碩士學位 請求論文

三 角 函 數 의 　指 導 法

指導敎授　高　胤　熙

濟州大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

姜　炯　植

1997年　8月

三角函數의 指導法

指導敎授 高 胤 熙

이 論文을 碩士學位 請求論文으로 提出함

1997年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育 專攻

提出者 姜 炯 植

姜炯植의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1997年 7月 日

審査委員長 방 은 숙

審 査 委 員 고 윤 희

審 査 委 員 정 승 달

<초록>

삼각함수의 지도법

강 형 식

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 윤 희

본 논문에서는 현행 고등학교 교과 내용을 중심으로 시각적으로 인지할 수 있는 삼각함수의 정의를 도입하여 고찰하고자 한다. 우선 삼각함수의 역사적 배경을 살피고, 각의 크기를 길이로 표현하면서 각의 종류, 크기등을 간단한 예를 통해 나타내었으며, 시각적으로 삼각함수를 정의하고 삼각함수의 연속성을 단위원주상에서 증명하여 삼각함수의 미분가능성을 증명하였다.

목　　차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

고등학교 수학교육의 목표는 수학의 기본적인 지식을 바탕으로 사물의 현상을 논리적으로 사고하는 능력을 길러 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 하는 데 있다.

Bloom은 학습효과를 높이기 위한 질이 높은 수업으로 "학습자로 하여금 학습과정에서 적극적으로 참여하게 해 주어야 하며, 수업과정에 적절한 강화가 사용되어야 한다."고 주장하고 있다. 이는 학습자의 능력에 알맞게 학습지도 자료를 재구성해야, 하고 성취동기를 높일 수 있도록 해야 하며 적절한 시기에 행동의 변화에 대한 책임이 뒤따를 필요가 있음을 표현한 것이다.

수학교과에서 삼각함수란 단원은 타 단원보다 학업 성취가 어렵고, 전반적으로 흥미가 낮은 편이어서 교과 내용을 충분히 이해 못하는 학생은 누적 결손 현상이 생기고 있다. 학습 누적 결손을 최대한 줄이려면, 시각적으로 인지할 수 있는 삼각함수의 정의를 도입하여 삼각함수와 관계된 수학적 지식과 사고방법 등이 토지 측량이나 토목 공사 등 우리의 실생활과 아주 밀접한 관련이 있다는 사실을 주지시켜, 삼각함수에 대한 관심과 흥미를 느끼게 해야 한다.

따라서 고등학교 수학교과과정 중 공통 수학에 포함된 삼각 함수 내용의 중요성을 인식시키고, 삼각함수의 기본 개념, 원리, 법칙 등을 이해시킴과 아울러 삼각함수에 대한 흥미를 제고시키고, 합리적으로 문제 해결을 할 수 있게 하는 데 연구의 필요성이 있다고 하겠다.

2. 연구의 목적 및 방법

현행의 교과서는 직각을 90등분하여 1°라고 정의[1)]하고 있다. 단위 원의 중

1) 박두일 · 신동선 (1995), 「교사용지도서(일반수학)」, 교학사 p. 246.

삼각의 크기를 나타내는 실수로 일반각의 크기로 나타낼 수 있다. 역으로 어떤 실수에 대하여 그 실수의 크기에 따른 일반각이 정해진다. 그래서 학생들은 그 개념의 차이를 이해하는데 어려움을 느끼고 있는 것이 사실이다.

이러한 사실을 바탕으로 삼각함수를 좀 더 쉽게 이해하도록 하고, 문제 해결 능력을 기르며 학습 지도 방법 개선을 위한 새로운 삼각함수의 교과 과정을 작성하는데 참고 할 수 있으며, 각의 크기를 원호의 길이[2]로 정의하여 삼각함수에 관한 내용을 보다 폭 넓게 이해시키고 적용할 수 있도록 삼각함수에 관한 내용을 분석, 검토하여 학생들의 보다 효율적인 학습 지도와 학습에 대한 동기 유발이 되도록 하는데 연구의 목적이 있다.

따라서 본 연구는 현행 고등학교 교과 내용을 중심으로 시각적으로 인지할 수 있는 삼각함수의 정의를 도입하여 고찰하고자 한다. 우선 삼각함수의 역사적 배경을 살피고, 각의 크기를 길이로 표현하면서 각의 종류, 크기 등을 간단한 예를 통해 나타내었으며, 시각적으로 삼각함수를 정의하고 삼각함수의 연속성을 단위원주 상에서 증명하여 삼각함수의 미분 가능성을 살펴 보았다.

2) 박두일 · 신동선 (1995),「교사용지도서(일반수학)」, 교학사, p. 246.

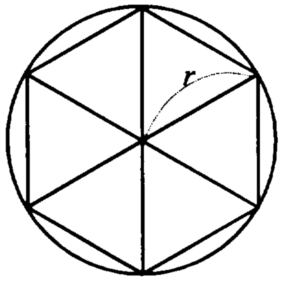
Ⅱ.삼각함수의 역사적 배경

1. π의 역사

원의 지름과 둘레의 길이의 비가 원의 크기에 관계없이 일정함은 먼 옛날부터 경험적 객관적으로 알고 있었다. 이것을 원주율이라 하고 π로 나타낸다.

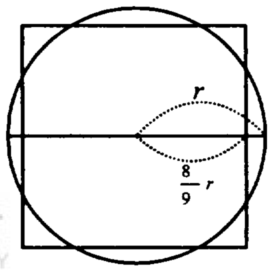
1). 원둘레의 길이는 지름의 약 3배[3]이다.

원둘레의 길이가 원의 지름의 3배보다 길다는 것은 <그림1>처럼 그 안에 꼭 들어가는(내접하는) 정육각형의 한 변의 길이는 r이기 때문에 변 전체의 길이는 원의 지름의 꼭 3배가 된다. 그런데 이 육각형의 한 변의 길이보다 원둘레의 6분의 1의 길이가 더 긴 것은 명백하다.



<그림 1 >

2). 고대 이집트의 수학책에는 원의 넓이는 다음과 같이 구한다고 되어 있다. <그림2>에서 원과 정사각형을 겹쳐서 그려 보고 원 밖으로 나온 정사각형의 부분과 정사각형 밖으로 나와 있는 원의 부분의 거의 같아진 것은 정사각형의 한변의 길이가 원의 지름의 9분의 8일 때라는것을 발견하였던 모양이다. 그래서 원의 넓이는 다음과 같이 구한 것이다. 지름으로부터 그 9분의 1을 빼면 지름의 9분의 8이 남는다. 이것을 제곱하면, 즉



<그림 2 >

원의 넓이= $\left(\frac{8}{9}\times \text{지름}\right)^2$

---

3)김용운 · 김용국(1992), 「재미있는 수학여행(수의 세계)」, 김영사, p. 248.
Petr Beckmann (김인수역주)(1995), 「π의 역사」, 민음사, p. 33.

$$= \frac{64}{81} \times (\text{지름})^2.$$

그런데

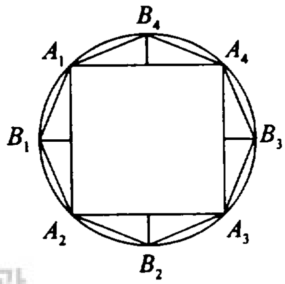
$$(\text{지름})^2 = (2 \times \text{반지름})^2$$
$$= 4 \times (\text{반지름})^2$$

이므로 위의 식은

$$\frac{64}{81} \times 4 \times (\text{반지름})^2.$$

따라서 원주율은

$$\frac{64}{81} \times 4 = \left(\frac{16}{9}\right)^2$$
$$= 3.16049\cdots.$$



<그림 3>

3). 기원전 4백년쯤의 그리스 수학자 안티폰은 옆 그림처럼 원의 넓이를 셈하는 방법을 생각하였다. 먼저 원에 내접하는 정사각형을 그려서 그 면적을 셈하고, 그 다음에 정사각형 밖으로 나와 있는 원의 내부에 <그림3>처럼 이등변삼각형을 그려서 정팔각형을 만들어 그 면적을 그 면적을 계산하고 …이런 식으로 이등변삼각형의 면적을 한없이 더해 가면 마침내는 원의 면적과 같아지는 것이다. 이 생각은 그럴듯 하지만 정십육각형, 정삼십이각형…과 같이 변수가 늘어나게 되면 계산이 터무니없이 복잡해질 뿐더러 정확한 셈을 하기도 어려워진다. 그래서 안티폰 자신도 세밀한 계산은 하지 않았던 것 같다.

4). 기원전 3세기 그리스 과학자 아르키메데스(Archimedes; 287?~212 B.C)는 안티폰의 방법을 조금 개량하여 실제로 원넓이를 계산하였다. 먼저 원을 둘러싼 정사각형을 네 변이 각각 중점에서만 원에 외접하도록 그린다. 이 정사각

형의 면적은 물론 원의 면적보다 크다. 이 면적이

$$(2r)^2 = 4r^2$$

이라는 것은 쉽게 알 수 있다. 한편 원의 내부에 그려진 정사각형(네 모서리만 원과 접하는)은 확실히 원의 면적보다 작다. 이 면적은 $2r^2$이다. 원의 면적은 이 두 값 사이에 있어야 한다.

육각형에 대해서 생각해 보자. 외접하는 정육각형은 앞의 외접정사각형보다 면적이 작다. 그 만큼 육각형이 사각형보다 원에 가깝다는 이야기가 된다. 역으로 내접하는 정육각형은 내접하는 정사각형보다 크다. 그 면적은 역 방향에서 원의 면적에 접근한다. …이런 식으로 내접 및 외접(정)사각형의 변수가 많아질수록 그 변은 더욱더 원주에 접근하게 되고, 원의 면적은 그럴수록 자꾸만 좁혀진 울 안으로 갇히게 된다. <그림4>에서 아르키메데스는 이 절차를 96각형까지 계속해 간 끝에 근사 방법을 써서 결국 원의 면적은

$$3\frac{10}{71}r^2 \text{ 과 } 3\frac{1}{7}r^2$$

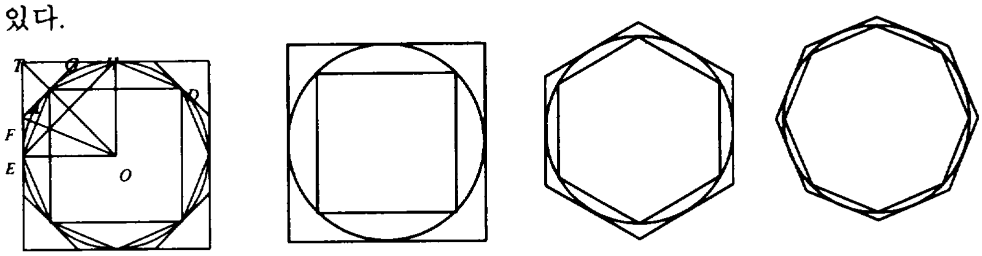
사이에 있다는 것, 그러니까 구하는 원주율은

$$3\frac{10}{71} \text{ 과 } 3\frac{1}{7}$$

사이에 있어야 한다는 사실을 밝혀 내었다.여기서,

$$3\frac{10}{71}=3.1428\cdots,\quad 3\frac{1}{7}=3.1428\cdots$$

이므로 오늘날 π의 값으로 쓰이는 근사값 3.14는 이 때에 구한 것이라고 볼 수 있다.



< 그림 4 >

5). 아르키메데스보다 훨씬 후에 프랑스의 비에트(Viete, F; 1540~1610)는

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$ [4)]

과 같은 관계식을 얻었다.

6). 위 식을 이용하여 네델란드의 루돌프(Ludolph; 1540~1610)는 π의 값을 소수점 아래 35자리까지 계산하였다. 이 값은 당시의 세계 기록일 뿐 아니라 그의 평생 사업이었다.

7). 17세기 부터는 로그의 발견, 미적분학의 발달 등으로 π를 계산하는 많은 관계식이 발표되었다. 1873년 영국의 섄크스(Shanks, W; 1812~1882)는 다음 관계식을 이용하여 π의 값을 707자리까지 계산하였다.

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\left(\text{단 } \tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

이것은 큰 업적이고, 오랫동안 세계 기록을 지키고 있다.

4)Petr Beckmann (김인수역주)(1995), 「π의 역사」, 민음사, p. 136.

2. 삼각법의 역사

삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 것을 삼각법이라 한다. 삼각법[5](trigonometry)이란 말은 원래는 희랍어의 trigon (삼각형)과 metria(측지)라는 두 개의 용어로 된 말이다.삼각법은 천문학, 점성술, 토지 측량과 같은 실용상의 필요에서 그 역사가 대단히 길다. 이집트, 바빌로니아, 중국 등에서 각의 계량 또는 삼각법에 관한 단편적인 기록을 볼 수 있다. 그러나 삼각법을 체계적으로 연구한 가장 오래된 학자는 기원 전 150년경 그리스의 히파르코스(Hipparchos; 190?-125? B.C.)라고 한다.

히파르코스는 천문학을 연구하면서 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 측정할 필요를 느껴 삼각법을 연구한 것으로 알려졌다. 그러나 그의 저서는 전해 내려오는 것이 없으나, 그 후에 프톨레마이오스(Ptolemaeos; 85?-165?)의 저서「Almagest」에서 히파르코스의 논문을 인용한 것이 보인다. 이 책의 내용에 의하면 히파르코스는 현대의 구면 삼각형에 대한 유명한 공식들을 이미 알고 있었던 것으로 짐작한다.

프톨레마이오스는 $\frac{1}{2}^{\circ}$ 부터 180° 까지 $\frac{1}{2}^{\circ}$ 간격으로 원의 모든 중심각에 대한 원의 길이를 구하였다. 그는 원의 반지름의 길이를 60개의 같은 구간으로 나누고 이들 구간의 하나를 단위로하여 현의 길이를 60진법으로 나타내었다.

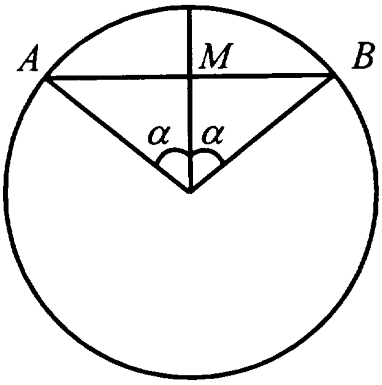
이를테면 중심각 36° 에 대한 현의 길이를 crd를 사용하여

$$\mathrm{car}\,36^{\circ} = 37^{p}4'55''$$

로 나타내었다. 이것은 중심각의 크기가 36° 인 현의 길이는 반지름의 길이의 $\frac{37}{60}$, 반지름의 길이를 60으로 나눈 한 구간의 길이 $\frac{4}{60}$, $\frac{55}{3600}$ 의 합임을 뜻하는 것이다.

---

5)「수학대사전」, 교육서관, p. 415.



< 그림 5 >

이것은 <그림5>으로부터

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{(\text{지름의 길이})} = \frac{crd\,2\alpha}{120}$$

에서 프톨레마이오스가 사용한 현의 길이의 표는 sin의 표와 같은 것임을 알게 된다.

그러나 이 때의 삼각법은 천문학의 한 분야로서 다루어졌다. 이와 같이 그리스 사람들이 $2\sin\alpha$를 계산한 것에 대하여 인도에서는 각 α에 대하여 $\sin\alpha$와 $1-\cos\alpha$를 구했고, 아리아비타(Aryabhata; 476-550?)의 저서에서는 cosine에 관한 공식들이 있다. 아라비아 사람들은 인도의 영향으로 기하학적 계산을 대수적으로 나타냈다. 아불 와파(Abul-Wafa; 940-998)는 삼각법에 tangent의 도입과 $15'$ 마다의 sine 과 tangent의 표의 계산을 하였다. 그 후, 15세기에 비엔나의 뮐러 (Muller, J.; 1436-1476. Regiomontanus라고 더 알려졌음) 가 1464년 경에 써서 1533년에야 발간된 「모든 종류의 삼각형(De triangulis Omnimodis)」이란 저서에서 처음으로 삼각법이 천문학에서 분류된 독립 분야로서 계통적으로 다루어졌다. 이 책에서는 주어진 요소에 따라 평면 삼각형이나 구면 삼각형을 결정하는 문제가 연구되었다.

그러나 일반각이 정확하게 인식된 것은 뉴톤과 오일러에 의하여 삼각함수의 급수전개가 이루어진 이후이다.

Ⅲ. 삼각함수의 정의 및 연속성

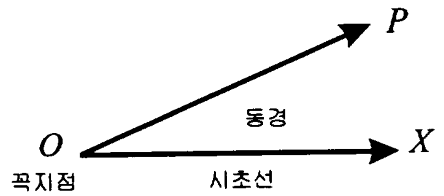
1. 각

정의 1. (각)

평면위의 한 점 O로부터 시작되는 반직선 OP가 반직선 OX에서 회전하여 만들어 지는 도형을 각이라 하고 기호<XOP로 나타낸다.

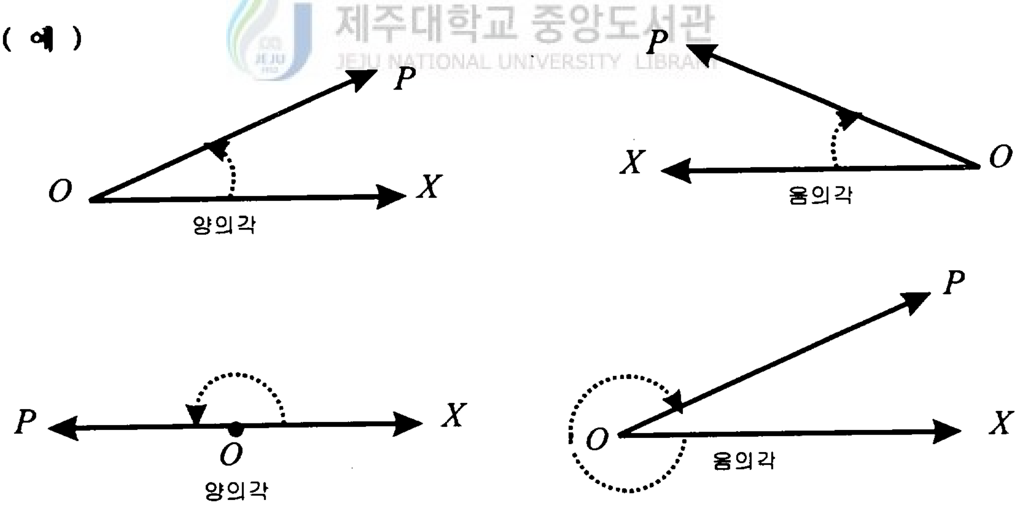
이 때 반직선 OX를 각의 시초선, 반직선 OF를 각의 동경, 점 O를 각의 꼭지점, 반직선 OX, OP를 각의 변이라고 한다. <그림 6>

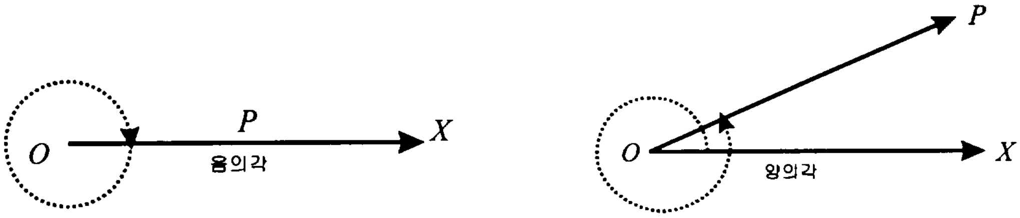
동경 OP가 점O의 둘레를 시계바늘이 돌아가는 방향과 반대인 방향으로 회전해서 생기는 각을 양의 각이라 하고, 또 시계바늘이 돌아가는 방향과 같은 방향으로 회전해서 생기는 각을 음의 각이라 한다.



< 그림 6 >

(예)





< 그림 7 >

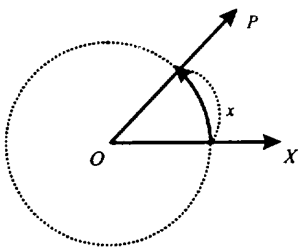
2. 각의 크기

정의 2. (각의 크기.)

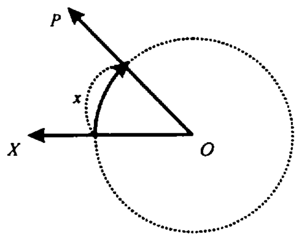
중심이 0인 단위원에서 0를 꼭지점으로 하는 두 개의 반직선 OX, OP가 만드는 <XOP의 크기는 만약 <XOP가 양의 각이면 동경 OP가 원주상에서 지나간 호의 길이 x를 <XOP의 크기로 정의하고, 만약 <XOP가 음의 각이면 동경 OP가 원주상에서 지나간 호의 길이가 x일 때 $-x$로 정의한다.

<그림 8> 참 조

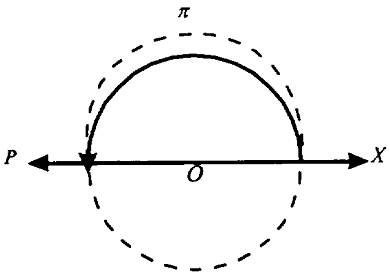
(예)



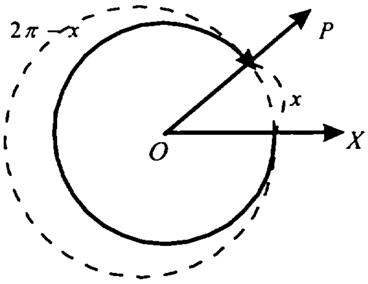
∠XOP의 크기 : x



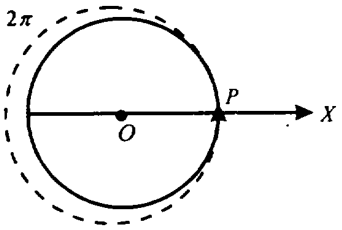
∠XOP의 크기 : $-x$



∠XOP의 크기 : π

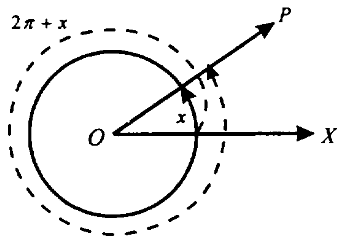


∠XOP의 크기 : $x-2\pi$



∠XOP의 크기 : 2π

< 그 림 8 >



∠XOP의 크기 : $2\pi+x$

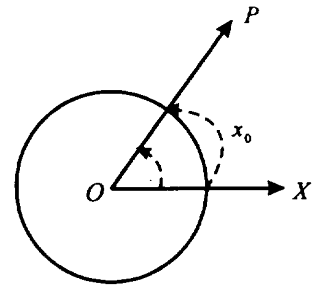
참고

시초선 OX가 주어지고, <XOP의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치는 정해진다. 그러나 동경 OP의 위치만 정해졌을 경우에 동경 OP와 시초선 OX가 나타내는 각은 여러가지로 표현된다.

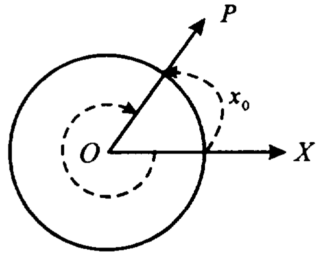
1). <XOP의 크기가 정해질 때 각 <XOP의 크기를 x_0라고 하면 단위원 (1,0)에서 원주상를 따라 호의 길이 x_0만큼 이동한 점과 꼭지점 O를 연결한 반직선의 동경이다.< 그림 9 >참조

2).시초선 OX와 동경 OP가 정해질 때 아래의 각들은 동경 OP가 모두 같으나 크기는 서로 다르다. < 그림 10 > 참조

(예)

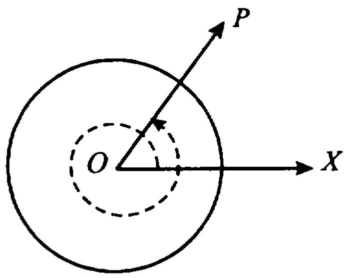


각의 크기 : x_0

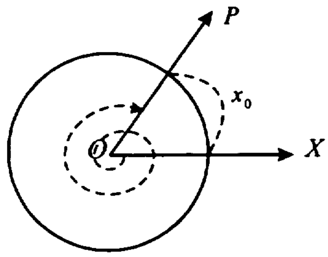


각의 크기 : $-2\pi + x_0$

< 그림 9 >



각의 크기 : $2\pi + x_0$



각의 크기 : $-4\pi + x_0$

<그림 10 >

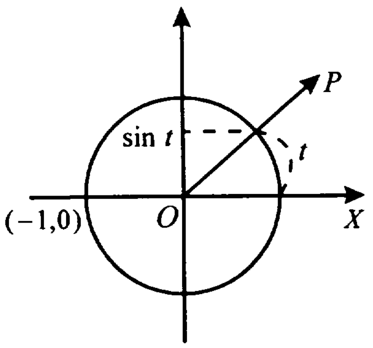
3. sine 함수, cosine 함수

정의 3 . (sine함수, cosine함수)

i). sine함수

sine함수는 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수로서 대응 규칙은 다음과 같다. 정의역의 임의의 원소 t가 주어질 때 좌표평면에서 시초선 OX를 양의 x축이라 하고 각의 크기가 t인 <XOP를 구하면 동경 OP가 단위원과 만나는 점의 y좌표를 t에 대한 sine함수값이라고 정의 하고 기호로 sin t 이라

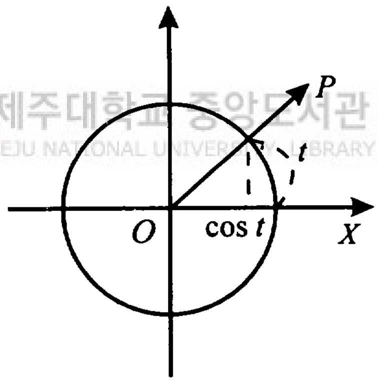
표시한다. < 그림 11> 참조



< 그림 11 >

ii). cosine함수

cosine함수는 정의역과 공역이 실수전체의 집합인 함수로서 대응규칙은 다음과 같다. 좌표평면에서 시초선 OX를 양의 x축이라 하고 각의 크기가 t인 <XOP를 구하면 동경OP가 단위원과 만나는 점의 x좌표를 t에 대한 cosine 함수값이라고 정의 하고 기호로 cos t이라 표시한다.<그림 12 > 참조



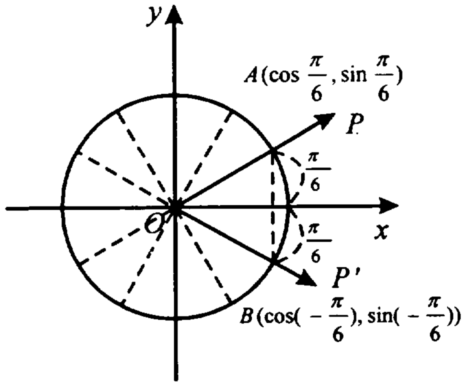
< 그림 12 >

(예)

1. $t=\frac{\pi}{6}$ 일 때, $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t=-\frac{\pi}{6}$ 일 때, $\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(증명)



< 그림 13 >

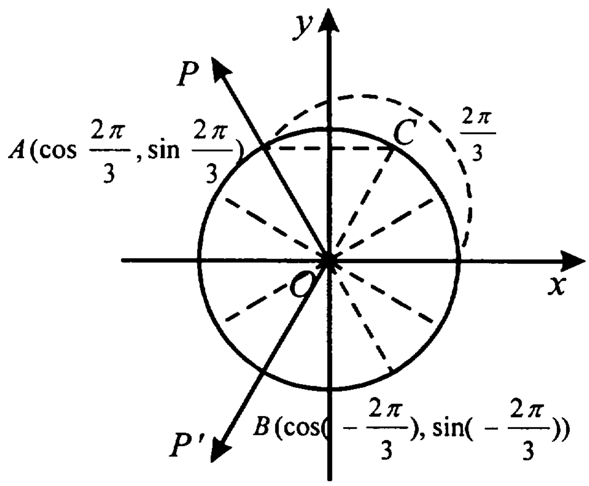
위 그림에서 △OAB는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로, A의 좌표 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$이고 B의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$이다. 그러므로

$$\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\ \cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2},\ \cos(-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. $t=\frac{2\pi}{3}$ 일 때, $\sin(\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t=-\frac{2\pi}{3}$ 일 때, $\sin(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$, $\cos(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(증명)



< 그림 14 >

위 그림에서 △OAC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로 A의 좌표 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$이고, B의 좌표는 A좌표의 x축에 대한 대칭점이므로 $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$이다. 그러므로

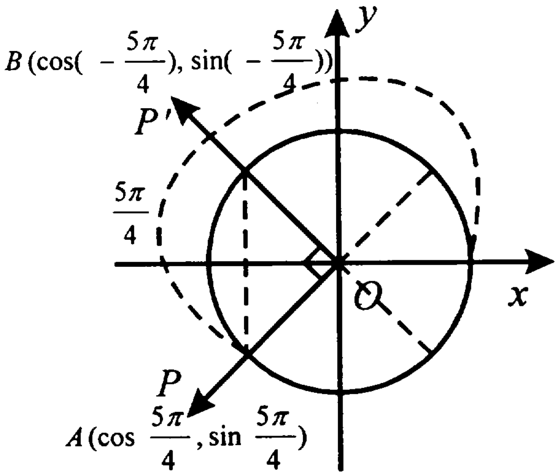
$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\ \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\ \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. t= $\frac{5\pi}{4}$ 일 때, $\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

t= $-\frac{3\pi}{4}$ 일 때, $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(증명)



< 그림 15 >

위 그림에서 $\triangle OAB$는 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$인 직각삼각형이다. 그러므로 A의 좌표 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$이고, B의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$이다. 그러므로

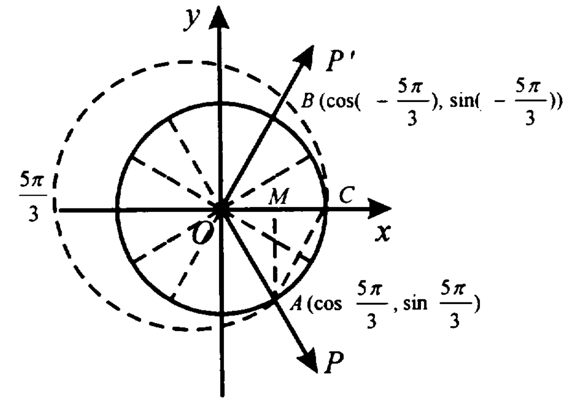
$$\cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(-\frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

4. $t=\frac{5\pi}{3}$ 일 때, $\sin(\frac{5\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{5\pi}{3})=\frac{1}{2}$

$t=-\frac{5\pi}{3}$ 일 때, $\sin(-\frac{5\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-\frac{5\pi}{3})=\frac{1}{2}$

(증명)



< 그림 16 >

위 그림에서 △OAC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로 A의 좌표 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$이고, B의 좌표는 A좌표의 x축에 대한 대칭점이므로 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$이다. 그러므로

$$\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{-5\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. 삼각함수의 상호관계

정의 4. (tangent함수 , cotangent함수 , secont함수 , cosecont함수)
tangent함수 , cotangent함수 , secont함수 , cosecont함수를 tan, cot, sec, csc로 나타내고,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad (\cos t \neq 0),$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}\ ,$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}\ ,\quad (\cos t \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}\ ,\quad (\sin t \neq 0)$$

로 정의한다.

정리 1. 삼각함수의 상호관계

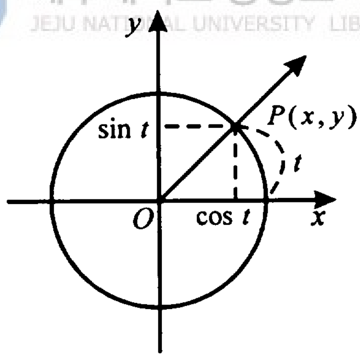
$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sec^2 t - \tan^2 t = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 t - \cot^2 t = 1$$

(증명).

<그림17>과 같이, 각의 크기 t로 정해지는 동경과 단위원과의 교점을 P(x, y)라 하면



<그림 17>

$$\sin t = y, \quad \cos t = x, \quad \tan t = \frac{y}{x}$$

이므로

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$$\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{OP}^2$$

이므로

$$\therefore \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad .$$

$$1 + \tan^2 t = 1 + \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2$$

$$= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= \sec^2 t$$

$$\therefore \quad \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \quad .$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^2$$

$$= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 t$$

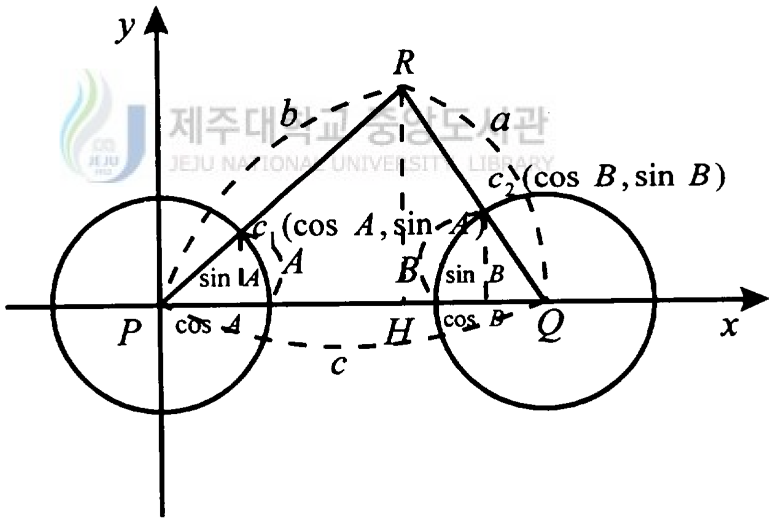
$$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2 t - \cot^2 t = 1$$

5. sine법칙, cosine법칙

정리 2. sine법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

(증명). $\overline{PQ} = c$, $\overline{QR} = a$, $\overline{PR} = b$인 삼각형 PQR에서 <그림18>과 같이 좌표축을 정하고, 중심을 P로 하는 단위원과 변 PR가 만나는 점을 C_1, 점 C_1에서 x축에 수선 C_1H_1을 긋고, 점 Q를 중심으로 하는 단위원과 변 QR가 만나는 점을 C_2, 점 C_2에서 x축에 수선 C_2H_2내린다. 또 꼭지점 R에서 x축에 수선 RH를 내리면,



< 그림 18 >

$$\triangle PH_1C_1 \sim \triangle PHR$$

$$1 : b = \cos A : \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = b \cos A$$

$$1 : b = \sin A : \overline{RH}$$

$$\therefore \overline{RH} = b \sin A$$

$$\triangle QH_2C_2 \sim \triangle QHR$$

$$1 : a = \cos B : \overline{QH}$$

$$\therefore \overline{QH} = a \cos B$$

$$1 : a = \sin B : \overline{RH}$$

$$\therefore \overline{RH} = a \sin B$$

$$\overline{PH} = b\cos A, \qquad \overline{QH} = a\cos B, \qquad \overline{RH} = b\sin A$$

여기서 꼭지점 R의 좌표를 구하면 Px를 시초선으로 볼 때 변 PR는 각 A를 나타내는 동경이므로

C (bcosA, bsinA)-------------①

한편, Qx를 시초선으로 볼 때 변 QR는 각 π-B를 나타내는 동경이므로

C (c - $a$cosB, $a$sinB)--------------②

앞의 ①,②에서 꼭지점 R의 y좌표를 비교하면,

$$b \sin A = a \sin B$$

따라서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

비슷한 방법으로

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

따라서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

정리 3. (cosine 제1법칙)

$$a = c\cos B + b\cos C,$$
$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A,$$

(증명). $\triangle ABC$의 꼭지점 C의 좌표를 다음과 같이 두 가지로 나타낼 수 있음을 알고 있다.

$$C(\ b\cos A,\ b\sin A\ ),\quad C(\ c - a\cos B,\ a\sin B\ )$$

여기서, 꼭지점 C의 x좌표를 비교하면

$$b\cos A = c - a\cos B.$$

이므로,

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

비슷한 방법으로

$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$a = c\cos B + b\cos C.$$

정리 4. cosine 제2법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos A,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(증명). 앞의 cosine 법칙에 차례로 a, b, c를 양변에 곱하면

$$a^2 = ab\cos C + ac\cos B, \text{---------------}①$$

$$b^2 = bc\cos A + ba\cos C, \text{---------------}②$$

$$c^2 = ca\cos B + cb\cos A. \text{---------------}③$$

여기서 ①-②-③ 하면,

$$a^2 - b^2 - c^2 = 2bc\cos A$$

즉,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

비슷한방법으로 b^2, c^2 을 구하면

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos A,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

6. 삼각함수의 성질

정리 5. $2n\pi+\theta$ 의 삼각함수

$$\sin(2n\pi+\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(2n\pi+\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(2n\pi+\theta) = \tan\theta \quad (\text{ 단 n은 정수 })$$

(증명). n을 정수라 하면, 각의 크기가 $2n\pi+\theta$ 와 θ 를 나타내는 동경은 일치하므로 주어진 관계식을 얻는다.

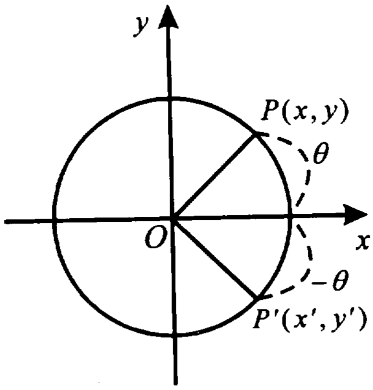
정리 6. $-\theta$ 의 삼각함수

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

(증명). 각의 크기가 θ와 $-\theta$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고, 반지름 1인 원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$이라 하면, 점 P와 P'은 x축에 대하여 대칭이므로 <그림19> 참조.



<그림 19>

$$x' = x, \quad y' = -y$$

따라서,

$$\sin(-\theta) = y' = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = x' = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta .$$

정리 7. $\pi \pm \theta$의 삼각함수

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

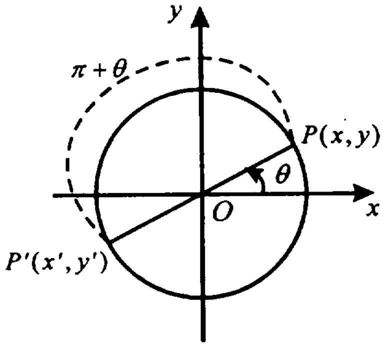
$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

(증명). 각의 크기가 θ와 $\pi+\theta$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름 1인 원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$이라 하면, 점 P와 P'은 원점에 대하여 대칭이다. <그림20> 참조.



<그림 20 >

$$x' = -x, \quad y' = -y$$

따라서

$\sin(\pi + \theta) = y' = -y = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = x' = -x = -\cos\theta$

$\tan(\pi + \theta) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x} = \tan\theta$

위의 관계식에서 θ대신에 $-\theta$를 대입하여 각의 크기가 $\pi-\theta$인 삼각함수를 각의 크기가 θ인 삼각함수로 나타내면,

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

정리 8. $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ 의 삼각함수

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

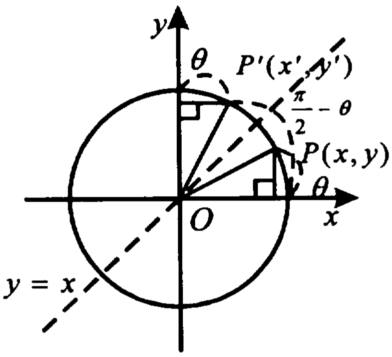
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

(증명). 각의 크기가 θ와 $\frac{\pi}{2} - \theta$로 나타내는 동경과 O를 중심으로 하고, 반지름 1인 원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $p'(x', y')$이라 하면 점 F와 p' 은 직선 y = x에 대하여 대칭이므로 <그림21> 참조.

$$x' = y,\ y' = x$$



< 그림 21 >

따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = y' = x = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x' = y = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

위의 관계식에서 θ 대신에 $-\theta$를 대입하여 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}+\theta$인 삼각함수를 각의 크기가 θ인 삼각함수로 나타내면

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$$

정리 9. 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

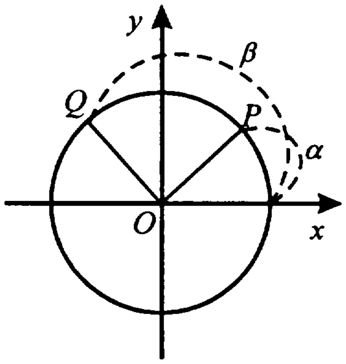
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(증명). <그림22>과 같이, 좌표평면 위의 단위원 O와 x축과의 교점을 A라 하자. x축의 양의 부분을 시초선으로 하고 각의 크기가 α, β인 각을 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 각각 P,Q라 한다.



<그림 22>

이 때 점 P,Q의 좌표는 각각

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

이고,

$$\angle POQ = \beta - \alpha,\ \ \overline{OP} = 1\ ,\ \ \overline{OQ} = 1$$

△POQ에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{PQ}^{\,2} = \overline{OP}^{\,2} + \overline{OQ}^{\,2} - 2\,\overline{OP}\,\overline{OQ}\cos\angle POQ$$

이므로,

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos(\beta - \alpha).$$

위식을 전개하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \text{ ---------- ①}$$

식 ①은 각의 크기가 α, β인 임의의 각에 대하여 성립하므로, β 대신에 $-\beta$를 대입하면

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\{\alpha-(-\beta)\}$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{-------②}$$

식 ②를 이용하여 다음 식을 풀면

$$\cos\{(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\} = -\sin(\alpha+\beta)$$

임을 이용하면

$$\sin(\alpha+\beta) = -\cos\{(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\beta\}$$
$$= -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

따라서

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \text{------------③}$$

식 ③의 β 대신에 $-\beta$를 대입하면

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \text{------------④}$$

①②③④를 풀면

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

정리 10. 2배각의 공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha ,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan}{1 - \tan^2 \alpha} ,$$

정리 11. 3배각의 공식

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

정리 12. 반각의 공식

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

정리 13. 곱을 합 또는 차로 변형하는 공식

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

정리 14. 합 또는 차를 곱으로 변형하는 공식

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

7. sine 함수와 cosine 함수의 연속성

정의 5. 함수의 연속성

함수 f가 와 그 근방에서 정의되어 있을 때 임의의 양의수 ε을 주더라도 양의수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$이면 반드시

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

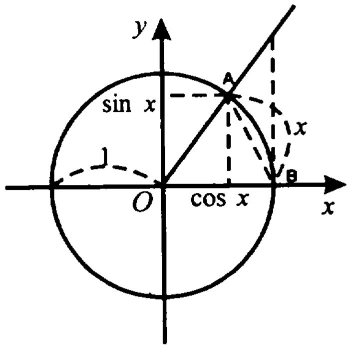
가 성립하면 f 는 $x=a$에서 연속이다. 그리고 실수의 어떤 개구간에서 정의되어 실수값을 취하는 함수 $f(x)$가 개구간의 모든 점에서 연속이면 함수는 그 개구간에서 있어서 연속이라고 한다.

정리 15. 임의 실수 x에 대하여

$$|\sin x| < |x|$$

이다.

(증명)



<그림 23 >

<그림 23>에서 삼각형OAB의 면적 < 부채꼴OAB의 면적이므로

$$\left| \frac{1}{2}\sin x \right| < \left| \frac{1}{2}x \right|$$

$$\therefore \ |\sin x| < |x|$$

정리 16. 임의의 실수 t_1 과 t_2에 대하여

(1) $|\sin t_2 - \sin t_1| \le |t_2 - t_1|$.

(2) $|\cos t_2 - \cos t_1| \le |t_2 - t_1|$.

(증명)

(1)의 증명

정리 14, 정리 15에 의하여

$$|\sin t_2 - \sin t_1| = \left| 2\cos\frac{t_1 + t_2}{2}\ \sin\frac{t_1 - t_2}{2} \right|$$

$$\le \left| 2\sin\frac{t_1 - t_2}{2} \right|$$

$$\le \left| 2\frac{t_1 - t_2}{2} \right|$$

$$= |t_1 - t_2|$$

(2)의 증명

(1)의 증명과 같은 방법에 의하면

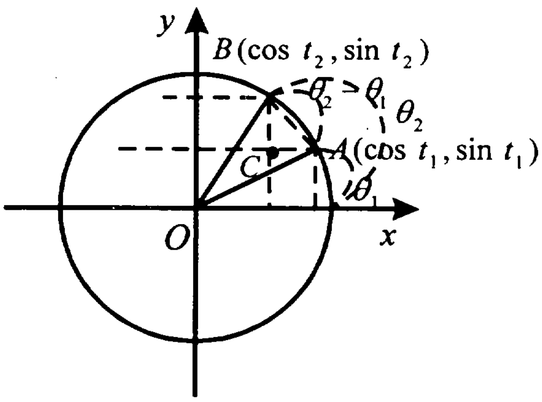
$$|\cos t_2 - \cos t_1| = |t_2 - t_1|$$

※ 참고

정리 16.를 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(증명).

t_1:제1상한 t_2:제1상한



< 그림 24 >

임의의 t_1, t_2에 대하여 $t_1 = \theta_1 + 2n\pi$, $t_2 = \theta_2 + 2m\pi$ (여기서 m, n 은 정수)이라 하고 $0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$ 하자. 그러면 다음 부등식이 성립한다.

$$|t_2 - t_1| = |\theta_2 - \theta_1 + 2(m-n)\pi| \ge |\theta_2 - \theta_1|$$

왜냐하면,

첫째, $\theta_2 > \theta_1$ 일 때 만약 m > n 이면

$$|t_2 - t_1| = |\theta_2 - \theta_1 + 2(m-n)\pi| \ge |\theta_2 - \theta_1|$$

만약 m = n 이면

$$| t_2 - t_1 | = | \theta_2 - \theta_1 |$$

그리고, 만약 m < n 이면

$$\begin{aligned} | t_2 - t_1 | &= | \theta_2 - \theta_1 + 2(m-n)\pi | \\ &= | \theta_1 - \theta_2 + 2(n-m)\pi | \\ &= | \theta_1 - \theta_2 + 2\pi + 2(n-m-1)\pi | \\ &\geq | \theta_1 - \theta_2 + 2\pi | \\ &\geq | \theta_1 - \theta_2 | \\ &= | \theta_2 - \theta_1 | \qquad (\because 0 \leq | \theta_2 - \theta_1 | \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

위의 결과들을 종합하면

$$| t_2 - t_1 | \geq | \theta_2 - \theta_1 |$$

둘째, $\theta_2 = \theta_1$ 일 때

$$| t_2 - t_1 | = | \theta_2 - \theta_1 + 2(m-n)\pi | = | 2(m-n)\pi | \geq 0$$

따라서

$$| t_2 - t_1 | \geq | \theta_2 - \theta_1 |$$

셋째, $\theta_2 < \theta_1$ 일때도 위와 비슷한 방법으로 주어진 부등식을 증명할 수 있다. 결론적으로

$$| t_2 - t_1 | \geq | \theta_2 - \theta_1 |$$

<그림37>의 △ABC에서

$$\overline{BC} \leq \overline{AB} \leq | \theta_2 - \theta_1 | \leq | t_2 - t_1 |$$

$$\overline{BC} = | \sin t_2 - \sin t_1 |$$

이므로

$$| \sin t_2 - \sin t_1 | \leq | t_2 - t_1 | .$$

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} \leq | \theta_2 - \theta_1 | \leq | t_2 - t_1 |$$

$$\overline{AC} = | \cos t_2 - \cos t_1 |$$

이므로

$$| \cos t_2 - \cos t_1 | \le | t_2 - t_1 | .$$

t_1, t_2가 모든 상한에 있을 때 위와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

정리 17. sine 함수와 cosine 함수는 연속이다.

(증명).

정의5와 정리16에 의하여 성립된다.

8. sine 함수와 cosine 함수의 도함수

정의 6. 도함수

함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$가 미분가능한 모든 $f(x)$의 정의역내의 x의 집합을 D라 할 때, 함수

$$f' : D \to R$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

를 함수 $f(x)$의 x에 관한 도함수라한다.

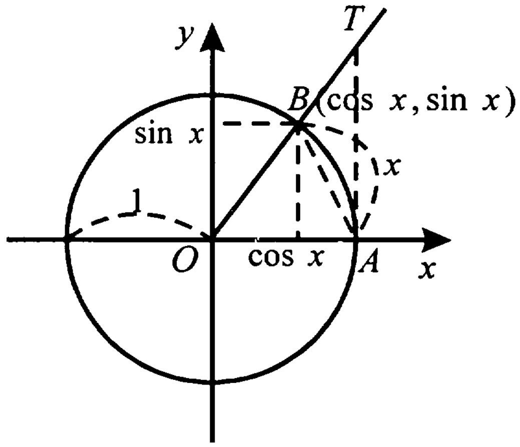
정리 18. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$ 일 때, $f(x) < g(x)$이면,

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x) \quad 즉, \ \alpha \le \beta$$

정리 19. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

(증명).

아래 <그림25>과 같이, 중심이 O인 단위원에서 중심각 AOB의 크기를 x, 점A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선과의 교점을 T라 하면, AOB의 넓이 <부채꼴 AOB의 넓이 < △AOT의 넓이 이므로



< 그림 25 >

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

이므로 각항에 2를 곱하면

$$\sin x < x < \tan x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

위의 부등식의 각 항을 $\sin x$로 나누고 그 역수를 취하면

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

cosine함수는 연속이므로

$$\lim_{x\to0}\cos x = \cos 0 = 1 .$$

따라서 정리18에 의하면

$$\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

가 된다. 그러므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

이다.

정리 20 . (1) y=sin x에서 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(2) y=cos x에서 $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(1)의 증명.

함수 y=sin x에서 x의 증분 $\triangle x$에 대한 y의 증분을 $\triangle$y라 하면

$$\triangle y = \sin(x+\triangle x) - \sin x$$

$$= 2\sin \frac{\triangle x}{2} \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2} \right)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\sin \frac{\triangle x}{2} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \text{-------①}$$

정리 19에 의하여

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} = 1 ,$$

cosine 함수의 연속성에 의하여

$$\lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x$$

이므로 ①에서

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

(2)의 증명.

(1)과 같은 방법으로 증명하면

$$\frac{d}{dx} \cos = -\sin x$$

Ⅳ. 결　　론

이상에서 살펴본 것은 고등학교 현장에서 학생들이 매우 중요시하면서도 가장 부담을 느끼고 있는 수학교과, 특히 그 중에서도 원리의 이해와 적용을 큰 어려움을 안고 있는 부분 중의 하나가 바로 삼각함수임을 교단 경험을 통해 실감하면서, 이에 대한 해결 방법의 한 가지로 본 연구를 진행해 보았다. 미비한대로 연구를 통해 스스로 반성하고 고칠 점이 많았음을 자각하면서 같은 어려움을 체험하고 있는 분들의 관심을 조금이나마 재고하게 할 수 있다면 다행이고 보람으로 생각하고자 한다.

따라서, 본 연구에서는 고등학교 수학 교과과정으로 범위를 한정하고, 그 중 삼각함수의 중요성을 학생들에게 재삼 인식시키고 기본 개념과 원리, 법칙 등을 시각화하여 보다 쉽게 이해시키고, 흥미를 유도하는 방안을 검토해 보았다. 다시 말해서, 각의 개념을 시각적으로 인지할 수 있는 각의 종류, 크기 등을 여러 가지 예시를 통해 나타내 보았으며, 각의 크기를 원호의 길이로 정의하여 삼각함수에 관한 내용을 보다 폭넓게 이해시키고 적용할 수 있도록 하였고, 시각적으로 삼각함수를 정의하고 삼각함수의 연속성을 단위원주상에서 증명하여 삼각함수의 미분 가능성을 살펴보았다.

다만, 충분한 시간과 노력을 기울이지 못하다보니 보다 체계적이고 합리적인 연구가 되지 못한 점이 아쉬움으로 남게 되고, 기존의 이론적인 체계에 오류를 범하지 않았나 하는 반성도 하게 된다.

미비한 점은 앞으로의 연구 과제로 남겨 두기로 하고, 일단 이러한 부분에 좀더 깊은 관심을 기울인다면 학생들이 삼각함수를 제대로 쉽게 이해하는데 도움이 될 것으로 믿으며, 실제 교육현장에서 가르치는 분들이 이러한 방법을 학생들이 수준과 학교 실정에 맞게 재편성하고 응용, 발전시켜 고등학교 수학교육에 조금이나마 보탬이 되었으면 하고, 보다 많은 학생들이 조금이라도 수학교과에 흥미를 가질 수 있는 계기가 되었으면 하는 바람이다.

참 고 문 헌

1. 김용운 · 김용국(1992), 「재미있는 수학여행」, 김영사
2. 장태환 · 서태영 · 유복동 · 김광환 · 박재명(1996), 「공통수학」,동아출판사.
3. 박한식(1994) ,「교사용지도서 (중3수학)」,(주) 지학사
4. 박두일 · 신동선 (1995),「교사용지도서(일반수학)」, 교학사
5. 박두일 · 신동선(1995), 「교사용지도서(수학Ⅱ上)」, 교학사
6. 박한식 · 구광조 · 정지호 · 이동수 · 이강섭 · 황선욱(1996),「공통수학」 (주) 지학사
7. 최용준 (1006),「해법공통수학」, 천재교육(1994),
8. 「수학대사전」, 한국사전연구원
9. Howard(이우영역주),「수학사 (고대및중세편)」, 경문사
10. Petr Beckmann (김인수역주)(1995), 「π의 역사」, 민음사

〈Abstract〉

A Study on "How to Teach the Trigonometric Function" *

Kang Hyung-Sik
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by Professor Ko Yun-hee

The purpose of this thesis is to examine the definition of the trigonometric function that can be recognized visually centering around the content of the present high school curriculum.

The study focuses on :

· examining the historical backgroud of the trigonometric function

· showing the kind and the size of the angle by making use of simple examples with the size of the angle representing the length of the angle

· giving a visual definition of the trigonometric function

· proving the defferentiable of the trigonomtric function by showing the succession of the trigonometric function on the unit circle circumference.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in partial fulfilment of the Requirements for the degree of Master of Education in August, 1997.

感謝의　글

모자람이 많았던 나에게 오늘 이 한편의 論文이 나오기까지 研究에 바쁘신 가운데도 항상 세심한 검토와 조언을 해 주신 指導敎授 高胤熙 교수님과 연수차 영국 Heriot-Watt 대학에 가 계시면서도 많은 지도를 해 주신 高鳳秀교수님 그리고 대학원을 다니는 5학기 동안 많은 가르침과 격려를 해 주신 수학교육과, 수학과 모든 교수님께 깊은 감사를 드리며, 함께 강의를 받으며 서로 의지하고 어려운 일에 협조를 아끼지 않는 대학원 동기생들께도 고마운 마음을 전하고 싶습니다.

그리고 학교 일과 진행에 어려운 속에서도 대학원의 과정을 마칠 수 있도록 배려해 주신 南寧高等學校 校長先生님을 비롯한 여러 선생님과 많은 격려와 용기를 주신 모든 분들께도 감사를 드립니다.

끝으로 많은 어려움 속에서도 인내와 사랑으로 위로해준 아내에게도 고마움을 전합니다.

1997년 8월

강 형 식 드림