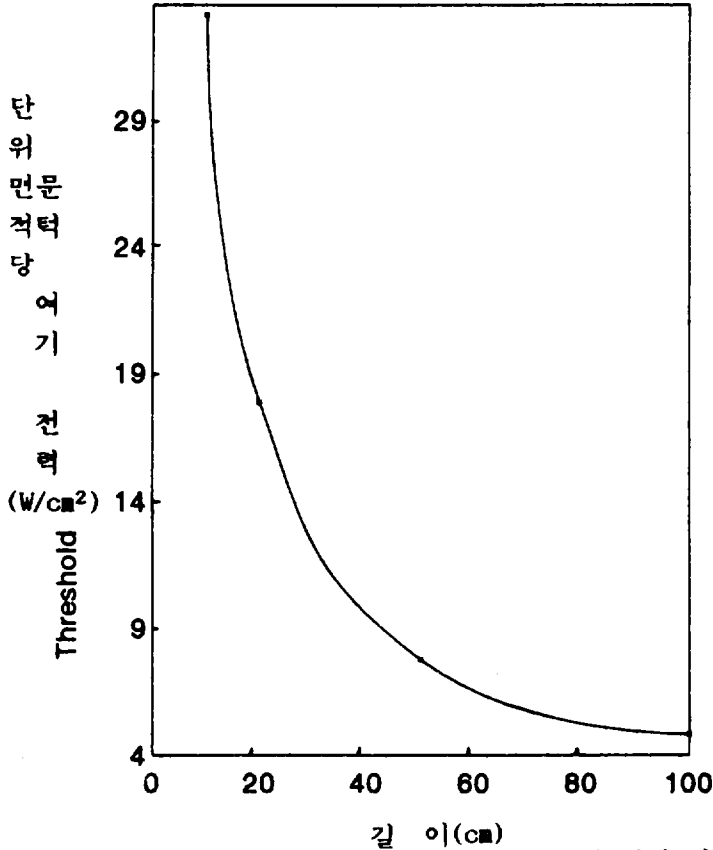


그림 9. 길이에 따른 단위 면적당 문턱 여기 전력

그러므로 레이저 매질의 길이와 기울기 효율, 문턱 여기 전력사이의 관계를 이론적으로 계산해 본 결과 길이가 짧을수록 기울기 효율은 좋은 반면 오히려 단위 면적당 문턱 여기전력이 높아지므로 좋은 레이저 설계에 있어서 적당하지 않음을 알 수 있다. 역으로 낮은 단위 면적당 문턱 여기 전력으로 레이저 발진을 얻기 위해 레이저 매질의 길이를 무한정 길게 해서도 안된다. 따라서 같은 종류의 레이저 매질이면서 다른 조건이 모두 같다면 이론적으로 계산한 결과 좋은 레이저 설계하는데 있어서 레이저 매질의 길이는 50~70 cm가 가장 적당하다.

IV. 결 론

Nd:YAG 레이저는 고체 레이저의 가장 일반적인 형으로서 레이저 매질은 Y^{3+} 이온의 일부가 Nd^{3+} 이온으로 대체된 $Y_3Al_5O_{12}$ 의 결정이거나 단순히 Nd^{3+} 이온으로 첨가된 유리이다.

출력거울 반사율에 대해서는 실제로 본 연구에서 계산하지 않았지만 Nd:YAG 레이저의 기울기 효율과 문턱 여기 전력은 식 (22)와 식 (25)에 있는 변수들을 보았을 때 출력거울 반사율에도 의존함을 알 수 있다. 만약에 출력거울 반사율이 100% 라고 가정했을 때 기울기 효율은 0이 되어버린다. 즉, 어느 정도 레이저 공동내에 손실이 있어야 레이저 동작이 가능하다는 것이다.

그리고 이론적으로 레이저 매질의 길이에 따른 기울기 효율과 단위 면적당 문턱 여기 전력을 계산한 결과 기울기 효율은 매질의 길이에 따라 선형적으로 감소하는 것으로 보아 길이가 짧을수록 점점 좋아진다. 그러나 레이저 매질의 길이가 짧을수록 단위 면적당 문턱 여기 전력은 오히려 높아지므로 레이저 설계에 있어서 좋지 않다. 그러므로 낮은 문턱 여기 전력으로 레이저 발진을 얻기 위해서 레이저 매질의 길이를 길게해야 한다. 그러나 기울기 효율은 길이가 길어짐에 따라 감소하기 때문에 레이저 매질의 길이를 무한정 길게해서는 안된다.

실제로 같은 매질이면서 다른 조건이 같을 때 매질의 길이를 10cm, 20cm 50cm, 100cm로 하여 기울기 효율과 단위 면적당 문턱 여기 전력을 계산한 결과 50cm 70cm정도로 했을 때 가장 적당하다. 그러므로 레이저 매질의 적당한 크기의 선택은 태양 여기 고출력 레이저 설계에 있어서 중요하게 작용함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. 서 두 환, Laser 와 그 應用, 한국물리학회지 새물리, 제 14집, pp.216-225 (1974).
2. 이상수 이민회 譯 (존 R. 파이어스 著), 양자전자공학(Quantum Electronics) 전파과학사, pp.78 (1990).
3. A.L.Schawlow and C.H.Townes, " Infrared and Optical Masers ", Physical Review, Vol.112, No.4, pp.1940 (1958).
4. T.H.maiman, "Optical and Microwave-optical experients in ruby", Physical Review letters, vol.4, no.11 pp.564 (1960).
5. T.H.Maiman, R.H.Hoskins, I.J.D'Haenens, C.K.Aswa and V.Evtuhov, "Stimulated Optical emission in Fluorescent SolidsⅢ Spectroscopy and Stimulated Emission in Ruby", Physical Review, Vol.123, No.4, pp.1151 (1961).
6. E.Snitzer, "Optical Maser Action of Nd³⁺ in a Barium Crown Glass", Physical Review Letters, Vol.7, No.12, pp.444 (1961).
7. D.F.Nelson and W.S.Boyle, "A Continuously Operating Ruby Optical Maser", Applied Optics, Vol.1, No.2, pp.181 (1962).
8. Z.J.Kiss, H.R.Lewis and R.C.Duncan, Jr., "Sun Pumped Continuous Optical Maser", Applied Physics Letters, Vol.2, No.5, pp.93 (1963).
9. L.F.Johnson and K.Nassau, "Proceedings of the Institute of Radio Engineers", IRE, New York, (1961).
10. J.E.Geusic, H.M.Marcas and L.G.Van Uitert, "Laser Oscillations in Nd-Dopped Yttrium Aluminum, Yttrium Gallium and Gadolinium Garnets", Applied Physics Letters, Vol.4, No.10, pp.182 (1964).
11. C.G.Young, " A Sun-Pumped Modulated Laser ", Applied Optics, Vol.5, pp. 993-997, (1966).
12. C.W.Reno, " Solar-Pumped Modulated Laser ", RCA Review, pp.149 (1966).
13. W.Koehner, "Absorbed Pump Power, Thermal Profile and Stresses in a CW Pumped Nd:YAG Crystal", Applied Optics, Vol.9, No.6, pp.1429 (1970).

14. M. Weksler and J. Schwartz, "Solar-Pumped Solid-state", Quantum Electron, Vol. 24, No. 6, pp. 1222-1228 (1988).
15. 김영덕 譯 (O. Svelto 著), 레이저의 원리, 대한교과서주식회사, pp. 1-6, 87-89, 98-99, 215, 162-163 (1984).
16. 인성과학무역상사, 레이저와 그 주변, 인성과학무역상사, pp. 7, 10-12.
17. 이용신, 빛, 사계절, pp. 288-290 (1989).
18. 이상수 譯 (Jhon M. Carroll 著), 레이저 이야기, 전파과학사, pp. 30-34, (1976).
19. 김용평, "레이저, 신비의 빛", 과학동아, Vol. 2, pp. 26-27, (1990).
20. Laman A. Brown, "Nd:YAG and Nd:Cr:GSGG as candidates for Solar Pumped Solid-State Lasers", M. A. Thesis, Hampton University, pp. 7, 10 (1989).
21. W. Zittel, "Design Studies for a Solar PumpED Laser Device", Forschungsbericht DFVLR-FB87-39, Deutsche Forschungs- and Versuchsanstalt fur Luft - und Raumfahrt, (1987).
22. Jean-Marc Heriitier, J. Henden and R. Aubert, "Flashlamp pumped Nd:YAG lasers for scientific applications," Flashlamp Pumped Laser Technology, Vol. 609, pp. 168, 169 (1986).
23. J. H. Goncz, "Resistivity of Zenon Plasma", J. Appl. Phys., Vol. 36, pp. 742 (1965).
24. J. R. Oliver, "A Comparison of Rare-Gas Flashlamp", IEEE, J. Quantum Electron., QE-5, pp. 232 (1969).
25. Paolo Laporta, Vittorio Maggni and Orazio Svelto, "Comparaative Study of the Optical Pumping Efficiency in Solid - State Lasers," IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-21, 8, 1211 (1985).
26. In Heon Hwang and Ja H. Lee, Member, IEEE, "Efficiency and Threshold Pump Intensity of CW Solar-Pumped Solid-State Lasers", IEEE J. Quantum Electron., Vol. 27, pp. 2129-2131 (1991).