科學敎育, 14, 7~21, 1997
Journal of Science education
14, 7~21, 1997

기수법에서 진수의 변환*

양성호** · 고영종***

Change of Base in Numeration System

Yang, Sung-Ho · Ko, Young-Jong

Abstract

In this paper, we investigate how to chang the base in numeration system as follows:

1) To change the base of p-adic number into p^n-adic number.

2) To change the base of p^n-adic number into p-adic number.

3) When $\gcd(n, m) = d$, to change the base of p^n-adic number into p^m-adic number.

I. 서　　론

중등학교 교과과정에서 $s(\neq 10)$ 진수를 $t(\neq 10)$ 진수로 변환하고자 할 경우에 s 진수에서 10진수로 변환한 후, 그 결과를 다시 t 진수로 변환하는 2단계 과정을 거치고 있다. 자리수가 많은 수인 경우에 계산이 아주 복잡하게 되어 학습자들로

* 이 연구는 '96학년도 재단법인 제주대학교 발전기금 학술연구비에 의해 연구되었음
** 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수
*** 서귀포 여자중학교 교사

하여금 진부한 계산과정이 요구될 뿐만 아니라 학습흥미를 잃을 우려가 매우 높다. 다음의 예를 보자.

(예 1) 16 진수 $248143187_{(16)}$ 을 64 진수로 고쳐보자.

$$\begin{aligned}248143187_{(16)} =& 2 \times 16^8 + 4 \times 16^7 + 8 \times 16^6 + 1 \times 16^5 + 4 \times 16^4 \\ & + 3 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 8 \times 16 + 7 \\ =& 8589934592 + 1073741824 + 134217728 + 1048576 \\ & + 262144 + 12288 + 256 + 128 + 7 \\ =& 9799217543 \\ =& 9 \times 64^5 + 8 \times 64^4 + 5 \times 64^3 + 3 \times 64^2 + 6 \times 64 + 7 \\ =& 985367_{(64)}\end{aligned}$$

따라서 $s(\neq 10)$ 진수를 $t(\neq 10)$ 진수로 직접 변환시킬 수 있는 손쉬운 방법을 모색하는 연구는 중등학교의 교육현장에 적용함으로써 학습자의 학습동기와 흥미를 유발 시킬 수 있을 뿐만 아니라 전자공학, 컴퓨터 공학 등 응용분야에서 기초자료로 활용할 수 있는 중요한 과제라 할 수 있다.

Ⅱ. 진수의 변환

$s(\neq 10)$ 진수를 $t(\neq 10)$ 진수로 직접 변환시킬 수 있는 쉬운 방법을 모색하기 위해서 이론적 근거가 되는 정리를 소개하고 실제 예제들을 통해서 그 방법들을 제시하도록 하자.

만일 $s > 10$ 에 대해서 s 진수를 나타내기 위해서는 $10, 11, 12, \cdots, s-1$ 을 나타내는 숫자가 필요한데 이러한 숫자들은 $\overset{1}{0}, \overset{1}{1}, \overset{1}{2}, \cdots, \overset{1}{9}, \overset{2}{0}, \cdots, \overset{3}{0}, \cdots$ 등과 같이 나타내기로 한다. 그리고 s진수 $A = a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_{1(s)}$ 에서 m 이 n의 배수가

아닐 때는 필요한 경우에 $a_{m+1}=0, a_{m+2}=0, \cdots, a_{\alpha n}=0$ 인 자리수들을 a_m 의 앞자리에 추가하여 $A=a_{\alpha n}a_{\alpha n-1}\cdots a_{1(s)}$ 와 같이 자리수의 갯수가 n의 배수가 되도록 일반적으로 고칠 수 있다고 가정한다. 그리고 p 는 $p>1$ 인 정수로 가정한다.

1. p 진수에서 p^n 진수로 변환

(정리 1.1)([1],정리7) $s=p^n$이고 양의 정수인 $A=a_{\alpha n}a_{\alpha n-1}\cdots a_{1(p)}$에 대해서 $t_i=a_{in}p^{n-1}+a_{in-1}p^{n-2}+\cdots+a_{in-(n-2)}p+a_{in-(n-1)}$ (단, $1\le i\le\alpha$)라 하면 $0\le t_i<s$ 이고 $A=t_\alpha t_{\alpha-1}\cdots t_2t_{1(s)}$이다.

p 진수 A 를 p^n 진수로 변환하려면 A 를 뒤에서 부터 n 자리씩 나누어서 한자리의 p^n 진수로 변환하면 된다. 예를 살펴보자.

(예 2) 2 진수 $110101_{(2)}$를 8진수로 나타내려면 (정리 1.1)에 의해 두자리 8진수가 된다. 그러므로 $110101_{(2)}=t_2t_{1(8)}$ 이라 놓으면

$$t_2=1\times2^2+1\times2+0=6,\quad t_1=1\times2^3+0\times2+1=5$$

이다. 따라서 $110101_{(2)}=65_{(8)}$.

(예 3) 2 진수 $11011_{(2)}$ 을 8진수로 고치려고 할 때는 $11011_{(2)}=011011_{(2)}$ $=t_2t_{1(8)}$ 이라 놓으면

$$t_2=0\times2^2+1\times2+1=3,\quad t_1=0\times2^2+1\times2+1=3$$

이다. 따라서 $11011_{(2)}=33_{(8)}$ 이다.

2. p^n 진수에서 p 진수로 변환

(보조정리 2.1)([1],보조정리8) $s=p^n$일때 한자리의 양인 s진수 A 는 n자리 이하의 p진수가 된다. 즉, $m\le n$, $0\le b_i<t$, $b_k\ne0$, $i=1,2,\cdots,k$ 에 대해서

$$A_{(s)}=a_mp^{m-1}+a_{m-1}p^{m-2}+\cdots+a_2p+a_1$$

$$=a_ma_{m-1}\cdots a_{1(p)}$$

이다.

(정리 2.2)([1],정리9) $s = p^n$일때 양의 정수인 s진수 $A = a_\alpha a_{\alpha-1} \cdots a_{1(s)}$에 대해서 위 (보조정리 2.1)에 의하여 A의 각 자리수를 꼭 n 자리의 p 진수로 다음과 같이 나타난다고 하자.

$$a_i = b_{in}p^{n-1} + b_{in-1}p^{n-2} + \cdots + b_{(i-1)n+1}, \quad (1 \le i \le \alpha)$$

그러면

$$A = b_{\alpha n}b_{\alpha n-1} \cdots b_{1(p)}$$

이다.

p^n 진수 A 를 p 진수로 변환하려면 A 의 각 자리수를 n 자리 이하의 p 진수로 변환하면 된다. 예를 살펴보자.

(예 4) 8 진수 $574_{(8)}$ 를 2 진수로 나타내려면 8 진수의 한자리 수는 2 진수의 최대 3 자리 수에 대응된다. 따라서 $574_{(8)} = b_9b_8b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_{1(2)}$ 라 두면

$$4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1, 7 = b_6 \times 2^2 + b_5 \times 2 + b_4, 5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$$

이 되고 $4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1$ 의 양변을 2로 나누어 b_1, b_2, b_3를 구한다. 실제로 구하여 보면 $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$이다. 같은 방법으로 $7 = b_6 \times 2^2 + b_5 \times 2 + b_4$에서 $b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ 그리고 $5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$ 에서 $b_7 = 1, b_8 = 0, b_9 = 1$을 구할 수 있다. 따라서, $574_{(8)} = 101111100_{(2)}$ 이다.

3. p^n 진수에서 p^m 진수로 변환

(보조정리 3.1) $s = p^n$, $t = p^m$ 일 때 m 자리 양의 s 진수인 정수는 n 자리 이하의 t 진수가 된다. 즉, $A = a_m a_{m-1} \cdots a_{1(s)}$ 이면 적당한 $k \le n$ 에 대해서 $A = b_k t^{k-1} + b_{k-1}t^{k-2} + \cdots + b_2 t + b_1$, $0 \le b_i < t$, $b_k \ne 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 이다. 따라서 $A = b_k b_{k-1} \cdots b_{1(t)}$ 이다.

(증명) $A = a_m a_{m-1} \cdots a_{1(s)} = a_m s^{m-1} + a_{m-1} s^{m-2} + \cdots + a_2 s + a_1$

$$\leq (s-1)s^{m-1} + (s-1)s^{m-2} + \cdots + (s-1)s + (s-1)$$

$$= (s-1)(s^{m-1} + s^{m-2} + \cdots + s + 1)$$

$$= (s^m - 1) = (p^n)^m - 1 = p^{mn} - 1 < p^{mn}$$

이다. 진법의 기본정리([1],정리2)에 의하여 $A = b_k t^{k-1} + \cdots + b_2 t + b_1$ 이다. (단, $0 \leq b_i < t$, $b_k \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$) 만일 $k > n$ 이라면 $k - 1 \geq n$ 이므로 $p^{k-1} \geq p^n$, 즉 $p^{m(k-1)} \geq p^{mn}$ 이다. 따라서 $A \geq b_k t^{k-1} \geq t^{k-1} = (p^m)^{k-1} = p^{m(k-1)} \geq p^{mn}$ 가 되어 모순이다. 그러므로 $k \leq n$ 이다.

s 진수 A 의 자리수가 m 의 배수가 아닐 때는 앞자리에 0 인 자리수들을 추가함으로서 $A = a_{\alpha m} a_{\alpha m-1} \cdots a_{1(s)}$ 와 같이 자리수의 갯수가 m 이 배수가 되도록 고칠 수 있다.

(정리 3.2) $s = p^n$, $t = p^m$ 일 때 양의 정수인 s 진수
$A = a_{\alpha m} a_{\alpha m-1} \cdots a_{(\alpha-1)m+1} a_{(\alpha-1)m} \cdots a_{(\alpha-2)m+1} \cdots a_m \cdots a_{1(s)}$ 에 대해서
$a_{im} a_{im-1} \cdots a_{(i-1)m+1(s)} = b_{in} b_{in-1} \cdots b_{(i-1)n+1(t)}$ $(1 \leq i \leq \alpha)$ 이면

$A = b_{\alpha n} b_{\alpha n-1} \cdots b_{(\alpha-1)n+1} b_{(\alpha-1)n} \cdots b_{(\alpha-2)n+1} \cdots b_n \cdots b_{1(t)}$ 이다.

(증명) $A = a_{\alpha m} \cdots a_{(\alpha-1)m+1} + a_{(\alpha-1)m} \cdots a_{(\alpha-2)m+1} \cdots a_m \cdots a_{1(s)}$

$$= a_{\alpha m} s^{\alpha m-1} + \cdots + a_{(\alpha-1)m+1} s^{(\alpha-1)m} + a_{(\alpha-1)m} s^{(\alpha-1)m-1} + \cdots$$

$$+ a_{(\alpha-2)m+1} s^{(\alpha-2)m} + \cdots + a_m s^{m-1} + \cdots + a_1$$

$$= (a_{\alpha m} s^{m-1} + a_{\alpha m-1} s^{m-2} + \cdots + a_{(\alpha-1)m+1}) s^{(\alpha-1)m}$$

$$+ (a_{(\alpha-1)m} s^{m-1} + a_{(\alpha-1)m-1} s^{m-2} + \cdots + a_{(\alpha-2)m+1}) s^{(\alpha-2)m}$$

$$+ \cdots + (a_m s^{m-1} + \cdots + a_1)$$

$a_{im}a_{im-1}\cdots a_{(i-1)m+1\,(s)} = b_{in}b_{in-1}\cdots b_{(i-1)n+1\,(t)}$ $(1 \le i \le \alpha)$, $s = p^n$ 이므로

$$
\begin{aligned}
A &= (b_{\alpha n}t^{n-1} + b_{\alpha n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1})p^{(\alpha-1)mn} \\
&\quad + (b_{(\alpha-1)n}t^{n-1} + b_{(\alpha-1)n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1})p^{(\alpha-2)mn} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (b_{2n}t^{n-1} + b_{2n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{n+1})p^{mn} \\
&\quad + (b_{n}t^{n-1} + b_{n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{1}) \\
&= (b_{\alpha n}t^{n-1} + b_{\alpha n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1})t^{(\alpha-1)n} \\
&\quad + (b_{(\alpha-1)n}t^{n-1} + b_{(\alpha-1)n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1})t^{(\alpha-2)n} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (b_{2n}t^{n-1} + b_{2n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{n+1})t^{n} \\
&\quad + (b_{n}t^{n-1} + b_{n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{1}) \\
&= b_{\alpha n}t^{\alpha n-1} + b_{\alpha n-1}t^{\alpha n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1}t^{(\alpha-1)n} \\
&\quad + b_{(\alpha-1)n}t^{(\alpha-1)n-1} + b_{(\alpha-1)n-1}t^{(\alpha-1)n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1}t^{(\alpha-2)n} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + b_{2n}t^{2n-1} + b_{2n-1}t^{2n-2} + \cdots + b_{n+1}t^{n} \\
&\quad + b_{n}t^{n-1} + b_{n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{1} \\
&= b_{\alpha n}b_{\alpha n-1}\cdots b_{(\alpha-1)n+1}b_{(\alpha-1)n}b_{(\alpha-1)n-1}\cdots b_{(\alpha-2)n+1}\cdots \\
&\quad \cdots b_{2n}\cdots b_{n+1}b_{n}\cdots b_{1\,(t)}
\end{aligned}
$$

p^n 진수 A 를 p^m 진수로 변환하려면 A 를 뒤에서 부터 m 자리씩 나누어서 그 각각들을 n 자리의 p^m 진수로 변환하면 된다. 예를 살펴보자.

(예 5) 64(= 2^6) 진수 $A = 4\overset{4}{2}\overset{3}{0}\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(64)}$ 을 16(= 2^4) 진수로 고치려면 4 자리씩 나누어서 $4\overset{4}{2}\overset{3}{0}_{(64)}$, $\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}_{(64)}$, $\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(64)}$ 들을 16 진수로 고쳐보자.

$$
\begin{aligned}
4\overset{4}{2}\overset{3}{0}_{(2^6)} &= 4 \times (2^6)^2 + 42 \times 2^6 + 30 \\
&= 2^4(4 \times 2^8 + 42 \times 2^2 + 1) + 14 \\
&= 2^4\{2^4(4 \times 2^4 + 10) + 9\} + 14 \\
&= (2^4)^2(4 \times 2^4 + 10) + 9 \times 2^4 + 14 \\
&= 4 \times (2^4)^3 + 10 \times (2^4)^2 + 9 \times 2^4 + 14 \\
&= 4\overset{1}{0}9\overset{1}{4}_{(2^4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}_{(2^6)} &= 30 \times (2^6)^3 + 31 \times (2^6)^2 + 18 \times 2^6 + 54 \\
&= 2^4(30 \times 2^{14} + 31 \times 2^8 + 18 \times 2^2 + 3) + 6 \\
&= 2^4\{2^4(30 \times 2^{10} + 31 \times 2^4 + 4) + 11\} + 6 \\
&= (2^4)^2\{2^4(30 \times 2^6 + 31) + 4\} + 11 \times 2^4 + 6 \\
&= (2^4)^3\{2^4(30 \times 2^2 + 1) + 15\} + 4 \times (2^4)^2 + 11 \times 2^4 + 6 \\
&= (2^4)^4(2^4 \times 7 + 9) + 15 \times (2^4)^3 + 4 \times (2^4)^2 + 11 \times 2^4 + 6 \\
&= 7 \times (2^4)^5 + 9 \times (2^4)^4 + 15 \times (2^4)^3 + 4 \times (2^4)^2 + 11 \times 2^4 + 6 \\
&= 79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6_{(2^4)}
\end{aligned}
$$

$$\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(2^6)} = 40 \times (2^6)^3 + 17 \times (2^6)^2 + 47 \times 2^6 + 23$$

$$= 2^4(40 \times 2^{14} + 17 \times 2^8 + 47 \times 2^2 + 1) + 7$$

$$= 2^4\{2^4(40 \times 2^{10} + 17 \times 2^4 + 11) + 13\} + 7$$

$$= (2^4)^2\{2^4(40 \times 2^6 + 17) + 11\} + 13 \times 2^4 + 7$$

$$= (2^4)^3\{2^4(40 \times 2^2 + 1) + 1\} + 11 \times (2^4)^2 + 13 \times 2^4 + 7$$

$$= (2^4)^4(2^4 \times 10 + 1) + 1 \times (2^4)^3 + 11 \times (2^4)^2 + 13 \times 2^4 + 7$$

$$= 10 \times (2^4)^5 + 1 \times (2^4)^4 + 1 \times (2^4)^3 + 11 \times (2^4)^2 + 13 \times 2^4 + 7$$

$$= \overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$$

이므로 $A = 4\overset{1}{0}9\overset{1}{4}79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6\overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$ 이다.

4. gcd$(n, m) \neq 1$ 일 때 p^n 진수에서 p^m 진수로 변환

(보조정리 4.1) $s = p^n$, $t = p^m$, $d =$gcd(m, n) 일 때 $\frac{m}{d}$ 자리 양의 s 진수인 정수는 $\frac{n}{d}$ 자리 이하의 t 진수가 된다. 즉, $m' = \frac{m}{d}$ 이고 $n' = \frac{n}{d}$ 이라 둘 때 $A = a_{m'}a_{m'-1}\cdots a_{1(s)}$ 이면 적당한 $k \leq n'$ 에 대해서

$A = b_k t^{k-1} + b_{k-1}t^{k-2} + \cdots + b_2 t + b_1$, $0 \leq b_i < t$, $b_k \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 이다. 따라서 $A = b_k b_{k-1}\cdots b_{1(t)}$ 이다.

(증명)

$$A = a_{m'}s^{m'-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

$$\leq (s-1)s^{m'-1} + \cdots + (s-1)s + (s-1) = (s-1)(s^{m'-1} + \cdots + s + 1)$$

$$= s^{m'} - 1 < s^{m'} = (p^n)^{m'} = p^{nm'} = p^{\frac{mn}{d}}$$

진법의 기본정리([1],정리2)에 의해서 $A = b_k t^{k-1} + \cdots + b_2 t + b_1$ 이다. 그리고 이 때 $0 \le b_i < t$, $b_k \ne 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 이다. 만일 $k > n'$ 이라면 $k - 1 \ge n'$ 이므로 $p^{k-1} \ge p^{n'}$ 이다. 즉, $p^{m(k-1)} \ge p^{mn'}$ 이다. 따라서 $A \ge b_k t^{k-1} \ge t^{k-1} = (p^n)^{k-1} \ge p^{mn'} = p^{\frac{mn}{d}}$ 가 되어 모순이다. 그러므로 $k \le n$ 이다.

(정리 4.2) $s = p^n$; $t = p^m$; $d = \gcd(m, n)$ 이고 $m' = \frac{m}{d}$; $n' = \frac{n}{d}$ 일 때 양의 정수인 s 진수

$A = a_{\alpha m'} a_{\alpha m'-1} \cdots a_{(\alpha-1)m'-1} a_{(\alpha-1)m'} \cdots a_{(\alpha-2)m'+1} \cdots a_{m'} \cdots a_{1(s)}$ 에 대해서

$a_{im'} a_{im'-1} \cdots a_{(i-1)m'-1_{(s)}} = b_{in'} b_{in'-1} \cdots b_{(i-1)n'+1_{(t)}}$ $(1 \le i \le \alpha)$ 이면

$A = b_{\alpha n'} b_{\alpha n'-1} \cdots b_{(\alpha-1)n'+1} b_{(\alpha-1)n'} \cdots b_{(\alpha-2)n'+1} \cdots b_{n'} \cdots b_{1(t)}$ 이다.

(증명) (정리3.2)의 증명에서 m 과 n 대신에 각각 m_0 와 n_0 로 바꾸어 준다.

$\gcd(n, m) = d \ne 1$ 인 경우에 p^n 진수에서 p^m 진수로의 변환은 더욱 쉬워진다. p^n 진수 A 를 뒤에서 부터 $\frac{m}{d}$ 자리씩 나누어서 $\frac{n}{d}$ 자리의 p^m 진수로 변환하면 된다. 물론 m 자리씩 나누어서 n 자리의 p^m 진수로 변환할 수도 있으나 자리수가 적을 수록 계산이 용이하기 때문에 n 과 m 이 서로소가 아닌 경우는 반드시 d 로 나누어준 자리수를 이용하는 것이 훨씬 간편하게 변환이 된다.

(예 6) 앞에서 주어진 (예 6)의 문제를 위의 정리들을 이용하여 계산해보자.

$64(= 2^6)$ 진수 $A = 4\overset{4}{2}\overset{3}{0}\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(64)}$ 을 $16(= 2^4)$ 진수로 고치기 위해서는 $\gcd(6, 4) = 2$ 이므로 2 자리의 2^6 진수는 3 자리 이하의 2^4 진수로 변환된다.

따라서 2 자리씩 나누어진 2^6 진수 4, $\overset{4}{2}\overset{3}{0}$, $\overset{3}{0}\overset{3}{1}$, $\overset{1}{8}\overset{5}{4}$, $\overset{4}{0}\overset{1}{7}$, $\overset{4}{7}\overset{2}{3}$ 들을 2^4 진수로 고쳐보자. 그러면 $4_{(2^6)} = 4_{(2^4)}$ 이고

$$\overset{4}{2}\overset{3}{0}_{(2^6)} = 42 \times 2^6 + 30 = 2^4(42 \times 2^2 + 1) + 14$$

$$= 2^4(2^4 \times 10 + 9) + 14 = 10 \times (2^4)^2 + 9 \times 2^4 + 14 = \overset{1}{0}9\overset{1}{4}_{(2^4)}$$

$$\overset{3}{0}\overset{3}{1}_{(2^6)} = 30 \times 2^6 + 31 = 2^4(30 \times 2^2 + 1) + 15$$

$$= 2^4(2^4 \times 7 + 9) + 15 = 7 \times (2^4)^2 + 9 \times 2^4 + 15 = 79\overset{1}{5}_{(2^4)}$$

$$\overset{1}{8}\overset{5}{4}_{(2^6)} = 18 \times 2^6 + 54 = 2^4(18 \times 2^2 + 3) + 6$$

$$= 2^4(2^4 \times 4 + 11) + 6 = 4 \times (2^4)^2 + 11 \times 2^4 + 6 = 4\overset{1}{1}6_{(2^4)}$$

$$\overset{4}{0}\overset{1}{7}_{(2^6)} = 40 \times 2^6 + 17 = 2^4(40 \times 2^2 + 1) + 1$$

$$= 2^4(2^4 \times 10 + 1) + 1 = 10 \times (2^4)^2 + 1 \times 2^4 + 1 = \overset{1}{0}11_{(2^4)}$$

이다. 비슷하게 $\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(2^6)} = \overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$ 이다.

따라서 $A = 4\overset{1}{0}9\overset{1}{4}79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6\overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$ 이다.
이 결과는 앞의 (예 6)의 결과와 일치한다.

(예 7) 앞의 서론에서 제기했던 (예 1)의 문제를 해결하여 보자. 2^4 진수 $A = 248143187_{(2^4)}$ 를 2^6 진수로 변환하기 위해서는 A 를 3 자리씩 나누어서 2 자리의 2^6 진수로 변환하면 된다.

$$248_{(2^4)} = 2 \times (2^4)^2 + 4 \times 2^4 + 8 = 2^6(2 \times 2^2 + 1) + 8 = 9 \times (2^6) + 8 = 98_{(2^6)}$$

$$143_{(2^4)} = 1 \times (2^4)^2 + 4 \times 2^4 + 3 = 2^6(1 \times 2^2 + 1) + 3 = 5 \times (2^6) + 3 = 53_{(2^6)}$$

$$187_{(2^4)} = 1 \times (2^4)^2 + 8 \times 2^4 + 7 = 2^6(1 \times 2^2 + 2) + 7 = 6 \times (2^6) + 7 = 67_{(2^6)}$$

이므로 $A = 985367_{(2^6)}$ 이 되어 (예 1)의 결과와 일치한다.

Ⅲ. 간 편 산

앞에서 주어진 예들에 대하여 간편산에 의한 계산방법을 살펴보자.

(예 2의 간편산) $A = 110101_{(2)}$

$*/2^3$	2^2	2	1	나머지
2^3	1	0	1	
	1×2^2		1	5
2^3	1	1	0	
	1×2^2	1×2		6

따라서, $A = 65_{(8)}$ 이다.

(예 3의 간편산) $A = 11011_{(2)}$

$*/2^3$	2^2	2	1	나머지
2^3	0	1	1	
		1×2	1	3
2^3	0	1	1	
		1×2	1	3

따라서 $A = 33_{(8)}$ 이다.

(예 4의 간편산) $A = 574_{(8)}$

$*/2$	$1(= (2^3)^0)$	나머지
2	4	0
	2	0
	1	(100)
2	7	1
	3	1
	1	(111)
2	5	1
	2	0
	1	(101)

따라서 $A = 101111100_{(2)}$ 이다.

(예 5의 간편산) $4\overset{4}{2}\overset{3}{0}\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(64)}$

$*/2^4$	2^{18}	2^{12}	2^6	1	나머지
2^4	40	17	47	23	7
	40×2^{14}	17×2^8	47×2^2	1 $47 \times 2^2 + 1 = 189$	13
	40×2^{10}	17×2^4		11	11
	40×2^6	17			1
	40×2^2	1 $40 \times 2^2 + 1 = 161$			1
		10			$(\overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7)$
2^4	30	31	18	54	6
	30×2^{14}	31×2^8	18×2^2	3 $18 \times 2^2 + 3 = 75$	11
	30×2^{10}	31×2^4		4	4
	30×2^6	31			15
	30×2^2	1 $30 \times 2^2 + 1 = 121$			9
		7			$(79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6)$
2^4	0	4	42	30	14
		4×2^8	42×2^2	1 $42 \times 2^2 + 1 = 169$	9
		4×2^4		10	10
		4			$(4\overset{1}{0}9\overset{1}{4})$

따라서 $A = 4\overset{1}{0}9\overset{1}{4}79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6\overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$ 이다.

(예 6의 간편산) $A = 4\overset{4}{2}\overset{3}{0}\overset{3}{0}\overset{3}{1}\overset{1}{8}\overset{5}{4}\overset{4}{0}\overset{1}{7}\overset{4}{7}\overset{2}{3}_{(64)}$

$*/2^4$	2^6	1	나머지
2^4	47	23	7
	47×2^2	1	
		$47 \times 2^2 + 1 = 189$	13
		11	$(\overset{1}{1}\overset{1}{3}7)$
2^4	40	17	1
	40×2^2	1	
		$40 \times 2^2 - 1 = 161$	1
		10	$(\overset{1}{0}11)$
2^4	18	54	6
	18×2^2	3	
		$18 \times 2^2 + 3 = 75$	11
		4	$(4\overset{1}{1}6)$
2^4	30	31	15
	30×2^2	1	
		$30 \times 2^2 + 1 = 121$	9
		7	$(79\overset{1}{5})$
2^4	42	30	14
	42×2^2	1	
		$42 \times 2^2 + 1 = 169$	9
		10	$(\overset{1}{0}9\overset{1}{4})$
2^4		4	4
		0	(4)

따라서 $A = 4\overset{1}{0}9\overset{1}{4}79\overset{1}{5}4\overset{1}{1}6\overset{1}{0}11\overset{1}{1}\overset{1}{3}7_{(2^4)}$ 이다.

마지막으로 (예 1)의 문제를 간편산으로 구하여 보자.

(예 1의 간편산) $A = 248143187_{(2^4)}$

$*/2^6$	2^8	2^4	1	나머지
2^6	1	8	7	
			$8 \times 2^4 + 7 = 135$	7
	1×2^2		2	
			$1 \times 2^2 + 2 = 6$	(67)
2^6	1	4	3	
			$4 \times 2^4 + 3 = 67$	3
	1×2^2		1	
			$1 \times 2^2 + 1 = 5$	(53)
2^6	2	4	8	
			$4 \times 2^4 + 8 = 72$	8
	2×2^2		1	
			$2 \times 2^2 + 1 = 9$	(98)

따라서 $A = 985367_{(2^6)}$ 이다.

IV. 결　　론

결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) p 진수를 p^n 진수로 변환

p 진수: (n 자리)|(n 자리)| $\cdots$ |(n 자리)

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\cdots$ $\Downarrow$

p^n 진수: (1 자리)|(1 자리)| $\cdots$ |(1 자리)

(2) p^n 진수를 p 진수로 변환

p^n 진수: (1 자리)|(1 자리)| $\cdots$ |(1 자리)

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\cdots$ $\Downarrow$

p 진수: (n 자리)|(n 자리)| $\cdots$ |(n 자리)

(3) $\gcd(n, m) = d$ 일 때 p^n 진수를 p^m 진수로 변환

p^n 진수: ($\frac{m}{d}$ 자리)|($\frac{m}{d}$ 자리)| $\cdots$ |($\frac{m}{d}$ 자리)

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \cdots \qquad \Downarrow$

p^m 진수: ($\frac{n}{d}$ 자리)|($\frac{n}{d}$ 자리) | $\cdots$ |($\frac{n}{d}$ 자리)

(4) 위 (3)의 경우에 p^n 진수를 m 자리씩 구분하여 그 들을 n 자리의 p^m 진수로 변환하여도 되지만, 자리수가 많아지면 그 만큼 계산이 복잡해지기 때문에 m 과 n 의 최대공약수인 d 로 나누어서 $\frac{m}{d}$ 자리를 $\frac{n}{d}$ 자리로 변환하는 것이 바람직하다.

이상의 결과는 중고등학교 교육현장에 적용함으로써 학습자의 학습동기와 흥미를 유발시킬 수 있을 것이며 과학기술이 발달로 전자회로가 고도로 집적됨에 따라 32 진수, 64 진수, 128 진수 등을 많이 다루게 될 전자공학, 컴퓨터 공학 등 응용분야에서 기초자료로 활용할 수 있을 것이라 기대한다.

참 고 문 헌

1. 양성호 · 고영종(1996), "기수법의 변환", 과학교육(제13집), 제주대학교 사범대학 과학교육연구소