科學敎育
Journal of Science Education 16, 175-189, 1999

그래프를 이용한 단조수열의 기하학적 지도에 관한 연구

이 동 남* · 양 영 오**

A Study on Geometric Teaching Monotone Sequences Using Graph

Dong Nam Lee, Young oh Yang

Abstract

In the current curriculum of high school, the developing process of the content in the sequence units is stated by the intuitional and superficial description and solved by using only the algebraical solution. Thus the learning and teaching procedure is done without the clear definition and about limit and monotonicity of a sequence, most students are losing interest in the units concerning sequence.

In this paper, the geometrical analysis and method to the content of sequence using the geometrical figure and the graph of function is used in order to persue the logicality and immediacy and to make the systematic and effective learning-teaching procedure in answering the questions about a monotone and bounded sequence.

Ⅰ. 서 론

수학은 어려운 과목, 재미없는 과목 등과 같은 표현에는 수학교육에 관련하고 있는 모든 사람들이 책임이 있다고 본다. 급격한 대입 전형 제도의 변화와 단계형·선택형 수준별 교육과정이 도입되는 제7차 교육과정의 시행을 앞둔 시점에서 이제 '어떤 교수 · 학습 방법이 수학과목을 재미있고 쉽게 이해할 수 있으며 동시에 수학교육의 본질인 창의력 신장에 도움을 줄 수 있는가'하는 문제에 있어서 그 어느 때 보다 심도 있는 논의가 이루어져야 함은 물론 교과서의 구성이나 교사의 역할이 중요한 때가 왔다고 본다.

우리는 수학교과가 아니더라도 일상생활에서 일정한 규칙에 따라 나열되는 수의 열, 즉 수열문제들을 접하게 되는 경우가 있다. 현행 고등학교 교과서에서는 이들 수열문제를 다루면서 학생들이 흥미를 갖고 학생 스스로가 착안하여 해결할 수 있는 방법의 모색에 소홀한 점이 있음을 느끼게 된다. 또한, 수열의 극한에서는 지나친 논리의 비약 또는 비논리적인 전개로 학생들에게 이해를 강요하고 있어 학생들이 쉽게 흥미를 잃게 하는 결과를 낳고 있음

* 대정여자고등학교 교사
** 제주대학교 자연과학대학 수학과

을 감안하여 수열 단원을 중심으로 효과적인 교수-학습자료의 개발이 필요하다.

이런 점에 중점을 두어 본 논문의 연구목적은 다음과 같다. 첫째, 현행 고등학교 수학 교과서의 수열 단원을 중심으로 학습내용을 조사·분석하여 교수-학습 내용의 엄밀성과 직관성을 동시에 추구해 나가면서 수열의 중요한 특성(수열의 증감 상태, 극한의 기하학적 의미, 수열의 점화관계와 일반항, 일반항을 쉽게 구할 수 없는 점화식을 갖는 수열의 극한 문제 등) 등을 대수적 계산방법 보다는 기하학적 방법에 치중하여 체계적으로 연구되어야 할 과제 및 문제점을 제기하고자 한다.

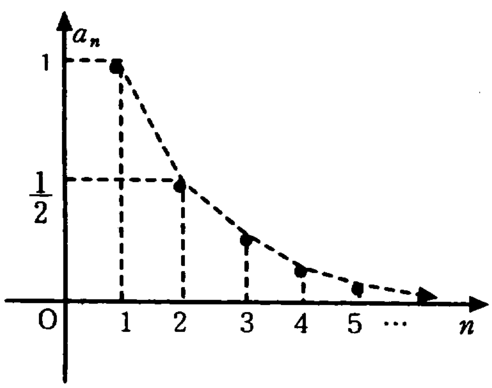
둘째, 고등학교 교육과정에서 무시되고있는 수열 단원의 이론적 배경에 대한 문제점을 제기하여, 이를 함수의 그래프와 연계하여 논리성과 직관성을 동시에 추구하면서 학생들로 하여금 자기 주도적 학습이 이루어질 수 있도록 새로운 교수-학습방법을 제시하고자 한다. 특히, 어떤 수열이 감소수열 또는 증가수열이 되는지, 유계성 및 수렴·발산에 대한 논리적 사고과정과 함수의 그래프와 연계한 직관적 사고 방법을 제시하고자 한다.

II. 수열의 극한에 관한 교과내용과 분석

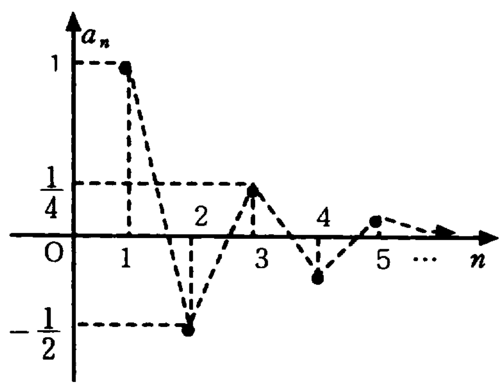
1. 수열의 수렴과 발산에 관한 교과내용

다음 수열 (1), (2)에서 n이 증가함에 따라 n째항 a_n이 어떻게 변하는가를 그림으로 나타내면 아래와 같다.

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$



(2) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ (-\frac{1}{2})^{n-1},\ \cdots$



위의 그림에서 n이 한없이 커질 때, 두 수열의 n 째항 a_n은 모두 0에 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$ n이 한없이 커질 때, n째항 a_n이 어떤 일정한 실수 α에 가까워지면, 이 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다고 하고 α를 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$로 나타낸다.

......................중 략......................

수열의 수렴, 발산

수렴		.... $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (단, α는 실수)
발산	양의 무한대로발산	⋯ $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$
	음의 무한대로발산	⋯ $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
	진동	

2. 극한값의 계산에 관한 교과내용

수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음과 같은 기본 성질이 있음이 알려져 있다.

수열의 극한에 관한 기본 성질(I)

가 k가 양의 유리수일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$ (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

나. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$(단, α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$(단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

(복부호 동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n \neq 0, \beta \neq 0$)

수열의 극한에 관한 기본 성질(II)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α, β는 실수)일 때,

(1) $a_n \le b_n (n=1, 2, 3, \cdots)$ 이면, $\alpha \le \beta$

(2) 수열 $\{c_n\}$에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$

$(n=1,2,3,\cdots)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

3. 교과내용의 분석과 문제점

거의 모든 교과서는 다음과 같은 공통점을 갖고 있다.

(1) 한없이 크다, 한없이 작다, 일정한 값에 가깝다는 등의 개념을 논리적인 설명없이 직관적으로만 설명하고 있다. 이들에 대한 논리적 설명의 필요성에 대하여 충분한 검토도 필요하다.

(2) 수열을 자연수의 집합 N을 정의구역, 실수의 집합 R을 공역으로 하는 함수 $f: N \to R$, $f(n)=a_n$으로 정의한 후 수렴하는 수열의 예로는 증가하는 수열 또는 위의 그림과 같이 감소하는 수열이나 감소도 증가도 하지 않는 수열의 예를 제시하고 있다. 수열을 무한수열로 인정하여 하나의 함수로 정의하고 있으므로 증가수열은 N에서 증가함수, 감소수열은 N에서 감소함수이다. 따라서 수열을 함수의 단원에서와 마찬가지로 함수의 증가상태, 감소상태와 연계하여 교과서가 서술되고 수열을 지도하는 것이 바람직하다.

(3) 교과서에서 발산하는 수열 중 진동하는 경우의 수열에 대한 논리적 설명이 불충분하다. 보다 엄밀하고 논리적 사고 과정을 통하여 수렴·발산에 대한 정의를 내린 다음 이를 체계적으로 지도하는 것이 바람직하다.

(4) 수열의 극한에 관한 기본 성질들을 증명없이 제시하고 있다는 점이다. 이들의 논리적 증명이나 직관적 증명을 어떻게 제시하는 것이 바람직한가의 문제는 연구과제로 남는다.

(5) 수열의 극한에 관한 성질(I) ②의 (4)에서 $\beta \neq 0$ 라는 조건만 있으면 $b_n \neq 0$라는 조건이 추가적으로 필요하지 않다는 점이다. 그러면 왜 그렇게 되는가에 대한 설명이 필요하다.

III. 수열의 극한정리와 단조수열

1. 수열의 극한과 극한의 기본성질

수열의 극한(값)과 이의 성질은 중요한 개념과 성질이지만 현행 고등학교 교육과정에서 그 내용이 피상적으로 서술되거나 다소 불완전하거나 또는 고등학교 학생의 수준에 비추어 볼 때 이해하기 어려운 것들도 있다. 따라서 수열의 극한에 대하여 가장 효과적인 지도방법을 모색하기 위하여 여기서는 이론적 기초를 고찰하고자 한다.

정의 1.([5]) 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여 적당한 실수 L이 존재하여 다음의 조건을 만족할 때 수

열$\{a_n\}$은 L에 수렴한다(converge)고 하고, L을 수열$\{a_n\}$의 극한(limit)이라 한다.
"임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 $N=N(\epsilon)$ 이 존재하여 $n\geq N$인 모든 자연수 $n\in N$에 대하여 $|a_n-L|<\epsilon$이다."
기호로는 $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ 또는 $a_n\to L(n\to\infty)$로 나타낸다. 때로는 "수열$\{a_n\}$은 극한 L에 가까워진다." 또는 "수열$\{a_n\}$은 극한 또는 극한값 L을 갖는다."고 말하기도 한다. 수열$\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, $\{a_n\}$ 은 발산한다(diverge)고 한다.
정의 2.([5]) 임의의 양수 M에 대하여 자연수 N이 존재해서 $n\geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>M$(또는 $a_n<-M$)이 성립할 때, $\{a_n\}$은 양의 무한대 $+\infty$(또는 음의 무한대 $-\infty$)로 발산한다고 한다.
정리 1.([5]) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β에 수렴할 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$($k$는 상수)
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$(부호동순)
(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

정리 2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β에 수렴하고 $\beta\neq0$일 때,

(1) 유한개의 자연수를 제외한 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\neq0$
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$
(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$

증명. (1) 주어진 양수 $\frac{1}{2}|\beta|$에 대하여
$$n\geq N_1 \text{ 이면 } |b_n-\beta|<\frac{1}{2}|\beta| \text{ 즉, } |b_n|>\frac{1}{2}|\beta|$$
을 만족하는 자연수 N_1이 존재한다. 따라서 $n\geq N_1$이면 $b_n\neq0$ 이다.

(2) 위에서 본 바와 같이 주어진 양수 $\frac{1}{2}|\beta|$에 대하여
$$n\geq N_1 \text{ 이면 } |b_n-\beta|<\frac{1}{2}|\beta| \text{ 즉, } |b_n|>\frac{1}{2}|\beta|$$
이 되는 자연수 N_1이 존재한다. 또한 ε을 주어진 임의의 양수라 하면 $\frac{1}{2}\beta^2\varepsilon$ 에 대하여
$$n\geq N_2 \text{ 이면 } |b_n-\beta|<\frac{1}{2}\beta^2\varepsilon$$
되는 자연수 N_2가 존재한다. $N=\max(N_1, N_2)$ 라고 하면
$$n\geq N\text{일 때 } \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{|b_n-\beta|}{|b_n||\beta|}$$
$$<\frac{2}{\beta^2}|b_n-\beta|<\varepsilon.$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\beta}$ 이다.

(3) 앞의 정리 1에 의하여
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right)=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \square$$

2. 극한정리

정리 3.([5]) 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴하고, 모든 $n\in N$에 대하여 $a_n\geq0$이면,
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\geq0$$
증명. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha<0$이라 가정하고, 임의의 양수 ϵ에 대하여 $\epsilon=-\alpha>0$라 하자. 그런데 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$(수렴)하므로, 모든 $n\geq N$에 대하여 $\alpha-\epsilon<a_n<\alpha+\epsilon$을 만족하는 자연수 N이 존재한다. 특히, $a_N<\alpha+\epsilon=\alpha+(-\alpha)=0$이다. 그러나 이것은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이라는 가정에 모순된다. 따라서 $\alpha\geq0$이다. $\square$

정리 4. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, 모든 $n\in N$에 대하여
$$a_n\leq b_n\text{이면 } \lim_{n\to\infty} a_n\leq\lim_{n\to\infty} b_n$$
증명. $c_n=b_n-a_n$으로 놓으면 모든 자연수 n에 대하여 $c_n\geq0$이다. 그러면 정리 1과 3으로부터 $0\leq\lim c_n=\lim b_n-\lim a_n$이므로, $\lim a_n\leq\lim b_n$이다. $\square$

정리 5.(스퀴이즈 정리, Squeeze Theorem) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(1) 모든 자연수 $n\in N$에 대하여 $a_n\le b_n\le c_n$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

그러면 수열 $\{b_n\}$은 수렴하고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

증명. 가정 (2)에서 $L=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n$라 하면 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $n\ge N$일 때 $|a_n-L|<\epsilon$과 $|c_n-L|<\epsilon$이 되는 자연수 N이 존재한다.

또한, 가정(1)에 의하여 $a_n-L\le b_n-L\le c_n-L$이므로

$|b_n-L|\le \max(|a_n-L|, |c_n-L|)<\epsilon$.

즉, $|b_n-L|<\epsilon$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=L$이다. □

위의 스퀴이즈 정리를 이용하면 고등학교 학습과정에서 흔히 볼 수 있는

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

임을 보일 수 있다. 사실, 모든 자연수 n에 대하여 $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

그런데, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 정리 5에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

정리 6. 수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면, 절대값의 수열 $\{|a_n|\}$은 $|\alpha|$에 수렴한다. 즉,

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 이면, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$이다.

증명. 모든 자연수 n 및 임의의 양수 ϵ에 대하여 가정에서 $|a_n-\alpha|<\epsilon$이므로 삼각부등식에 의하여 $||a_n|-|\alpha||\le|a_n-\alpha|<\epsilon$ 이다. 따라서, 수열 $\{|a_n|\}$은 $|\alpha|$에 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\alpha|$ □

정리 7. 수열 $\{a_n\}$이 $\alpha\in R$에 수렴하는 수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이라고 하자. 그러면 양의 제곱근의 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\alpha}$이다.

증명. 정리 3에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ge0$이므로, $\epsilon>0$에 대하여 두가지 경우 (1) $\alpha=0$, (2) $\alpha>0$에 대하여 고찰하자

(1) $\alpha=0$인 경우:

$a_n\to0$이므로 $n\ge K$일 때 $0\le a_n=a_n-0\le\epsilon^2$을 만족하는 자연수 K에 대하여 $0\le\sqrt{a_n}<\epsilon$이다.

$\epsilon>0$이므로 $\sqrt{a_n}>0$이다.

(2) $\alpha>0$인 경우

$\sqrt{\alpha}>0$ 이고, 다음 식이 성립한다.

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|=\left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{a_n}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\alpha}}\right|$$

$$=\frac{|a_n-\alpha|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\alpha}}$$

그리고 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n}+\sqrt{\alpha}\ge\sqrt{\alpha}>0$ 이므로

$$|a_n-\alpha|<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|a_n-\alpha|$$ □

따라서, $\sqrt{a_n}\to\sqrt{\alpha}$

3. 단조수열과 실수의 완비성

정의 3. ([5]) 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 실수 M이 존재하여 $a_n\le M(n\in N)$ 이면 위로 유계(bounded above)라 하며, 실수 L이 존재하여 $L\le a_n(n\in N)$이면 아래로 유계(bounded below)라고 한다. 위로 유계이며 동시에 아래로 유계인 수열을 유계수열이라고 한다. 즉, 실수 M이 존재하여 $|a_n|\le M(n\in N)$이면 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 유계수열이다.

정리 8. ([5]) 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 이 수렴하면 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 유계수열이다.

증명. 만일 $L=\lim_{n\to\infty}a_n$ 이면 자연수 N이 존재하여 $|a_n-L|<1$ $(n\ge N)$ 이다. 그러면 $n\ge N$인 모든 자연수 n에 대하여

$|a_n|=|L+(a_n-L)|\le|L|+|(a_n-L)|<|L|+1$

지금 $M=\max(|a_1|,|a_2|,|a_3|,|a_4|,\cdots |a_{N-1}|,|L|+1)$ 라 하면 $|a_n| \leq M(n\in N)$즉, 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 유계이다. □

《주의》 수열 $\{(-1)^n\}$은 유계이지만 발산한다. 따라서 위 정리의 역은 성립하지 않는다.

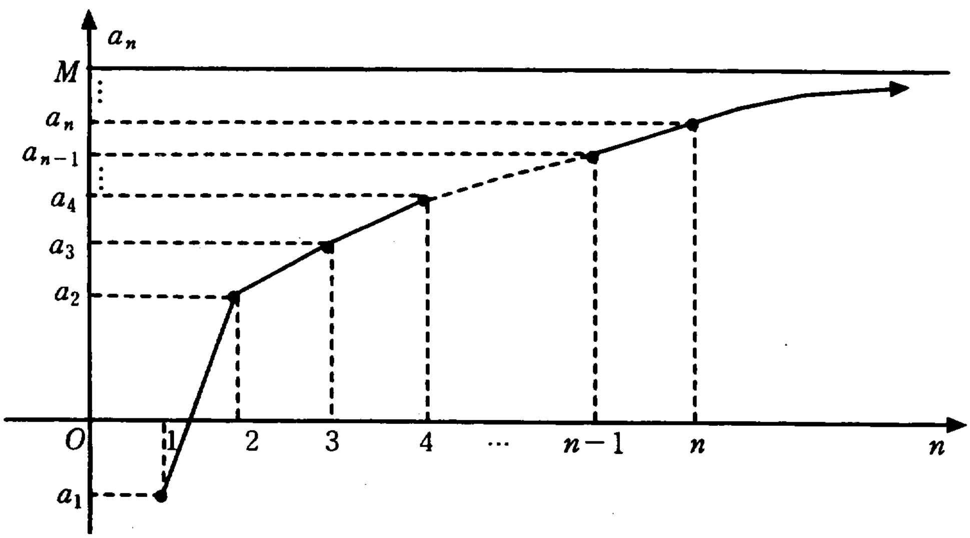
정의 4. $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}< \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$을 단조증가수열(monotone increasing sequence)이라 하고, $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots$인 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$을 단조감소수열이라 한다.

정리 9.(단조수렴 정리) 단조수열$\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 이 수열이 유계이다. 더욱이

(1) 수열 $\{a_n\}$이 유계인 단조증가수열이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\sup\{a_n\}$ 이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$이 유계인 단조감소수열이면 $\lim_{n\to\infty} a_n= \inf\{a_n\}$ 이다.

증명. (1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$을 위로 유계인 단조증가수열이라고 하자. 그러면 집합 $A=\{a_1, a_2,\cdots\}$는 공집합이 아니며 위로 유계인 R의 부분집합이다. R 의 완비성 공리에 의하여 집합 A는 최소상계 또는 상한을 갖는다.



$L=A=\{a_1, a_2\cdots\}$

라고 하자. 이제 $a_n\to L$임을 증명한다. 임의로 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 실수 $L-\varepsilon$은 A의 최소상계가 아니다. 따라서 $a_N>L-\varepsilon$되는 자연수 N이 존재한다. 그러나 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 단조증가수열이므로

$$a_n\geq a_N>L-\varepsilon\ (n\geq N) \quad ①$$

이다. 한편 L 은 A 의 최소상계이므로

$$L+\varepsilon>L\geq a_n \quad (n\geq N) \quad ②$$

이다. ①과 ②로부터

$$|a_n-L|<\varepsilon \quad (n\geq N)$$

임을 알 수 있다. 따라서 $a_n\to L$이다.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 이 유계인 단조감소수열인 경우도 위와 마찬가지로 증명할 수 있다.

역으로 $\{a_n\}$이 수렴하는 수열이면 정리 8에 의하여 $\{a_n\}$ 은 유계이다. □

실수의 완비성의 공리는 여러 가지 방법으로 표현할 수 있다. 위의 정리 9(단조수렴 정리)는 완비성의 공리(C)와 동치이고 또한 다음의 네 정리와 동치이다([4], [5]).) 사실 완비성의 공리(C)는 연속성에 대한 공리라고 말하기도 한

다. 따라서 실수계의 완비성을 설명하는데는 어느 것을 공리로 택하여도 이론상 잘못이 없다.

완비성의 공리(C) : (최소상계의 존재성) 순서체 R의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면 그 최소상계(또는 상한)가 존재한다.

정리 (L). (최대하계) R의 공집합이 아닌 부분집합 S가 아래로 유계이면 S의 최대하계(또는 하한)가 존재한다.

공리 (I). (구간축소 정리) 모든 $n \in N$에 대하여 $I_n=[a_n, b_n]$이라고 하자. $I_n \supset I_{n+1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 $\cap I_n$은 한 원소만을 갖는 집합이다.

정리 (D). (데데킨트 정리) R의 두 부분집합 A와 B가 다음 성질을 만족한다고 하자.

(a) $A \cup B = R$

(b) $A \neq \phi$, $B \neq \phi$

(c) 임의의 $a \in A$, $b \in B$에 대하여 $a < b$ 이다.

이때, 임의의 $a \in A$, $b \in B$에 대하여 $a \le \alpha$이고 $\alpha \le b$인 $\alpha \in R$ 가 유일하게 존재한다. (A, B)를 R의 절단이라 한다.

정리 (CA). (코오시 수열) 코오시 수열은 수렴한다.

Ⅳ. 그래프를 이용한 수열의 증감 상태, 유계성 및 극한 지도

1. 그래프를 이용한 수열의 증감상태와 유계성 지도

몇 가지 패턴의 수열에 대하여 그래프를 이용하여 증감상태와 유계성을 조사하고자 한다.

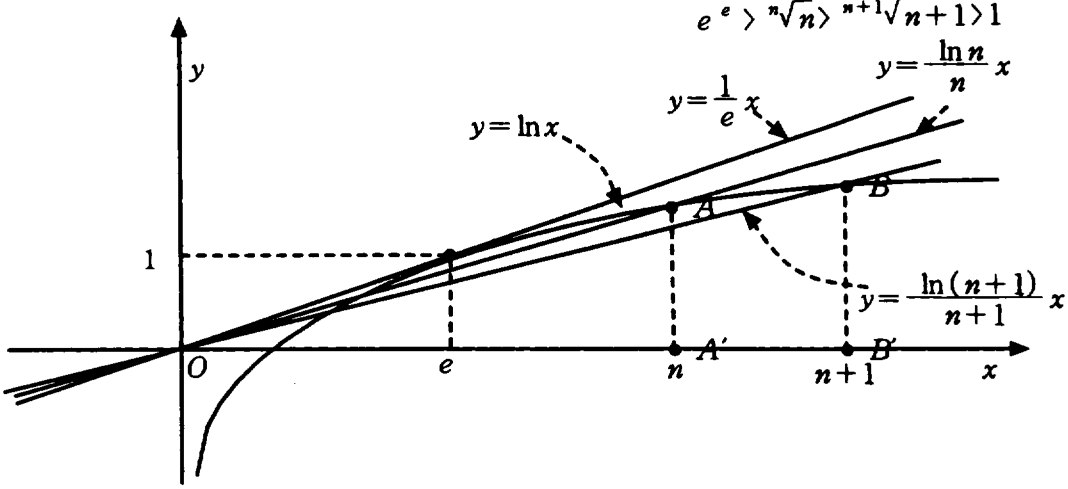
P1. 그래프를 이용하여 $\{\sqrt[n]{n}\}$의 증감상태와 유계성.

풀이. 함수 $y=\ln x$의 그래프 위의 점 $(e\ 1)$에서 원점을 지나는 직선은 $y=\frac{1}{e}x$ 이고 이 곡선 위의 임의의 한 점을 $A(n, \ln n)$라 하면 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln n}{n}$ $(<\frac{n}{n}=1)$이다. 아래의 그림에서 $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$ 의 기울기는 $\frac{\ln n}{n} \to 0$가 된다.

또한, $\frac{1}{e}$ >직선 OA의 기울기>직선 $\overleftrightarrow{OB}$의 기울기>0

즉, $\frac{1}{e} > \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \ln \sqrt[n]{n} > \ln \sqrt[n+1]{n+1} > 0$이므로

$$e^{\frac{1}{e}} > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > 1$$

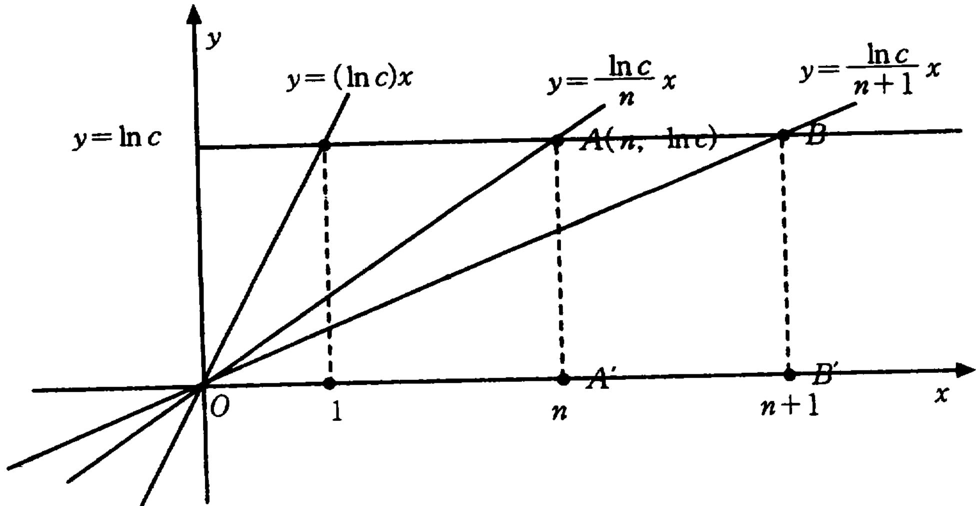


그러므로 수열 $\{\sqrt[n]{n}\}$은 유계이고 단조감소 수열이다. 따라서 단조수렴 정리에 의하여 이 수열을 수렴한다. 사실 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 이다.

P2. c가 양의 실수일 때, 그래프를 이용하여 수열 $\{\sqrt[n]{c}\}$의 증감상태와 유계성

풀이. (1) $c>1$인 경우

함수 $y=\ln c$의 그래프 위의 한 점 $A(n, \ln c)$라 하면 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln c}{n}$ 이다. 아래의 그림에서 $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln c}{n}\to 0$가 된다.



또한, $\ln c>$직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기$>$직선 $\overleftrightarrow{OB}$의 기울기>0. 즉, $\ln c>\frac{\ln c}{n}>\frac{\ln c}{n+1}>0 \Leftrightarrow \ln c>$ $\ln\sqrt[n]{c}>\ln\sqrt[n+1]{c}>0 \Leftrightarrow c>\sqrt[n]{c}>\sqrt[n+1]{c}>1$

그러므로 수열 $\{\sqrt[n]{c}\}$은 유계인 단조감소 수열이다. 사실 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$이다.

(2) $c=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$(자명),

(3) $0<c<1$인 경우도 위와 마찬가지로 $y=\ln c$의 그래프를 이용하면 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$ 임을 보일 수 있다.(그림 생략)

P3. 그래프를 이용한 $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$의 증감상태와 유계성

증명. (1) $a>1$일 때, $a_n=\frac{\log_a n}{n}$이라 하면, $a_{n+1}=\frac{\log_a(n+1)}{n+1}$ 이다.

함수 $y=\log_a x$ 위의 두점 $A(n, \log_a n)$, $B(n+1, \log_a(n+1))$(단, $e<n$)에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하자.

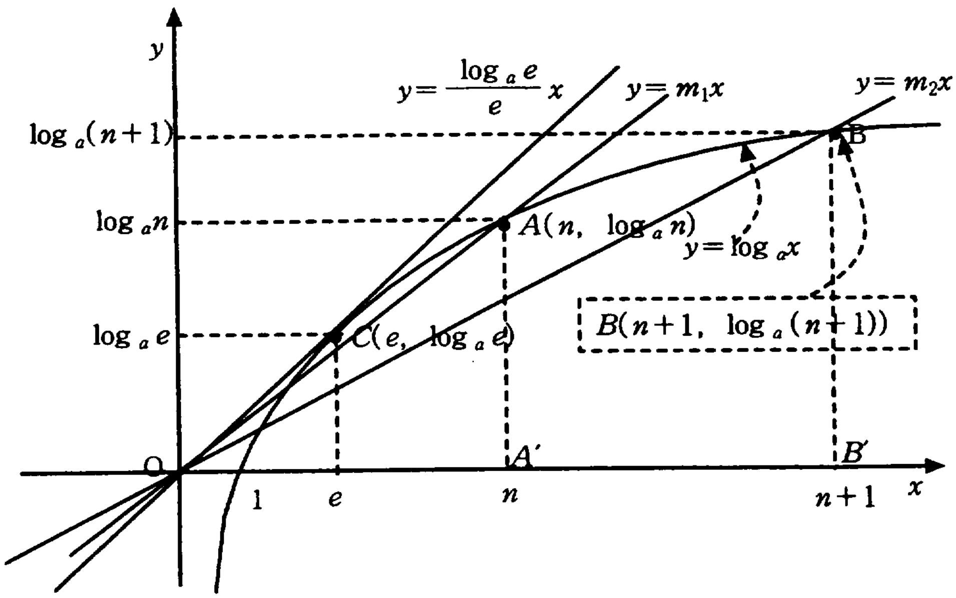
$y=\log_a x$ 위의 점 $C(e, \log_a e)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{\log_a e}{e}x$이다.

위의 그림에서 직선 $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$를 각각 $y=m_1x$, $y=m_2x$라 하면

$$m_1=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=\frac{\log_a n}{n}=a_n,\quad m_2=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=\frac{\log_a(n+1)}{n+1}=a_{n+1}$$

$$\therefore \frac{\log_a e}{e}>a_n>a_{n+1}>0$$

따라서 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 단조감소수열이면 유계수열이다.

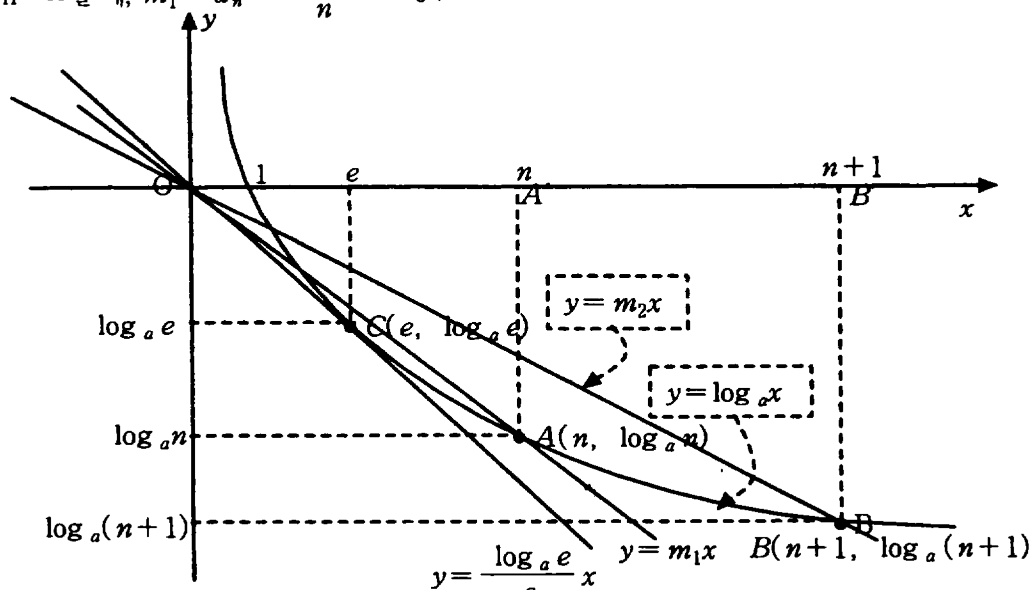


또한, n이 한없이 커질 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐을 알 수 있다.

즉, $n\to\infty$일 때, $m_1=a_n=\frac{\log_a n}{n}\to 0$.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$$

(2) $0<a<1$일 때,



위의 (1)과 같은 방법으로 직선 $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$를 각각 $y=m_1x$, $y=m_2x$라 하면

$$m_1=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=\frac{\log_a n}{n}=a_n\ ,$$

$$m_2=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=\frac{\log_a(n+1)}{n+1}=a_{n+1}$$

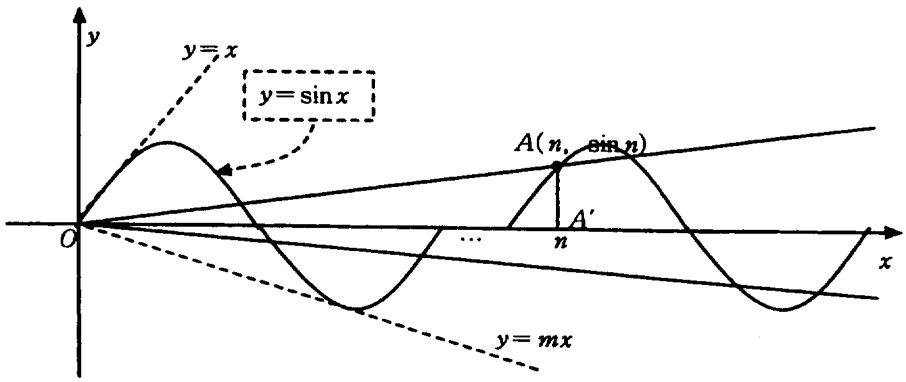
$$\therefore\ \frac{\log_a e}{e}<a_n<a_{n+1}<0\ .$$

따라서 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 단조증가수열이면서 유계이다. 또한, n이 한없이 커질 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $n\to\infty$일 때, $m_1 = a_n = \frac{\log_a n}{n} \to 0$ 이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0$.

P4. y=sinx의 그래프를 이용하여 $\lim_{n-\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$ 임을 조사해보자.

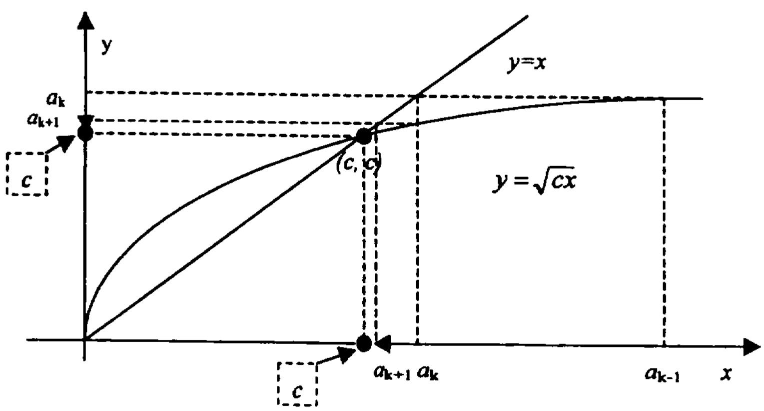
풀이. 지금, $y=\sin x$ 위의 임의의 한 점 A(n, $\sin n$)에서 x축에 내린 수선의 발을 A′라 하자. $n\to\infty$ 일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐을 알 수 있다. 즉, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{\sin n}{n} \to 0$ 이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$$



2. 특수한 점화수열의 극한에 관한 기하학적 지도

점화식으로 표시되는 몇 가지 형태의 수열의 일반항을 유도하지 않고, 단조수렴 정리를 이용하여 수열의 수렴 · 발산 여부를 판정하는 방법을 체계적으로 지도할 필요가 있으므로 이 절에서는 그 유형을 체계적으로 분류하여 조사하고자 한다.



T1. 점화식이 $a_1=a$, $a_{n+1}=\sqrt{ca_n}$(c>0)로 주어지는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구해보자

풀이. (1) (이론적 고찰) $a>c$일 때, $a_1=a$, $a_2=\sqrt{ca}$이므로 $c<a_2<a_1\le a$. 따라서,n=1일 때 $c<a_{n+1}<a_n\le a$가 성립한다. n=k일 때, $c<a_{k+1}<a_k$가 성립한다고 가정하면, $c<a_{k+2}=\sqrt{ca_{k+1}}<\sqrt{ca_k}=a_{k+1}$가 성립한다. 따라서, n=k+1일 때에도 $c<a_{n+1}<a_n\le a$가 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연

수 n에 대하여

$c < a_{n+1} < a_n \le a$

가 성립한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 유계인 감소수열이므로 수렴한다.

이때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$라 하면 $\alpha = \sqrt{c\alpha}$ 이므로 $\alpha = c$이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

(기하학적(직관적) 고찰) 직선 y=x와 곡선 $y=\sqrt{cx}$의 교점이 (c, c)이므로 위의 그림과 같이 이 두 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면

$\lim_{n\to\infty} a_n = c$

임을 직관적으로 쉽게 알 수 있다.

(2) $0 \le a \le c$일 때 $a_1 = a$, $a_2 = \sqrt{ca_1} = \sqrt{ca}$ 이므로 $a \le a_1 \le a_2 \le c$ 이다. 따라서, n=1일 때, $a \le a_n \le a_{n+1} < c$가 성립한다. n=k일 때, $a_k < a_{k+1} \le c$가 성립한다고 가정하면, $a_{k+1} = \sqrt{ca_k} < \sqrt{ca_{k+1}} = a_{k+2} \le c$가 성립한다. 따라서, n=k+1일 때에도 $a \le a_n < a_{n+1} \le c$가 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a \le a_n < a_{n+1} \le c$

가 성립한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열이므로 수렴한다. 이때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$라 하면 $\alpha = \sqrt{c\alpha}$ 이므로 $\alpha = c$. 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

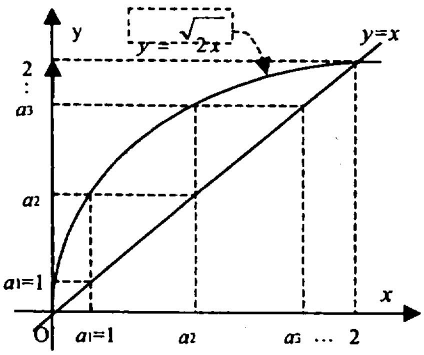
마찬가지로 위의 그림과 같이 기하학적인(직관적인) 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해 보면 위와 같은 결과를 얻게됨을 알 수 있다.

보기 1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ 으로 주어지는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구해보자

풀이. 위의 T1에서 a =1 이고 c=2인 경우이므로 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열이다. 이 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 임을 알 수 있다.

이를 기하학적 방법으로 고찰하여 보자.

직선 y=x와 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 의 교점이 (2, 2) 이므로 오른쪽 그림과 같이 이 두 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$임을 직관적으로 쉽게 추적할 수 있다.

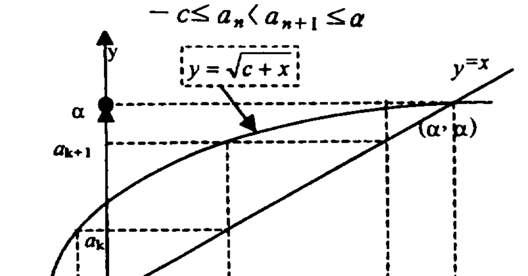


T2. $a_1 = a$, $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$ $(c>0)$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

증명. 직선 $y=x$와 곡선 $y=\sqrt{x+c}$의 교점을 (α, α)라 하자.

(1) $-c \le a \le \alpha$일 때, 직선 y=x와 곡선 $y=\sqrt{x+c}$의 그래프에서 수열$\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면(그림 참조) 모든 자연수 n에 대하여

$-c \le a_n < a_{n+1} \le \alpha$



즉, 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열임을 알 수 있다. 따라서 오른쪽 그림에서 수열$\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 직관적으로 수열$\{a_n\}$은 극한값 α을 가지며 α는 특성방정식 $x=\sqrt{x+c}$ 을 만족함을 알 수 있다. 즉, $\alpha^2 - \alpha - c = 0$이 성립한다.

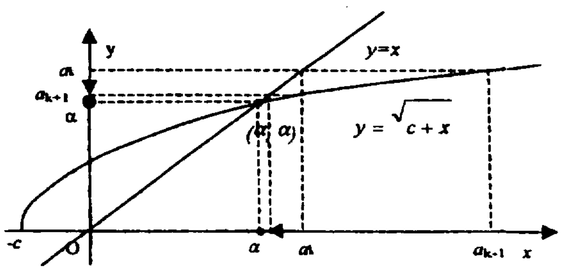
근과 계수와의 관계에서 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$

$(\alpha>0)$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$$

(2) $a>\alpha$일 때,

위와 마찬가지로 다음 그림에서 알 수 있듯이 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha<a_{n+1}<a_n\leq a$. 따라서, 수열 $\{a_n\}$은 유계이며 감소수열이므로 극한값을 갖는다.



사실, 직선 y=x와 곡선 $y=\sqrt{c+x}$의 그래프에서 수열$\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$임을 직관적으로 이해할 수 있다.

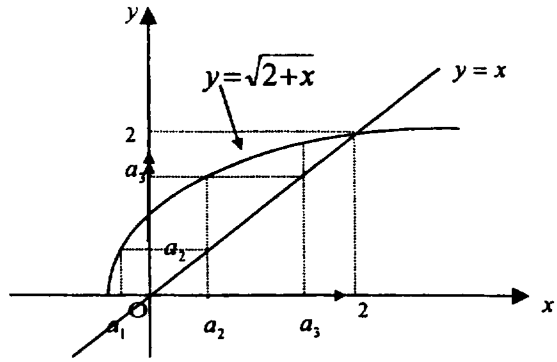
(3) 위의 (1), (2)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$$

보기 2. $a_1=a$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

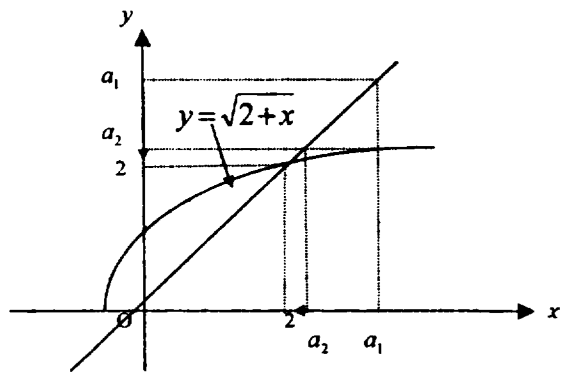
풀이. 수열 $\{a_n\}$은 위의 T3에서 c=2인 경우이므로 이 수열은 위로 유계이고 (1) $-2\leq a\leq 2$일 때 단조증가수열이고, (2) $a>2$일 때 단조감소수열이므로 극한값을 갖는다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 하면 $\alpha=\sqrt{2+\alpha}$ 에서 $\alpha^2-\alpha-2=0$이다.

$$\therefore\ \alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=2$$



(1) $-2\leq a\leq 2$ 일 때, 다음과 같이 직선 y=χ와 곡선 $y=\sqrt{2+x}$의 그래프에서 수열$\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$임을 직관적으로 알 수 있다.

(2) $a>2$일 때



다음에는 양수 c>0에 대하여 $\sqrt{c}$로 수렴하는 수열 $\{a_n\}$을 소개하고자 한다. 제곱근을 구하는 이 과정은 기원전 1500년경 메소포타미아에서 발견되었다.

T3. a_1은 $a_1>0$인 임의의 수이고, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{c}{a_n}\right)$, $(n\in N)$으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{c}$임을 증명하여라.

증명. (이론적 고찰) 모든 $n\in N$에 대하여 $a_n>0$이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{c}{a_n}}=\sqrt{c},$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

따라서, $n\geq 2$일 때, $a_n\geq\sqrt{c}$이고, 또한,

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2-c}{a_n}\right)\geq 0$$

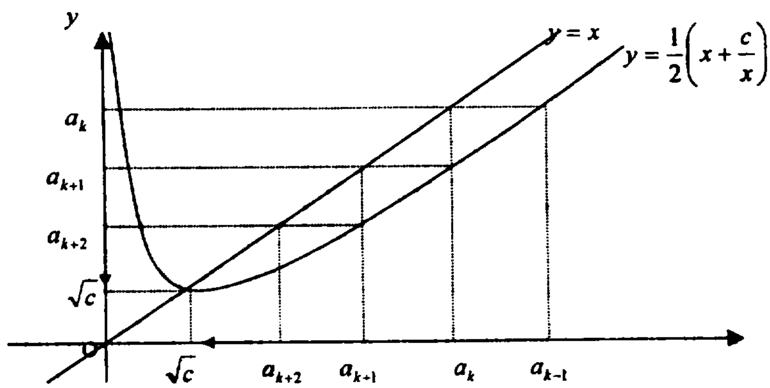
즉, $\sqrt{c}<a_{n+1}<a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래로 유계인 감소수열이다. 따라서, 단조수렴정리로부터 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$라 하면

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{c}{\alpha}\right)$$

가 성립한다. 즉, $\alpha^2=c$. 그런데, $a_n>0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\sqrt{c}$$

(직관적 고찰) 이를 두 함수 $y=x$, $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right)$의 그래프를 이용하여 기하학적 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보자.



(직관적 고찰) 위의 그림에서 알 수 있듯이 모든 자연수 $n\in N$에 대하여 $\sqrt{c}<a_{n+1}<a_n$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 아래로 유계인 감소수열이다. 직선 $y=x$와 곡선 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right)$의 교점이 $(\sqrt{c},\ \sqrt{c})$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{c}$

보기 3. $a_1=\sqrt{2}$이고 $a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_n}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$일 때 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 $a_n<2$임을 증명하고, 이를 기하학적 방법으로 고찰해보자.

증명. (이론적 고찰) $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$이므로 $a_1<a_2<2$

$a_k<a_{k+1}$이라 가정하면, $a_{k+2}-a_{k+1}=$

$$\sqrt{2+\sqrt{a_{k+1}}}-\sqrt{2+\sqrt{a_k}}<0\ .$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

또한, $a_k<2$라고 가정하면

$a_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_k}}<\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 의하여 $a_n<a_{n+1}<2$ 즉, 수열 $\{a_n\}$은 위로 유계이다. 단조수렴정리에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

(직관적 고찰) 오른쪽의 그림과 같이 이를 두 함수

$$y=x,\ \ y=\sqrt{2+\sqrt{x}}$$

의 그래프를 이용하여 기하학적 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보자.

위의 두 함수의 그래프의 교점을 (α, α)라 하면

$\sqrt{2}=a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < \cdots \rightarrow \alpha$

즉, $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = \alpha$

이 때, $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{\alpha}}$ 가 성립한다.

실제로 α의 값을 구하기 위하여 식의 양변을 제곱하여 정리하면

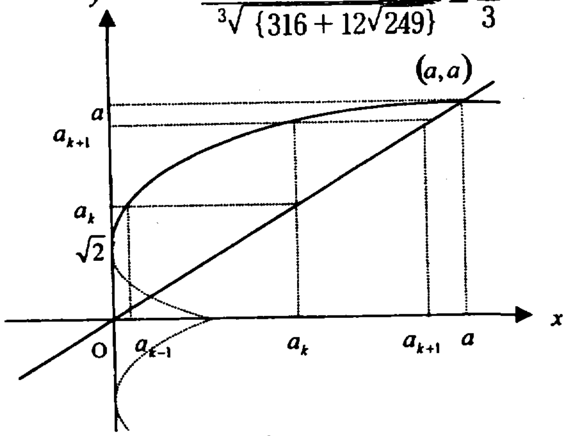
$\alpha^4-4\alpha^2-\alpha+4=0 \, (1<\alpha<2)$

컴퓨터 프로그램 「Maple V」의 명령어 「>solve({x^4−4*x^2−x+4=0}, {x});」을 실행한 결과,

$$x=\frac{1}{6}\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}+\frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}}-\frac{1}{3}$$

을 얻는다. 즉,

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n=\frac{1}{6}\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}+\frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}}-\frac{1}{3}$$



V. 결 론

수학교과의 교수−학습시에 수학과목에 대한 학생들의 흥미를 유발시켜 학생들로 하여금 자기 주도적 학습력을 향상시켜 준다는 것은 교수−학습 현장에서 학습지도에 임하는 교사들의 막중한 책임이기도 하다. 그러므로 교사들은 교과서를 중심으로 한 획일적 교수−학습 방법에서 탈피하여 학생들에게 새롭고 창의적인 문제해결의 정보 제공을 위한 부단한 노력이 요구된다.

본 논문은 이러한 관점에 중점을 두고 고등학교 수학교과서의 수열 단원을 중심으로 개선할 점을 제시하였고, 수열의 극한에 대한 중요한 개념들을 함수의 그래프와 연계하여 논리성과 직관성을 동시에 추구하면서, 수열의 유계성, 증감상태, 극한 등에 대하여 기하학적 방법으로의 교수−학습지도 방법을 제시하였다.

(1) 현행 교과서의 수열단원에 대한 학습내용을 조사 · 분석하여 교수−학습 방법상 개선되어야 할 문제점을 제기하였다.

(2) 수열은 자연수의 집합 N에서 실수의 집합 R로의 함수 $f:N\rightarrow R$이므로 증가 · 감소 · 진동하는 수열을 함수와 연계하여 이를 정리하였으며 동시에 이를 엄밀한 논리적 사고 과정을 통하여 수렴 · 발산에 대한 정의를 내린 다음 이를 체계적으로 정리하여 증명하였다.

(3) 함수의 그래프와 연계한 직관적 사고를 통하여 수열의 수렴조건에 대하여 언급하였으며, 또한 이를 쉽게 이해할 수 있도록 하였다. 또한 유계인 단조수열의 수렴성은 실수의 완비성과 동치임을 이해하고, 이를 이용하여 일반항의 식을 모르고 수열의 수렴 · 발산을 판정할 수 있는 방법을 제시하였다. 아울러 점화식의 특성방정식을 이용하여 이들의 극한값을 구하는 방법을 제시하였다.

여기서 제시되고 있는 일련의 사고 과정의 결과는 고등학교 교과서에서 소개되는 모든 형태의 수열을 초월하여 여러 가지 특수한 형태로 주어지는 수열의 수렴 · 발산 관계를 판정할 수 있을 뿐만 아니라 수열의 극한값을 쉽게 구할 수 있도록 변화된 교수−학습 내용을 제공하게 됨으로써 학생들로 하여금 자기 주도적 학습력

이 향상될 것으로 기대된다.

위와 같은 연구와 조사를 통하여 수열의 일반항과 분포 상태, 극한 문제 등을 중심으로 수열의 특성 등에 대하여 명확히 알 수 있고, 중요 수열의 점화식과 극한을 구하는 기하학적 표현을 통하여 수열의 효과적인 교수-학습방법을 제시하고 있다. 아울러 논리적 사고와 직관적 사고의 영역을 넓히고 수학의 유용성과 생활과의 관련성을 이해할 수 있다. 따라서 고등학교 교과서의 지도상에서 수열들의 애매 모호한 성질이나 특성을 분명히 파악할 수 있어서 선행학습이 이루어지지 않은 학생들을 대상으로 하는 수준별 수업뿐만 아니라 특별활동에 편성되고 있는 수학반 운영 등 수열단원과 관련한 모든 교수-학습시에 효과적이고 가치 있는 참고자료가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기외, 고등학교 수학Ⅰ, 두산동아, 1997. 3

[2] 고등부 세미나 1팀, 수학사랑, 수학사랑 가을호(통권 제9호)

[3] 권택연외, 해석학, 문운당, 1968. 3.

[4] 김응태외 1인, 수학교육-교재론, 이우출판사, 1985

[5] 양영오, 해석학, 청문각, 1995. 8.

[6] 윤옥경외, 고등학교 수학Ⅰ, 중앙교육진흥연구소, 1998. 3.

[7] 이광수, 점화식과 극한, 한샘출판사, 1994. 3.

[8] 정몽하외, 고등학교 수학Ⅰ, 형설출판사, 1996. 3.

[9] 하광철외, 고등해석학, 문운당, 1967. 3.