科學敎育, 15, 89~114, 1998
Journal of Science education
15, 89~114, 1998

函數의 微分可能과 볼록性에 관한 硏究

高 胤 熙* · 金根洙**

A Study on Differentiability and Convexity of Function

Ko, Youn-Hee · Kim, Guen-Su

Abstract

In this thesis, we define the differentiability of a function using the linear mapping in order that similar differentiable statements hold for function of several variable. And we prove the basic differentiable laws by means of the new definition of differentiability. also we find the approximate value of differentiable functions at partial points using the definition of differentiability that we define.

On the other hand, we define the supporting line of the convex (concave) function, which is a general form of the tangent line.

Ⅰ. 서 론

미분학은 이 과목의 본성 그 자체로부터 유래하는데, 그것은 곧 함수의 증가율에 대한 체계적 고찰을 의미한다. 이 개념은 우리가 자연을 탐구하다 보면 즉각 떠오

* 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수
** 서귀포여자고등학교 교사

르게 되는 것이다. 속도란 이동한 거리의 증가율이요, 가속도란 속도의 증가율이다. 따라서 기본적인 변화의 개념은, 자연 현상 전반을 파악하는 기반으로 자리잡고 있는 것으로써, 다시 변화의 비율에 관한 물음을 즉각 제기하게 한다. '빨리', '천천히' 등과 같이 친숙한 용어들도 실은 암암리에 변화율 개념을 참조함으로써 그 의미를 제대로 부여받게 된다. 따라서 미분학은 수학이 자연 현상의 설명에 성공적으로 적용될 수 있는 입지의 핵심과 밀접하게 연계되어 있다.

이 같은 변화율 개념은 분명히 뉴튼의 심중에 있었으며, 그가 미분학을 설명하던 언어 속에 구현되었다. 그렇지만 자연 현상으로부터 유래하는 이같은 관점은 혹시 미분학의 탄생을 직간접적으로 도모했던 선배 수학자들의 심중에도 뉴튼 못지않게 강렬하게 자리잡았었다고 본다.

19세기초에 이르러 코시(Cauchy)가 극한의 개념을 사용하여 미적분학에 대한 좀 더 확실한 이론적 기초를 개발했고 적분을 연속함수를 사용하여 전개하였다. 19세기와 그후 데데킨트(Dedekind)의 절단이나 코시수열을 사용한 수직선의 형식적 정의를 통해, 그리고 바이에르슈트라스(Weierstrass)에 의해 순수한 산술 형태의 $\varepsilon-\delta$법을 사용하는 극한의 연속의 형식적 정의를 통해 해석학의 산술화가 이루어졌다. 그 뒤 1893년에 스톨츠(Stolz)가 다변수 실함수에 대한 미분가능성 개념을 도입하였고, 함수 해석학이 발달함에 따라 1911년에 프레셰(Fréchct)는 선형 접사상(linear tangent maps)이라는 용어를 사용하여 현대적으로 해석한 미분을 도입하였다.

프랑스에서는 1902년의 카톨릭학교를 폐쇄하는 개혁 이후 중등교육에서 도함수를 16-17세 학생들에게 도입하였다. 1971년에 차의 상의 극한이라는 고전적 정의가 아핀(áffine) 근사에 의한 정의로 바뀌고, 근사의 부산물로, 즉 선형 부분의 계수로 도함수가 나타났다. 이에 따라 접선은 함수의 곡선에 국소적으로 가장 근사한 직선으로 주어졌다. 1982년의 개정이래 극한에 대한 $\varepsilon-\delta$ 형식화는 생략되었다.

아르티끄는 누구나 도함수, 적분, 접선, 접평면 등의 개념과 어떤 선험적인 개념을 연결시킬 수 있다고 하면서 곡선 위의 점A에서 곡선에 대한 접선을 다음과 같이 생각할 수 있다고 하였다(Artigue, 1991).[1)]

1) A의 근방에서 곡선을 가로지르지 않고 A를 지나는 직선(아폴로니우스가 미분을 사용하지 않고 원추곡선에 대한 접선을 결정하는데 사용한 관점).
2) A에서 곡선과 이중의 교점을 갖는 직선(이 관점은 오일러와 크래머의 연구에서 예로 나오며, 뒤에 대수기하학의 내용으로 체계화되었다.).
3) 곡선 위에서 A에 무한히 가까운 두 점을 통과하는 직선 (페르마, 라이프니츠, …의 관점), 혹은 A의 근방에서 곡선을 확대했을 때 그 곡선이 되는 직선.
4) M이 곡선을 따라 A에 접근할 때, 할선AM의 극한(학교교육에서 전통적으로 사

1) 김인수(1997), 해석학의 기초개념과 학습지도, 전남대학교 출판부, p184~p195.

용하고 있는, 이를테면 달랑베르의 관점).

5) A의 근방에서 곡선에 대한 제 1계 최적 선형 근사 또는 유일한 선형 근사.

6) 곡선을 나타내는 함수의 A에서의 도함수에 의하여 기울기가 주어질 때 점 A를 지나는 직선 (도함수가 존재한다고 할 때).

마찬가지로 함수 f의 $x=a$에서 도함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

1) h가 0에 가까이 갈 때, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 극한.

2) a에서 함수를 제 1계까지 전개했을 때, 제 1계 항의 계수.

3) a를 중심으로 f를 급수로 전개했을 때, 제 1계 항의 계수(라그랑즈의 관점).

4) a에서 f에 접하는 선형 접사상을 결정하는 계수.

5) a에서 접선의 기울기.

6) 초등함수의 도함수를 알고서 보통의 미분법칙을 적용하여 얻은 수나 함수.

7) 그래프를 고도로 확대한 부분의 기울기("국소적 직선"에 대한 기울기라는 관점은 탈(Tall)이 주장한 바 있는데 지금은 영국 학교 수학 계획 British Mathematics Project의 새 교육과정에서 채택하고 있다).

우리가 변수 x인 함수 $f(x)$의 증가율을 결정하는 일반적 방식을 소유하고 있다면, 곡선상의 임의의 점 $(x,\ y)$에서 접선의 기울기를 결정할 수 있고, 그로부터 접선을 그려낼 수 있게 된다. 결국 곡선에 대한 접선을 그리는 문제와 함수의 증가율을 결정하는 문제는 진정으로 동일한 문제이다.

미분법이라는 것은 한 마디로 말해서 여러 가지 함수가 '변화'하는 모양을 상세히 살피는 것을 목적으로 하는 학문이다.

따라서 본 논문의 제 II장에서는 일변수 함수 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$에 있어서 $x=a\in\mathbf{R}$에서 미분가능이라는 것은 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$인 극한값이 존재하는 것이다. 그러나 이 식 자체는 다변수 함수 $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$($n,\ m$은 양의 정수)에 대해서는 미분가능의 의미를 표현하는 것이 어렵다. 따라서 미분가능의 정의를 보다 높은 차원으로 일반화할 수 있도록 선형사상을 도입하여 미분가능성을 정의하였으며, 미분가능의 의미를 기하학적으로 살펴보고, 이 정의가 현재 고등학교 교육과정에서 사용하고 있는 기존정의와 동치관계임을 증명하였다.

제 III장에서는 II장에서 내려진 미분가능의 정의에 의해서 미분법의 기본법칙을 증명하고, 특히 고등학교 교육과정에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}$는 형식에 있어서 많은 학생들이 우변의 dz를 약분하여 얻는 것처럼 생각하여 활용하고 있는 경우가 많은데, 대부분의 교과서에 수록된 완전하지 못한 증명을 2장에서 내려진 미분가능의 정의를 사용하여 증명하였다. 이러한 증명은 고교과정에 포함되어 합성함수의 도함수 개념을 올바르게 이해할 수 있도록 다루어져야 한다.

제 Ⅳ장에서는 근사값 계산 내용이 수학뿐만 아니라 물리, 공학, 사회 과학등 타 분야에서 연구하는데 고등학교 교육과정에 미분에 의한 근사값 계산 내용이 수록되어 선수학습 내용으로 다루어져야 한다는 견해로 선형사상을 도입한 미분가능의 정의에 의한 함수의 선형화를 정의하여, 미분가능한 함수들의 특정한 점에서 근사값 계산을 예를 들어 확인하였다.

제 Ⅴ장에서는 고등학교 교과서에 나오는 곡선의 오목, 볼록에 대한 정의를 내리고, 접선의 일반화된 개념으로 받침선을 정의하였다. 미분가능인 점에서는 받침선이 유일하게 존재하며, 연속이지만 미분불능인 점에서는 받침선은 무수히 존재하여 $y=f(x)$의 $x=a$에서 받침선의 기울기 m은 $f_-'(a)\le m\le f_+'(a)$임을 보여서 받침선의 개념과 관련된 절대부등식의 보기 문제들을 제시하였다.

Ⅱ. 미분가능의 의미

1. 미분가능

[정의2.1.] 함수 $f:(a,\ b)\to \mathbf{R}$에 있어서, 점 $x=c\in(a,\ b)$에 대하여 적당한 $L\in\mathbf{R}$이 존재하여 명제 '임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta>0$이 존재해서 $0<|x-c|<\delta,\ x\in(a,\ b)$ 일 때 $\left|\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\right|<\varepsilon$ 이다.'
를 만족하면, 즉 극한

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

가 존재하면, f는 $x=c$에서 **미분가능**(differentiable at c)하다고 하고, 이 때 극한값 L을 $x=c$에서 f의 **도함수**(derivative of f at c)라고 하며 이를 기호로 $f'(c)$또는 $Df(c)$로 나타낸다.

또한, 함수 $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}$에 있어서, 점 $x=c\in(a,\ b)$에 대하여

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},\quad \lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

가 존재할 때, 이들의 극한값을 각각 $x=c$에서 f의 좌방도함수, 우방도함수라고 하고, 이들을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$f_-'(c),\quad f_+'(c)$$

함수 $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}$에 있어서, 점 $x=c\in(a,\ b)$에 대하여 미분가능하기 위한 필요충분조건은 점 c에서 f의 좌방도함수 $f_-'(c)$와 우방도함수 $f_+'(c)$가 모두 존재하고 $f_-'(c)=f_+'(c)$인 것이다.

[정리2.1.] 함수 $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}$가 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능할 필요충분

조건은 적당한 실수 L과 함수 $\gamma:(a, b)\to\mathbf{R}$가 존재하여 $\lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}=0$이 되고, 모든 $x\in(a, b)$에 대하여 $f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x)$를 만족하는 것이다. 이 경우 $L=f'(c)$이다.

[증명] $\Rightarrow$) f가 $x=c$에서 미분가능하다고 하고, 그 도함수 $f'(c)$를 L이라 하자.

여기서 함수 $\gamma:(a, b)\to\mathbf{R}$를 $\gamma(x)=f(x)-f(c)-L(x-c)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}&=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{x-c}\\&=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\\&=0\end{aligned}$$

이 되고 모든 $x\in(a, b)$에 대하여 $f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x)$가 성립한다.

$\Leftarrow$) 적당한 $L\in\mathbf{R}$과 함수 $\gamma:(a, b)\to\mathbf{R}$가 존재하여 $f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x)$를 만족한다고 하자. 모든 $x\in(a, b)$에 대하여 $\lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}&=\lim_{x\to c}\frac{L(x-c)+\gamma(x)}{x-c}\\&=L+\lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}\\&=L\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서, f는 $x=c$에서 미분가능하고 $f'(c)=L$이다.

이제, **정리2.1.**을 사용하여 선형사상

$$L(x-c)=f'(c)\,(x-c)$$

에 주목하면서 한 점 $x=c$에서 미분가능의 정의를 다음과 같이 내릴 수 있다.

[정의2.2.] 함수 $f:(a, b)\to\mathbf{R}$에 대하여 상수 L과 함수 $\gamma:(a, b)\to\mathbf{R}$가 존재하여

$$f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x),\ \ (\text{단, } \lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}=0)$$

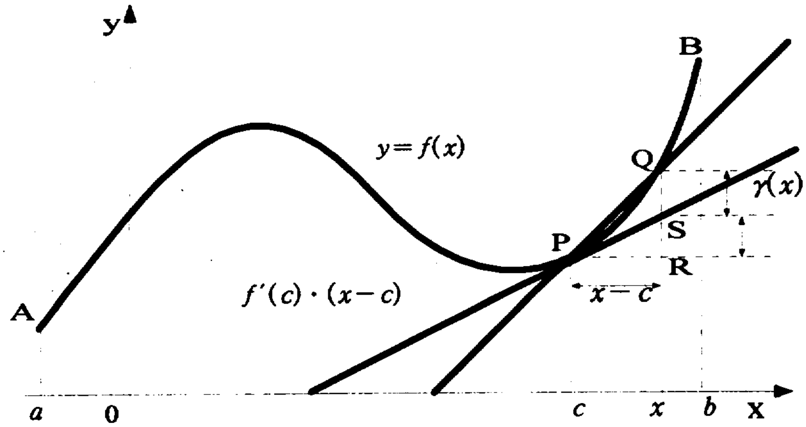
을 만족할 때 함수 f는 점 $x=c\in(a, b)$에서 미분가능하다고 한다.

이때 상수 $L=f'(c)$을 "함수 f의 점 c에서 도함수"라 부른다.

2. 미분가능의 기하학적 의미

정의2.2.로 미분가능의 정의를 내릴 경우 함수 $y=f(x)$위의 어떤 점 P에서 접선을 그으면

【그림 1】 미분가능의 기하학적 의미



【그림 1】 에서 보는 바와 같이

$$x > c,\ \ x-c=\overline{PR} \to +0$$

일 때, 곡선위의 점 Q는 정점 P에 한없이 가까워지며 할선(secant line) $\overline{PQ}$는 P를 중심으로 회전하면서 곡선위의 점 P에서 접선(tangent line)[**매끄러운 곡선의 국부적인 근사직선**] $\overline{PS}$에 한없이 가까이 간다.

이때, $\overline{SR}$은 $x-c$의 $f'(c)$배의 크기로 0에 가까워지고, $\overline{QS}$는 $\overline{QR}$보다 더 빠르게 0에 가까워지기 때문에 **정의2.2.**에서 내려진 미분가능의 의미를 직관적으로 이해하기 쉽다.

이 정의는 다변수 함수 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$(단, n, m은 양의 정수), 벡터함수까지 확장시켜 이용할 수 있는 유리한 점이 있다.2) 앞으로 이 논문에서는 미분가능의 정의를 **정의2.2.**로 사용한다.

※참고) 일변수 함수 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$에 있어서 $c \in \mathbf{R}$에서 미분가능이라는 것은

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \quad \text{-----------------(1)}$$

인 $f'(c)$가 존재한다는 것이다.

(1)식을 변형하므로 다변수 함수에 대한 미분가능성을 정의할 수 있게 된다.

---

2) R,C,Buck(1965), Advanced Calculus, McGraw-Hill, p130.

$L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 를 $L(h)=f'(c)h$ 로 정의되는 선형사상이라고 했을 때, (1)식은

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-hf'(c)}{h}=0 \quad \text{-----------------(2)}$$

라는 식과 동등하다. (2)식은

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{x-c}=0$$

로 표시할 수 있는데, 이때

$$f(x)-\{f(c)+f'(c)(x-c)\}=0$$

가 된다. 즉,

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

이다.

한편, $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 인 2변수 함수에 대해서 살펴보면

$z=f(x,y)$가 곡면(surface)일 때

$z=f(x,y)$가 $z_0=f(x_0,y_0)$에서 미분가능이라는 것은

(2)식 형태로 표현하여

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}=0$$

가 성립하는 것이다. 즉

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}=0$$

따라서 두 변수 x, y에 관한 함수 f가 $z_0=(x_0,y_0)$에서 미분가능하다고 하는 것은 $z_0=(x_0,y_0)$에서 다음과 같이 표현될 때이다.

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

단, ε_1, ε_2는 Δx, Δy의 함수이고 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$일 때 각각 $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$이 되는 것이다.

$z=f(x,y)$에서 $0=f(x,y)-z=S(x,y,z)$라 두면

$\dfrac{\partial S}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial S}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial S}{\partial z}=-1$이므로 $(x,y)\to(x_0,y_0)$일 때,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)-1\{z-f(x_0,y_0)\}=0$$

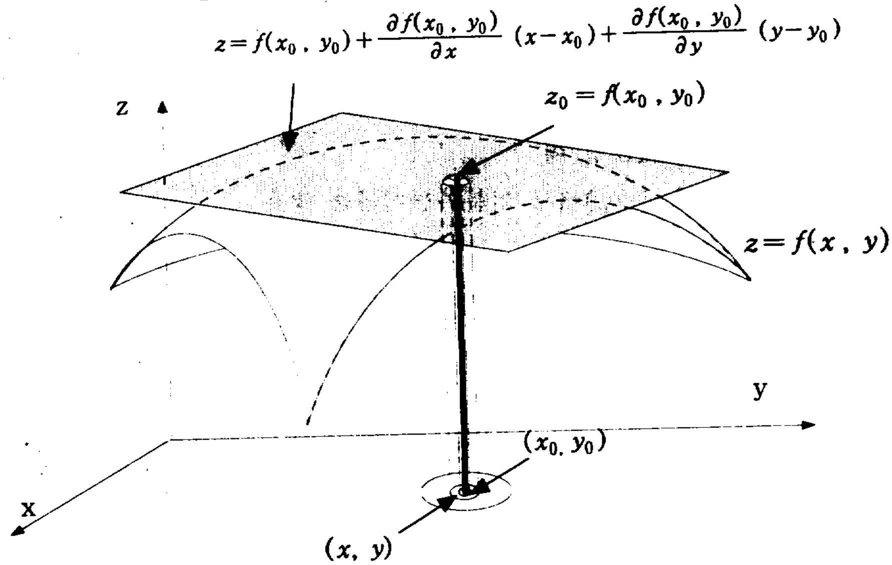
$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

$$z=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0) \quad ----(3)$$

(3)식은 $z_0=f(x_0, y_0)$를 지나는 곡면 $z=f(x, y)$의 접평면의 방정식이다.

【그림2】 에서와 같이 $(x, y)\to(x_0, y_0)$일 때 개구(open ball)를 선택하여 곡면 위로 투영시켰을 때, 곡면의 z값과 접평면의 z값차가 $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|$보다 더 빠르게 0에 가까워지므로 곡면의 z값과 접평면의 z값이 같게 된다

【그림 2 】 곡면위의 접평면



또한, 함수 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$에 대하여 선형사상 $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$이 존재하며,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(c+h)-f(c)-L(h)|}{|h|}=0$$

를 만족할 때 점 $c\in\mathbf{R}^n$에서 미분가능하다고 한다. 이 때,

$$h\in\mathbf{R}^n,\ f(c+h)-f(c)-L(h)\in\mathbf{R}^m$$

이며, 선형사상 L은 $Df(c)$로 표시하고 'f의 c에서 도함수 '라 한다.

보통의 선형변환 $Df(c):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$의 표준기저에 대한 행렬($m\times n$ 행렬)을 c에서 f의 야코비(Jacobian)행렬이라 하며 $f'(c)$로 표시할 수 있다. 일변수 함수 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$에 대하여 $f'(c)$는 1×1행렬이 된다.

$Df(c)$는 f가 c근방에서 주어져 있으면 정의할 수 있다. 또한 함수

$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$에 대하여 f가 A의 모든 점에서 미분가능이면 f가 A에서 미분가능이라고 한다.

그리고 $f: A \to \mathbf{R}^m$에 대해서 f가 A를 포함하는 어떤 열린 집합에서 미분가능할 때 f는 미분가능이라고 한다.

Ⅲ. 미분법의 기본법칙

미분법의 기본법칙을 **제Ⅱ장**에서 내려진 **정의2.2.**[3]를 사용하여 증명하였다.

[정리3.1.] 함수 $f, g:(a, b) \to \mathbf{R}$ 이고, f, g가 $x=c \in (a, b)$에서 미분가능하면 $f \pm g$도 $x=c \in (a, b)$에서 미분가능하고 $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$이다.

[증명] $f'(c) = L_1$, $g'(c) = L_2$이라 하자.

함수 f가 $x=c$에서 미분가능하므로

적당한 실수 L_1과 함수 $\gamma_1:(a, b) \to \mathbf{R}$ 가 다음 조건 (4)을 만족하면서 존재한다.

$$f(x) = f(c) + L_1(x-c) + \gamma_1(x), \text{(단, } \lim_{x \to c} \frac{\gamma_1(x)}{x-c} = 0) \quad \text{------(4)}$$

또한 함수 g가 $x=c$에서 미분가능하므로

적당한 실수 L_2과 함수 $\gamma_2:(a, b) \to \mathbf{R}$가 다음 조건(5)을 만족하면서 존재한다.

$$g(x) = g(c) + L_2(x-c) + \gamma_2(x), \text{(단, } \lim_{x \to c} \frac{\gamma_2(x)}{x-c} = 0) \quad \text{-----(5)}$$

여기서 (4) ±(5)하면

$f(x) \pm g(x) = f(c) \pm g(c) + (L_1 \pm L_2)(x-c) + \gamma_1(x) \pm \gamma_2(x)$가 되는데

이 때 $\gamma_1(x) \pm \gamma_2(x) = \gamma(x)$라 두면

정의2.2.에 의해서

$$(f \pm g)'(c) = L_1 \pm L_2 = f'(c) \pm g'(c) \text{가 된다.}$$

[정리3.2.] 함수 $f, g:(a, b) \to \mathbf{R}$ 이고, f, g가 $x=c \in (a, b)$에서 미분가능하면 fg도 $x=c \in (a, b)$에서 미분가능하고,

$(fg)'(c) = f'(c)\,g(c) \pm f(c)\,g'(c)$이다.

---

3) 함수 $f:(a, b) \to \mathbf{R}$에 대하여 상수 L과 함수 $\gamma:(a, b) \to \mathbf{R}$가 존재하여

$$f(x) = f(c) + L(x-c) + \gamma(x), \quad \text{(단, } \lim_{x \to c} \frac{\gamma(x)}{x-c} = 0)$$

을 만족할 때 함수 f는 점 $x=c \in (a, b)$에서 미분가능하다고 한다.

[증명] $f'(c)=L_1$, $g'(c)=L_2$이라 하자.

함수 f가 $x=c$에서 미분가능하므로
적당한 실수 L_1과 함수 $\gamma_1:(a, b)\to \mathbf{R}$가 다음 조건 (6)을 만족하면서 존재한다.

$$f(x)=f(c)+L_1(x-c)+\gamma_1(x),\ (\text{단, } \lim_{x\to c}\frac{\gamma_1(x)}{x-c}=0) \quad \text{-------(6)}$$

또한 함수 g가 $x=c$에서 미분가능하므로
적당한 실수 L_2과 함수 $\gamma_2:(a, b)\to \mathbf{R}$가 다음 조건(7)을 만족하면서 존재한다.

$$g(x)=g(c)+L_2(x-c)+\gamma_2(x),\ (\text{단, } \lim_{x\to c}\frac{\gamma_2(x)}{x-c}=0) \quad \text{------(7)}$$

여기서 (6) × (7)하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \{f(c)+L_1(x-c)+\gamma_1(x)\}\{g(c)+L_2(x-c)+\gamma_2(x)\} \\ &= f(c)\,g(c)+f(c)\,L_2(x-c)+f(c)\,\gamma_2(x)+L_1\,(x-c)\,g(c) \\ &\quad + L_1L_2(x-c)^2+L_1(x-c)\,\gamma_2(x)+\gamma_1(x)\,g(c) \\ &\quad + \gamma_1(x)\,L_2(x-c)+\gamma_1(x)\,\gamma_2(x) \\ &= f(c)\,g(c)+\{L_1 g(c)+f(c)\,L_2\}(x-c)+f(c)\gamma_2(x) \\ &\quad + L_1L_2(x-c)^2+L_1(x-c)\,\gamma_2(x)+\gamma_1(x)\,g(c) \\ &\quad + \gamma_1(x)\,L_2(x-c)+\gamma_1(x)\,\gamma_2(x) \quad \text{-----------------(8)} \end{aligned}$$

이 때 $f(c)\gamma_2(x)+L_1L_2(x-c)^2+L_1(x-c)\,\gamma_2(x)+g(c)\,\gamma_1(x)$
$+L_2(x-c)\,\gamma_1(x)+\gamma_1(x)\,\gamma_2(x)=\gamma(x)$로 놓으면
(8)식은 $f(x)\,g(x)=f(c)\,g(c)+\{L_1 g(c)+f(c)\,L_2\}(x-c)+\gamma(x)$로 나타낼 수 있다.

식 (6), (7)에서 $\lim_{x\to c}\dfrac{\gamma_1(x)}{x-c}=0$,

$\lim_{x\to c}\dfrac{\gamma_1(x)}{x-c}=0$이고

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c}\frac{L_1L_2(x-c)^2}{x-c} &= \lim_{x\to c} L_1L_2(x-c) \\ &= L_1L_2\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
이므로

$\lim_{x\to c}\dfrac{\gamma(x)}{x-c}=0$이다.

정의 2.2.에 의해서

$(fg)'(c)=f'(c)\,g(c)\pm f(c)\,g'(c)$가 된다.

[정리3.3.] 함수 $g:(a,\ b)\rightarrow \mathbf{R}$가 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고 $g(c)\neq 0$이면 함수 $\frac{1}{g}:(a,\ b)\rightarrow \mathbf{R}$ 역시 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고 $(\frac{1}{g})'(c)=\frac{-g'(c)}{\{g(c)\}^2}$이다.

[증명] $g'(c)=L$이라 하자.

함수 g가 c에서 미분가능하므로

적당한 실수 L과 함수 $\gamma:(a,\ b)\rightarrow \mathbf{R}$가 다음 조건을 만족하면서 존재한다.

$$g(x)=g(c)+L(x-c)+\gamma(x),\ (\text{단, } \lim_{x\rightarrow c}\frac{\gamma(x)}{x-c}=0)$$

조건의 역수를 취하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)}&=\frac{1}{g(c)+L(x-c)+\gamma(x)}\\&=\frac{1}{g(c)}\left\{\frac{g(c)}{g(c)+L(x-c)+\gamma(x)}\right\}\\&=\frac{1}{g(c)}\left\{1-\frac{L(x-c)+\gamma(x)}{g(c)+L(x-c)+\gamma(x)}\right\}\\&=\frac{1}{g(c)}-\frac{1}{g(c)}\left\{\frac{L(x-c)+\gamma(x)}{g(c)+L(x-c)+\gamma(x)}\right\}\end{aligned}$$

라는 식의 변형에 의해서

$A=g(c),\ B=L(x-c),\ C=\gamma(x)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)}=&\frac{1}{g(c)}-\frac{L}{\{g(c)\}^2}(x-c)\\&-\frac{1}{g(c)}\left\{\frac{g(c)\gamma(x)-L^2(x-c)^2-L(x-c)\gamma(x)}{\{g(c)\}^2+g(c)L(x-c)+g(c)\gamma(x)}\right\}\end{aligned}$$

이제 $-\frac{1}{g(c)}\left\{\frac{g(c)\gamma(x)-L^2(x-c)^2-L(x-c)\gamma(x)}{\{g(c)\}^2+g(c)L(x-c)+g(c)\gamma(x)}\right\}=\eta(x)$ 라 두면

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow c}\frac{\eta(x)}{x-c}&=-\frac{1}{g(c)}\lim_{x\rightarrow c}\frac{\frac{g(c)\gamma(x)-L^2(x-c)^2-L(x-c)\gamma(x)}{\{g(c)\}^2+g(c)L(x-c)+g(c)\gamma(x)}}{x-c}\\&=-\frac{1}{g(c)}\lim_{x\rightarrow c}\frac{g(c)\gamma(x)-L^2(x-c)^2-L(x-c)\gamma(x)}{\{g(c)\}^2(x-c)+g(c)L(x-c)^2+g(c)\,(x-c)\,\gamma(x)}\\&=-\frac{1}{g(c)}\lim_{x\rightarrow c}\frac{g(c)\frac{\gamma(x)}{x-c}-L^2(x-c)-L\,\gamma(x)}{\{g(c)\}^2+g(c)L(x-c)+g(c)\,\gamma(x)}\end{aligned}$$

$$=0$$

이므로

정의2.2.에 의하여

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{L}{\{g(c)\}^2} = \frac{-g'(c)}{\{g(c)\}^2} \text{ 이다.}$$

※참고) $g(x)\dfrac{1}{g(x)}=1$ (단, $g(x)\neq 0$)이므로

정리3.2.에 의하여 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\left(g(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = g'(x)\frac{1}{g(x)} + g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = 0$$

$g(x)\neq 0$이므로

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

[정리3.4.] 함수 $f,\ g:(a,\ b)\to\mathbf{R}$가 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고, $g(c)\neq 0$이면 함수 $\dfrac{f}{g}:(a,\ b)\to\mathbf{R}$ 역시 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)\cdot g(c) - f(c)\cdot g'(c)}{\{g(c)\}^2} \text{ 이다.}$$

[증명] $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \left(f\cdot\dfrac{1}{g}\right)'(c)$ 이므로

정리3.2.에 의해

$$= f'(c)\,\frac{1}{g}(c) + f(c)\left(\frac{1}{g}\right)'(c)$$

정리3.3.에 의해

$$= \frac{f'(c)}{g(c)} + f(c)\frac{-g'(c)}{\{g(c)\}^2}$$

$$= \frac{f'(c)\,g(c) - f(c)\,g'(c)}{\{g(c)\}^2}$$

[정리3.5.] 함수 $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}$, $g:(p,\ q)\to\mathbf{R}$ 이고, f는 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고, g는 점 $y=d=f(c)\in(p,\ q)$에서 미분가능하다고 하면 $g\circ f$는 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하고, $(g\circ f)'(c) = g'(f(c))\,f'(c)$ 이다.

[증명] 함수 f가 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능하므로

$$f(x) = f(c) + L_1(x-c) + \gamma_1(x) \text{ ---------------------(9)}$$

여기서 $\lim_{x \to c} \dfrac{\gamma_1(x)}{x-c} = 0$ 이고, $L_1 = f'(c)$ 이다.

또한, 함수 g 가 점 $y = d = f(c) \in (p, q)$ 에서 미분가능하므로

$$g(y) = g(d) + L_2(y-d) + \gamma_2(y) \text{ ---------------------(10)}$$

여기서 $\lim_{y \to d} \dfrac{\gamma_2(y)}{y-d} = 0$ 이고, $L_2 = g'(d)$ 이다.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) - g \circ f(c) &= g(f(x)) - g(f(c)) \\ &= g(y) - g(d) \quad [\text{단}, y = f(x)] \\ &= L_2(y-d) + \gamma_2(y) \\ &= L_2(f(x) - f(c)) + \gamma_2(y) \\ &= L_2(L_1(x-c) + \gamma_1(x)) + \gamma_2(y) \\ &= L_2 L_1(x-c) + L_2 \gamma_1(x) + \gamma_2(y) \text{ ----------(11)} \end{aligned}$$

그리고 $\lim_{x \to c} \dfrac{\gamma_2(y)}{x-c} = \lim_{x \to c} \dfrac{\gamma_2(y)}{y-d} \dfrac{y-d}{x-c}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \to d} \frac{\gamma_2(y)}{y-d} \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \quad (\because \lim_{x \to c} y = d) \\ &= 0 \times f'(c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(11)식의 우변에서 $L_2 \gamma_1(x) + \gamma_2(y) = L_2 \gamma_1(x) + \gamma_2\{f(x)\}$ 를 $\gamma(x)$ 라 하면

$$g \circ f(x) - g \circ f(c) = L_2 L_1(x-c) + \gamma(x)$$

로 표기되고 $\lim_{x \to c} \dfrac{\gamma(x)}{x-c} = 0$ 이 성립한다.

식(9)에서 $L_1 = f'(c)$,

식(10)에서 $L_2 = g'(d) = g'(f(c))$ 이므로

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c) \text{ 가 된다.}$$

※참고) $z = f(x)$, $y = g(z)$ 가 각각 x, z 에 관하여 미분가능하면 $y = g(f(x))$ 도 미분가능하며, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \dfrac{dz}{dx}$ 는 형식에 있어서 고등학생들이 우변의 dz 를 약분하여 얻는 것처럼 취급할 수 있어 계산상의 편리를 주지만, 현 고등학교 교육과정에서 증명을 보면 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ 를 사용하여 증명하고 있는데, 이것

은 일반적인 방법이 아니라고 본다. 왜냐하면 Δx는 독립변수로 x의 증분이므로 0이 아닌 작은 수이지만 이에 대한 z의 증분 Δz는 0이 되는 일도 있기 때문이다. $\Delta z=0$이 되는 경우에는 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}$라는 변형이 불가능하다.

합성함수 $g\circ f$의 도함수는 g와 f의 도함수들의 곱과 같다는 의미이다. 이 사실은 미분공식에서 중요한 것 중의 하나이고 이것을 도함수의 변화율로 해석하면 개념이해가 쉬어지리라 본다. $\frac{dy}{dz}$를 z에 대한 y변화율로, $\frac{dz}{dx}$를 x에 대한 z변화율, $\frac{dy}{dx}$를 x에 대한 y변화율로 볼 때, 만일 y가 z의 3배 빠르기로 변하고, z는 x의 4배 빠르기로 변한다면 y는 x의 12배 빠르기로 변한다고 해석할 수 있다.

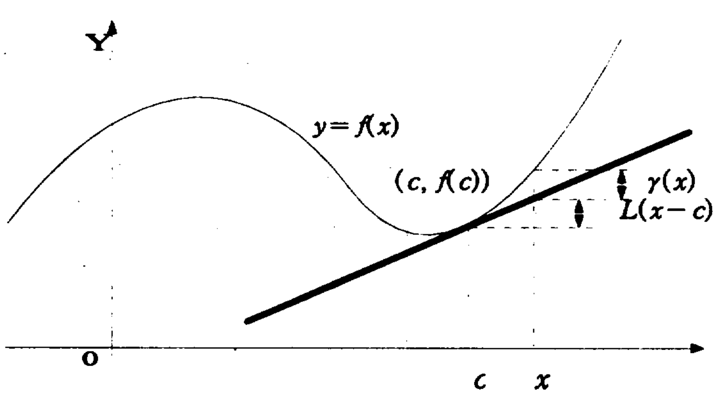
따라서 위 증명과정을 살펴보면 큰 어려움이 없이 고등학교 수학교실에 도입해도 무리가 없다고 본다.

Ⅳ. 선형화와 근사값

함수 중에서 가장 간단한 함수를 일차함수(선형함수)라 할 수 있다. c를 포함하는 어떤 구간에서 정의된 함수를 f라 하고 c에 충분히 가까운 근방에서 **정의 2.2.**와 관련하여 $f(x)$를 근사시키는 선형함수를 생각하자.

【그림3】에서와 같이 그 그래프는 기하학적(직관적)으로 가장 단순한 모양을 하고 있다. 따라서 주어진 함수를 선형함수로 조사한다는 것은 - 조사로서 "자세하지 못한"것이라도 - 현실적으로 다루기 쉽고 유용하다.

【 그림 3 】 $y=f(x)$의 선형화



정의2.2.에 의하면

함수 f가 c에서 미분가능하다고 할 때

$$f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x) \quad (\text{단}, L=f'(c))$$

에서 $x \to c$일 때 $f(x)-f(c)$보다 $\gamma(x)$가 더 빠르게 0에 가까워지므로이다.

$$\lim_{x \to c} \frac{\gamma(x)}{x-c}=0$$

즉, x가 c에 충분히 가까이 있을 때는 $\gamma(x)$는 거의 0이 되기 때문에 다음과 같이 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$f(x) \fallingdotseq f(c)+L(x-c) \quad \text{----------------------(12)}$$

(12)식의 우변은 c의 근방에서 $f(x)$를 근사시키는 x의 일차함수가 되는데 ($L=0$인 것도 있을 수 있으므로 정확히는 (1)의 우변은 '일차이하의 함수'이다) 기하학적으로 생각하면 근사식(14)의 의미는 c의 충분히 가까운 근방에서 f의 그래프가 그 접선에 극히 접근해 있음을 나타내고 있다.

(12)식으로 나타내면 오차 $\gamma(x)$는 $|x-c|$가 충분히 작으면 $|f(x)-f(c)|$보다 훨씬 작은 값이 됨을 의미한다. 특히 $L \neq 0$이면 (14)식은 $x-c$의 매우 작은 변화 x에 대한 함수값의 변화 $f(x)-f(c)$는 근사적으로 $x-c$에 비례한다는 뜻이 된다.

(12)식을 c의 근방에서 f의 선형근사값이라 하고(c에 가까운 x에 대하여 $y=f(x)$의 근사값으로 점 $(c,\ f(c))$에서 접선을 이용하는 것이 효과적이다.)
이때, 함수(이 그래프는 접선이다)

$$y=f(c)+L(x-c)$$

를 c에서 f의 선형화라 한다.

※참고) 근사값 계산 내용을 고등학교 교육과정에 포함시킴으로서 비록 명확하지 않더라도 학생들은 기하학적으로 미분가능한 함수의 특정한 점에서 함수값 수렴이 도형과 관련된 모든 양(量)들의 수렴성을 보장한다는 인식을 가질 수 있다고 본다.

[보기4.1.] $c=0$에서 $f(x)=\sqrt[3]{1+3x}$의 선형화를 구하여라. 그리고 이에 해당하는 선형 근사값을 말하고, $\sqrt[3]{1.03}$의 근사값을 구하여라.

[풀이] $f(x)=(1+3x)^{\frac{1}{3}}$의 도함수는 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$이므로

$f(0)=1,\ f'(0)=1$이다. 식 $y=f(c)+f'(c)(x-c)$에 이 값들을 대입하면 선형화는

$$y=f(0)+f'(0)(x-0)=1+x$$

선형 근사값은 $\sqrt[3]{1+3x} \fallingdotseq 1+x$이다. 따라서 $\sqrt[3]{1.03} \fallingdotseq 1+0.01=1.01$이 된

다.

※참고) 식(14)에서 $c=0$ 이면 다음 근사식을 얻는다.

$|x|$가 충분히 작을 때

$$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x \text{ ------------------------------(13)}$$

i) $f(x) = \sin x$라 하면 $f'(x) = \cos x$이고 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$이므로 식(13)에 의해 x가 0에 가까울 때 $\sin x \fallingdotseq x$ 가 된다.

즉, $\sin x$와 x와의 오차는 x자체에 비하여 훨씬 작은 양이 되어, x가 0에 가까워질 때 거의 무시할 수 있게 되어 간다.

ii) $f(x)=e^x-1$라 하면 $f'(x)=e^x$이고 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$이므로 식(15)에 의해 x가 0에 가까울 때 $e^x-1 \fallingdotseq x$ 가 된다.

iii) $f(x) = \ln(1+x)$라 하면 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$이고 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ 이므로 식(13)에 의해 x가 0에 가까울 때 $\ln(1+x) \fallingdotseq x$ 가 된다.

(※ $\sin x$, e^x, $\ln x$의 도함수를 구할 때, 기초적인 극한으로서 이미

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

임을 알고 있는데 이 극한을 번역하면 위의 근사식을 얻게 된다.)

iv) $f(x) = \sin(a+x)$라 하면 $f'(x) = \cos(a+x)$이고 $f(0) = \sin a$, $f'(0) = \cos a$이므로 식(13)에 의해 x가 0에 가까울 때 $\sin(a+x) \fallingdotseq \sin a + x\sin a$ 가 된다.

[보기4.2.] $x_0=2$, $y_0=8$ 에서 $z=f(x, y)=\sqrt{9x^2+y^2}$의 선형화를 구하여라. 또한 $f(1.95, 8.1)$의 근사값을 구하여라.

[풀이] f의 x에 관한 편도함수는

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}} \text{ 이고,}$$

f의 y에 관한 편도함수는

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)=\frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(2, 8)=\frac{18}{10}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(2, 8)=\frac{8}{10} \text{ 이다.}$$

근사식

$$z=f(x,y)\fallingdotseq f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

에 이 값들을 대입하면 선형화는

$$z\fallingdotseq f(2,8)+\frac{\partial}{\partial x}f(2,8)(x-2)+\frac{\partial}{\partial y}f(2,8)(y-8)$$

$$=f(2,8)+\frac{18}{10}(x-2)+\frac{8}{10}(y-8)$$

$f(1.95, 8.1)$의 선형 근사값은 $10+\frac{18}{10}(-0{,}05)+\frac{8}{10}(0.1)=9.99$이다.

V. 함수의 오목, 볼록과 받침선

1. 함수의 오목, 볼록

두 점 $P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$를 잇는 직선의 방정식은

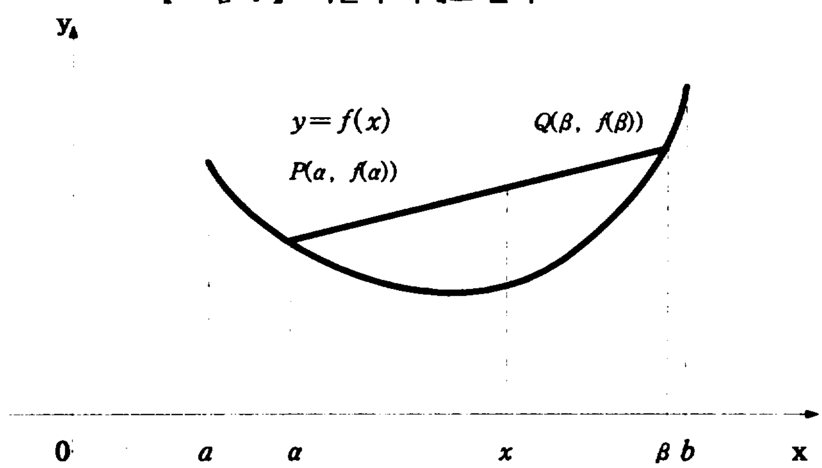
$$y=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

로 주어지므로, 구간 $[\alpha, \beta]$(또는 $[\beta, \alpha]$)의 내부에서 직선이 곡선 $y=f(x)$ 보다 아래쪽에 놓여있지 않다는 것은 $\alpha\leq x\leq\beta$(또는 $\beta\leq x\leq\alpha$)를 만족하는 임의의 x에 대하여 부등식

$$f(x)\leq f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) \quad \text{------------------(14)}$$

가 성립하는 것이다.

【 그림 4 】 곡선의 아래로 볼록



즉, 곡선 $y=f(x)$ 가 구간 (a, b)에서 아래로 볼록이라 함은 구간 (a, b)에 속

하는 임의의 서로 다른 두수 α, β와 그 사이에 있는 임의의 수 x에 대하여 언제나 부등식(14)이 성립함을 의미한다.

위와 반대로 구간 (a, b)에 속하는 임의의 서로 다른 두수 α, β와 그 사이에 있는 임의의 수 x에 대하여, 부등식

$$f(x) \geq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

가 성립하면 곡선 $y = f(x)$가 구간 (a, b)에서 위로 볼록이라 한다.

이제 $\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \lambda$라 놓으면 $\alpha \leq x \leq \beta$(또는 $\beta \leq x \leq \alpha$)와 $0 \leq \lambda \leq 1$가 동치가 된다.

$$x - \alpha = \lambda(\beta - \alpha), \quad x = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$$

따라서 부등식(14)은

$$\begin{aligned} f[(1-\lambda)\alpha + \lambda\beta] &\leq f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}[f(\beta) - f(\alpha)] \\ &= f(\alpha) + \lambda[f(\beta) - f(\alpha)] \\ &= (1-\lambda)f(\alpha) + \lambda f(\beta) \quad \text{------------------}(15) \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다.

이에 따라 볼록 함수의 정의를 다음과 같이 내릴 수 있다.

[정의5.1.] 함수 f가 구간 (a, b)에서 아래로 볼록(convex)이라는 것은 임의의 $\alpha, \beta \in (a, b)$에 대해서 $0 \leq \lambda \leq 1$를 만족하는 수 λ에 대하여

$$f[(1-\lambda)\alpha + \lambda\beta] \leq (1-\lambda)f(\alpha) + \lambda f(\beta)$$

가 성립한다.

※참고) 부등식(15)에서 $1 - \lambda = \mu$라 놓으면 보다 대칭적인 형태로 표기할 수가 있다.

$$f(\mu\alpha + \lambda\beta) \leq \mu f(\alpha) + \lambda f(\beta)$$

여기에서 μ, λ는 $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu + \lambda = 1$를 만족하는 임의의 실수이다.

[정리5.1.][4] 함수 f가 구간 (a, b)에서 아래로 볼록이고,

$a < x_0 \leq v < y_0$, $x_0 < u \leq y_0 < b$ 이면 $\dfrac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} \leq \dfrac{f(y_0) - f(v)}{y_0 - v}$ 이다.

다음 정리는 Principles of mathematical analysis,3rd ed(Walter, Rudin저)에 연습문제(p.101)로 실려있는데 $\varepsilon - \delta$ 방법으로 증명할 수 있다.

---

4) H, L, Royden(1968), Real Analysis, Macmillan Publishing company, p113.

[정리5.2.] 함수 f가 구간 (a, b)에서 볼록함수일 때, f는 구간 (a, b)에서 연속이다.

2. 받침선

함수의 오목, 볼록 상태에서 선형함수인 접선의 일반화된 개념으로 미분불능인 상태까지 포함하는 받침선(supporting line)을 살펴보았다.

[정의5.2.] 함수 $y=f(x)$가 구간 (a, b)에서 아래로 볼록한 경우 $x=\alpha \in (a, b)$에서

$$f(x) \geq m(x-\alpha)+f(\alpha)$$

를 만족할 때, 직선

$$y=m(x-\alpha)+f(\alpha)$$

를 $y=f(x)$의 $x=\alpha$에서 **받침선**(supporting line)이라 정의한다.

◆ 함수 $y=f(x)$가 구간 (a, b)에서 위로 볼록한 경우 $x=\alpha \in (a, b)$에서

$$f(x) \leq m(x-\alpha)+f(\alpha)$$

를 만족할 때, 직선

$$y=m(x-\alpha)+f(\alpha)$$

를 $y=f(x)$의 $x=\alpha$에서 **받침선**(supporting line)이라 한다.

◆ 정의5.2.에서 양끝점이 구간에 포함되는 경우, 즉 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 아래로 볼록(오목)한 경우 $x=a$에서

$$f(x) \geq m(x-a)+f(a) \ [\, f(x) \leq m(x-a)+f(a)\,]$$

를 만족할 때, 직선

$$y=m(x-a)+f(a)$$

를 $x=a$에서 $y=f(x)$의 **받침선**이라 하고, $x=b$에서

$$f(x) \geq m(x-b)+f(b) \ [\, f(x) \leq m(x-b)+f(b)\,]$$

를 만족할 때, 직선

$$y=m(x-b)+f(b)$$

이 $x=b$에서 $y=f(x)$의 **받침선**이라 한다.

[정리5.4.] 함수 $y=f(x)$가 구간 (a, b)에서 아래로 볼록이고, 구간 (a, b)에서 미분가능일 때, 임의의 $x=\alpha \in (a, b)$에서 받침선의 기울기는 $f'(\alpha)$이다.

[증명] $y=f(x)$의 $x=\alpha$에서 접선의 방정식을

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

라 하고 함수 g를

$$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$$

로 놓으면 $g'(x)=f'(x)-f'(a)$가 된다.

그리고 $y=f(x)$가 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하고, 아래로 볼록이므로 g'가 증가함수이다.

한편 $g'(a)=0$이고

$x<a$ 이면 $g'(x)\leq 0$,

$x>a$ 이면 $g'(a)\geq 0$ 이므로

$y=g(x)$는 $x=a$에서 최소가 된다.

즉, 점 $(a,\ f(a))$ 이외에서의 곡선 $y=f(x)$는 그 접선보다 위쪽에 있다.

따라서

$$f(x)\geq f'(a)(x-a)-f(a)$$

가 성립하고

$$y=f'(a)(x-a)-f(a)$$

가 $x=a$에서 $y=f(x)$의 받침선이 된다.

만약 $x=a$에서 다른 받침선

$$y=m(x-a)-f(a)\ \ (\leq f(x))$$

이 있다고 가정하면

(즉 $m\neq f'(a)$라 하면)

i) $m>f'(a)$일 때

$x=a$에서 우방도함수 $f_+'(a)$는

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<m=\frac{m(x-a)+f(a)-f(a)}{x-a}$$

이므로 $\delta>0$가 존재하여 임의의 $x_0\in(a,\ a+\delta)$에 대하여

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<\frac{m(x_0-a)+f(a)-f(a)}{x_0-a}$$

가 성립한다. 그런데 $x_0-a>0$이므로

$$f(x_0)<m(x_0-a)+f(a) \qquad \text{-------------------(16)}$$

가 된다.

ii) $m<f'(a)$일 때

$x=a$에서 좌방도함수 $f_-'(a)$는

$$f_-'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > m = \frac{m(x-a) + f(a) - f(a)}{x - a}$$

이므로 $\delta > 0$가 존재하여 임의의 $x_0 \in (a,\ a+\delta)$에 대하여

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > \frac{m(x_0 - a) + f(a) - f(a)}{x_0 - a}$$

가 성립한다. 그런데 $x_0 - a > 0$이므로

$$f(x_0) < m(x_0 - a) + f(a) \quad \text{-------------------(17)}$$

가 된다.

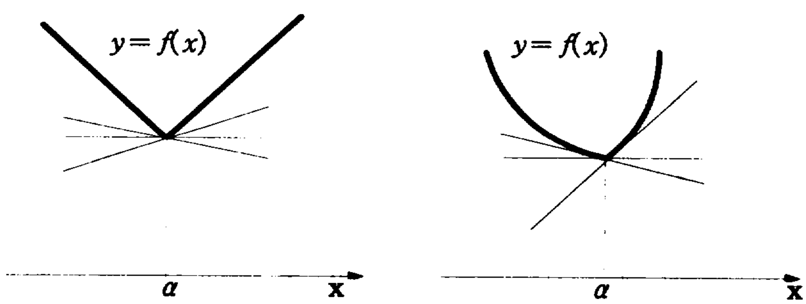
i), ii)에서 식(16), (17) 모두 $y = m(x-a) - f(a)$가 $x = a$에서 $y = f(x)$의 받침선 ($f(x) \geq m(x-a) + f(a)$) 이라는 정의에 모순이다.

따라서 받침선의 기울기는 $m = f'(a)$가 된다.

다시 말해서 미분가능일 때 받침선은 유일하며 그 점에서 접선이 된다.

※참고) 볼록 함수는 미분가능일 필요가 없다. 그러나 **정리**5.2.에 의하면 반드시 연속이다. 만약 $y = f(x)$가 구간 $(a,\ b)$에서 아래로 볼록인 함수일 때 연속이지만 미분불가능인 점에서 받침선을 생각해보자.

【 그림 5 】 미분불가능인 점에서 받침선



【그림 5】 와 같이 $y = f(x)$가 구간 $(a,\ b)$에서 아래로 볼록이고, $x = a$에서 미분불가능이라 하자.

그리고 $t = a \in (a,\ b)$에서 $y = f(t)$의 받침선을

$$y = m(t-a) - f(a)$$

라 할 때

i) $a < t < b$이면

$$m = \frac{m(t-a) + f(a) - f(a)}{t - a} \leq \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad \text{---(18)}$$

에서 $m(t-a) + f(a) \leq f(t)$가 되고

ii) $a < t < a$이면

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \leq \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{m(t-a)+f(a)-f(a)}{t-a} = m \quad ---(19)$$

에서 $f(t) \geq m(t-a)+f(a)$가 된다. 식(18), (19)에서 $f_-'(a) \leq m \leq f_+'(a)$ 그리고 $f_-'(a) \neq f_+'(a)$이므로 $x=a$에서 받침선은 무수히 많다.

[따름정리5.5.] $y=f(x)$는 $a \leq x \leq b$에서 정의된 연속함수이고 $f''(x) < 0$ $(a < x < b)$이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ $(a < t < b)$에서 받침선을 $y=g(x)$라 할 때 $a \leq x \leq b$에서 $g(x) \geq f(x)$이다.

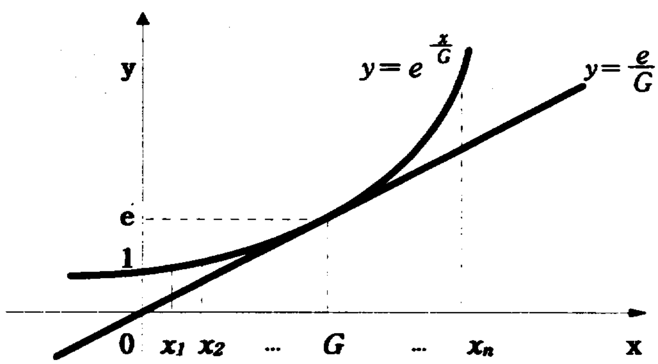
[보기5.2.] 임의의 양수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$에 대하여 다음 부등식이 항상 성립함을 증명하여라.

$$\frac{x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

[증명] 임의의 양수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 기하평균을 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = G$라 하고 지수함수 $y=e^{\frac{x}{G}}$의 그래프를 생각하자.

원점에서 이 그래프에 그은 받침선의 방정식을 미분으로 구해보는데 우선 접점을 $(t, e^{\frac{t}{G}})$라 하면 $y' = \frac{1}{G} e^{\frac{t}{G}}$에서 받침선의 기울기는 $\frac{1}{G} e^{\frac{t}{G}}$이다. 따라서 받침선의 방정식은 $y - e^{\frac{t}{G}} = \frac{1}{G} e^{\frac{t}{G}} (x-t)$이다.

【그림 6】 지수함수 $y=e^{\frac{x}{G}}$의 받침선



이것이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$0-e^{\frac{t}{G}}=\frac{1}{G}\,e^{\frac{t}{G}}\,(0-t)$$

에서 $t=G$ 이다. 그러므로 $y=\frac{e}{G}\,x$ 가 된다.

그림에서 $e^{\frac{x_1}{G}}\geq\frac{e}{G}\,x_1$

$$e^{\frac{x_2}{G}}\geq\frac{e}{G}\,x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\frac{x_n}{G}}\geq\frac{e}{G}\,x_n$$

이 부등식을 변끼리 곱하면

$$e^{\frac{x_1}{G}}\,e^{\frac{x_2}{G}}\cdots e^{\frac{x_n}{G}}\geq(\frac{e}{G}\,x_1)\,(\frac{e}{G}\,x_2)\cdots(\frac{e}{G}\,x_n)$$

$$e^{\frac{1}{G}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\geq\frac{e^n}{G^n}\,(x_1\;x_2\;\ldots\;x_n)=\frac{e^n}{G^n}\,(G^n)=e^n$$

$$\frac{1}{G}\,(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geq n$$

따라서 부등식

$$\frac{x_1+x_2+\;\ldots\;+x_n}{n}\;\geq\;G=\sqrt[n]{x_1\;x_2\;\ldots\;x_n}$$

가 항상 성립한다.

※ $y=f(x)$ 가 아래로 볼록이고, 구간 $[a,\,b]$의 끝점에서 좌방도함수나 우방도함수가 존재할 경우

$x=a$에서 받침선의 기울기 m은

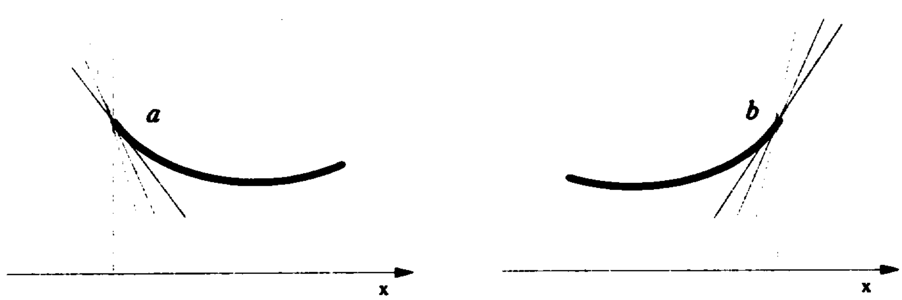
$$m\leq f_+{}'(a)$$

이고, $x=b$에서 받침선의 기울기 m은

$$m\geq f_-{}'(b)$$

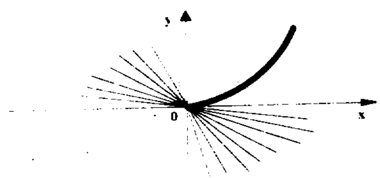
이다.

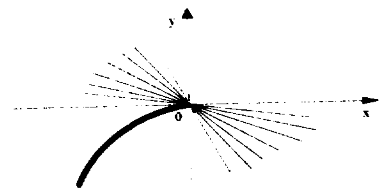
【 그림 7 】 구간의 끝점에서 받침선



※ $y=x^3$의 그래프를 관찰해보면, 구간 $[0, \infty)$일 때 $x=0$에서 $y=x^3$의 받침선의 기울기 m이 취하는 범위와 구간 $(-\infty, 0]$일 때 $x=0$에서 $y=x^3$의 받침선의 기울기 m이 취하는 범위는 일치하고 그 범위는 $m \leq 0$임을 알 수 있다.

【 그림 8 】 구간의 끝점에서 받침선의 기울기





[보기5.4.] $0 \leq x \leq 1$에서 부등식 $1-kx \leq \dfrac{2}{1+e^x}$가 항상 성립하도록 하는 k의 최소값을 구하여라.

[풀이]

$$g(x)=\frac{2}{1+e^x} \text{ 라 놓으면}$$

$$g'(x) = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

이므로 $y=g(x)$는 감소함수이다. 또한

$$g''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

가 되는데 $x>0$에서 $e^x>1$이므로 $g''(x)>0$ 이다.
따라서 $y=g(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록이다.

한편 $f(x)=1-kx$라 놓으면 주어진 부등식은
$f(x) \leq g(x)$가 되고 $f(0)=g(0)$이다.

【그림 9】 $g(x)=\dfrac{2}{1+e^x}$ 의 $x=0$에서 받침선

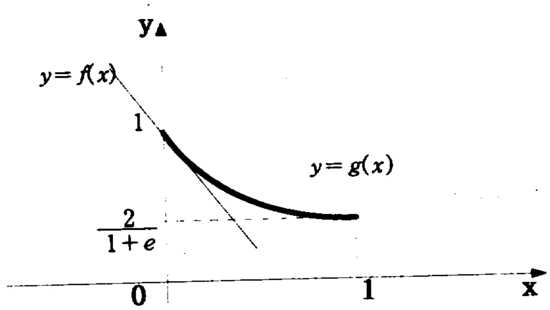


그림9] 에서 $f(x) \le g(x)$가 항상 성립하기 위해서는 받침선 $y=f(x)$가 점 $A(0, 1)$에서 곡선 $y=g(x)$에 접할 때이므로

$$f'(0) = -k \le -\frac{1}{2} = g'(0)$$

$$\therefore\ k \ge \frac{1}{2}$$

따라서 k의 최소값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

Ⅵ. 결 론

도함수란 개념의 발생에 동기를 준 것은 곡선의 접선을 구하는 문제였다. 중등교육에서 미분학의 지도는 도함수의 개념에 기초를 두고, 상의 극한으로 정의하여 극한의 위치인 접선의 기하학적 그림과 관련시켰다.

따라서 본 논문에서는 미분가능의 의미를 직관적으로 이해하기 쉽도록 선형사상을 도입하여

함수 $f:(a, b)\to \mathbf{R}$에 대하여 상수 L과 함수 $\gamma:(a, b)\to \mathbf{R}$가 존재하여

$$f(x)=f(c)+L(x-c)+\gamma(x),\ \ (\text{단, } \lim_{x\to c}\frac{\gamma(x)}{x-c}=0)$$

을 만족할 때 함수 f는 점 $x=c\in(a, b)$에서 미분 가능하다'

고 정의하였다. 이러한 정의는 다변수 함수 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$(단, n, m은 양의 정수), 벡터함수까지 확장하여 이용할 수 있는 유리한 점이 있다.

이 정의를 이용하여 미분법의 기본법칙을 증명하였고, 특히 합성함수의 도함수(연쇄법칙)의 증명이 현 고등학교 교육과정에서 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}$를 사용하여 증명하고 있는데, $\Delta z=0$인 경우에는 변형이 불가능하다. 따라서 이 합성 함수의 도함수의 증명 역시 선형 사상을 도입하여서 증명하였다.

또한 미분 가능한 점 c를 포함하는 구간에서 정의된 함수를 f라 할 때 c에 충분히 가까운 근방에서 선형사상을 이용한 미분가능의 정의와 관련하여 선형 근사값에 대하여 탐색하였다. 많은 학생들은 기하학적이나 그래프적 방법에 약하고, 극한이나 근사법에 대한 의미 이해가 부족한 반면, 대수적 처리법에는 월등하다. 근사값 계산 내용이 고교 교육 과정에 포함시킴으로써 명확하지 않더라도 기하학적으로 수렴하는 것이 도형과 관련된 양(量)들의 수렴성을 보장한다는 인식을 가질 수 있다고 본다.

또한 기하학적으로 곡선의 오목, 볼록을 인지하여 볼록 함수의 정의를 내리고

제 2계도함수의 부호에 의해서 함수의 오목, 볼록을 판정된다는 것을 평균치 정리를 사용하여 증명하였다. 특히 함수의 오목, 볼록 상태에서 접선의 일반화된 개념으로 받침선의 개념을 도입하여 미분가능한 점에서는 받침선은 유일하며 접선과 일치함을 보이고, 미분 불가능한 점에서는 받침선은 무수히 존재함을 확인하고, 구간의 양 끝점에서 받침선을 고찰하였으며, 고등학교 교과 과정에서 받침선의 개념과 관련된 보기 문제들을 제시하였다.

결국 함수 $y=f(x)$를 알아 볼 때에 문제가 되는 것은 변수 x가 변화할 때 y가 어떻게 변화하느냐하는 것인데, 미분은 그것을 그래프 위의 각 점 가까이에 눈을 집중시킴으로써, 즉 극한적인 장소에 시점을 설정함으로써 의미를 갖는 것이다.

참 고 문 헌

1. 김인수(1997), 해석학의 기초개념과 학습지도, 전남대학교 출판부.
2. 시바타 도시오(柴田敏男), 미적분에 강해진다, 손영일 역(1995), 전파학사.
3. 양영오(1995), 최신해석학, 청문각.
4. James, Stewart, 미분적분학, 수학교재편찬위원회 역(1996), 청문각.
5. 이석구(1994), "高等學校 教育課程의 微分係數의 指導 方法에 關한 研究." 碩士學位論文, 충북대학교 교육대학원.
6. 안형국(1996),수학사랑,1996년 6월 통권 제4호.
7. H, L, Royden(1968), Real Analysis, Macmillan Publishing company.
8. Michael, Spivak(1967), Calculus, Amsterdam.
9. R,C,Buck(1965), Advanced Calculus, McGraw-Hill.
10. Walter, Rudin(1976), Principles of mathematical analysis,3rd ed McGraw-Hill.