碩士學位論文

數列의 有限合·極限에 대한 幾何學的 接近과 오일러의 數列

指導敎授 梁 永 五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 東 男

1999年 8月 日

數列의 有限合·極限에 대한 幾何學的 接近과 오일러의 數列

指導敎授 梁 永 五

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1998년 5월 일

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 李 東 男

李東男의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1999年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

<抄錄>

數列의 有限合·極限에 대한 幾何學的 接近과 오일러의 數列

李　東　男

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻
指導敎授 梁　永　五

현행 고등학교 수학교육과정에서 수열단원의 학습내용은 주로 피상적 서술에 의한 직관적으로 전개되고 있고, 이들에 관한 문제해결과정 역시 주로 대수적 방법만을 이용하고 있다. 또한, 무리수 e에 대한 내용설명이 지나치게 단편적으로 극한값 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$으로 소개되어 학생들이 정확한 개념파악도 되지 않은 상태에서 학습이 진행되고 있다. 따라서 수열은 물론 오일러의 수 e와 관련된 단원 학습에 학생들이 쉽게 흥미를 잃고 있다.

본 논문에서는 수열의 유한합 및 극한 문제의 해결에 있어서 논리성과 직관성을 동시에 추구함은 물론 체계적이고 효과적인 교수-학습이 이루어질 수 있도록 도형과 함수의 그래프를 이용하여 이들 내용을 기하학적인 방법으로 접근하였다. 또한 $y=\log_{e}(1+x)$의 그래프를 이용하여 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$의 극한값이 e가 됨을 제시하였다.

목　　차

<국문초록>

Ⅰ. 서　론 ··· 1

Ⅱ. 교과서 내용 분석 ··· 3
  1. 수열의 내용과 분석 ··· 3
  2. 수열의 극한 내용과 분석 ··· 6
  3. 무리수 e ··· 9

Ⅲ. 기하학적 방법에 의한 수열의 합 ··· 11
  1. 등차·등비수열의 합에 대한 기하학적 해석 ··· 11
  2. 유한합의 기하학적 접근 ··· 13
  3. 이항분리법에 의한 유한합 ··· 22

Ⅳ. 점화수열의 유형 ··· 29

Ⅴ. 수열의 극한과 단조수열 ··· 45
  1. 수열의 극한 ··· 45
  2. 극한정리 ··· 50
  3. 유계수열과 단조수열 ··· 54
  4. 특수한 점화수열 ··· 61
  5. 코시(Cauchy)수열 ··· 67

Ⅵ. 오일러(Euler)의 수열 ··· 69
  1. 오일러의 수 e의 역사적 고찰 및 정의 ··· 69
  2. 오일러의 수 e의 존재성과 무리수 ··· 74
  3. 극한값 e의 기하학적 고찰(미분계수에 의한) ··· 77
  4. 오일러의 수열과 유사한 수열 ··· 78
  5. 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 의 극한값의 추정 ··· 81

Ⅷ. 결　론 ··· 85

참고문헌 ··· 87

Abstract

I. 서 론

수학은 어려운 과목, 재미없는 과목 등과 같은 표현에는 수학교육에 관련하고 있는 모든 사람들이 책임이 있다고 본다. 급격한 대입 전형제도의 변화와 단계형·선택형 수준별 교육과정이 도입되는 제7차 교육과정의 시행을 앞둔 시점에서 이제 '어떤 교수・학습 방법이 수학과목을 재미있고 쉽게 이해할 수 있으며 동시에 수학교육의 본질인 창의력 신장에 도움을 줄 수 있는가'하는 문제에 있어서 그 어느 때 보다 심도 있는 논의가 이루어져야 함은 물론 교과서의 구성이나 교사의 역할이 중요한 때가 왔다고 본다.

우리는 수학교과가 아니더라도 일상생활에서 일정한 규칙에 따라 나열되는 수의 열, 즉 수열문제들을 접하게 되는 경우가 있다. 현행 고등학교 교과서에서는 이들 수열문제를 다루면서 학생들이 흥미를 갖고 학생 스스로가 착안하여 해결할 수 있는 방법 모색에 소홀한 점이 있음을 느끼게 된다. 또한, 유한수열의 전개에 있어서는 주로 항등식과 수학적 귀납법에 의한 지도방법만을 제시하고 있을 뿐만 아니라 극한에서는 지나친 논리의 비약 또는 비논리적인 전개로 학생들에게 이해를 강요하고 있어 학생들이 쉽게 흥미를 잃게 하는 결과를 낳고 있음을 감안하여 수열 단원을 중심으로 효과적인 교수-학습자료의 개발을 목적으로 본 연구가 이루어졌음을 밝혀둔다.

이런 점에서 본 논문은 다음과 같이 구성하고자 한다.

제Ⅱ장에서 현행 고등학교 수학 교과서의 수열 단원을 중심으로 학습내용을 조사·분석하여 교수-학습 내용의 엄밀성과 직관성을 동시에 추구해 나가면서 수열의 중요한 특성(유한수열에 관한 기하학적 의미, 수열의 증감 상태, 극한, 수열의 점화관계와 일반항, 일반항을 쉽게 구할 수 없는 점화식을 갖는 수열의 극한 문제 등)과 오일러의 수열과 그 극한값인 무리수 e 등을 대수적 계산방법 보다는 기하학적 방법에 치중하여 체계적으로 연구되어야 할 과제 및 문제점을 제기하고자 한다.

제Ⅲ장에서는 수열의 유한합의 전개에 있어서 선행학습이 이루어지지 못한 저학년에서도 흥미를 갖고 접근하여 학습할 수 있도록 도형을 통한 지도방법과 수열의 고유한 특성을 이용하거나 이를 재배열함으로써 학생들로 하여금 창의적인 방법으로 문제해결력이 신장될 수 있는 예를 문제로 제시하고자 한다.

제Ⅳ장에서는 수열이 자연수의 집합에서 귀납적으로 정의되는 함수이고 이 함수를 나타내는 점화식에 대하여 교과서에서 다소 소홀히 다루고 있음을 감안하여

첫째, 학생들이 자주 접하고 있는 여러 가지 점화식의 문제를 유형별로 정리하여 이들의 일반항을 유도하는 방법을 일반화하고자 한다.

둘째, 이 과정에서 계차수열의 성질을 이용하는 것은 불가피하므로 계차수열에 대한 논리적 사고를 강화할 수 있는 다양한 해결 방법을 유도하고자 한다.

셋째, 이들 수열들의 수렴·발산 관계를 논리적으로 정리하여 증명하고 동시에 함수의 그래프를 이용하여 이 관계를 쉽게 이해할 수 있도록 하고자 한다.

제Ⅴ장에서는 고등학교 교육과정에서 무시되고있는 수열단원의 이론적 배경에 대한 문제점을 제기하여, 이를 함수의 그래프와 연계하여 논리성과 직관성을 동시에 추구하면서 학생들로 하여금 자기 주도적 학습력이 향상될 수 있도록 다음과 같이 새로운 교수-학습방법을 제시하고자 한다.

첫째, 교과서에서 수열의 단원을 소개할 때, 수열은 자연수의 집합 N을 정의역, 실수의 집합 R을 공역으로 하는 함수 $f:\ N \to R,\quad f(n) = a_n$이고, 이를 함수의 그래프를 이용하여 증가 · 감소 · 진동하는 수열의 예를 제시하고 있으나 이는 지나치게 간단히 소개되고 있어서, 본 논문에서는 보다 엄밀한 논리적 사고 과정을 통하여 수렴 · 발산에 대한 정의를 내린 다음 이를 체계적으로 정리하고자 한다.

둘째, 수열을 함수의 단원에서와 마찬가지로 함수의 증가상태, 감소상태와 연계하여 서술되어야 하고, 또한 교수학습의 논의가 있어야 한다. 따라서 어떤 수열이 감소수열 또는 증가수열이 되는지를 논리적 사고과정과 함수의 그래프와 연계한 직관적 사고를 통하여 수열의 수렴조건에 대하여 언급하고 이를 쉽게 이해할 수 있도록 하고자 한다.

셋째, 유계인 단조수열의 수렴성을 이용하여 일반항의 식을 모르고도 수열의 수렴 · 발산을 판정할 수 있는 방법을 제시하고, 동시에 특성방정식을 이용하여 이들의 극한값을 쉽게 구하는 방법을 제시하고자 한다.

제Ⅵ장에서는 고등학교 수학교육과정에서 미분·적분단원에서만 단순하게 취급하고 있어서, 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 극한값이 수열단원과는 유리되어 있으나 본 논문에서는 다음과 같은 측면에서 이를 논의하고자 한다.

첫째, 대부분 고등학생들에게 원주율 π는 잘 알려져 있으면서도 오일러의 수 e에 대해서는 잘 모르고 있어서, 이 수가 발견되기까지의 역사적 고찰을 통하여 e의 정의 및 표현방법 등을 소개하여 우리 생활에 매우 친숙한 수임을 강조하고자 한다.

둘째, 현행 교과서에서는 수 e가 함수의 극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 또는 $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$으로만 소개되고 있을 뿐 이를 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 극한값으로는 소개되지 않고 있기 때문에 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 수렴 여부를 조사하지도 않고 있다. 따라서 여기서는 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 특성을 조사한 후 논리적으로 이 수열이 수렴함을 증명하고, 또한 함수의 그래프를 이용하여 이 극한값이 e임을 밝히고자 한다.

II. 교과서 내용 분석

1. 수열의 내용과 분석

1) 수열의 뜻

수열과 그에 관련된 용어의 뜻을 알아보자. 어떤 규칙에 따라 나열한 수의 열을 수열이라고 하고, 수열을 이루는 각 수를 그 수열의 항이라고 한다. 이 때 수열의 첫 번째의 항을 첫째항 또는 제1항, 두 번째의 항을 둘째항 또는 제2항이라 하고, ………, n번째의 항을 n째항 또는 제 n항이라고 한다. 일반적으로 수열을 나타낼 때에는 각 항의 번호를 대응시켜서

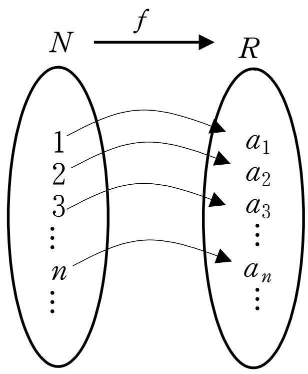
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

으로 나타낸다. 수열의 n째항 a_n을 이 수열의 일반항이라고 한다. 수열은 일반항 a_n을 써서 $\{a_n\}$으로 나타내기도 한다.

항의 개수가 한정되어 있는 수열을 유한수열이라고 하고, 이 때 마지막 항을 끝항이라고 한다. 한편 무한히 많은 항으로 되어 있는 수열을 무한수열이라고 한다.

무한수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 항의 번호 1, 2, 3, 4, ……… 에 각 항을 대응시킬 수 있다.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & & \cdots \end{array}$$



따라서 무한수열은 자연수의 집합 N을 정의역, 실수의 집합 R을 공역으로 하는 함수

$$f:\quad N \to R,\quad f(n) = a_n$$

으로 볼 수 있다. 이런 뜻에서 수열의 각 항을

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

으로 나타낼 수 있다.

2) 등차수열의 일반항과 합

일반적으로 수열 $\quad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

에서 이웃하는 두 항의 차 $a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이 일정한 수 d와 같을 때, 이 수열을 등차수열이라고 하고, d를 이 등차수열의 공차라고 한다. 따라서, 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열을

$$a_1=a, \quad a_{n+1}=a_n+d \ (d\text{는 일정}, \ n=1,2,3,\cdots)$$

와 같이 나타낸다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해보자.

…………………………중략……………………………………………

그러므로 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 n째항까지의 합을 S_n, n째항을 l 즉, $l=a+(n-1)d$라 하면,

$$S_n=a+(a+l)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots+(l-d)+l \ \cdots\cdots\cdots ①$$

①의 우변에서 더하는 순서를 거꾸로 하면,

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①, ②를 변끼리 더하면

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)=n(a+l)$$

그러므로 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$ ………③

그런데 $l=a+(n-1)d$이므로 이것을 ③에 대입하면

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

3) 여러 가지 수열의 합

보기: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$ 을 구하여라.

【풀이】 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ 의 k에 1, 2, 3, …, n을 차례로 대입하면

$$\begin{aligned}
2^3-1^3 &= 3\times2^2-3\times2+1\\
3^3-2^3 &= 3\times3^2-3\times3+1\\
4^3-3^3 &= 3\times4^2-3\times4+1\\
\cdots\cdots\cdots & \ \cdots\cdots\cdots\cdots\\
n^3-(n-1)^3 &= 3\times n^2-3\times n+1\\
(n+1)^3-n^3 &= 3\times n^2+3\times n+1
\end{aligned}$$

이들을 변끼리 더하면,

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)+3\{1+2+3+\cdots+n\}+n$$

여기서 구하는 합을 S라 하면,

$$(n+1)^3-1^3=3S+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

즉, $$3S=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

그러므로 $$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

문제. 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ 을 이용하여

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이 성립함을 증명하여라.

…………………………… 중략 ……………………………………………………………………

이상에서 다음과 같은 합의 공식을 얻는다.

합의 공식

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

4) 계차수열

정의: 수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차 $a_{n+1}-a_n\,(n=1,2,3,\cdots)$을 b_n이라 하면, 새로운 수열

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \cdots,\ b_n,\cdots$$

을 얻는다. 이 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 **계차수열**이라고 한다.

……………………………………………… 중략 ………………………………………………

따라서, $$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

5) 교과내용의 분석과 문제점

(1) 수열을 어떤 규칙에 따라 나열한 수의 열이라 정의하고 수열을 유한수열과 무한수열로 구분하고 있다. 그리고 무한수열은 자연수에서 정의되는 함수로 간주하고 있다.

(2) 거의 모든 교과서에서 등차수열의 합을 구할 때 첫째항부터 끝항까지 합에다 순서를 바꾸어 끝항에서 첫째항까지의 합을 더해나기는 방법을 채택하고 있다. 따라서 학습자의 흥미를 유발하고 등차수열의 합에 대한 이해를 높이고 직관적 사고를 기르기 위하여 기하학적 모델이나 예는 제시되지 않고 있다.

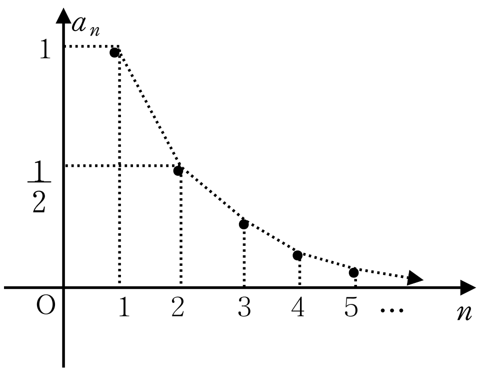
(3) 거의 모든 교과서에서 일정한 양식을 갖는 여러 가지 수열의 합을 구할 때 항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ 등을 이용하여 대수적 방법으로 유한수열의 합을 계산하고 있다. 따라서 일정한 양식(pattern)을 갖는 유한수열의 합을 구하는데 학습자의 흥미를 유발하고 이에 대한 이해를 높이고 직관적 사고를 기르기 위하여 기하학적 모델이나 예는 제시하지 않는 실정이다.

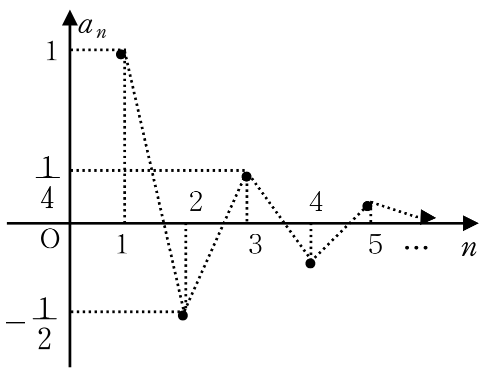
2. 수열의 극한 내용과 분석

1) 수열의 수렴과 발산

다음 수열 (1), (2)에서 n이 증가함에 따라 n째항 a_n이 어떻게 변하는가를 그림으로 나타내면 아래와 같다.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ (2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, (-\frac{1}{2})^{n-1}, \cdots$





위의 그림에서 n이 한없이 커질 때, 두 수열의 n째항 a_n은 모두 0에 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, n째항 a_n이 어떤 일정한 실수 α에 가까워지면, 이 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다고 하고 α를 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to \alpha$로 나타낸다.

……………………………………중략……………………………………………

수열의 수렴, 발산

수렴 ………………… $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 실수)

발산
- 양의무한대로발산 … $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- 음의무한대로발산 … $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 진동

2) 극한값의 계산

수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음과 같은 기본 성질이 있음이 알려져 있다.

수열의 극한에 관한 기본 성질(I)

$\boxed{1}$ k가 양의 유리수일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$　　(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

$\boxed{2}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ (복부호 동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

수열의 극한에 관한 기본 성질(Ⅱ)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 실수)
일 때,

1 $a_n \le b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면, $\alpha \le \beta$

2 수열 $\{c_n\}$에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

3) 무한등비수열

무한등비수열 $\{r^n\}$에서 공비 r의 값에 따른 이 수열의 수렴, 발산에 대하여 알아보자.

(1) $r>1$ 인 경우:

$r=1+h$ $(h>0)$ 로 놓으면, $r^n=(1+h)^n \ge 1+nh$ $(n\ge 1)$

$h>0$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ 이다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

(2) $r=1$ 인 경우:

모든 n에 대하여 $r^n=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$

(3) $|r|<1$ 인 경우:

$r=0$ 이면, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 0=0$

$r\ne 0$ 이면, $\frac{1}{|r|}>1$ 이므로 (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$ 이다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ 이다.

(4) $r\le -1$ 인 경우 :

$r=-1$ 이면, 이 수열은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ 이 되므로 진동한다.

$r=-1$ 이면 $|r|>1$ 이면, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$

그런데, r^n의 부호가 $-$, $+$ 교대로 변하므로 이 수열은 진동한다.

이상으로 수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 정리하면 다음과 같다.

무한등비수열의 수렴, 발산

무한등비수열 $\{r^n\}$에서

1	$r>1$ 일 때,	$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$	(발산)
2	$r=1$ 일 때,	$\lim_{n\to\infty} r^n=1$	(수렴)
3	$\|r\|<1$ 일 때,	$\lim_{n\to\infty} r^n=0$	(수렴)
4	$r\le -1$ 일 때,	진동	(발산)

4) 교과내용의 분석과 문제점

거의 모든 교과서는 다음과 같은 공통점을 갖고 있다.

(1) 한없이 크다, 한없이 작다, 일정한 값에 가깝다는 등의 개념을 직관적으로만 설명하고 있다. 이들에 대한 논리적 설명의 필요성에 대하여 충분한 검토도 필요하다.

(2) 수렴하는 수열의 예로는 증가하는 수열 또는 위의 그림과 같이 감소하는 수열이나 감소도 증가도 하지 않는 수열의 예들을 들고 있다. 수열을 무한수열로 인정하여 하나의 함수로 정의하고 있으므로 증가수열은 N에서 증가함수, 감소수열은 N에서 감소함수이다. 따라서 함수와 연계하여 수열을 지도하는 것은 바람직하다고 본다.

(3) 발산하는 수열 중 진동에 대한 설명이 불충분하다고 본다.

(4) 수열의 극한에 관한 기본 성질들을 증명 없이 제시하고 있다는 점이다. 이들의 논리적 증명이나 직관적 증명을 어떻게 제시하는 것이 바람직한가의 문제가 연구과제로 남는다.

(5) 수열의 극한에 관한 성질(I) 2의 (4)에서 $\beta\neq 0$라는 조건만 있으면 $b_n\neq 0$라는 조건이 추가적으로 필요하지 않다는 점이다. 그러면 왜 그렇게 되는가에 대한 설명이 필요하다.

3. 무리수 e

1) 교과서 내용

다음 극한값을 생각해 보자.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdots\cdots \text{①}$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 에 $x=0.1,\ 0.001,\ 0.001,\ \cdots$ 및 $x=-0.1,\ -0.01,\ -0.001,\ \cdots$을 차례로 대입하여 계산하면 오른쪽 표를 얻는다.

오른쪽 표에서 예상할 수 있는 바와 같이 x가 0에 가까워지면 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은 2와 3 사이의 어떤 일정한 값에 한없이 가까워진다.

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.593742
0.01	2.704813
0.001	2.716923
0.0001	2.718145
⋮	⋮
-0.0001	2.718417
-0.001	2.719642
-0.01	2.731999

실제로, 이 극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 이 존재한다는 것이 알려져 있고, 이 값을 e로 나타낸다. e는 무리수이고, 그 값은 2.7182818····· 이다

①에서 $\frac{1}{x}=z$ 로 놓으면 $x\to +0$ 일 때, $z\to\infty$ 이므로 e는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}$$

2) 교과내용의 분석과 문제점

극한값 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 존재성을 제시하지 않고 있고, 또한, 이 값을 e로 나타내어 e가 무리수(두 정수의 비로 나타낼 수 없는 비순환 소수)라는 증명을 제시하지 않고 있다. 또한, x가 자연수 n일 때, 수열이 증가하면서 위의 극한값이 e에 수렴하는가를 언급하지 않고 있으며, e의 값을 소수 1,000자리 또는 5,000자리까지 어떻게 계산하는 것이 좋은가에 대한 언급도 없는 실정이다. 사실 e는 무리수인 동시에 초월수로서 중요한 수학공식과 정리에 매우 흔하게 나타날 뿐만 아니라 삼각함수, 기하학, 미분방정식, 무한급수, 해석학 등 무수히 많은 서로 다른 수학분야에서 항상 필수적으로 등장하고 있다.

현행 고등학교 수학 교육과정에서 e의 활용분야를 살펴보면, 미적분 분야에서 $\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$, $\frac{d}{dx}\log_{e}x=\frac{1}{x}$, $\int\frac{1}{x}dx=\log_{e}x+c$, 통계분야의 정규분포에서 $P(a\le X\le b)=\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$, 을 활용하고 있으면서도 e가 왜 중요한가에 대한 설명이 부족한 편이다.

III. 기하학적 방법에 의한 수열의 합

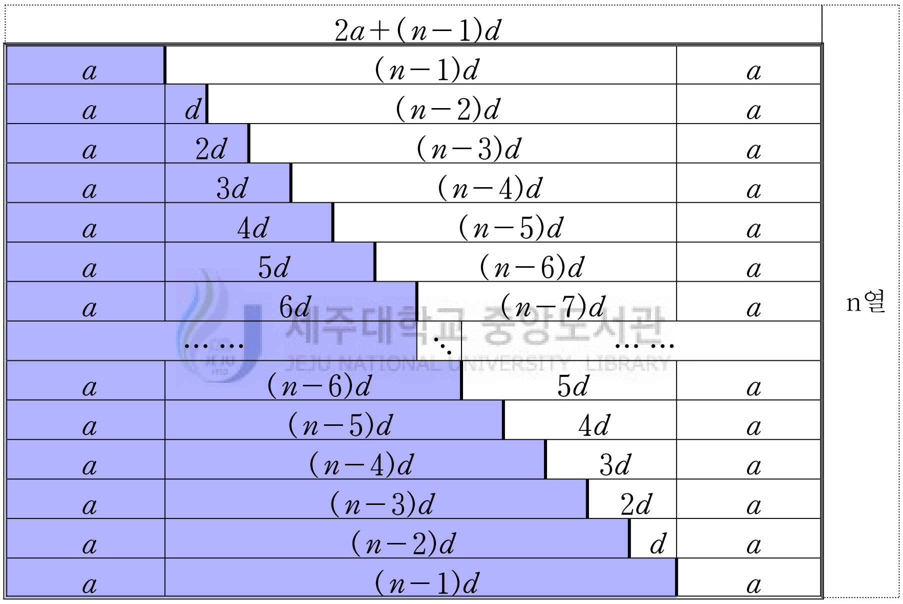
1. 등차·등비수열의 합에 대한 기하학적 해석

1) 등차수열의 합

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 합

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + \{a+(n-1)d\}$$

를 기하학적 방법으로 구해보자



위의 그림에서 가로의 각 행에 $2a+(n-1)d$ 이 주어져 있고 이들이 세로의 열이 n 개이므로 모든 수의 합은 $n\{2a+(n-1)d\}$이므로 구하는 등차수열의 합은

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + \{a+(n-1)d\}$$

이므로 $2S_n = n\{2a+(n-1)d\}$이다. 따라서

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

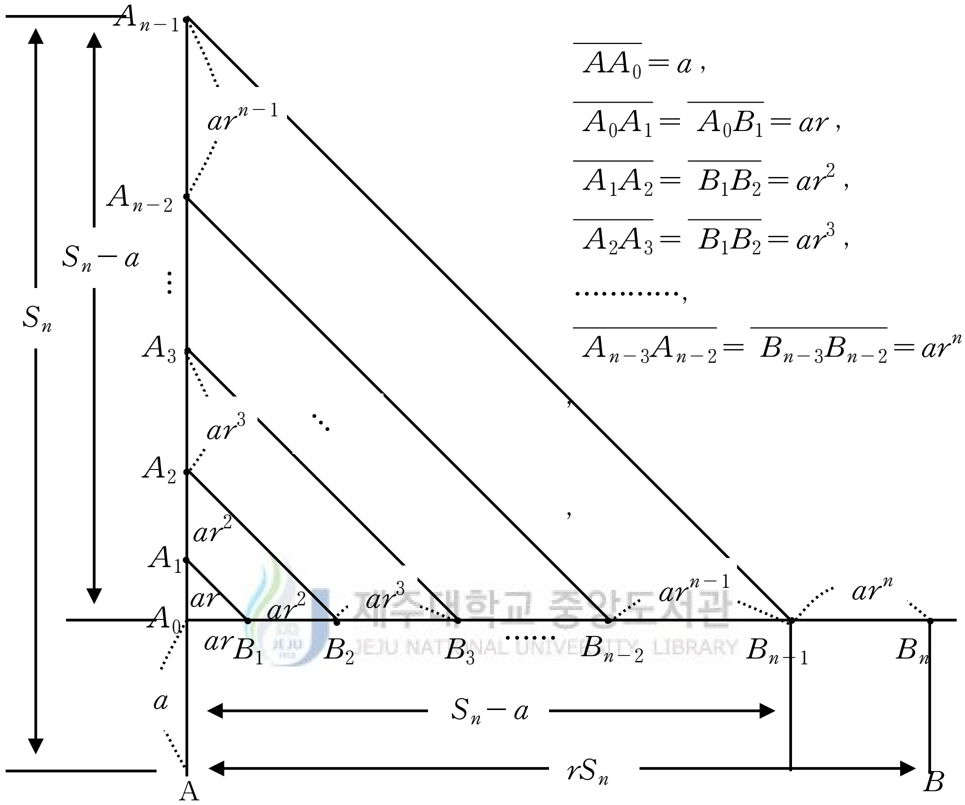
2) 등비수열의 합

첫째항이 a이고 공비 r인 무한등비수열에서 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n

이라 할 때 비례관계를 이용하여 기하학적 방법으로

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

의 값을 고찰해보고자 한다. 아래 그림에서



$\overline{AA_0} = a$,

$\overline{A_0A_1} = \overline{A_0B_1} = ar$,

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = ar^2$,

$\overline{A_2A_3} = \overline{B_1B_2} = ar^3$,

…………,

$\overline{A_{n-3}A_{n-2}} = \overline{B_{n-3}B_{n-2}} = ar^{n-2}$

세로축에서 $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} = \overline{AA_{n-1}}$ 이므로

$$S_n - a = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \overline{A_0A_{n-1}} \quad \cdots\cdots ①$$

가로축에서

$$\overline{AB} = \overline{A_0B_n} = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n = r(a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}) = rS_n$$

$$\therefore\ \overline{A_0B_{n-1}} = \overline{A_0B_n} - ar^n = \overline{AB} - ar^n = rS_n - ar^n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $\overline{A_0A_{n-1}} = \overline{A_0B_{n-1}}$이므로

$$S_n - a = rS_n - ar^n \iff (1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$\therefore\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ (단, } r \neq 1\text{)}$$

2. 유한합의 기하학적 접근

이 절에서는 여러 가지 유한수열의 합을 구하는 기하학적 방법을 체계적으로 제시하고자 한다. 이와 같이 지도하면 학생들이 흥미를 갖고 합에 대한 기하학적 의미를 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

1) 자연수의 합

(1) 자연수 1에서 n까지의 합: $S_n = 1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

아래와 같이 사각형 속에 ●, ○을 차례로 표시하여 이들의 합을 조사하여보자.

	2열	
1행	●	○
$1=\dfrac{1\times2}{2}$		

	3열		
2행	●	●	○
	●	○	○
$1+2=\dfrac{2\times3}{2}$			

	4열			
3행	●	●	●	○
	●	●	○	○
	●	○	○	○
$1+2+3=\dfrac{3\times4}{2}$				

	5열				
4행	●	●	●	●	○
	●	●	●	○	○
	●	●	○	○	○
	●	○	○	○	○
$1+2+3+4+5=\dfrac{4\times5}{2}$					

	6열					
5행	●	●	●	●	●	○
	●	●	●	●	○	○
	●	●	●	○	○	○
	●	●	○	○	○	○
	●	○	○	○	○	○
$1+2+3+4+5=\dfrac{5\times6}{2}$						

……

	(n+1)열														
n행	●	●	●	●	●	●	●	⋮	●	●	●	●	●	●	○
	●	●	●	●	●	●	●		●	●	●	●	●	○	○
	●	●	●	●	●	●	●		●	●	●	●	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●		●	●	●	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●		●	●	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●		●	○	○	○	○	○	○
	……							⋱	……						
	●	●	●	●	●	●	●	⋮	○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	○		○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	●	●	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	●	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
	$1+2+3+4+5+\cdots+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$														

위의 그림에서 ●의 개수를 왼쪽부터 대각선 방향으로 차례로 더하면

$$1+2+3+4+5+\cdots+n$$

마찬가지로 ○의 개수를 오른쪽부터 대각선 방향으로 차례로 더하면

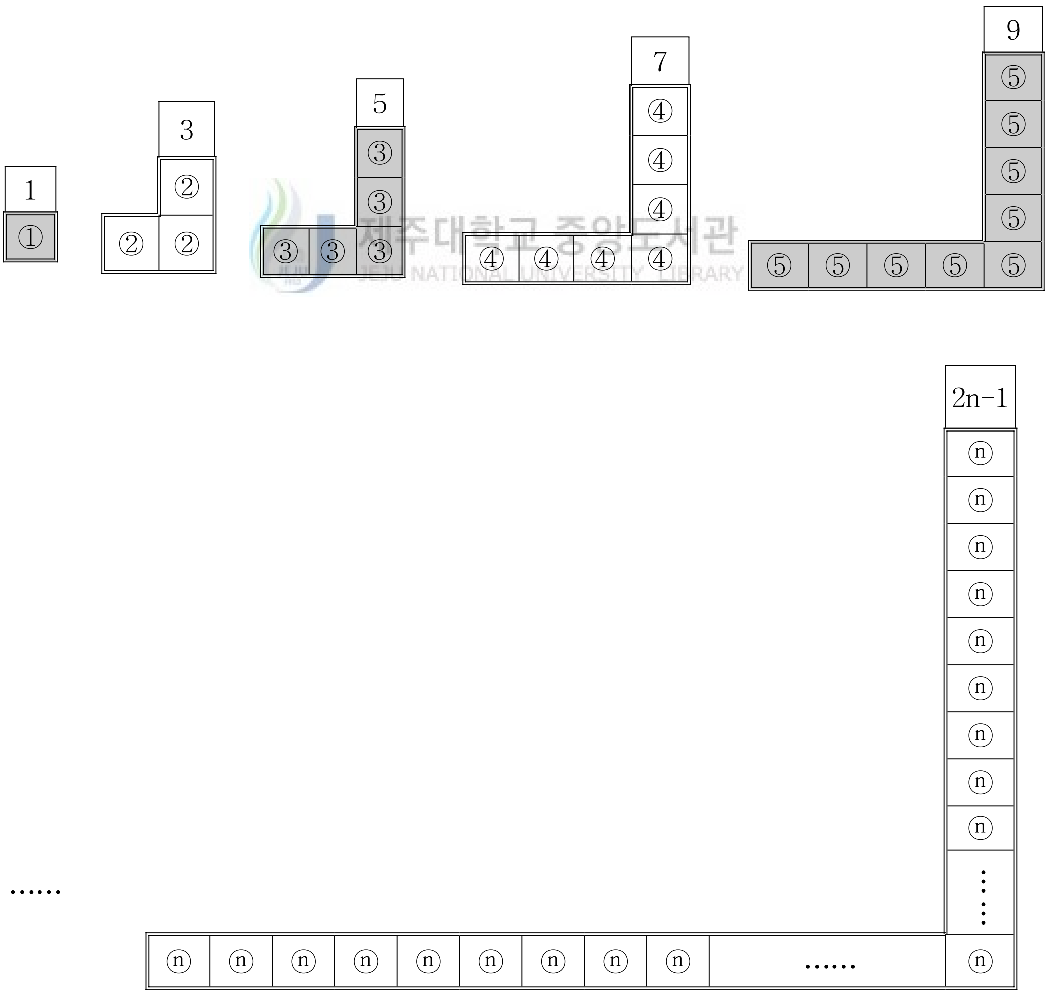
$$1+2+3+4+5+\cdots+n$$

따라서, 사각형 속의 n 행 $(n+1)$ 열의 ● 또는 ○의 개수를 모두 더하면 $n\times(n+1)$ 개다. 즉,

$$(1+2+3+4+5+\cdots+n)+(1+2+3+4+5+\cdots+n)=n\times(n+1)$$

$$\therefore\ 1+2+3+4+5+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$ ▣

(2) **자연수 중 홀수의 합:** $S_n=1+3+5+7++(2n-3)+(2n-1)$



위의 그림을 다음과 같이 겹치게 그려보면

왼쪽 위로부터 차례로 오른쪽 아래까지 원문자의 개수는 각각

①의 개수는 $a_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$ ②의 개수는 $a_2 = 3 = 2 \times 2 - 1$

③의 개수는 $a_3 = 5 = 2 \times 3 - 1$ ④의 개수는 $a_4 = 7 = 2 \times 4 - 1$

⑤의 개수는 $a_5 = 9 = 2 \times 5 - 1$ $\cdots\cdots\cdots$

ⓝ의 개수는 $a_n = \quad 2n - 1$

이들을 변끼리 더하면 모든 원문자의 개수의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{5} + \cdots + a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-1)$$

1	3	5	7	9	11	13	15	17		2n-1
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨		ⓝ
②	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨		ⓝ
③	③	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨		ⓝ
④	④	④	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨		ⓝ
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⋮	ⓝ
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑦	⑧	⑨		ⓝ
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑧	⑨		ⓝ
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑨		ⓝ
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨		ⓝ
				......					⋱	⋮
ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	ⓝ	......	ⓝ

그런데, 이들 n행 n열의 작은 사각형의 개수는 모두 n^2 이고, 이는 모든 원문자의 개수의 합과 같으므로

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$

또한, $S_n' = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + \quad n \quad = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$S_{n-1}' = \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

이므로 $S_n = S_n' + S_{n-1}' = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2$$ ▣

2) 거듭제곱수의 합

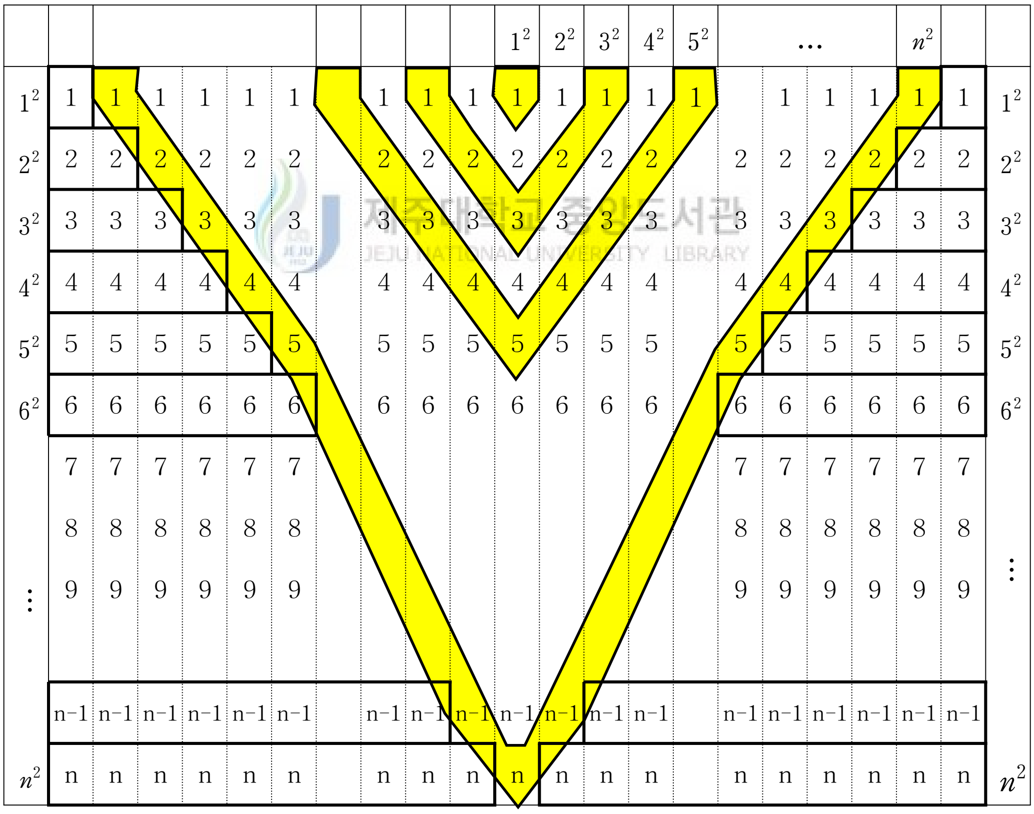
(1) **제곱수의 합**: $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$

방법① -아래 그림과 같이 왼쪽 첫 번째 세로 열에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 을 배열하고 이와 똑같은 열을 오른쪽으로 $(2n+1)$ 개의 열을 배열하면 가로의 첫 번째 행, 두 번째 행, 세 번째 행, · · · , n번째 행에 각각 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 이 $(2n+1)$ 개씩 배열된다. 이 때, 세로의 임의의 한 열에 주어진 수열의 합은

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이고, 이들이 가로로 $(2n+1)$개 주어져 있으므로 주어진 수 전체의 합은

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots(A)$$



그런데 위의 그림에서 계단 모양의 선으로 3등분으로 나누어져 있으며 왼쪽 부분과 오른쪽 부분의 수의 합은 각각 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$과 같다.

또한 중앙부분은

$$
\begin{array}{rll}
 & 1 & = 1^2 \\
1+ & 2+1 & = 2^2 \\
1+2+ & 3+2+1 & = 3^2 \\
1+2+3+ & 4+3+2+1 & = 4^2 \\
1+2+3+4+ & 5+4+3+2+1 & = 5^2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\
1+2+3+\cdots+(n-1)+ & n+(n-1)++\cdots+3+2+1 & = n^2
\end{array}
$$

이므로 이들의 합은 $S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$

와 같다. 따라서, 위의 세 부분의 합은 $3(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)$ $\cdots\cdots\cdots(B)$

두 식 (A), (B)에서 $3(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$$\therefore\ S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

방법② -기하학적 방법으로 제곱수의 합을 구하는 또 다른 방법으로는 다음 그림과 같이 계속 그려보도록 하자.

가운데 있는 원문자의 개수		사각형의 개수			양쪽에 있는 원문자의 개수
①의 개수 1^2개	1^2	❶ ① ❶	1^2	$\frac{1\cdot2}{2}$ 행	❶의 개수 $2\cdot1^2$
		$(2\cdot1+1)$열			
원문자의 개수의 합 $3\cdot1^2$ =사각형의 개수 $(2\cdot1+1)\times\frac{1\cdot2}{2}$ $\therefore\ 1^2=\frac{1\cdot2\cdot(2\cdot1+1)}{6}$					

가운데 있는 원문자의 개수		사각형의 개수			양쪽에 있는 원문자의 개수
①의 개수 1^2개 ②의 개수 $1+3=2^2$개	2^2	❷ ❷ ① ❷ ❷ ❷ ❷ ② ❷ ❷	2^2	$\frac{2\cdot3}{2}$ 행	❶의 개수 $2\cdot1^2$개 ❷의 개수 $2\cdot2^2$개
	1^2	❶ ② ② ② ❶	1^2		
		$(2\cdot2+1)$열			
원문자의 개수의 합 $3(1^2+2^2)$ =사각형의 개수 $(2\cdot2+1)\times\frac{2\cdot3}{2}$ $\therefore\ 1^2+2^2=\frac{2\cdot3\cdot(2\cdot2+1)}{6}$					

가운데 있는 원문자의 개수		사각형의 개수			양쪽에 있는 원문자의 개수
①의 개수 1^2개 ②의 개수 $1+3=2^2$개 ③의 개수 $1+3+5=3^2$개	3^2	❸ ❸ ❸ ① ❸ ❸ ❸ ❸ ❸ ❸ ② ❸ ❸ ❸ ❸ ❸ ❸ ③ ❸ ❸ ❸	3^2	$\frac{3\cdot4}{2}$ 행	❶의 개수 $2\cdot1^2$개 ❷의 개수 $2\cdot2^2$개 ❸의 개수 $2\cdot3^2$개
	2^2	❷ ❷ ② ② ② ❷ ❷ ❷ ❷ ③ ③ ③ ❷ ❷	2^2		
	1^2	❶ ③ ③ ③ ③ ③ ❶	1^2		
		(2·3+1)열			
원문자의 개수의 합 $3(1^2+2^2+3^2)$ =사각형의 개수 $(2\cdot3+1)\times\frac{3\cdot4}{2}$ $\therefore\ 1^2+2^2+3^2=\frac{3\cdot4\cdot(2\cdot3+1)}{6}$					

<table>
<tr><td>가운데 있는 원문자의 개수</td><td></td><td>사각형의 개수</td><td></td><td></td><td>양쪽에 있는 원문자의 개수</td></tr>
<tr><td rowspan="10">①의 개수 1^2개
②의 개수 $1+3=2^2$개
③의 개수 $1+3+5=3^2$개
④의 개수
$1+3+5+7=4^2$개</td><td rowspan="4">4^2</td><td>❹❹❹❹①❹❹❹❹</td><td rowspan="4">4^2</td><td rowspan="10">$\frac{4 \cdot 5}{2}$ 행</td><td rowspan="10">❶의 개수 $2 \cdot 1^2$개
❷의 개수 $2 \cdot 2^2$개
❸의 개수 $2 \cdot 3^2$개
❹의 개수 $2 \cdot 4^2$개</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹②❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹③❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹④❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3^2</td><td>❸❸❸②②②❸❸❸</td><td rowspan="3">3^2</td></tr>
<tr><td>❸❸❸③③③❸❸❸</td></tr>
<tr><td>❸❸❸④④④❸❸❸</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2^2</td><td>❷❷③③③③③❷❷</td><td rowspan="2">2^2</td></tr>
<tr><td>❷❷④④④④④❷❷</td></tr>
<tr><td>1^2</td><td>❶④④④④④④④❶</td><td>1^2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>(2·4+1)열</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">원문자의 개수의 합 $3(1^2+2^2+3^2+4^2)$=사각형의 개수 $(2 \cdot 4+1) \times \frac{4 \cdot 5}{2}$
$\therefore\ 1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 4+1)}{6}$</td></tr>
</table>

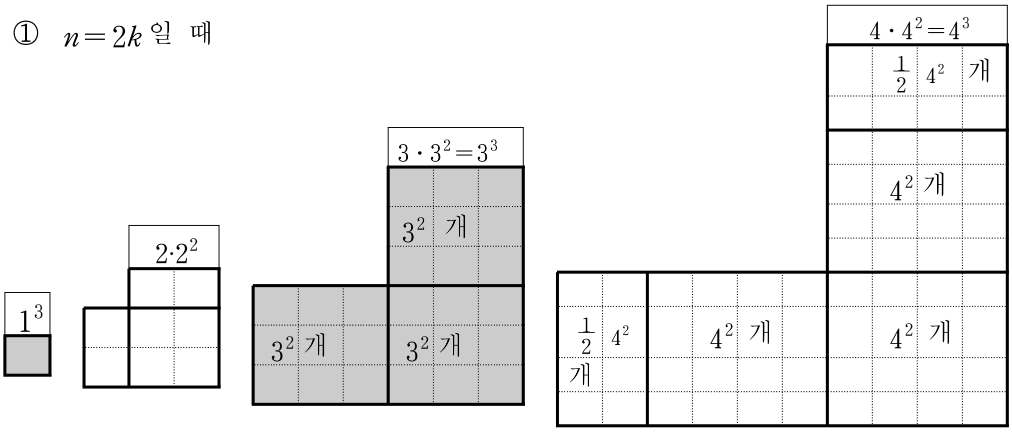
<table>
<tr><td>가운데 있는 원문자의 개수</td><td></td><td>사각형의 개수</td><td></td><td colspan="2">양쪽에 있는 원문자의 개수</td></tr>
<tr><td rowspan="15">①의 개수 1^2개
②의 개수 $1+3=2^2$개
③의 개수 $1+3+5=3^2$개
④의 개수
$1+3+5+7=4^2$개
⑤의 개수
$1+3+5+7+9=5^2$개</td><td rowspan="5">5^2</td><td>❺❺❺❺❺①❺❺❺❺❺</td><td rowspan="5">5^2</td><td rowspan="15">$\frac{5 \cdot 6}{2}$ 행</td><td rowspan="15">❶의 개수 $2 \cdot 1^2$개
❷의 개수 $2 \cdot 2^2$개
❸의 개수 $2 \cdot 3^2$개
❹의 개수 $2 \cdot 4^2$개
❺의 개수 $2 \cdot 5^2$개</td></tr>
<tr><td>❺❺❺❺❺②❺❺❺❺❺</td></tr>
<tr><td>❺❺❺❺❺③❺❺❺❺❺</td></tr>
<tr><td>❺❺❺❺❺④❺❺❺❺❺</td></tr>
<tr><td>❺❺❺❺❺⑤❺❺❺❺❺</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4^2</td><td>❹❹❹❹②②②❹❹❹❹</td><td rowspan="4">4^2</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹③③③❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹④④④❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td>❹❹❹❹⑤⑤⑤❹❹❹❹</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3^2</td><td>❸❸❸③③③③③❸❸❸</td><td rowspan="3">3^2</td></tr>
<tr><td>❸❸❸④④④④④❸❸❸</td></tr>
<tr><td>❸❸❸⑤⑤⑤⑤⑤❸❸❸</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2^2</td><td>❷❷④④④④④④④❷❷</td><td rowspan="2">2^2</td></tr>
<tr><td>❷❷⑤⑤⑤⑤⑤⑤⑤❷❷</td></tr>
<tr><td>1^2</td><td>❶⑤⑤⑤⑤⑤⑤⑤⑤⑤❶</td><td>1^2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>(2·5+1)열</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">원문자의 개수의 합 $3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$=사각형의 개수 $(2 \cdot 5+1) \times \frac{5 \cdot 6}{2}$
$\therefore\ 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{5 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 5+1)}{6}$</td></tr>
</table>

위의 그림과 같이 계속 그려보면 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 임을 추정할 수 있다.

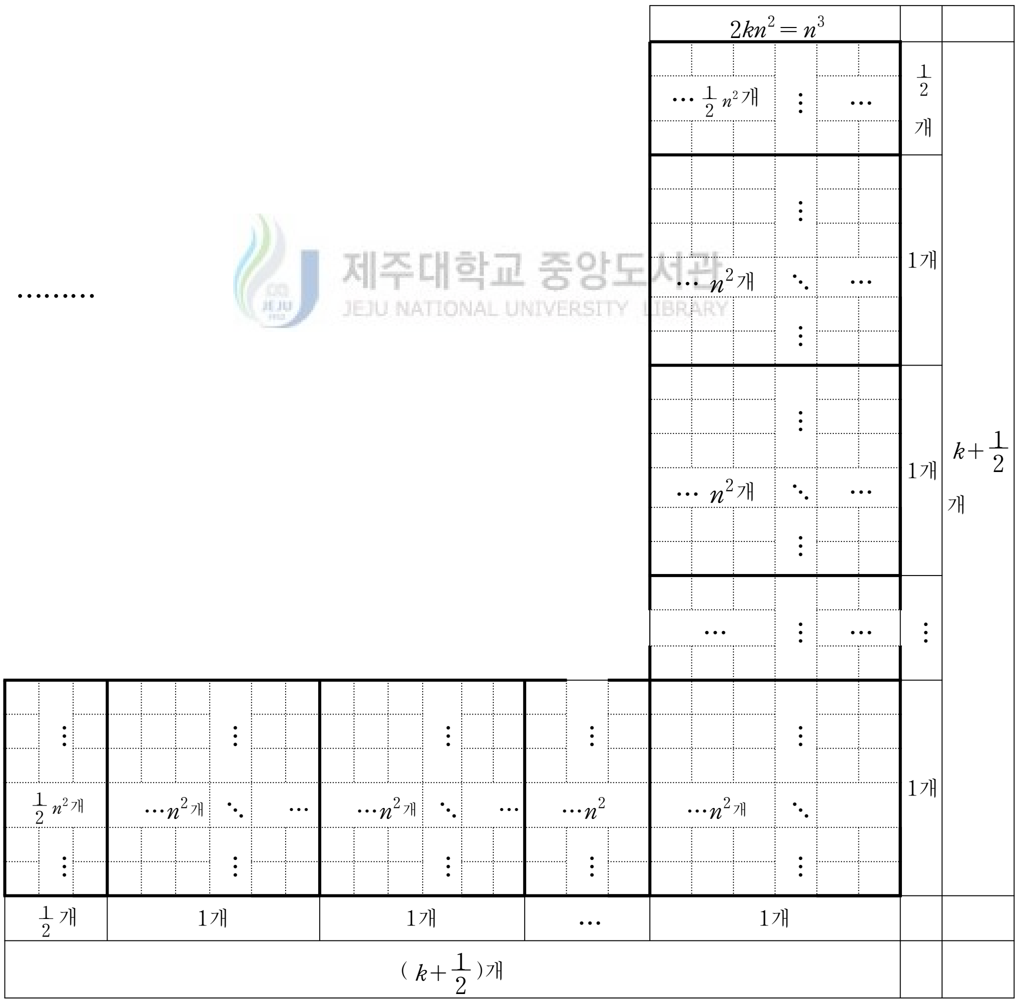
이 공식의 대수적인 증명방법은 본 논문에서는 생략한다. ▣

(2) 세제곱수의 합: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$

① $n = 2k$ 일 때



....



위의 그림들을 아래와 같이 연이어 계속 그려보면 왼쪽 위로부터 차례로 오른쪽 아래까지 작은 사각형의 개수를 조사하여 비교해본다.

1^2인 사각형이 1개이므로 $1\times1^2=1^3$(개), 2^2인 사각형이 2개이므로 $2\times2^2=2^3$(개),

3^2인 사각형이 3개이므로 $3\times3^2=3^3$(개), 4^2인 사각형이 4개이므로 $4\times4^2=4^3$(개),

…………… n^2인 사각형이 $2k$개이므로 $(2k)\times n^2=n^3$(개).

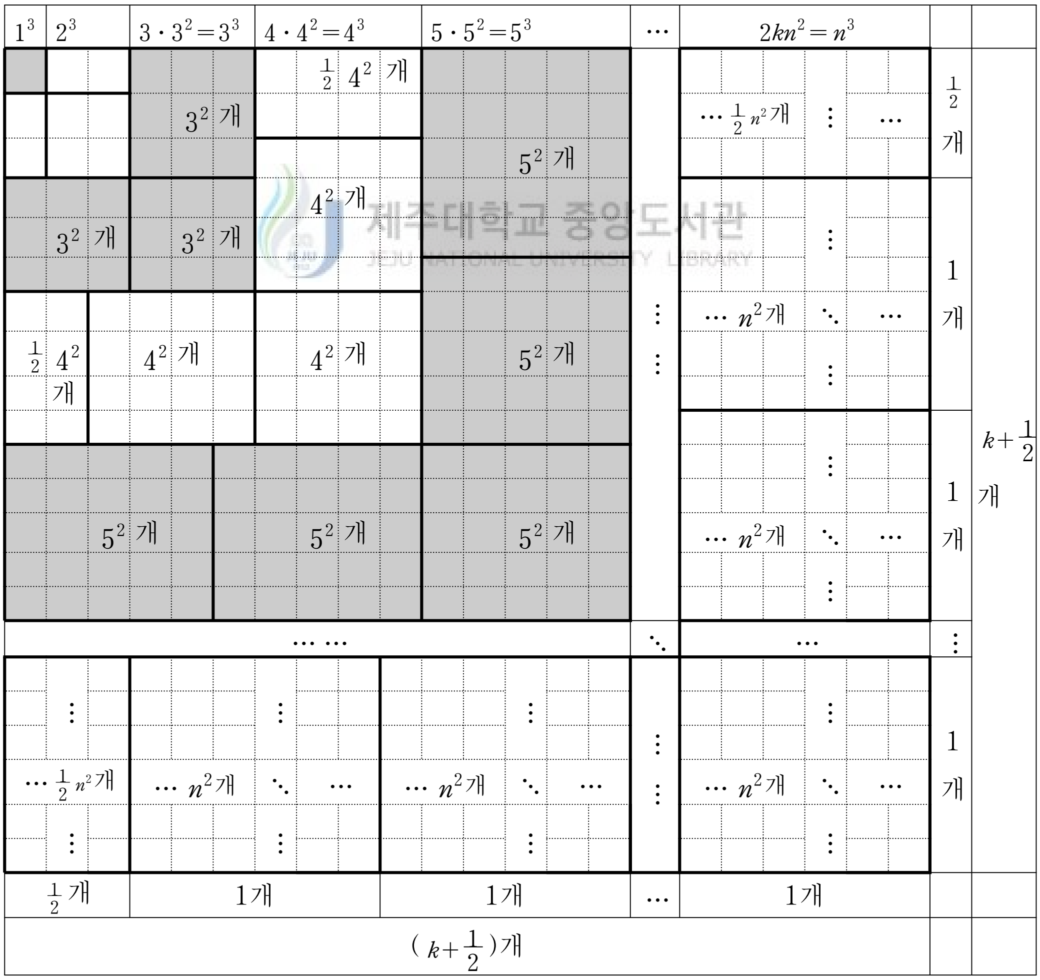
따라서 이들을 모두 더한 값 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$ …… (A)

은 모두 작은 사각형의 개수가 된다. 그런데 큰 사각형은 가로, 세로 모두

$$1+2+3+4+5+\cdots+n$$

개의 작은 사각형으로 이루어졌으므로 큰 사각형 속에 들어있는 사각형의 개수는

$$(1+2+3+4+\cdots+n)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots \ (B)$$

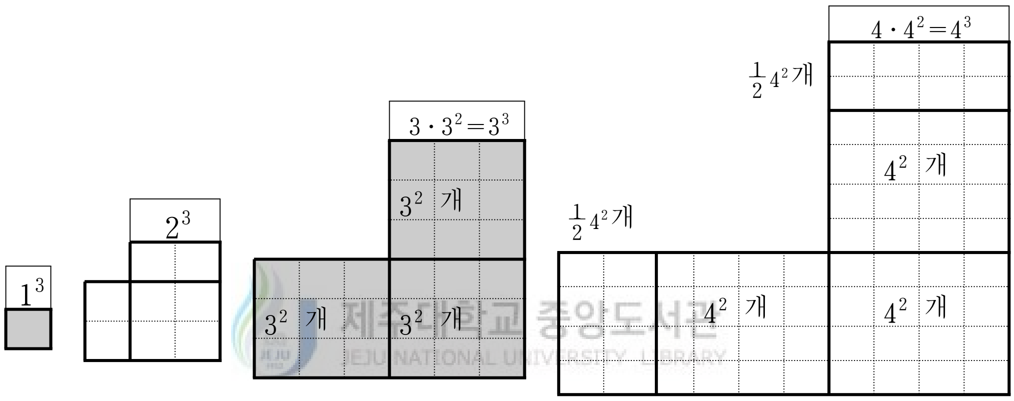


위의 두 식 (A), (B)에서

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

② $n=2k+1$ 일 때

$n=2k+1$(홀수)인 경우에는 이들 도형을 계속 그려나가면 다음 그림과 같이 $n=2k+1$번째 도형은 작은 사각형의 개수가 n^2인 사각형이 아래쪽, 오른쪽에 각각 $(k+1)$개씩 나타나므로 모두 $(2k+1)$개가 있다. 그러므로 이 사각형 속에 들어있는 작은 사각형의 개수는 $2(k+1)\times n^2$이다.



위의 경우① $n=2k$(짝수)일 때와 마찬가지로 이들 그림들을 계속하여 그린다음 아래와 같이 연이어 계속 그려서 왼쪽 위로부터 차례로 오른쪽 아래까지 작은 직사각형의 개수를 조사하여 비교해본다. 이때

1^2인 사각형이 1개이므로 $1\times1^2=1^3$(개), 2^2인 사각형이 2개이므로 $2\times2^2=2^3$(개),

3^2인 사각형이 3개이므로 $3\times3^2=3^3$(개), 4^2인 사각형이 4개이므로 $4\times4^2=4^3$(개),

....

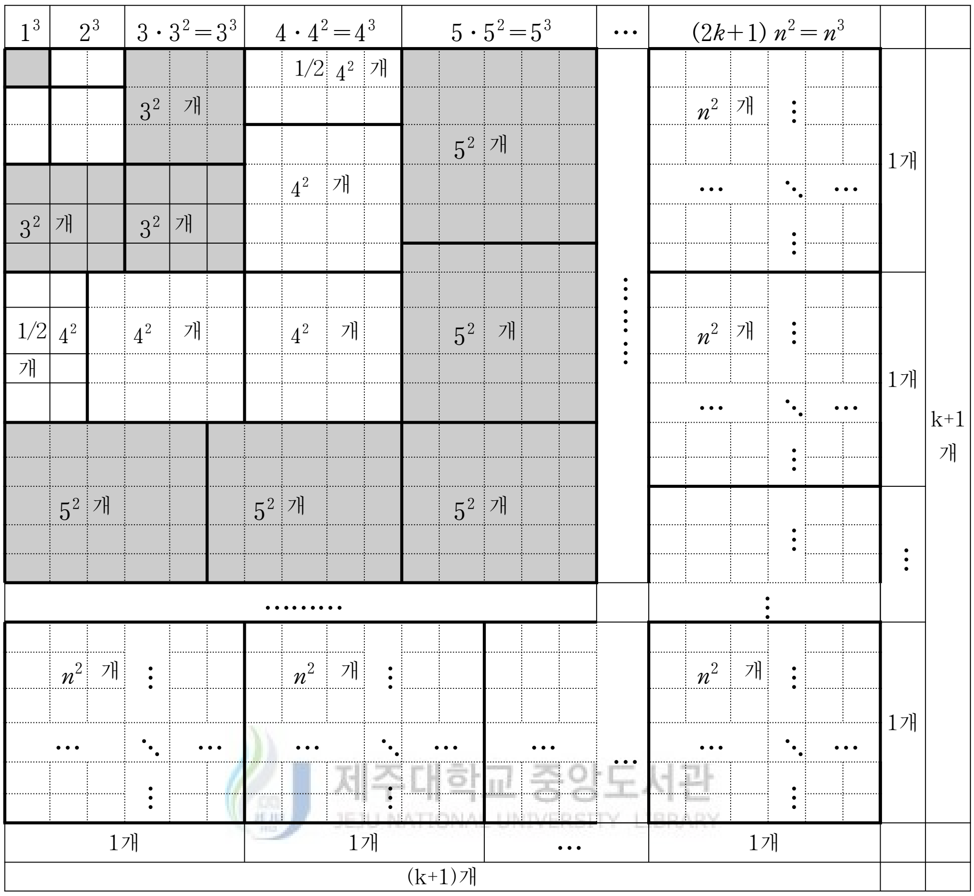
n^2인 사각형이 $(2k+1)$개이므로 $(2k+1)\times n^2=n^3$(개)이다.

따라서 경우1 $n=2k$(짝수)일 때와 마찬가지로 이들을 모두 더한 값

$$S_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$$

은 모두 작은 사각형의 개수가 된다. 즉,

$$S_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$



3. 이항분리법에 의한 유한합

1) 계차수열을 이용한 수열의 합

$\{f(n)\}$: $f(1)$ $\quad f(2)$ $\quad f(3)$ $\quad f(4)$ $\quad \cdots$ $\quad f(n)$ $\quad f(n+1)$

$\{a_n\}$: $\quad \{a_1\}$ $\quad \{a_2\}$ $\quad \{a_3\}$ $\quad \cdots$ $\quad \{a_n\}$

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = f(n+1) - f(n)$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)이 성립한다고 하자. 이 때, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{f(k+1) - f(k)\} = f(n+1) - f(1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 수열 $\{f(n)\}$의 제1계차수열이므로

$$f(n+1) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad ▣$$

2) 분수수열의 합

부분분수의 분해 $\dfrac{1}{A\cdot B}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$에 의하여 다음 형태의 유한합을 구할 수 있다.

T I . $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+a)(k+b)}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{k+a}-\dfrac{1}{k+b}\right)$

① $b-a=1$ 일 때,

$$f(n)=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1}$$

② $b-a=2$ 일 때,

$$f(n)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1}\right)+\left(\frac{1}{2+a}-\frac{1}{n+a+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}\right)-\left(\frac{1}{n+a+1}+\frac{1}{n+a+2}\right)\right\}$$

③ $b-a=3$ 일 때,

$$f(n)=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1}\right)+\left(\frac{1}{2+a}-\frac{1}{n+a+2}\right)+\left(\frac{1}{3+a}-\frac{1}{n+a+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3+a}\right)-\left(\frac{1}{n+a+1}+\frac{1}{n+a+2}++\frac{1}{n+a+3}\right)\right\}$$

일반적으로 $b-a=m$ (m은 자연수)일 때,

$$f(n)=\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1}\right)+\left(\frac{1}{2+a}-\frac{1}{n+a+2}\right)+\left(\frac{1}{3+a}-\frac{1}{n+a+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+a}-\frac{1}{n+a+m}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3+a}+\cdots+\frac{1}{m+a}\right)-\left(\frac{1}{n+a+1}+\frac{1}{n+a+2}+\frac{1}{n+a+3}+\cdots+\frac{1}{n+a+m}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{a+k}-\frac{1}{n+a+k}\right)$$

위의 사실로부터

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$ ▣

TⅡ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+2)}\cdot\frac{1}{k+1}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\cdot\frac{1}{k+1}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \quad ▣$$

TⅢ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+3)}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} \quad ▣$$

TⅣ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)(k+m)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+m)}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}\right)-\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\} \quad ▣$$

3) 배열방법에 의한 유한합

함수 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ 으로 주어졌을 때, $a(k,l)=f(\frac{l}{k})$ 로 정의하고, 이 때 배열방법 (도표이용)에 의하여 $\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a(k,\ l)$ 을 구해보고자 한다.

방법1. $\sum_{l=1}^{n}a(1,l)=a(1,1)+a(1,2)+a(1,3)+a(1,4)+\cdots+a(1,n)$

$$=f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+f\left(\frac{4}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right)$$

$$\sum_{l=1}^{n} a(2,l) = a(2,1)+a(2,2)+a(2,3)+a(2,4)+\cdots+a(2,n)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{4}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\sum_{l=1}^{n} a(3,l) = a(3,1)+a(3,2)+a(3,3)+a(3,4)+\cdots+a(3,n)$$

$$= f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{3}\right)+f\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$\sum_{l=1}^{n} a(4,l) = a(4,1)+a(4,2)+a(4,3)+a(4,4)+\cdots+a(4,n)$$

$$= f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{4}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{l=1}^{n} a(n,l) = a(n,1)+a(n,2)+a(n,3)+a(n,4)+\cdots+a(n,n)$$

$$= f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

따라서,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a(k,l) &= \sum_{l=1}^{n}\{a(1,l)+a(2,l)+a(3,l)+a(4,l)+\cdots+a(n,l)\} \\
&= a(1,1)+a(1,2)+a(1,3)+a(1,4)+\cdots+a(1,n) \\
&\quad + a(2,1)+a(2,2)+a(2,3)+a(2,4)+\cdots+a(2,n) \\
&\quad + a(3,1)+a(3,2)+a(3,3)+a(3,4)+\cdots+a(3,n) \\
&\quad + a(4,1)+a(4,2)+a(4,3)+a(4,4)+\cdots+a(4,n) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + a(n,1)+a(n,2)+a(n,3)+a(n,4)+\cdots+a(n,n) \\
&= f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+f\left(\frac{4}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{1}\right) \\
&\quad + f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{4}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{2}\right) \\
&\quad + f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{3}\right)+f\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{3}\right) \\
&\quad + f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{4}{4}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{4}\right) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

여기서, 흥미롭게 주시할 수 있는 내용은

$$a(k,l)+a(l,k)=f\left(\frac{l}{k}\right)+f\left(\frac{k}{l}\right)=\frac{\left(\frac{l}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{l}{k}\right)^2}+\frac{\left(\frac{k}{l}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{l}\right)^2}=1$$

이것을 다음과 같이 도표를 작성하여 지도하면 학생들이 흥미를 갖고 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

$a(k,l)$	$a(k,1)$	$a(k,2)$	$a(k,3)$	$a(k,4)$	$\cdots$	$a(k,l)$	$\cdots$	$a(k,n)$
$a(1,l)$	$a(1,1)$	$a(1,2)$	$a(1,3)$	$a(1,4)$	$\cdots$	$a(1,l)$	$\cdots$	$a(1,n)$
$a(2,l)$	$a(2,1)$	$a(2,2)$	$a(2,3)$	$a(2,4)$	$\cdots$	$a(2,l)$	$\cdots$	$a(2,n)$
$a(3,l)$	$a(3,1)$	$a(3,2)$	$a(3,3)$	$a(3,4)$	$\cdots$	$a(3,l)$	$\cdots$	$a(3,n)$
$a(4,l)$	$a(4,1)$	$a(4,2)$	$a(4,3)$	$a(4,4)$	$\cdots$	$a(4,l)$	$\cdots$	$a(4,n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a(k,l)$	$a(k,1)$	$a(k,2)$	$a(k,3)$	$a(k,4)$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$a(k,n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a(n,l)$	$a(n,1)$	$a(n,2)$	$a(n,3)$	$a(n,4)$	$\cdots$	$a(n,l)$	$\cdots$	$a(n,n)$

ⅰ) 주대각선 위의 수열 { $a(n,n)$ }의 모든 항은

$$a(1,1)=a(2,2)=a(3,3)=a(4,4)=a(5,5)=\cdots=a(n,n)=\frac{1}{2}$$

이고, 항수는 n 이므로 이들의 합은

$$a(1,1)+a(2,2)+a(3,3)+a(4,4)+a(5,5)+\cdots+a(n,n)=\frac{n}{2}$$

ⅱ) 주대각선에 대하여 $a(k,l)$와 $a(l,k)$는 서로 대칭인 위치에 있으면서 (n^2-n)개의 항이 동수로 양쪽에 분포되어 있으며

ⅲ) $a(k,l)+a(l,k)=1 \ (k\neq l)$ 이므로

ⅱ), ⅲ)에 의하여 주대각선 위의 항을 제외한 다른 항들의 합은

$$\frac{(n^2-n)}{2}$$

따라서, ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a(k,l)=\frac{n}{2}+\frac{(n^2-n)}{2}=\frac{n^2}{2}$

방법2. 수의 배열을 다음과 같이 재배열하여

$$A_1=a(1,1),\qquad A_2=a(1,2)+a(2,2)+a(2,1)$$

$A_3 = a(1,3) + a(2,3) + a(3,3) + a(3,2) + a(3,1)$

$A_4 = a(1,4) + a(2,4) + a(3,4) + a(4,4) + a(4,3) + a(4,2) + a(4,1)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$A_n = a(1,n) + a(2,n) + a(3,n) + \cdots + a(n,n) + \cdots + a(n,2) + a(n,1)$

$\{A_n\}$	A_1	A_2	A_3	A_4		A_k		A_n
A_1	$a(1,1)$	$a(1,2)$	$a(1,3)$	$a(1,4)$	$\cdots$	$a(1,k)$	$\cdots$	$a(1,n)$
A_2	$a(2,1)$	$a(2,2)$	$a(2,3)$	$a(2,4)$	$\cdots$	$a(2,k)$	$\cdots$	$a(2,n)$
A_3	$a(3,1)$	$a(3,2)$	$a(3,3)$	$a(3,4)$	$\cdots$	$a(3,k)$	$\cdots$	$a(3,n)$
A_4	$a(4,1)$	$a(4,2)$	$a(4,3)$	$a(4,4)$	$\cdots$	$a(4,k)$	$\cdots$	$a(4,n)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_k	$a(k,1)$	$a(k,2)$	$a(k,3)$	$a(k,4)$	$\cdots$	$a(k,k)$	$\cdots$	$a(k,n)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	$a(n,1)$	$a(n,2)$	$a(n,3)$	$a(n,4)$	$\cdots$	$a(n,k)$	$\cdots$	$a(n,n)$

수열 $\{A_n\}$은 중앙의 항 $a(n,n)$에 대하여 서로 대칭인 항 $a(k,l)$, $a(l,k)$ $(k \neq l)$은 $a(k,l) + a(l,k) = 1$인 관계를 만족하면서 이들의 합으로 이루어졌으므로

$$A_n = (n-1) + \frac{1}{2}$$

실제로 이들 몇 개의 항의 값을 구해보면

$A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $A_3 = 2 + \frac{1}{2}$, $A_4 = 3 + \frac{1}{2}$, $\cdots\cdots\cdots$

따라서, $$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a(k,l) = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} \qquad \blacksquare$$

4) 이항계수를 이용한 유한합

다음 형태의 합들을 각각 S_{2n}, S_{3n}, S_{4n}, $\cdots$라 할 때 이항계수의 성질을 이용하여 이들 값을 구하고자 한다

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1),$$

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + 4\cdot 5\cdot 6 + \cdots + n(n+1)(n+2), \ \cdots$$

우선, S_{2n}은 이항계수의 성질 ${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$(파스칼의 삼각형)에 의하여

다음과 같이 계산될 수 있다.

$$S_{2n}=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n(n+1)$$

$$=2!+\frac{3!}{1!}+\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{6!}{4!}+\cdots+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

$$=2!\left\{1+\frac{3!}{1!2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{6!}{4!2!}+\cdots+\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}\right\}$$

$$=2!({}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{n+1}C_2)$$

$$=2!({}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{n+1}C_2)\quad(\Leftarrow {}_nC_k+{}_nC_{k+1}={}_{n+1}C_{k+1})$$

$$=2!({}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+\cdots+{}_{n+1}C_2)$$

$$=\cdots\cdots\cdots=2!({}_{n+1}C_3+{}_{n+1}C_2)=2!\cdot{}_{n+2}C_3$$

마찬가지로,

$$S_{3n}=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5\cdot 6+\cdots+n(n+1)(n+2)$$

$$=3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+\frac{6!}{3!}+\frac{7!}{4!}+\cdots+\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$=3!\left\{1+\frac{4!}{1!3!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{7!}{4!3!}+\cdots+\frac{(n+2)!}{(n-1)!3!}\right\}$$

$$=3!(1+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+\cdots+{}_{n+2}C_3)$$

$$=3!({}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+\cdots+{}_{n+2}C_3)$$

$$=3!({}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+\cdots+{}_{n+2}C_3)\ (\Leftarrow {}_nC_k+{}_nC_{k+1}={}_{n+1}C_{k+1})$$

$$=3!({}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3+\cdots+{}_{n+2}C_3)$$

$$=\cdots\cdots\cdots=3!({}_{n+2}C_4+{}_{n+2}C_3)=3!\cdot{}_{n+3}C_4$$

같은 방법으로

$$S_{4n}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=4!\cdot{}_{n+4}C_5$$

....

일반적으로

$$S_{kn}=\{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k\}+\{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(k+1)\}+\{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(k+2)\}$$

$$+\{4\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(k+3)\}+\cdots+\{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+(k-1))\}$$

$$=k!\cdot{}_{n+k}C_{k+1}$$ ▣

IV. 점화수열의 유형

수열이란 자연수의 집합을 정의구역으로 하는 함수이고 이 함수를 나타내는 것은 점화식이다. 점화식은 몇 개의 항과 서로 이웃하는 일반항들 사이의 관계식으로 주어진다. 따라서 점화수열을 이해하는 데에는 계차수열의 성질을 이용하는 것은 불가피하므로 계차수열을 철저히 지도해야 하며, 점화식으로 표시된 수열의 일반항을 유도하는 지도과정에서 점화수열을 산만하게 지도할 것이 아니라 체계적으로 지도할 필요가 있으므로 이 장에서는 그 유형을 체계적으로 분류·조사하여, 일반항을 구하는 방법을 일반화하고 점화식의 특성방정식 및 함수의 그래프를 이용하여 이를 이해하고자 한다.

PⅠ. 점화식이

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + f(n)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots\cdots(P\mathrm{I})$$

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 으로 주어진다.

【증명】 주어진 점화식 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ·········$(P\mathrm{I})$을 변형하면

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 이므로

$$\cancel{a_2} - a_1 = f(1)$$
$$\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = f(2)$$
$$\cancel{a_4} - \cancel{a_3} = f(3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - \cancel{a_{n-1}} = f(n-1)$$

이들을 변변 더하여 주면 $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

즉, $$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$ ▣

PⅡ. 점화식이

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n f(n)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots\cdots(P\mathrm{II})$$

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \cdots \cdot f(n-1)$으로 주어진다.

【증명】 $a_n = a_{n-1} f(n-1) = a_{n-2} f(n-2) \cdot f(n-1)$

$= a_{n-3} f(n-3) \cdot f(n-2) \cdot f(n-1)$

$= a_1 f(1) \cdot f(2) \cdot \cdots \cdot f(n-3) \cdot f(n-2) \cdot f(n-1)$

즉, $a_n = a f(1) \cdot f(2) \cdot \cdots \cdot f(n-3) \cdot f(n-2) \cdot f(n-1)$ ▣

※참고▶ (1) 조건 $a_n \neq 0$ 인 경우

주어진 점화식 $(P\text{II})$를 변형하면 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$ 이므로

$$\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \times \frac{\cancel{a_{n-1}}}{\cancel{a_{n-2}}} \times \frac{\cancel{a_{n-2}}}{\cancel{a_{n-3}}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \times \frac{\cancel{a_2}}{a_1}$$

$$= f(n-1) \times f(n-2) \times f(n-3) \times \cdots \times f(2) \times f(1)$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_1} = f(n-1) \times f(n-2) \times f(n-3) \times \cdots \times f(2) \times f(1)$$

즉, $a_n = f(n-1) \times f(n-2) \times f(n-3) \times \cdots \times f(2) \times f(1) \cdot a$

(2) 조건 $a_n > 0$, $f(n) > 0$ 인 경우

주어진 점화식 $(P\text{II})$의 양변에 log 를 취하면 $\log a_{n+1} = \log a_n + \log f(n)$

여기에 $b_n = \log a_n$ 으로 치환하면 $b_{n+1} = b_n + \log f(n)$

($\Leftarrow a_{n+1} = a_n + f(n)$ ·········$(P\text{I})$인 꼴)

이 때, $\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \log f(n)$이므로

$$b_n - b_1 = \log f(1) + \log f(2) + \log f(3) + \cdots + \log f(n-2) + \log f(n-1)$$

즉, $b_n = b_1 + \log\{f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(n-1)\} \Leftrightarrow$

$$\log a_n = \log a_1 + \log\{f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(n-1)\}$$

따라서, $a_n = a \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \cdots \cdot f(n-1)$ ◀

PⅢ. a, p, q ($p \neq 1$, $q \neq 0$)가 상수이고, 점화식이

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = p a_n + q \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \ \cdots\cdots\cdots (P\text{III})$$

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \dfrac{q}{1-p} + \left(a - \dfrac{q}{1-p}\right) p^{n-1}$으로 주어진다.

【증명】 (1) $p=1$ 일 때, 점화식 (PⅢ)은 $a_1=a$. $a_{n+1}-a_n=q$ 인 꼴이 되어, 수열{ a_n }은 첫째 항 a 이고 공차가 q 인 등차수열이다.

$$\therefore\ a_n=a+(n-1)q$$

(2) $q=0$ 일 때, 점화식 (PⅢ)은 $a_1=a$. $a_{n+1}=pa_n$ 인 꼴이 되어 수열 { a_n }은 첫째 항 a 이고 공비가 p 인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_n=a\,p^{n-1}$$

(3) $p\neq 1$, $q\neq 0$ 일 때,

① **축차대입에 의한 방법:**

점화식 (PⅢ)에 n 대신에 자연수 1, 2, 3, …, n을 차례로 대입하면

$$a_2=pa_1+q=pa+q$$

$$a_3=pa_2+q=p(pa+q)+q=p^2a+q(p+1)$$

$$a_4=pa_3+q=p^3a+q(p^2+p+1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=pa_{n-1}+q=p^{n-1}a+q(p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1)\quad (\Leftarrow \text{수학적 귀납법})$$

$$=p^{n-1}a+q\cdot\frac{1-p^{n-1}}{1-p}=\frac{q}{1-p}+\left(a-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

② **계차수열을 이용하는 방법:**

점화식 (PⅢ)에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+q\ \cdots\cdots\cdots(A1)$$

$(A1)-(P$Ⅲ$)$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$.

여기서 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라 놓으면 $b_{n+1}=pb_n$ 이므로

수열 { b_n }은 첫째 항이 $b_1=a_2-a_1=pa+q-a=q-(1-p)a$, 공비가 p 인 등비수열이 된다.

따라서, $b_n=b_1p^{n-1}$ 이므로 $a_{n+1}-a_n=b_1p^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=b_1\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}\Leftrightarrow a_n-a_1=b_1\times\frac{1-p^{n-1}}{1-p}$$

$$\therefore\ a_n=a+\{q-(1-p)a\}\times\frac{1-p^{n-1}}{1-p}=\frac{q}{1-p}+\left(a-\frac{q}{1-p}\right)^{n-1}$$

③ 특성해를 이용하는 방법:

점화식 $(P\text{Ⅲ})$의 특성방정식 $x = px + q$ ·········$(B1)$에서 $x = \dfrac{q}{1-p}$

$(P\text{Ⅲ}) - (B1)$ 에서 $a_{n+1} - x = p(a_n - x)$ ·········$(B2)$

$(B2)$에서 수열 $\{a_n - x\}$은 첫째 항이 $(a_1 - x)$이고 공비가 p인 등비수열이므로

$$a_n - x = (a - x)p^{n-1}$$

여기에 $x = \dfrac{q}{1-p}$ 를 대입하면 $a_n = \dfrac{q}{1-p} + \left(a - \dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$

위의 (3)-①, ②, ③에서

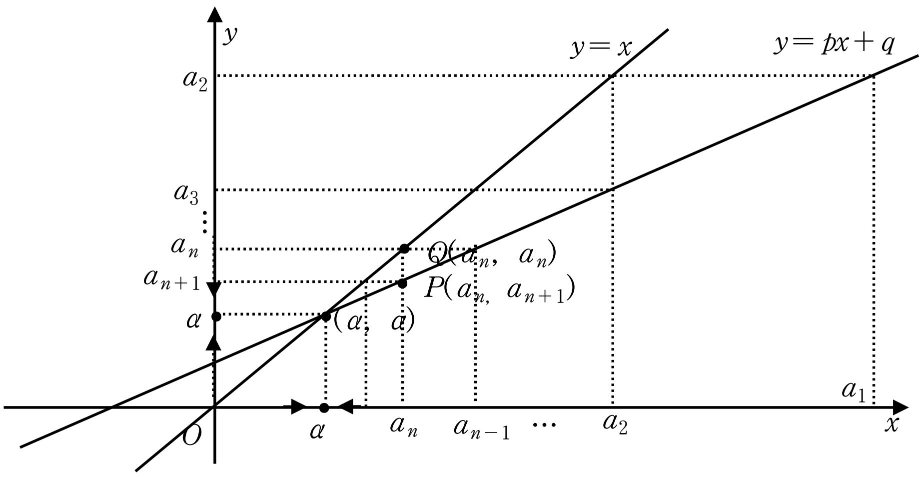
$-1 < p < 1$ 일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{q}{1-p} + \left(a - \dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}\right\} = \dfrac{q}{1-p}$

임을 알 수 있다. ▣

이제 위의 점화식 $(P\text{Ⅲ})$을 p의 값에 따른 수열 $\{a_n\}$의 수렴·발산에 대하여 기하학적 방법으로 추적해보기로 하자

(1) $|p| < 1$ 일 때

아래 그림의 좌표평면 위에서 점 $P(a_n,\ a_{n+1})$은 직선 $y = px + q$ 위에 존재하고, 점 $Q(a_n,\ a_n)$은 직선 $y = x$ 위에 있다. 그런데, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (수렴)하면, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ 이므로 $\alpha = p\alpha + q$ 에서 $\alpha = \dfrac{q}{1-p}$ 이다. 따라서 점 $(\alpha,\ \alpha)$는 두 직선 $y = px + q$, $y = x$ 의 교점이다.



따라서, 위의 두 직선의 그래프에서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 임을 알 수 있다.

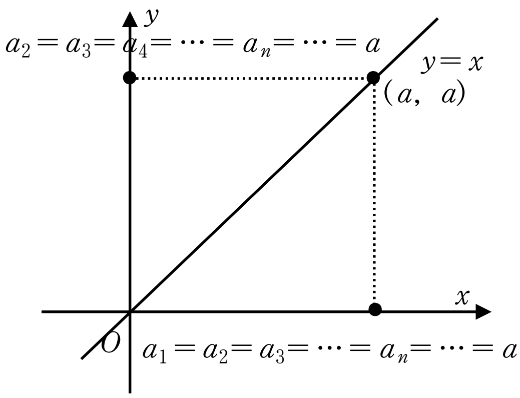
2) $p=1$ 일 때

① $q=0$ 즉, $a_{n+1}=a_n$일 때

$a_1=a_2=a_3=a_4=\cdots=a_n=\cdots=a$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 이다.

이를 오른쪽 그림에서와 같이 직선 $y=x$ 위에 점 $(a,\ a)$를 잡고 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 위와 같은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.



② $q\neq 0$ 즉, $a_{n+1}=a_n+q$ 일 때,

수열 $\{a_n\}$은 공차가 q인 등차수열이므로 일반항은 $a_n=a+(n-1)q$이다.

이를 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=x+q$의 그래프를 그려서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 위와 같은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

$a_1=a$,

$a_2=a_1+q=a+q$,

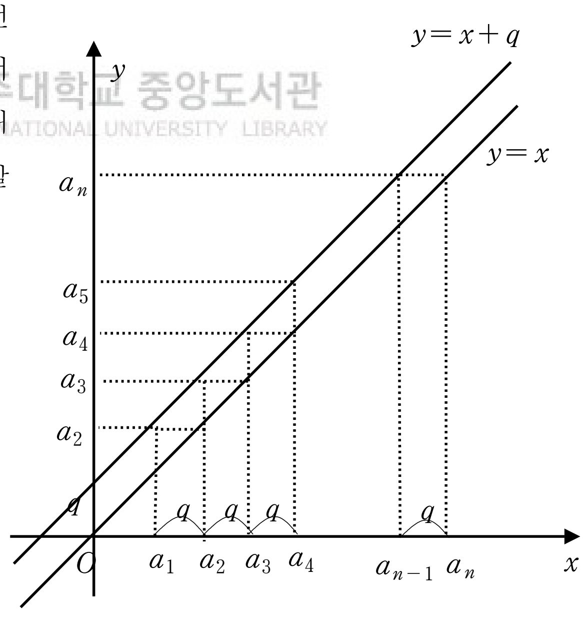
$a_3=a_2+q=a+2q$,

$a_4=a_3+q=a+3q$,

$a_5=a_4+q=a+4q$,

……

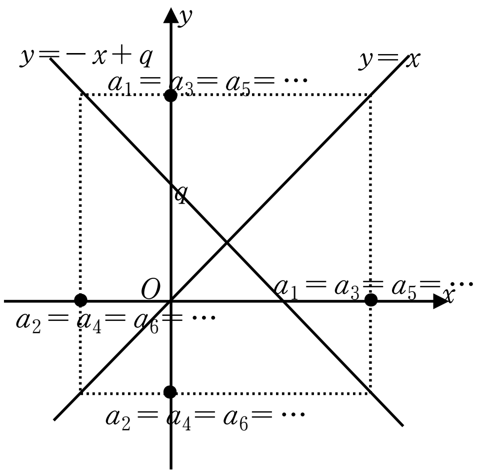
$a_n=a_{n-1}+q=a+(n-1)q$



3) $p=-1$ 일 때, $a_{n+1}=-a_n+q$

이를 다음 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=-x+q$의 그래프를 그려서 수열 $\{a_n\}$

의 각 항을 추적해보면 위와 같은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.



$a_1 = a$,　　$a_2 = -a_1 + q$,

$a_3 = -a_2 + q = -(-a+q) + q = a$

$a_4 = -a_3 + q = -a + q$,

$a_5 = -a_4 + q = -(-a+q) + q = a$

$a_6 = -a_5 + q = -a + q$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{2k-1} = a$,　　$a_{2k} = -a + q$

즉, $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2k-1} = a$,

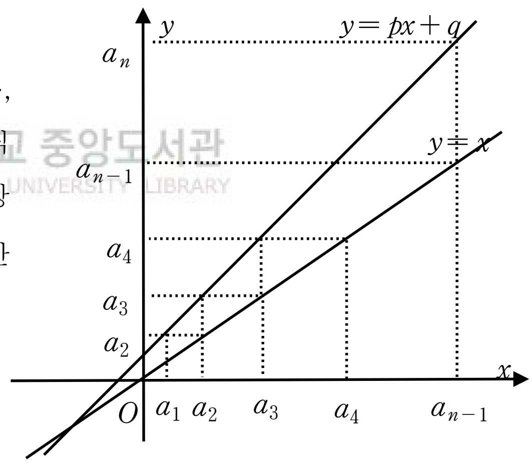
$$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \cdots = a_{2k} = -a + q$$

4) $p > 1$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y = x$, $y = px + q$의 그래프에서 점화식 $a_{n+1} = p\,a_n + q$에 따라 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 추적하여보면 수열 $\{a_n\}$이 발산함을 알 수 있다.

즉, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots \to \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$



5) $p < -1$ 일 때,

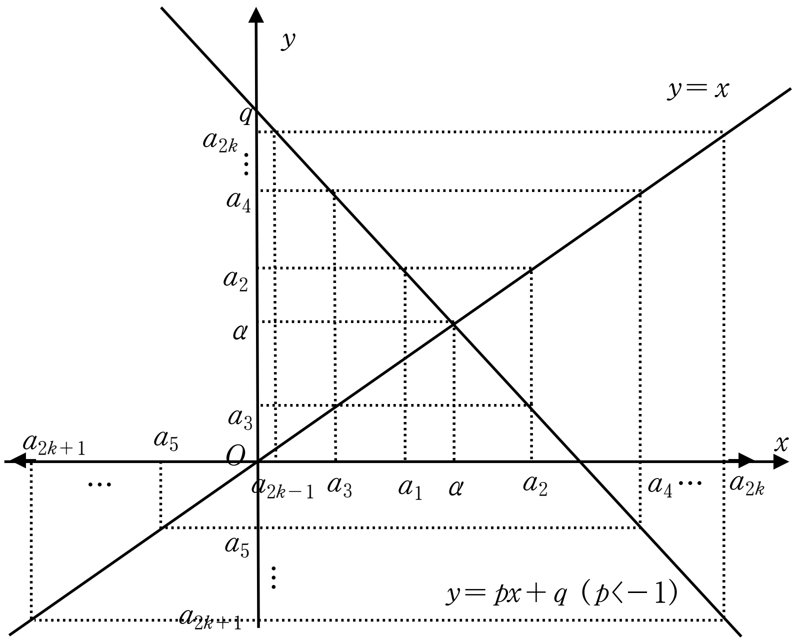
두 직선 $y = x$, $y = px + q$의 교점을 (α, α)라 하고 이 두 그래프를 이용하여 점화식 $a_{n+1} = p\,a_n + q$의 각 항을 추적해보자.

① $\alpha > a_1 = a$ 일 때,

다음 그림의 두 직선 $y = x$, $y = px + q$ $(p < -1)$의 그래프에서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해 보면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\alpha > a_1 > a_3 > a_5 > \cdots > a_{2k-1} > a_{2k+1} > \cdots \to -\infty$$

$$\alpha < a_2 < a_4 < a_6 < \cdots < a_{2k} < a_{2k+2} < \cdots \to \infty$$



② $\alpha < a_1 = a$ 일 때도 위와 마찬가지로(그림 생략)

$$\alpha < a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2k-1} < a_{2k+1} < \cdots \to -\infty$$

$$\alpha > a_2 > a_4 > a_6 > \cdots > a_{2k} > a_{2k+2} > \cdots \to -\infty$$

위의 ①, ②에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 존재하지 않음을 알 수 있다. ▣

PⅣ. $a,\ p,\ q,\ r\,(p \neq 0,\ p \neq 1)$는 상수이고 점화식이

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = pa_n + qn + r\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots(PIV)$$

인 수열$\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \left\{a - \frac{q}{1-p} - \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}\right\}p^{n-1} + \frac{q}{1-p}n + \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}$$

【증명1】 위의 점화식 $(P\text{Ⅳ})$ 로부터

$a_n = pa_{n-1} + q(n-1) + r$ ……… $(A1)$ 가 성립한다.

$(P\text{Ⅳ}) - (A1)$ 하면, $a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1}) + q$

여기서 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 하면 $b_1 = a_2 - a_1 = (p-1)a + q + r$

$$b_n = pb_{n-1} + q \cdots\cdots\cdots (A2)$$

$$b_{n+1} = pb_n + q \cdots\cdots\cdots (A3)$$

$(A3)-(A2)$하면 $\quad b_{n+1} - b_n = p(b_n - b_{n-1})$

여기서 $c_n = b_{n+1} - b_n$이라 하면 $c_n = pc_{n-1}$

($\Leftarrow$수열 $\{ b_n \}$의 계차수열 $\{ c_n \}$은 공비가 p인 등비수열)

이 때, $c_1 = b_2 - b_1 = (pb_1 + q) - b_1 = (p-1)b_1 + q$

$$= (p-1)^2 a + (p-1)(q+r) + q$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = b_1 + \frac{c_1(p^{k-1}-1)}{p-1}$$

그런데, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_1 + \frac{c_1(p^{n-1}-1)}{p-1}\right)$$

$$a_n - a_1 = \left(b_1 + \frac{c_1}{1-p}\right)(n-1) - \frac{1}{1-p} \times \frac{1-p^{n-1}}{1-p}$$

여기에 $a_1 = a$, $b_1 = a_2 - a_1 = (p-1)a + q + r$,

$c_1 = b_2 - b_1 = (p-1)^2 a + (p-1)(q+r) + q$을 대입하여 정리하면

$$a_n = \left\{a - \frac{q}{1-p} - \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}\right\}p^{n-1} + \frac{q}{1-p}n + \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}$$

【증명2】 주어진 점화식 $(P\text{Ⅳ})$과 같은 꼴의 점화식

$$f(n+1) = pf(n) + qn + r \cdots\cdots\cdots (B1)$$

를 만족하는 일차식 $f(n)$을

$f(n) = \alpha n + \beta$(단, α, β는 상수) $\cdots\cdots\cdots (B2)$라 하면

$$\alpha(n+1) + \beta = p(\alpha n + \beta) + qn + r$$

위 등식은 모든 자연수 n에 대하여 항등식이므로 계수 비교법에 의하여

$\alpha = p\alpha + q$, $\alpha + \beta = p\beta + \gamma$이므로 $\quad \alpha = \dfrac{q}{1-p}$, $\beta = \dfrac{\gamma(1-p)-q}{(1-p)^2}$

$$\therefore f(n) = \frac{q}{1-p}n + \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}$$

그런데, $a_{n+1} - f(n+1) = p\{a_n - f(n)\}$ 이므로 $a_n - f(n) = \{a_1 - f(1)\}p^{n-1}$

$\therefore\ a_n = f(n) + \{a_1 - f(1)\}p^{n-1}$

$$= \left\{a - \frac{q}{1-p} - \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2}\right\}p^{n-1} + \frac{q}{1-p}n + \frac{r(1-p)-q}{(1-p)^2} \qquad \blacksquare$$

※참고▶ (1) $p=0$ 일 때, 점화식 $(P\text{Ⅳ})$는 $a_1=a$, $a_{n+1}=qn+r$ 인 꼴이 되어 $a_1=a$, $a_2=q+r$ 이고, 둘째 항부터 공차가 q 인 등차수열이다.

따라서, $a_1=a$, $a_n=(n-1)q+r$ $(n\geq 2)$

(2) $p=1$ 일 때, 점화식 $P(\text{Ⅳ})$는 $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+qn+r$ 이 되어 점화식 $(P\text{Ⅰ})$인 꼴 ◀

PV. p, q, r 는 0 이 아닌 실수일 때, 점화식이

$$a_1=a, \quad a_{n+1}=pa_n+qr^n \quad \cdots\cdots (PV)$$

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같다.

(1) $p=1$ 일 때, $\begin{cases} a_1=a,\ a_n=a_1+q\times\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}\ (n=2,3,4,\cdots) & (r\neq 1) \\ a_1=a,\ a_n=a_1+q(n-1)\ (n=2,3,4,\cdots) & (r=1) \end{cases}$

(2) $p\neq 1$일 때, $\begin{cases} a_n=ap^{n-1}+(n-1)p^{n-1}q & (p=r) \\ a_n=\left(a+\dfrac{qr}{p-r}\right)p^{n-1}-\dfrac{q}{p-r}\times r^n & (p\neq r) \end{cases}$

【증명】(1) $p=1$ 일 때,

$a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+qr^n$ 즉, $a_{n+1}-a_n=qr^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=q\sum_{k=1}^{n-1}r^k$$

① $r\neq 1$일 때, $a_n-a_1=q\times\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}$ $(n=2,3,4,\cdots)$

즉, $a_1=a$, $a_n=a_1+q\times\dfrac{r(1-r^n)}{1-r}$ $(n=2,3,4,\cdots)$

② $r=1$일 때, $a_n-a_1=q(n-1)$ $(n=2,3,4,\cdots)$

즉, $a_1=a$, $a_n=a_1+q(n-1)$ $(n=2,3,4,\cdots)$

(2) $p\neq 1$일 때, 점화식 $(P\text{V})$의 양변을 p^{n+1}으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q}{p}\left(\frac{r}{p}\right)^n$$

여기서 $b_n=\frac{a_n}{p^n}$이라 하면 $b_{n+1}=b_n+\frac{q}{p}\left(\frac{r}{p}\right)^n$, $b_1=\frac{a_1}{p}=\frac{a}{p}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{q}{p}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{r}{p}\right)^k$$

① $\frac{r}{p}=1$ 즉, $p=r$일 때, $b_n-b_1=(n-1)\frac{q}{p}$

$$\therefore b_n=b_1+(n-1)\frac{q}{p}$$

$$\therefore a_n=p^n b_n=p^n\left\{\frac{a}{p}+(n-1)\frac{q}{p}\right\}=ap^{n-1}+(n-1)p^{n-1}q$$

② $\frac{r}{p}\neq 1$ 즉, $p\neq r$일 때,

$$b_n-b_1=\frac{q}{p}\times\frac{r}{p}\cdot\frac{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{r}{p}}=\frac{q}{p}\times r\cdot\frac{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}}{p-r}$$

$$\therefore\ b_n=\frac{a}{p}+\frac{q}{p}\times r\cdot\frac{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}}{p-r}$$

$$\therefore\ a_n=p^nb_n=p^{n-1}\left\{a+qr\times\frac{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}}{p-r}\right\}=ap^{n-1}+\frac{qr}{p-r}\times(p^{n-1}-r^{n-1})$$

$$=\left(a+\frac{qr}{p-r}\right)p^{n-1}-\frac{q}{p-r}\times r^n \quad (\text{단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$ ▣

PⅥ. $a,\ p,\ q,\ r,\ s\ (r\neq 0,\ ps-qr\neq 0)$에 대하여 분수수열 $\{a_n\}$의 점화식

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots\cdots\ (P\text{VI})$$

의 일반항 a_n은 점화식 $(P\text{VI})$의 특성방정식

$$x=\frac{px+q}{rx+s}\ \cdots\cdots\cdots\ (A_1)$$

의 해를 α, β라 하면,

(1) $\alpha \neq \beta$일 때, $$a_n = \frac{\alpha(a-\beta)-(a-\alpha)\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\times\beta}{(a-\beta)-(a-\alpha)\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}}$$

(2) $\alpha=\beta$일 때, $$a_n=\alpha+\frac{(a-\alpha)(s+r\alpha)}{s+r\alpha+r(n-1)(a-\alpha)}$$

【증명】 위의 점화식 $(P\mathrm{VI})$의 특성 방정식 (A_1)의 해가 $\alpha,\ \beta$이므로

$$\alpha=\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\ \cdots\cdots\cdots\ (A_2) \qquad \beta=\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\ \cdots\cdots\cdots\ (A_3)$$

(1) $\alpha \neq \beta$일 때

$(P\mathrm{VI})-(A_2)$하면 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\dfrac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}$

$(P\mathrm{VI})-(A_3)$하면 $a_{n+1}-\beta=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\dfrac{p\beta+q}{r\beta+s}=\dfrac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}$

따라서, 양변을 변끼리 나누면 $$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

여기서 $r\alpha+s=0$ 이라 가정하면 $\alpha=-\dfrac{s}{r}$는 방정식 (A_1)의 근이므로

$$r\left(-\frac{s}{r}\right)^2-(p-s)\left(-\frac{s}{r}\right)-q=0 \quad \therefore\ ps-qr=0$$

이것은 가정에 모순이다. 따라서 $r\alpha+s\neq 0$.

$r\beta+s\neq 0$ 이므로 수열 $\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}=\dfrac{a-\alpha}{a-\beta}$이고 공비가 $\dfrac{r\beta+s}{r\alpha+s}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{a-\alpha}{a-\beta}\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}$$

이 식을 정리하여 풀면 $$a_n = \frac{\alpha(a-\beta)-(a-\alpha)\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\times\beta}{(a-\beta)-(a-\alpha)\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}}$$

(2) $\alpha=\beta$일 때, $(P\mathrm{VI})-(A_2)$하면

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}$$

여기서 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{ps-qr}\cdot\frac{ra_n+s}{a_n-\alpha}=\frac{r\alpha+s}{ps-qr}\cdot\left(r+\frac{s+r\alpha}{a_n-\alpha}\right)$$

$$=\frac{(r\alpha+s)^2}{ps-qr}\cdot\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{r(r\alpha+s)}{ps-qr}\quad\cdots\cdots\cdots\ (A_4)$$

그런데, α는 방정식 (A_1)의 중근이므로 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha=\frac{p-s}{2r},\quad \alpha^2=-\frac{q}{r}\qquad\qquad \therefore\ 2r\alpha=p-s,\quad r^2\alpha^2=-qr$$

여기서, $(s+r\alpha)^2=s^2+s\cdot 2r\alpha+r^2\alpha^2=s^2+s(p-s)-qr\ ps-qr$이므로

$$\frac{(s+r\alpha)^2}{ps-qr}=1,\qquad \frac{r(r\alpha+s)}{ps-qr}=\frac{r(r\alpha+s)}{(s+r\alpha)^2}=\frac{r}{s+r\alpha}$$

(A_4)에서 $$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{r}{s+r\alpha}$$

따라서, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n-\alpha}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1-\alpha}=\frac{1}{a-\alpha}$ 이고 공차가 $\frac{r}{s+r\alpha}$인 등차수열이 된다.

$$\therefore\ \frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a-\alpha}+\frac{r}{s+r\alpha}(n-1)$$

이것을 정리하면

$$\therefore\ a_n=\alpha+\frac{(a-\alpha)(s+r\alpha)}{s+r\alpha+r(n-1)(a-\alpha)}$$ ▣

※참고▶ (PⅥ)의 점화식에서

(1) $r=0$ 이면 $a_{n+1}=\frac{p}{s}a_n+\frac{q}{s}$ ($\Leftarrow$ $a_{n+1}=pa_n+q$ 인 꼴)

(2) $ps-qr=0$ 이면 $p:q=r:s$ 이므로 $p=rk,\ q=sk$

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}=\frac{k(ra_n+s)}{ra_n+s}=k\ (\text{상수})$$ ◀

보기: (PⅥ)의 특수한 형태로서 위와 같은 방법으로 분수수열의 점화식

$$a_1=a\ ,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}\quad\cdots\cdots\cdots\ (B_0)$$

의 일반항 a_n을 구해보자.

【풀이】 점화식 (B_0)의 특성방정식 $x=1+\frac{1}{x}$ 의 해를 α, β $(|\alpha|>|\beta|)$라 하면

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha} \ \cdots\cdots\cdots \ (B_1), \qquad \beta=1+\frac{1}{\beta} \ \cdots\cdots\cdots \ (B_2)$$

$(B_0)-(B_1)$하면 $\quad a_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{\alpha}\times\frac{a_n-\alpha}{a_n}$

$(B_0)-(B_2)$하면 $\quad a_{n+1}-\beta=-\frac{1}{\beta}\times\frac{a_n-\beta}{a_n}$

$$\therefore \ \frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$

여기서, $b_n=\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$라 하면 $b_{n+1}=\frac{\beta}{\alpha}b_n$이므로

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$이고 공비가 $\frac{\beta}{\alpha}$인 등비수열이다.

따라서, $\quad b_n=b_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}=\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}.$

즉, $\quad \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}$

이것을 정리하면 $\quad a_n=\dfrac{\alpha(a_1-\beta)-(a_1-\alpha)\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\times\beta}{(a_1-\beta)-(a_1-\alpha)\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $0<\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha(a_1-\beta)-(a_1-\alpha)\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\times\beta}{(a_1-\beta)-(a_1-\alpha)\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

다음은 점화식 (B_0) 의 각 항을 기하학적 방법으로 해석해보자

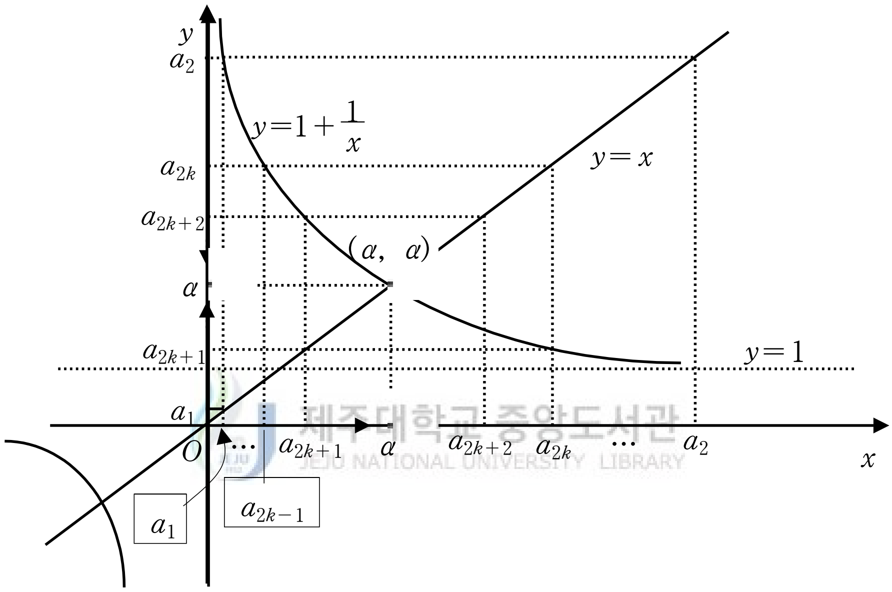
다음 그림에서와 같이 직선 $y=x$와 곡선 $y=1+\frac{1}{x}$ 의 교점을 $(\alpha,\ \alpha)$ 라 하고, 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적하여 조사해보면

$$0<a_1<a_3<a_5<\cdots a_{2k-1}<a_{2k+1}<\cdots<\alpha,$$

$$\alpha < \cdots < a_{2k+2} < a_{2k} < a_{2k-2} < \cdots < a_4 < a_2$$

임을 알 수 있다. 따라서, 부분수열 $\{a_{2k+1}\}$은 위로 유계이면서 증가수열이고 부분수열 $\{a_{2k}\}$은 아래로 유계이면서 감소수열임을 알 수 있다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$은 극한값을 가지므로 그 극한값을 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 라 하면 $\quad \alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$

이 방정식을 풀면 $x = \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



♣

PⅦ. $a,\ b,\ p,\ q\ (q \neq 0)$ 는 상수일 때, 인접한 세 항 사이의 점화식

$$a_1 = a,\quad a_2 = b,\quad a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \ \cdots\cdots\cdots (P\text{Ⅶ})$$

의 특성방정식

$$x^2 - px + q = 0 \ \cdots\cdots (Q)$$

의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 다음과 같다.

(1) $\alpha \neq \beta$일 때, $\quad a_n = \dfrac{b - a\beta}{\alpha - \beta} \times \alpha^{n-1} - \dfrac{b - a\alpha}{\alpha - \beta} \times \beta^{n-1}$

(2) $\alpha = \beta$일 때, $\quad a_n = a\alpha^{n-1} + (n-1)(b - \alpha a)\alpha^{n-2}$

【증명】 점화식 $(P\text{Ⅶ})$의 특성 방정식 $x^2 - px - q = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$p=\alpha+\beta, \qquad q=-\alpha\times\beta$$

따라서, 점화식 $(P\text{Ⅷ})$을 변형하면 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-(\alpha\times\beta)a_n$

즉, $$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \cdots\cdots\cdots (A_1) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \cdots\cdots\cdots (B_1) \end{cases}$$

(1) $\alpha\neq\beta$일 때, (A_1)에서

수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$은 첫째 항이 $a_2-\alpha a_1=b-\alpha a$이고 공비가 β인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1} \cdots\cdots\cdots (A_2),$$

(B_1)에서

수열 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$은 첫째 항이 $a_2-\beta a_1=b-\beta a$이고 공비가 β인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-\beta a_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1} \cdots\cdots\cdots (B_2),$$

$(B_2)-(A_2)$ 하면 $\qquad (\alpha-\beta)a_n=(b-a\beta)\alpha^{n-1}-(b-a\alpha)\beta^{n-1}$

$$\therefore\ a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\times\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1} \qquad \text{---------(1)}$$

(2) $\alpha=\beta$일 때, (A_1) 또는 (B_1)에서 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 이므로

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(b-a\alpha)\alpha^{n-1}$$

이 식의 양변을 α^{n+1}으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{b-a\alpha}{\alpha^2}$$

이 되어 수열 $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$은 첫째 항이 $\frac{a}{\alpha}$, 공차가 $\frac{b-a\alpha}{\alpha^2}$인 등차수열이 된다. 따라서,

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a}{\alpha}+(n-1)\frac{b-a\alpha}{\alpha^2}$$

$$\therefore\ a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2} \qquad \text{---------(2)} \quad ▣$$

다음은 고등학교 교과서에 많이 취급되고 있는 문제로서 위의 점화식 $(P\text{Ⅷ})$과 관련하여 보기문제로 제시하고자 한다.

보기: 상수 $p,\ q,\ r\ (p\neq 0)$에 대하여

$$a_1=a\,,\ \ a_2=b\,,\ \ pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\ ,\ \ p+q+r=0$$

을 만족하는 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n 및 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$가 수렴할 조건을 구해보자.

【풀이】 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 특성 방정식 $px^2+qx+r=0$ 의 해 α, β를 구하면 $\alpha=\dfrac{r}{p}$, $\beta=1$

(1) $p\neq r$일 때, $\alpha\neq\beta$이므로

위의 식 (1)에서 $$a_n=\frac{a_2-a_1\beta}{\alpha-\beta}\times\alpha^{n-1}-\frac{a_2-a_1\alpha}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}$$

여기에 $a_1=a$, $a_2=b$ 및 $\alpha=\dfrac{r}{p}$, $\beta=1$ 을 대입하면

$$a_n=\frac{b-a}{\frac{r}{p}-1}\times\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}-\frac{b-a\left(\frac{r}{p}\right)}{\frac{r}{p}-1}\times 1^{n-1}$$

이것을 정리하면 $$a_n=\frac{b-a}{r-p}\times p\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}-\frac{bp-ar}{r-p}$$

따라서, $\left|\dfrac{r}{p}\right|<1$일 때, $$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{ar-bp}{r-p}$$

(2) $p=r$일 때, $\alpha=\beta$이므로 위의 식 (2)에서

$$a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-\alpha a)\alpha^{n-2}$$

여기에 $a_1=a$, $a_2=b$ 및 $\alpha=\beta=1$을 대입하면

$$a_n=a+(n-1)(b-a)=(b-a)n+2a-b$$ ($\Leftarrow$ 수열 $\{a_n\}$은 등차수열)

♣

V. 수열의 극한과 단조수열

1. 수열의 극한

여기서는 해석학의 내용 중 수열의 극한(값)에 대한 가장 중요한 개념이면서도 고등학교 교육과정에서 지나치게 피상적으로 서술한 내용에 대하여 고찰하기로 한다.

정의1. 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여 적당한 실수 L 이 존재하여 다음의 조건을 만족할 때 수열 $\{a_n\}$은 L에 **수렴한다**(converge)고 하고, L을 수열 $\{a_n\}$의 **극한**(limit)이라 한다.

"임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 $N = N(\varepsilon)$이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $|a_n - L| < \varepsilon$이다."

기호로는 $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ 또는 $a_n \to L$ $(n \to \infty)$로 나타낸다. 때로는 "수열 $\{a_n\}$은 극한 L에 가까워진다." 또는 "수열 $\{a_n\}$은 극한 또는 극한값 L을 갖는다."고 말하기도 한다. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, $\{a_n\}$은 **발산한다**(diverge)고 한다.

보기1: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0에 수렴한다.

【증명】 임의의 $\varepsilon > 0$이 주어질 때

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad (n \geq N) \qquad \text{---------}(1)$$

를 만족하는 자연수 N을 찾으면 된다. 지금 아르키메데스의 성질(티끌 모아 태산이 된다는 정리)에 의하여 $N > \frac{1}{\varepsilon}$이 되도록 자연수 N을 취하면 $\frac{1}{N} < \varepsilon$이고, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ $(n \geq N)$ 이므로 부등식 (1)이 성립한다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

♣

보기2: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$는 발산함을 밝혀라.

【증명】 $\{a_n\}$이 실수 L에 수렴한다고 하면, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 자연수 N이

존재하여 $|a_n - L| < \varepsilon \quad (n \geq N)$이다. 특히 $\varepsilon = 1$이면

$$|a_n - L| < 1 \quad (n \geq N) \text{ 즉, } -1 < n - L < 1 \quad (n \geq N).$$

따라서 $L-1 < n < L+1 \quad (n \geq N)$는 N보다 큰 모든 자연수 n이 $L-1$과 $L+1$ 사이에 있음을 의미하는데, 이것은 분명히 모순이다.

따라서 $\{a_n\}$은 발산한다. ♣

정의2. 임의의 양수 M에 대하여 자연수 N이 존재해서 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > M$ (또는 $a_n < -M$) 이 성립할 때, $\{a_n\}$은 **양의 무한대** $+\infty$ (또는 **음의 무한대** $-\infty$)로 **발산한다**고 한다.

보기3: $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$ 임을 밝혀라.

【증명】 임의의 양수 M에 대하여 $\sqrt{M} < N$인 자연수 N을 잡으면 $M < N^2$이다. 이 때 $n \geq N$이면 $M < n^2$. 따라서 $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$이다. ♣

보기4: 수열 $\{(-1)\}^n$은 발산함을 보여라.

【증명】 $\alpha \geq 0$일 때, 모든 홀수 n에 대해서 $|(-1)^n - \alpha| \geq 1$이고 $\alpha < 0$일 때, 모든 짝수 n에 대해서 $|(-1)^n - \alpha| \geq 1$이다. 따라서 $0 < \varepsilon < 1$가 되도록 ε를 잡으면 수렴의 정의를 만족하는 α가 없다. 따라서 $\{(-1)\}^n$은 발산한다. ♣

위에서 보는 바와 같이 주어진 수열이 수렴함을 보이려면 그 수열의 극한값을 추정하여야 한다.

정리1. 수렴하는 수열의 극한은 일의적(一意的)이다.

【증명1】 $a_n \to \alpha,\ a_n \to \beta \quad (n \to \infty)$라고 가정하면, 임의로 주어진 $\varepsilon > 0$에 대해서

$$\exists N_1 \in N \ .\ni.\ |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq N_1$$
$$\exists N_2 \in N \ .\ni.\ |a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq N_2$$

$N_0 = \max(N_1,\ N_2)$라고 하면, $n \geq N_0$에 대해서

$$|\alpha-\beta|=|(\alpha-a_n)-(\beta-a_n)|\le|a_n-\alpha|+|a_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

따라서 $\alpha=\beta$이다.

【증명2】 $\alpha\ne\beta$라고 가정하자. 그러면 $|\alpha-\beta|>0$이다. $\varepsilon=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$로 두면 $a_n\to\alpha$이므로 자연수 N_1이 존재하여 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ $(n\ge N_1)$이다. 마찬가지로 $a_n\to\beta$이므로 자연수 N_2가 존재하여 $|a_n-\beta|<\varepsilon$ $(n\ge N_2)$이다. 지금 $N=\max(N_1,\ N_2)$으로 하면 $n\ge N$일 때

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha| &=|(a_n-\alpha)-(a_n-\beta)|\\ &\le|a_n-\alpha|+|a_n-\beta|<2\varepsilon=|\alpha-\beta|\end{aligned}$$

즉, $|\beta-\alpha|<|\beta-\alpha|$가 된다. 분명히 이것은 모순이다. 따라서 $\alpha=\beta$이다. ♣

보기5: $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $b_n=a_{n+p}$ (p는 정수이고, $p\ge1$)일 때 $\lim_{n\to\infty}b_n=a$ 임을 증명하여라.

【증명】 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 이므로 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 자연수 N이 정해지고, $n\ge N$인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n-a|<\varepsilon$이다. 그런데 $n+p>n\ge N$이므로 $|b_n-a|=|a_{n+p}-a|<\varepsilon$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=a$ 이다. ♣

보기6: $r>1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$임을 증명하여라.

【증명】 $r>1$ 이면 $r=1+\alpha$, $\alpha>0$인 α가 존재한다. 이항정리에 의하여

$$r^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2+\cdots+\alpha^n\ge1+n\alpha>n\alpha$$

이므로 $\frac{1}{r^n}=\frac{1}{(1+\alpha)^n}<\frac{1}{1+n\alpha}<\frac{1}{n\alpha}$

이것이 ε보다 작기 위해서는 $\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$ 곧, $\frac{1}{\alpha\varepsilon}<n$ 이어야 한다. 따라서 $N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$인 자연수 N을 택하면 $n\ge N$일 때

$$\left|\frac{1}{r^n}-0\right|=\frac{1}{r^n}<\varepsilon \quad 곧,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0.$$ ♣

정리2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β에 수렴할 때,

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (k는상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (부호동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

【증명】 (1) 임의의 주어진 양수 ε에 대해서 자연수 N이 존재해서 $\forall n \geq N$이면 $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|+1}$ 되게 할 수 있다.

따라서, $\forall n \geq N$일 때 $|ka_n - k\alpha| = |k||a_n - \alpha| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|+1} < \varepsilon$ 이다.

(2) 임의의 주어진 양수 ε에 대해서 자연수 N_1, N_2가 존재해서 $\forall n \geq N_1$이면 $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N_2$이면 $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$N = \max(N_1, N_2)$ 라고 두면 $\forall n \geq N$일 때

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

이 된다.

(3) 항등식 $a_n b_n - \alpha\beta = (a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)$

를 이용한다. ε를 임의의 양수라 하자. 그러면 $\sqrt{\varepsilon}$에 대해서 각각

$n \geq N_1$ 이면 $|a_n - \alpha| < \sqrt{\varepsilon}$,

$n \geq N_2$ 이면 $|b_n - \beta| < \sqrt{\varepsilon}$

인 자연수 N_1, N_2가 존재한다.

$N = \max(N_1, N_2)$라 하면 $n \geq N$일 때 $|(a_n - \alpha)(b_n - \beta)| < \varepsilon$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha)(b_n - \beta) = 0$이다.

그런데 (1)에 의하면 $\lim_{n\to\infty} \alpha(b_n - \beta) = \alpha \cdot 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \beta(a_n - \alpha) = \beta \cdot 0 = 0$이다.

따라서 (2)를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - \alpha\beta) = \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \lim_{n\to\infty} \alpha(b_n - \beta) + \lim_{n\to\infty} \beta(a_n - \alpha) = 0$$

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$이다. ▣

정리3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β에 수렴하고 $\beta \neq 0$일 때,

(1) 유한개의 자연수를 제외한 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \neq 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

【증명】 (1) 주어진 양수 $\frac{1}{2}|\beta|$에 대하여

$$n \geq N_1 \text{ 이면 } |b_n - \beta| < \frac{1}{2}|\beta| \text{ 즉, } |b_n| > \frac{1}{2}|\beta|$$

을 만족하는 자연수 N_1이 존재한다. 따라서 $n \geq N_1$이면 $b_n \neq 0$이다.

(2) 위에서 본 바와 같이 주어진 양수 $\frac{1}{2}|\beta|$에 대하여

$$n \geq N_1 \text{ 이면 } |b_n - \beta| < \frac{1}{2}|\beta| \text{ 즉, } |b_n| > \frac{1}{2}|\beta|$$

이 되는 자연수 N_1이 존재한다. 또한 ε을 주어진 임의의 양수라 하면 $\frac{1}{2}\beta^2\varepsilon$에 대하여

$$n \geq N_2 \text{ 이면 } |b_n - \beta| < \frac{1}{2}\beta^2\varepsilon$$

되는 자연수 N_2가 존재한다. $N = \max(N_1, N_2)$라고 하면

$$n \geq N \text{일 때 } \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n||\beta|} < \frac{2}{\beta^2}|b_n - \beta| < \varepsilon.$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$이다.

(3) 앞의 **정리2**에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$ ▣

정리4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 양의 무한대 ∞로 발산할 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty .$$

【증명】 M을 임의의 양수라 하자. 가정에 의하여 자연수 N_1이 존재해서 $n \geq N_1$이

면 $a_n > \frac{M}{2}$. 또한 자연수 N_2이 존재해서 $n \ge N_2$이면 $a_n > \frac{M}{2}$.

따라서 $n \ge \max(N_1, N_2)$이면 $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$. ▣

2. 극한정리

정리1. 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴하고, 모든 $n \in N$에 대하여 $a_n \ge 0$ 이면,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ge 0$$

【증명】 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha < 0$ 이라 가정하고, 임의의 양수 ε에 대하여 $\varepsilon = -\alpha > 0$ 라 하자. 그런데 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (수렴)하므로, 모든 $n \ge N$에 대하여 $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$을 만족하는 자연수 N이 존재한다. 특히, $a_N < \alpha + \varepsilon = a + (-a) = 0$ 이다. 그러나 이것은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge 0$ 이라는 가정에 모순된다. 따라서 $a \ge 0$ 이다. ▣

정리2. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, 모든 $n \in N$에 대하여

$a_n \le b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

【증명】 $c_n = b_n - a_n$ 으로 놓으면 모든 자연수 n에 대하여 $c_n \ge 0$ 이다. 그러면 **정리1**로부터 $0 \le \lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$ 이므로, $\lim a_n \le \lim b_n$ 이다. ▣

정리3. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하고 $\alpha \le c_n \le \beta$ ($n \in N$)이면 $\alpha \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \beta$.

【증명】 $a_n = \alpha$ (일정), $b_n = \beta$ (일정)이라 하면 **정리2**에 의하여 $a_n \le c_n$ 이므로

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

마찬가지로 $$\lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2)에 의하여 $\alpha \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \beta$ 가 성립한다. ▣

정리4. (스퀴이즈 정리; Squeeze Theorem) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(1) 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

그러면 수열 $\{b_n\}$은 수렴하고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

【증명】 가정(2)에서 $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$라 하면 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $n \ge N$ 일 때 $|a_n - L| < \varepsilon$과 $|c_n - L| < \varepsilon$이 되는 자연수 N이 존재한다.

또한, 가정(1)에 의하여 $a_n - L \le b_n - L \le c_n - L$ 이므로

$$|b_n - L| \le \max(|a_n - L|,\ |c_n - L|) < \varepsilon.$$

즉, $|b_n - L| < \varepsilon$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ 이다. ▣

위의 **정리4**를 이용하면 고등학교 학습과정에서 흔히 볼 수 있는

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

임을 보일 수 있다.

사실, 모든 자연수 n에 대하여 $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

그런데, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 **정리4**에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

정리5. 수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면, 절대값의 수열 $\{|a_n|\}$은 $|\alpha|$에 수렴한다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ 이면, } \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha| \text{이다.}$$

【증명】 모든 자연수 n 및 임의의 양수 ε에 대하여 가정에서 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$이므로 삼각부등식에 의하여 $||a_n| - |\alpha|| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon$이다. 따라서, 수열 $\{|a_n|\}$은 $|\alpha|$에 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ ▣

정리6. 수열 $\{a_n\}$이 $\alpha \in R$에 수렴하는 수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge 0$이라고 하자. 그러면 양의 제곱근의 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ 이다.

【증명】 **정리1**에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ge 0$ 이므로, $\varepsilon > 0$ 에 대하여

두 경우 (1) $\alpha = 0$, (2) $\alpha > 0$ 에 대하여 고찰하자

(1) $\alpha = 0$ 인 경우:

$a_n \to 0$ 이므로 $n \ge K$ 일 때 $0 \le a_n = a_n - 0 \le \varepsilon^2$ 을 만족하는 자연수 K에 대하여 $0 \le \sqrt{a_n} < \varepsilon$ 이다. $\varepsilon > 0$ 이므로 $\sqrt{a_n} \to 0$ 이다.

(2) $\alpha > 0$ 인 경우

$\sqrt{\alpha} > 0$ 이고, 다음 식이 성립한다.

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}} \right| = \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}}$$

그리고 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha} \ge \sqrt{\alpha} > 0$ 이므로

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |a_n - \alpha|$$

따라서, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{\alpha}$ ▣

정리7. 수열 $\{a_n\}$이 양의 수열이고, $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재한다고 하자. 만일 $L < 1$ 이면, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

【증명】 먼저 $L < r < 1$ 인 하나의 수 r을 선택하여, $\varepsilon = r - L > 0$ 이라고 하자. 그러면, $n \ge K$에 대하여

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$$

을 만족하는 자연수 K가 존재한다. 이 사실로부터, $n \ge K$이면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = L + (r - L) = r$$

따라서 $n \ge K$이면 다음을 얻는다.

$$0 < a_{n+1} < a_n r < a_{n-1} r^2 < \cdots < a_K r^{n-K+1}$$

이제 $c = \frac{a_K}{r^K}$ 로 놓으면, 모든 $n \geq K$에 대하여 $0 < a_{n+1} < cr^{n+1}$ 이다.

$0 < r < 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ 이고, **정리4**(스퀴이즈 정리; Squeeze Theorem)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \blacksquare$$

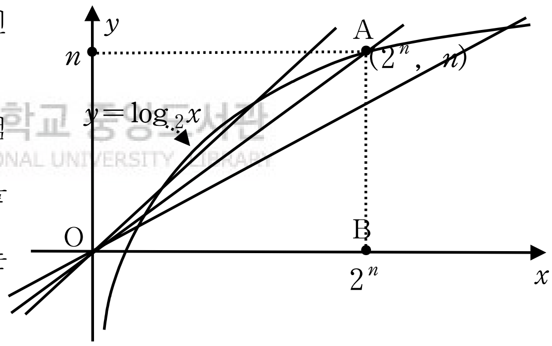
보기: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ 임을 증명하여라

【증명】 $a_n = \frac{n}{2^n}$ 이라고 하면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 위의 **정리7**로부터 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

이를 함수 $y = \log_2 x$의 그래프로 확인해보자.



$y = \log_2 x$ 위의 임의의 한 점 $A(2^n,\ n)$에 대하여 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{n}{2^n}$ 이다. $n \to \infty$ 일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐을 알 수 있다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \qquad \clubsuit$$

정리8. 만약 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ 이다.

【증명】 $a_n = b_n + \alpha$ 로 두자. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n}{n} = 0$$

임을 보이면 된다.

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_P}{n} + \frac{b_{P+1} + b_{P+2} + \cdots + b_n}{n}$$ 이므로

$$\left|\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{n}\right| \le \frac{|b_1+b_2+b_3+\cdots+b_P|}{n} + \frac{|b_{P+1}|+|b_{P+2}|+\cdots+|b_n|}{n}$$

이다. 임의의 양수 ε에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ 이므로 $n\ge P$인 모든 n에 대하여 $|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ 이 되는 자연수 P을 선택할 수 있다. 따라서

$$\frac{|b_{P+1}|+|b_{P+2}|+\cdots+|b_n|}{n} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}}{n} = \frac{(n-P)\frac{\varepsilon}{2}}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots (1)$$

이다. P를 선택한 후에, $n>N>P$인 모든 n에 대하여

$$\frac{|b_1+b_2+b_3+\cdots+b_P|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots (2)$$

가 되도록 자연수 N을 선택할 수 있다. 따라서 (1)과 (2)에 의하여 $n>N$이면

$$\frac{|b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$ ▣

3. 유계수열과 단조수열

1) 유계수열의 정의와 단조수렴 정리

정의1. 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 실수 M이 존재하여 $a_n \le M$ $(n\in N)$이면 **위로 유계** (bounded above)라 하며, 실수 L이 존재하여 $L\le a_n$ $(n\in N)$이면 **아래로 유계** (bounded below)라고 한다. 위로 유계이며 동시에 아래로 유계인 수열을 **유계** (bounded)**수열**이라고 한다.

즉, 실수 M이 존재하여 $|a_n|\le M$ $(n\in N)$이면 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 유계수열이다.

정리1. 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 이 수렴하면 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 유계수열이다.

【증명】 만일 $L=\lim_{n\to\infty} a_n$ 이면 자연수 N이 존재하여 $|a_n-L|<1$ $(n\ge N)$이다.

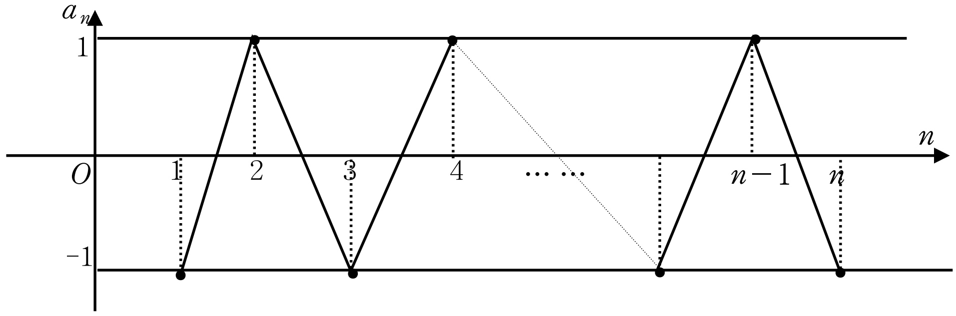
그러면 $n\ge N$인 모든 자연수 n에 대하여

$$|a_n|=|L+(a_n-L)|\le|L|+|(a_n-L)|<|L|+1$$

지금 $M=\max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, \cdots, |a_{N-1}|, |L|+1)$라 하면 $|a_n|\le M$ $(n\in N)$

즉, 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 유계이다. ▣

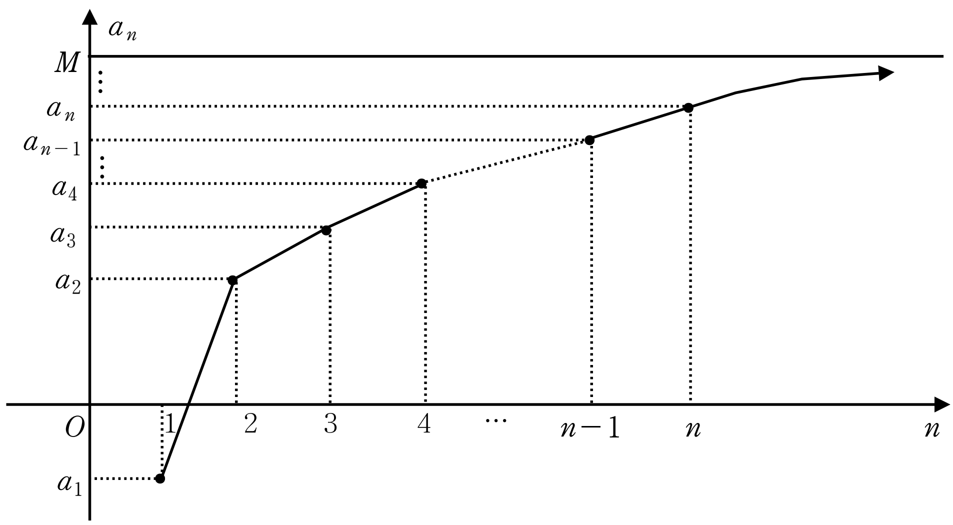
《주의》 수열 $\{(-1)^n\}$은 유계이지만 발산한다. 따라서 위 정리의 역은 성립하지 않는다.



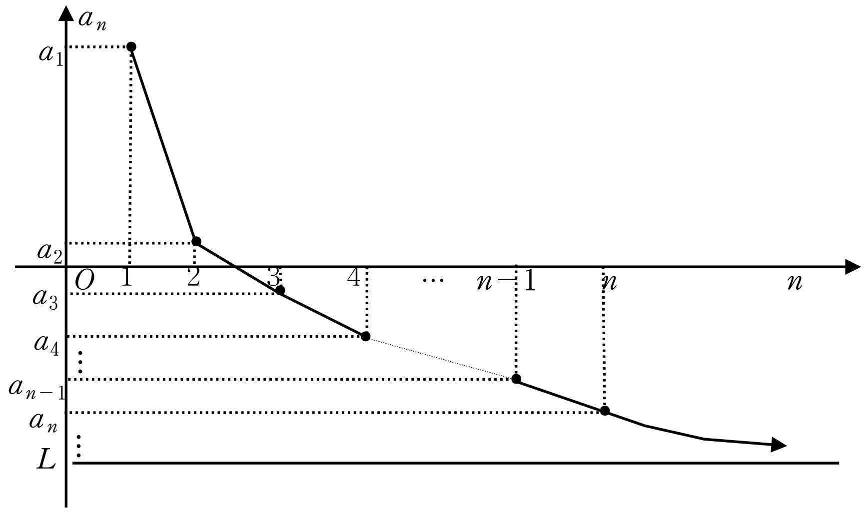
정의2. $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$인 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 을 **단조증가수열**(monotone increasing sequence)이라 하고, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$인 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 을 **단조감소수열**(monotone decreasing sequence)이라 한다.

정리2. (**단조수렴 정리**) 단조수열$\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 이 수열이 유계이다. 더욱이

(1) 수열$\{a_n\}$이 유계인 단조증가수열이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$이다.



(2) 수열 $\{a_n\}$이 유계인 단조감소수열이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$이다.



▣

정리3. (1) $0<x<1$ 이면 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 0 에 수렴하고,

(2) $1<x<\infty$ 이면 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 ∞ 로 발산한다.

2) 그래프를 이용한 수열의 극한 판정

보기1: 그래프를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 임을 보이자.

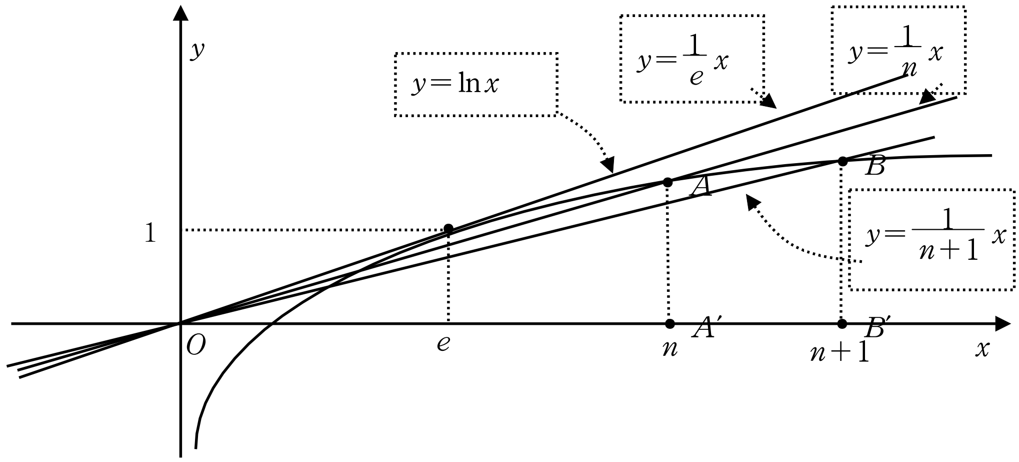
【증명】 함수 $y=\ln x$의 그래프 위의 점 $(e,\ 1)$에서 원점을 지나는 직선은 $y=\frac{1}{e}x$이고 이 곡선 위의 임의의 한 점을 $A(n,\ \ln n)$라 하면 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln n}{n}$ 이다.

아래의 그림에서 $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln n}{n}\to 0$가 된다.

또한, $\frac{1}{e}$ >직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기>직선 $\overleftrightarrow{OB}$의 기울기>0

즉, $\frac{1}{e} > \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \ln \sqrt[n]{n} > \ln \sqrt[n+1]{n+1} > 0$이므로

$$e^{\frac{1}{e}} > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} > 1$$



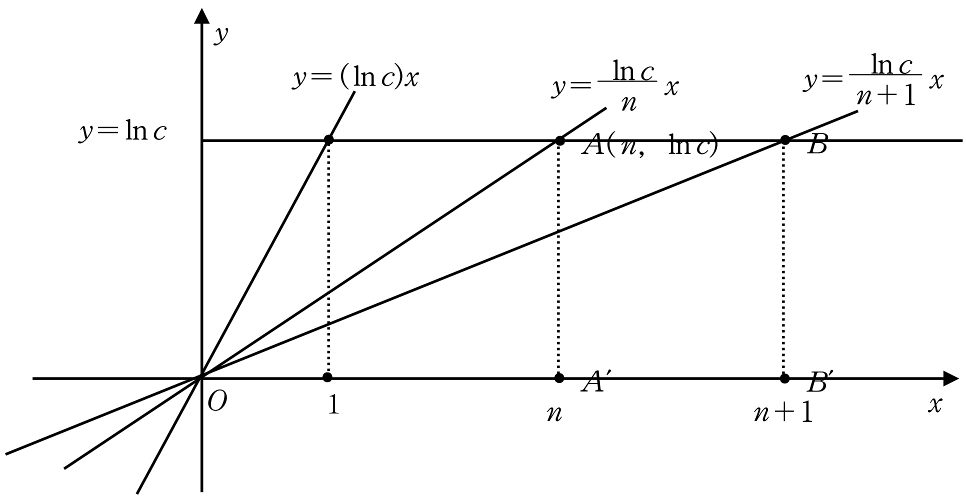
그러므로 수열 $\{\sqrt[n]{n}\}$은 유계이고 단조감소 수열이다. 따라서 **정리2** (2)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$ ♣

보기2: c가 양의 실수일 때, 그래프를 이용하여 $\sqrt[n]{c} = 1$ 임을 알아보자.

【풀이】 (1) $c > 1$ 인 경우

함수 $y = \ln c$의 그래프 위의 한 점 $A(n,\ \ln c)$라 하면 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\frac{\ln c}{n}$ 이다.



위의 그림에서 $n \to \infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
즉, $n \to \infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\dfrac{\ln c}{n} \to 0$가 된다.

또한, $\ln c$ > 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기 > 직선 $\overleftrightarrow{OB}$의 기울기 > 0 이다.
즉, $\ln c > \dfrac{\ln c}{n} > \dfrac{\ln c}{n+1} > 0 \Leftrightarrow \ln c > \ln \sqrt[n]{c} > \ln \sqrt[n+1]{c} > 0 \Leftrightarrow c > \sqrt[n]{c} > \sqrt[n+1]{c} > 1$
그러므로 수열 $\{\sqrt[n]{c}\}$은 유계이고 단조감소 수열이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$이다.

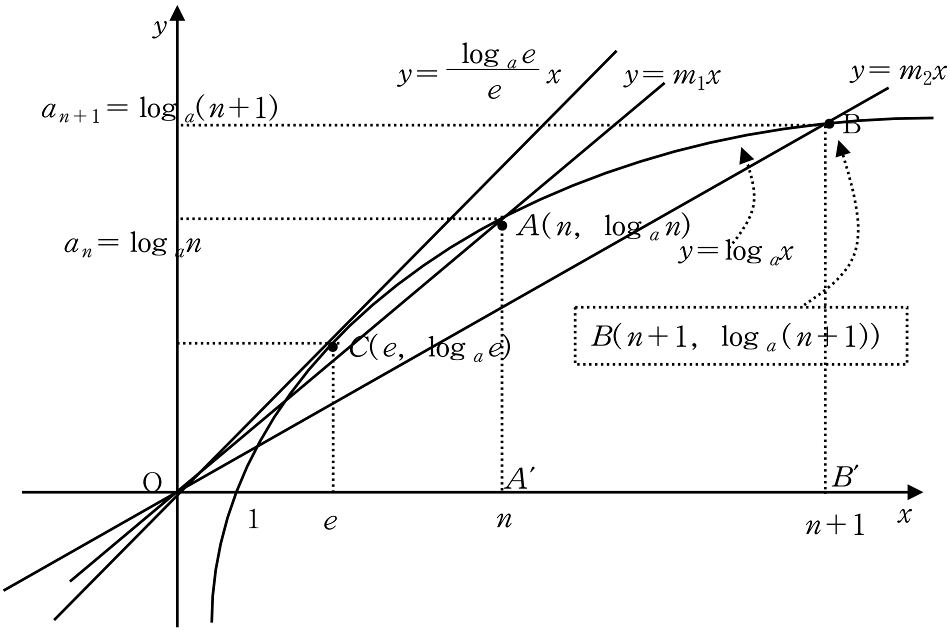
(2) $c=1$ 인 경우

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \text{(자명)},$$

(3) $0 < c < 1$ 인 경우도 위와 마찬가지로 $y = \ln c$의 그래프를 이용하면 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ 임을 보일 수 있다.(그림 생략) ♣

보기3: 그래프를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ 임을 보여라.

【증명】 (1) $a > 1$ 일 때, $a_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ 이라 하면, $a_{n+1} = \dfrac{\log_a (n+1)}{n+1}$ 이다.



함수 $y=\log_a x$ 위의 두 점 $A(n,\ \log_a n)$, $B(n+1,\ \log_a(n+1))$ (단, $e<n$)에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.

$y=\log_a x$ 위의 점 $C(e,\ \log_a e)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=\dfrac{\log_a e}{e}x$ 이다.

위의 그림에서 직선 $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$를 각각 $y=m_1 x$, $y=m_2 x$ 라 하면

$$m_1=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=\frac{\log_a n}{n}=a_n\ ,\quad m_2=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=\frac{\log_a(n+1)}{n+1}=a_{n+1}$$

$$\therefore\ \frac{\log_a e}{e}>a_n>a_{n+1}>0$$

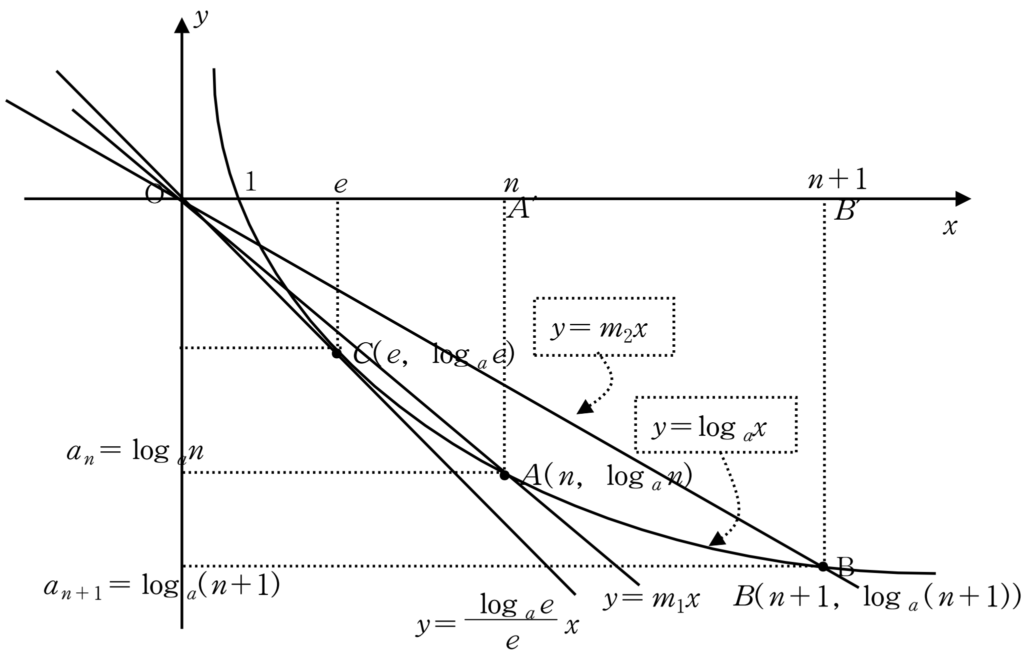
따라서 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 단조감소수열이면서 유계이다.

또한, n이 한없이 커질 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐은 알 수 있다.

즉, $$n\to\infty \text{ 일 때, } m_1=a_n=\frac{\log_a n}{n}\to 0\ .$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$$

(2) $0<a<1$ 일 때,



위의 (1)과 같은 방법으로 직선 $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$를 각각 $y=m_1x$, $y=m_2x$라 하면

$$m_1=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=\frac{\log_a n}{n}=a_n,\quad m_2=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=\frac{\log_a(n+1)}{n+1}=a_{n+1}$$

$$\therefore\ \frac{\log_a e}{e}<a_n<a_{n+1}<0\ .$$

따라서 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 단조증가수열이면서 유계이다.

또한, n이 한없이 커질 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐은 알 수 있다.

즉, $n\to\infty$ 일 때, $m_1=a_n=\dfrac{\log_a n}{n}\to 0$

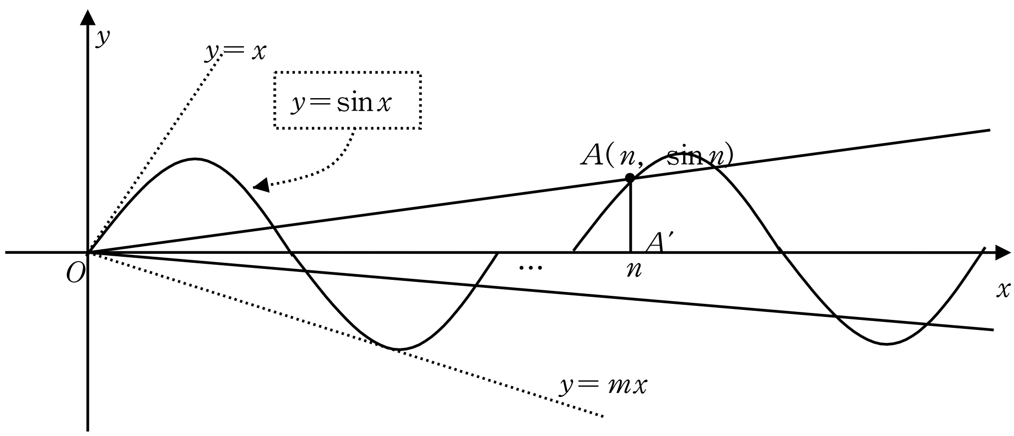
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$$ ♣

보기4: $y=\sin x$의 그래프를 이용하여 $\lim_{n-\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ 임을 조사해보자.

【풀이】 지금, $y=\sin x$ 위의 임의의 한 점 $A(n,\ \sin n)$에서 x축에 내린 수선의 발을 A'라 하자.

$n\to\infty$ 일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 x축에 가까워짐을 알 수 있다.

즉, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기 $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=\dfrac{\sin n}{n}\to 0$ 이다.

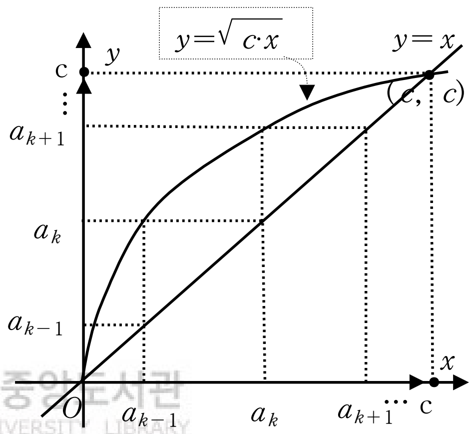


따라서, $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$ ♣

4. 특수한 점화수열

점화식으로 표시되는 몇 가지 형태의 수열의 일반항을 유도하지 않고, 단조수렴 정리를 이용하여 수열의 수렴·발산 여부를 판정하는 방법을 체계적으로 지도할 필요가 있으므로 이 절에서는 그 유형을 체계적으로 분류하여 조사하고자 한다.

T1. 점화식이 $a_1 = a,\ a_{n+1} = \sqrt{c \cdot a_n}$ $(c > 0)$ 로 주어지는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 의 값을 구해보자



【풀이1】 (1) $0 \le a \le c$ 일 때,

$a_1 = a$, $a_2 = \sqrt{c \cdot a_1} = \sqrt{c \cdot a}$ 이므로 $a \le a_1 < a_2 \le c$ 이다.

따라서, $n = 1$ 일 때, $a \le a_n < a_{n+1} \le c$ 가 성립한다.

$n = k$ 일 때, $a \le a_k < a_{k+1} \le c$ 가 성립한다고 가정하면,

$ac \le c \cdot a_k < c \cdot a_{k+1} \le c^2$ 이므로 $a \le a_{k+1} < a_{k+2} \le c$ 가 성립한다.

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 $a \le a_n < a_{n+1} \le c$ 가 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a \le a_n < a_{n+1} \le c$$

가 성립한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열이므로 수렴한다.

이 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ 라 하면 $\alpha = \sqrt{c \cdot \alpha}$ 이므로 $\alpha = c$.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

이를 기하학적 방법으로 고찰하여 보자.

직선 $y = x$와 곡선 $y = \sqrt{c \cdot x}$ 의 교점이 $(c,\ c)$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 이 두 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 추적해보면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

임을 직관적으로 쉽게 추적할 수 있다.

(2) $a > c$ 일 때,

$a_1 = a,\ a_2 = \sqrt{c \cdot a} \quad \therefore\ c < a_2 < a_1 \le a$

따라서, $n=1$ 일 때 $c < a_{n+1} < a_n \le a$ 가 성립한다.

$n=k$ 일 때, $c \le a_{k+1} < a_k < a$ 가 성립한다고 가정하면, $c^2 \le c \cdot a_{k+1} < c \cdot a_k < ac$ 이므로 $c < a_{k+2} < a_{k+1} \le a$ 가 성립한다.

따라서, $n=k+1$ 일 때에도 $c < a_{n+1} < a_n \le a$ 가 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

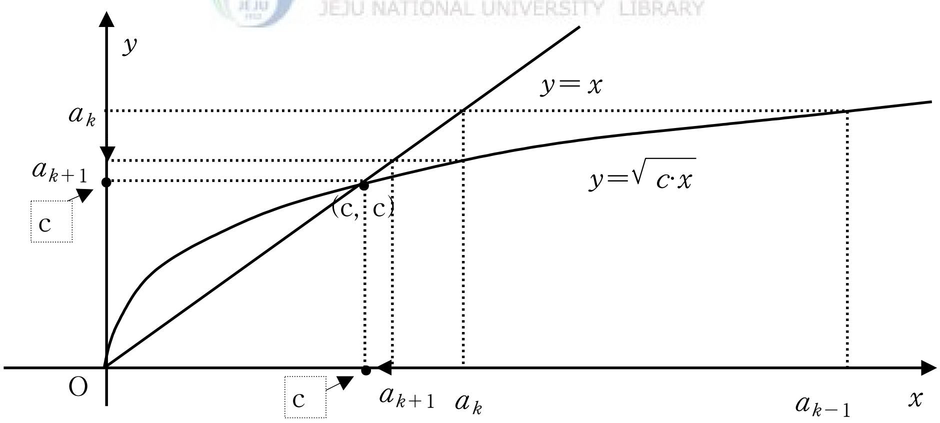
$$c < a_{n+1} < a_n \le a$$

가 성립한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 유계인 감소수열이므로 수렴한다.

이 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ 라 하면 $\alpha = \sqrt{c \cdot \alpha}$ 이므로 $\alpha = c$.

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$

이것 또한, 아래 그림과 같이 기하학적인 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 위와 같은 결과를 얻게됨을 알 수 있다.



■

【풀이2】 주어진 점화식의 양변에 log 를 취하면

$$\log a_{n+1} = \frac{1}{2}(\log c + \log a_n) \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

여기서 $b_n = \log a_n$ 으로 치환하면 $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \log c$ 이 되어 점화식 (PⅢ)의 형

태이다. 즉, 점화식 (PⅢ)으로부터 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}\log c$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은

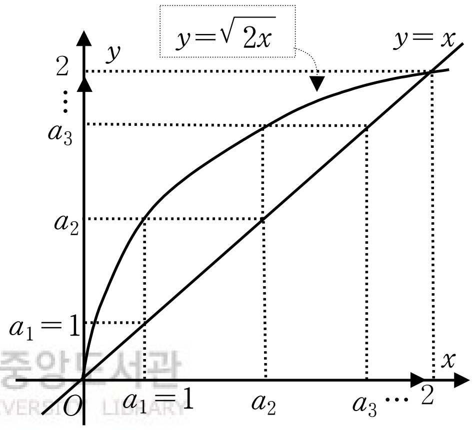
$$b_n=\log c+(a-\log c)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\log c+(a-\log c)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\log c$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=c$$

▣

보기. $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ 로 주어지는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값을 구해보자



【풀이】 위의 T1에서 $a=1$ 이고 $c=2$ 인 경우이므로 수열 $\{a_n\}$은 유계인 증가수열이다. 이 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=2$ 임을 알 수 있다.

이를 기하학적 방법으로 고찰하여 보자.

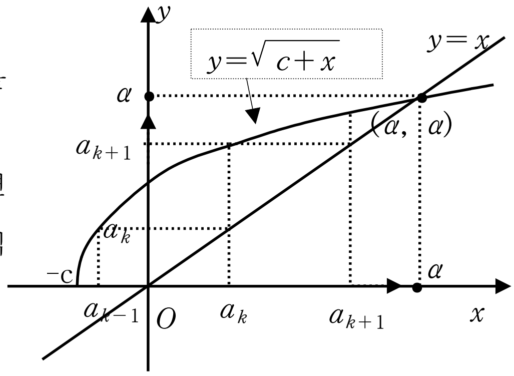
직선 $y=x$와 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 의 교점이 (2, 2) 이므로 오른쪽 그림과 같이 이 두 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 추적해보면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=2$ 임을 직관적으로 쉽게 추적할 수 있다. ♣

T2. $a_1=a$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$ $(c>0)$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

【증명】 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=\sqrt{x+c}$의 교점을 $(\alpha,\ \alpha)$ 라 하자.

(1) $-c\le a\le\alpha$ 일 때, 오른쪽 그림에서 모든 자연수 n에 대하여

$$-c\le a_n<a_{n+1}\le\alpha$$



즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 유계이며 증가수열임을 알 수 있다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 각 항을 추적해보면 극한값 α 을 가지며 α 는 특성방정식 $x=\sqrt{x+c}$ 을 만족한다.

즉, $\alpha^2-\alpha-c=0$ 이 성립한다.

근과 계수와의 관계에서 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ $(\alpha>0)$ 이므로

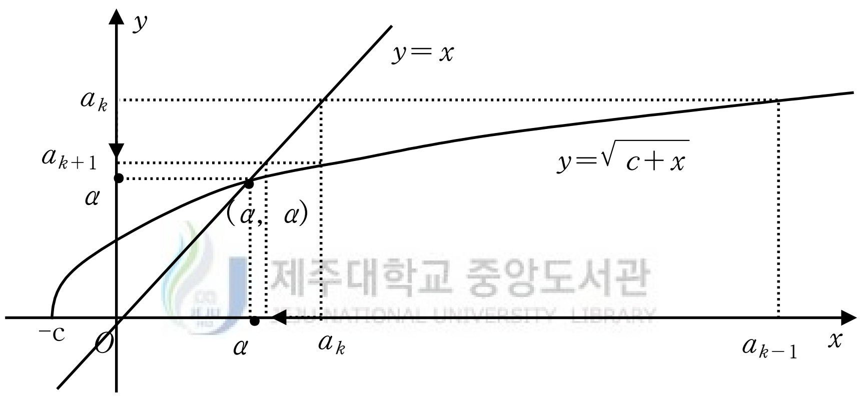
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$$

(2) $a>\alpha$ 일 때,

다음 그림에서 알 수 있듯이 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha<a_{n+1}<a_n\le a$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 유계이며 감소수열이므로 극한값을 갖는다.

실제로 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=\sqrt{c+x}$ 의 그래프에서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ 임을 직관적으로 이해할 수 있을 것이다.



따라서, 위의 (1), (2)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$$ ▣

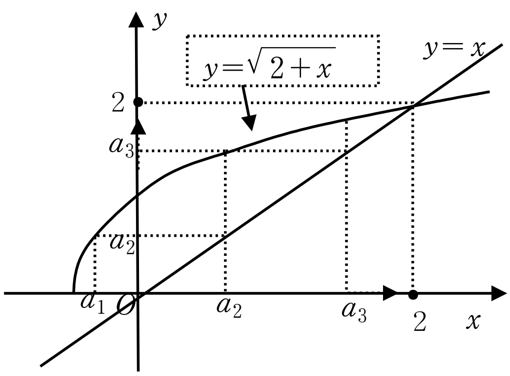
보기: $a_1=a$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴함을 보여라.

【풀이】 위의 T3에서 $c=2$인 경우이므로 수열 $\{a_n\}$은 위로 유계이고 (1) $-2\le a\le 2$ 일 때 단조증가 수열이고, (2) $a>2$ 일 때 단조감소수열이므로 극한값을 갖는다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 라 하면 $\alpha=\sqrt{2+\alpha}$ 에서 $\alpha^2-\alpha-2=0$

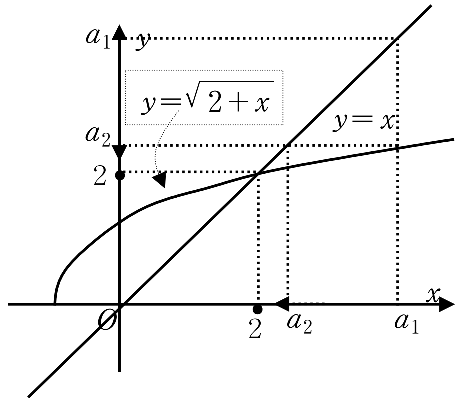
$$\therefore\ \alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=2$$

이를 다음과 같이 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=\sqrt{2+x}$ 의 그래프에서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보면 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$ 임을 직관적으로 추정해볼 수 있다.

(1) $-2\le a\le 2$ 일 때,



(2) $a>2$ 일 때



♣

다음에는 양수 $c>0$ 에 대하여 $\sqrt{c}$ 로 수렴하는 수열 $\{a_n\}$을 소개하고자 한다. 제곱근을 구하는 이 과정은 기원전 1500년경 메소포타미아에서 발견되었다.

T3. a_1은 $a_1>0$ 인 임의의 수이고, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{c}{a_n}\right)$, $(n\in N)$으로 정의하자. 이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{c}$ 임을 증명하여라.

【증명】 모든 $n\in N$에 대하여 $a_n>0$ 이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\ge\sqrt{a_n\cdot\frac{c}{a_n}}=\sqrt{c},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

따라서, $n\ge 2$ 일 때, $a_n\ge\sqrt{c}$ 이고, 또한,

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^{\,2}-c}{a_n}\right)\ge 0$$

즉, $\sqrt{c}<a_{n+1}<a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래로 유계인 감소수열이다.

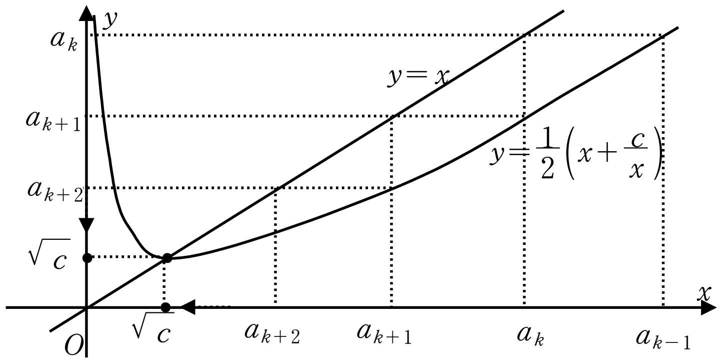
따라서, **정리2(단조수렴정리)**로부터 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ 라 하면 $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{c}{\alpha}\right)$ 가 성립한다. 즉, $\alpha^2=c$.

그런데, $a_n>0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\sqrt{c}$

이를 두 함수 $y=x$, $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{c}{x}\right)$의 그래프를 이용하여 기하학적 방법으로 수열

$\{a_n\}$의 각 항을 추적해보자.



오른 쪽 그림에서 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right)$ 의 교점이 $(\sqrt{c},\ \sqrt{c})$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{c}$$ ▣

보기: $a_1=\sqrt{2}$ 이고 $a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 일 때 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 $a_n<2$ 임을 증명하고, 이를 기하학적 방법으로 고찰해보자.

【증명】 $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$ $\therefore$ $a_1<a_2<2$

$a_k<a_{k+1}$ 이라 가정하면, $a_{k+2}-a_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_{k+1}}}-\sqrt{2+\sqrt{a_k}}<0$

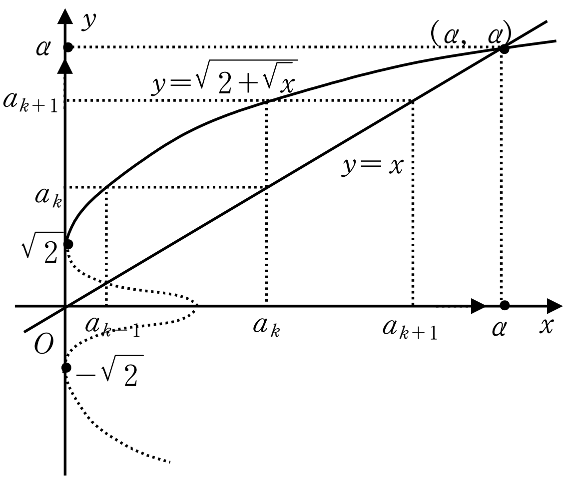
또한, $a_k<2$ 라고 가정하면 $a_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_k}}<\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$

따라서, 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 의하여

$$a_n<a_{n+1}<2$$

즉, 수열$\{a_n\}$은 위로 유계인 증가수열이므로 수렴한다.

오른쪽 그림과 같이 이를 두 함수 $y=x$, $y=\sqrt{2+\sqrt{x}}$의 그래프를 이용하여 기하학적 방법으로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 추적해보자.



위의 두 함수의 그래프의 교점을 $(\alpha,\ \alpha)$ 라 하면

$\sqrt{2}=a_1<a_2<a_3<\cdots$

$$<a_{k-1}<a_k<a_{k+1}<\cdots\to\alpha$$

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$

이 때, $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{\alpha}}$ 가 성립한다.

실제로 α의 값을 구하기 위하여 적당히 식을 변형하면

$$\alpha^4-4\alpha^2-\alpha+4=0 \quad (1<\alpha<2)$$

컴퓨터 프로그램 「Maple V」의 명령어 「>solve({x^4-4*x^2-x+4=0}, {x});」의 실행 결과 $x=\frac{1}{6}\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}+\frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}}-\frac{1}{3}$ 을 얻는다.

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{6}\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}+\frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\{316+12\sqrt{249}\}}}-\frac{1}{3}$ ♣

5. 코시수열

정의. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족하면 $\{a_n\}$을 **코시수열**(Cauchy sequence)이라고 한다.

"임의로 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $m,\ n\geq N$이면 $|a_m-a_n|<\varepsilon$ 이다"

정리1. 수렴하는 수열은 반드시 코시수열(Cauchy sequence)이다

【증명】 수열 $\{a_n\}$이 L에 수렴한다고 하자. 그러면 임의로 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 자연수 N이 존재하여 $|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(k\geq N)$ 이다. 따라서, $m,\ n\geq N$이면

$$|a_m-a_n|=|(a_m-L)+(L-a_m)|\leq|(a_m-L)|+|(L-a_m)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

따라서, $\{a_n\}$은 코시수열이다. ▣

보조정리. 수열 $\{a_n\}$이 코시수열이면 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

【증명】 $\varepsilon=1$에 대하여 자연수 N이 존재하여 $|a_m-a_n|\leq 1$ $(m,\ n\geq N)$ 이다. 그러면 특히

$$|a_m-a_n|\leq 1 \quad (m\geq N) \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

이다. $m\geq N$일 때,

$|a_m|=|(a_m-a_N)+a_N|\le|a_m-a_N|+|a_N|$ 이므로 (1)에 이용하면

$|a_m|\le 1+|a_N| \quad (m\ge N)$

을 얻는다. 지금 $M=\max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_{N-1}|, 1+|a_N|)$으로 두면

$|a_m|\le M \quad (m\in N)$

이다. 따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 유계이다. ▣

정리2. R에서 코시수열 $\{a_n\}$ 은 반드시 수렴한다.

【증명】 수열 $\{a_n\}$ 이 코시수열이므로 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $n, m\ge N$이면 $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ 을 만족하는 자연수 N이 존재한다. 부분수열 $\{a_{n_k}\}$은 L에 수렴하므로 $k\ge N_1$ 일 때 $|a_{n_k}-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ 을 만족하는 자연수 N_1 이 존재한다. $K\ge N_1$ 이고 $n_k\ge N$을 만족하는 자연수 K를 선택한다. $n\ge N$ 이면,

$$|a_n-L|=|(a_n-a_{n_K})+(a_{n_K}-L)|\le|a_n-a_{n_K}|+|a_{n_K}-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

이다. $\varepsilon>0$ 은 임의의 양수이므로, $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ 이다.

그러므로 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다. ▣

VI. 오일러(Euler)의 수열

1. 오일러 수 e의 역사적 고찰 및 정의

1) 이자율 계산에서의 무리수 e의 의미

어떤 양이 커질 때, 주어진 시간 동안에 커지는 양이 그것 자체의 크기에 비례하는 경우를 수학적으로 어떻게 해석할 수 있을까?

이런 경우는 이자율을 계산하는 경우와 비슷하다. 이자율을 일정하게 정해놓았을 때, 원금이 크면 클수록 원금에 대한 이자는 점점 더 커지게 된다. 단리계산에서는 원금이 일정하여 변하지 않지만 복리계산의 경우는 이자액이 원금에 가산되기 때문에 원금이 계속 불어나게 된다. 100만원을 적립하여 1년마다 연이율 $\frac{1}{10}$ (10%)의 복리법으로 계산할 때 10년 후의 원리합계 S는 100만 $\times\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$이 된다. 그런데 이런 방법으로 1년에 한 번씩 연말에 복리계산을 하는 것은 합리적이지 못하다. 첫째 1년 동안의 이자는 100만$\times\frac{1}{10}=10$만원 이므로 첫해 6개월 후에는 원금을 100만원$+5$만원$=105$만원 으로 볼 수 있고 후반 6개월 동안의 원금은 105만원으로 보고 계산하는 것이 합리적이다. 따라서 반년마다 $\frac{1}{20}$의 이자율로 20회(6개월 $\times$ 20회=12개월 $\times$ 10년)이자계산을 해야한다. 즉, 100만$\times\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}=100$만 $\times 2.654$로 계산해야한다. 그러나 6개월도 너무 긴 기간이므로 더욱 세분하여 1년을 10등분하고 $\frac{1}{100}$의 이자율로 계산하면 10년 후의 원리합계 S는 $S=100$만$\times\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=100$만 $\times 2.705$(원)이된다. 그러나 이것도 충분하지 않으므로 1년을 100등분, 1000등분, … 할 때 이에 각각 대응하는 이자율은 $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, … 이 되므로 각각의 경우 10년간의 총적립액은 다음과 같다.

$$S=100\text{만}\times\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=100\text{만}\times 2.717(\text{원})$$

$$S=100\text{만}\times\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=100\text{만}\times 2.718(\text{원})$$

……………

위에서 보면 n이 커질수록 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$도 커지기는 하되 그 커지는 정도가 점점 작아짐을 알 수 있다.

실제로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71818\cdots$이며 이 극한값을 e로 정의한다.

2) 오일러의 수 e의 수값

e의 정확한 수치적 표현에 접근할 수 있는 최선은 다음과 같은 유명한 계승급수이다.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\cdots$$

이 급수의 각 항의 값을 소수점아래 6째 자리까지만 계산하여 몇 개항을 더하여 보면 오른쪽과 같다.

	$1=1.000000$
	$\frac{1}{1!}=1.000000$
	$\frac{1}{2!}=0.500000$
	$\frac{1}{3!}=0.166667$
	$\frac{1}{4!}=0.041667$
	$\frac{1}{5!}=0.008333$
	$\frac{1}{6!}=0.001389$
	$\frac{1}{7!}=0.000198$
	$\frac{1}{8!}=0.000025$
+	$\frac{1}{9!}=0.000003$
	2.71828282

이런 과정이 근거하고 있는 계승 급수와 같이 이를 한없이 계속할 수 있다. 그러나 e의 소수 전개와 무한급수의 합으로서의 이 수에 대한 표현사이에는 차이점이 있다. 급수의 n째 항은 $\frac{1}{(n-1)!}$으로 예상할 수 있지만 소수전개에서는 소수점 아래 n째 자리에 나타날 숫자를 미리 알 수 있는 방법은 전혀 없다(무리성).

수 e에 관한 특이한 사실 중의 하나는 이것이 수직선 위에서 0으로부터 일정한 거리를 나타낸다는 것을 알고 있고 이것이 표시되는 점까지 원하는 만큼 정확하게 접근할 수 있지만 수학의 전통적인 도구들을 사용해서 정확하게 길이 e을 가진 선분을 실제로 작도할 수 없다는 사실이다(초월성).

이런 점에서 수 e는 유리수가 아니라 **무리수**라고 부르고 또한 **초월수**라 부르는 것이다.

오늘날 일반적으로 불리는 이름이 붙여지기 오래 전에 수 2.7182818$\cdots$은 수학적인 자연 로그의 밑으로 인정되었다. 상트 페테르부르크의 궁전에서 활동하고 있던 21세의 젊은 오일러(Euler, 1707-1783, 스위스)는 '**대포 사격에 관한 최근의 실험에 대한 고찰**(Meditation upon Experiments made recently on the firing of Cannon)'이라는 제목이 붙은 논문에서 알파벳을 이용한 이름을 처음으로 제한했다.

그는 "로그 값이 1이 되는 수를 e로 쓰자. · · ·"라고 썼다. 이런 이유로 해서 e

는 '오일러의 수(Euler's number)'로 종종 인용되고 그 위대한 수학자 이름의 첫 글자를 항상 연상시키고 있다.

오일러는 e를 소수점 아래 23째 자리까지 계산했는데, 이는 당시로서는 분명히 대단한 작업이었을 것이다.

$$e = 2.71828182845904523536028\cdots$$

※참고▶ 오일러는 허수(imaginary)에 대한 축어적인 이름으로 i를 처음으로 사용하였다. ◀

3) 오일러 수 e의 연분수 정의

오일러는 수 e를 무한 연분수를 사용해서 몇 가지 방법으로 간단히 표현했는데 그 하나를 소개해보면 다음과 같다.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cdots}}}}}}$$

따라서, 수 e를 다음 수열의 극한으로 정의하기도 한다.

$$2,\quad 2 + \frac{1}{1},\quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}},\quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}}},\quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4}}}},$$

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5}}}}},\quad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6}}}}}},\cdots$$

이 수열의 일반항을 a_n이라 할 때, 처음 몇 개의 항을 계산해보면 교대로 e보다 크고 작으면서 e에 점점 접근해 가고있음을 알 수 있을 것이다. 즉

$a_1 = 2 < e,$

$a_2 = 2 + \frac{1}{1} = 3 > e,$

$$a_3 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = 2.666 \cdots < e,$$

$$a_4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{8}} = 2 + \frac{8}{11} = 2.7272 \cdots > e,$$

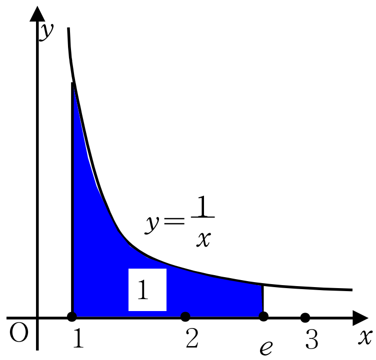
$$a_5 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{8}{15}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{15}{38}} = 2 + \frac{38}{53} = \frac{144}{53} = 2.7169 \cdots < e,$$

$$a_6 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{15}{24}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{48}{87}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{87}{222}} = 2 + \frac{222}{309} = 2.71877 \cdots > e,$$

....

4) 무리수 e의 해석적 정의 및 소수정리



함수 $y=\frac{1}{x}$과 x축에 대하여 $x=1$부터 오른쪽으로 넓이가 1이 되는 x축 위의 점을 수 e라고 정의한다.

여기서, 가우스(Gauss, 1777-1855, 독일)는 수 e와 자연수 집합에서 나타나는 素數사이에 밀접한 관계가 있다는 놀라운 사실을 발견하였다.

즉, 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 아래의 x축 위의 1과 x사이의 넓이와 소수의 느리고 고른 감소사이에 존재하는 관계에서 **소수정리**(prime number theorem)라 불리는 식

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log_e x}$$

을 추측하였다. 여기서, $\pi(x)$를 주어진 수 x보다 작은 소수의 개수를 나타낼 때

$\frac{\pi(x)}{x}$ 를 소수의 밀도라고 하면 가우스의 관찰결과는 다음 표에서 알 수 있다.

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x)}{x}$	$\frac{1}{\log_e x}$
10	4	0.4000000000	0.4342944819
100	25	0.2500000000	0.2171472410
1,000	168	0.1680000000	0.1447648273
10,000	1,229	0.1229000000	0.1085736205
100,000	9,592	0.0959200000	0.0868588964
1,000,000	78,498	0.0784980000	0.0723824137
10,000,000	664,579	0.0664579000	0.0620420688
100,000,000	5,761,455	0.0576145500	0.0542868102
1,000,000,000	50,847,534	0.0508475340	0.0482549424
10,000,000,000	455,052,512	0.0455052512	0.0434294482

위의 표에서 비교해보면 x의 값이 커져갈수록 소수의 밀도와 $\frac{1}{\log_e x}$의 값이 같아지는 정확도가 증가함을 볼 수 있다. 이와 같은 관계가 소수정리인데, 일반적으로 다음과 같은 방법으로 표현된다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log_e x}} = 1$$

이 정리의 증명은 극도로 어려워서 이를 추측한 가우스조차도 증명하지 못했다. 가우스의 마지막 제자인 리만(G.F.B. Riemann, 1826-1866)이 그의 나이 33세에 작성한 간결하면서도 훌륭한 논문에서 소수정리를 공략하는 개략적인 방법을 제시했으나 리만도 역시 이를 증명하지는 못했다.

1896년까지도 수학자들은 이 정리를 증명하지 못했다. 이 해에 이 정리는 프랑스 수학자 아다마르(Jacques S. Hardamard, 1865-1963)와 벨기에 수학자인 푸생(C.J. de la Vallee Poussin, 1866-1962)에 의해 독립적으로 증명되었으나 두 증명 모두 엄청나게 어렵고, 전문 수학자를 제외하면 어느 누구도 그 증명을 이해할 수 없다.

5) 자연로그의 밑 e

밑이 10인 로그보다 밑이 e인 로그가 수학적으로 더 자연스럽다는 사실은 다음의 한 예로서 이해할 수 있다. 아래의 도표에서 1과 겨우 $\frac{1}{100}$씩 차이나는 몇 개의 수들의 밑 e와 밑 10에 대한 로그 사이의 차이점을 조사해보자.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$\log_e(1+x)$	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0583
$\log_{10}(1+x)$	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253

위의 도표로부터 매우 작은 양의 수 x에 대하여 다음의 두 식

$$\log_e(1+x) \fallingdotseq x, \qquad \log_{10}(1+x) \fallingdotseq 0.43x$$

이 성립함을 예측할 수 있고, 또한 이는 확실하다.

따라서, 매우 작은 양의 수를 계산하기 위해서는 밑이 10인 사용로그를 사용하는 것보다는 밑이 e인 로그를 사용하는 것이 더 자연스럽다는 것을 알 수 있다.

로그의 밑으로 수 e에 대한 정의는 10을 밑으로 하는 로그에 대하여 일상생활로부터 유리되어 자연수와의 성격을 달리하고 있으며, 수 e가 수학적으로 자연스럽다는 대부분의 이유를 본 논문에서 밝히기에는 너무 전문적이지만 위의 한 예로서만 보아도 수 e는 자연자체의 일부로서 가장 친밀한 수이다. 로그 계산은 원래 상용로그를 사용했는데 이는 자연스럽게 보일지는 모르나 분석적인 연구를 하는 수학자나 미적분학과 관련된 모든 종류의 계산을 하는 공학자들에게는 10보다 e를 로그의 밑으로 사용하는 것이 훨씬 더 자연스럽고, 이런 이유에서 e를 **자연로그의 밑**이라 부른다.

2. 오일러의 수 e의 존재성과 무리수

정리1. 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

【증명】 이항정리에 의하여

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^n+\frac{n}{1!}\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1+\frac{n(n-1)}{2!}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 1^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2}{(n-1)!}\cdot 1^1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

마찬가지로

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1^{n+1}+\frac{(n+1)}{1!}\cdot 1^{n}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1}+$$

$$\frac{(n+1)n}{2!}1^{n-2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}1^{n-2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{3}+\cdots$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2}{n!}\cdot 1^{1}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n}+$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

따라서, $a_n < a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

한편, $3!>2^2$, $4!>2^3$, $5!>2^4$, $\cdots$, $n!>2^{n-1}$ 이므로

$$a_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \cdots\ +\frac{1}{n!}\ <1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n}}{1-\frac{1}{2}}=3-(\frac{1}{2})^{n-1}<3$$

즉, 단조증가수열이면서 위로 유계이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다. ▣

위의 정리에 의하여 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$은 수렴하므로 이 수열의 극한값을 e로 나타낸다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

$$S_n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

이므로 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$는 수렴한다.

정리2. $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

【증명】 $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, $T_n=(1+\frac{1}{n})^n$로 두면 위의 정리의 증명에서 $T_n \le S_n$이다. 따라서 5장 2절 **정리2, 정리3**에 의하여

$$e=\lim_{n\to\infty}T_n \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (A)$$

이다. 다음에 $n \ge m$이라면

$$T_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$$

이다. m을 고정시키고 $n\to\infty$로 하면

$$\lim_{n\to\infty}T_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

이므로 $S_m \le \lim_{n\to\infty}T_n$이다. 따라서 $m\to\infty$로 하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \le \lim_{n\to\infty}T_n=e \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (B)$$

이다. 그러므로 정리는 두 식 (A)와 (B)로부터 성립함을 알 수 있다. ▣

급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$이 수렴하는 속도는 다음과 같이 평가된다. S_n이 이미 기술한 바와 같이 같은 의미를 갖는다고 하면,

$$\begin{aligned} e-S_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\}=\frac{1}{n!\,n} \end{aligned}$$

이므로 $0<e-S_n<\frac{1}{n!\,n}$

정리3. e는 무리수이다.

【증명】 e를 유리수라 하고, $e=\frac{p}{q}$, (p, q는 자연수)라 놓으면 위 식으로부터

$$0<q!(e-S_q)<\frac{1}{q} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (A)$$

이고 가정에 의해 $q!e$는 자연수이다. 또

$$q!S_q = q!(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!})$$

도 자연수이므로 $q!(e-S_q)$는 자연수이다. $q \geq 1$이므로 위의 식 (A)는 0과 1 사이에 자연수가 있음을 나타내어 모순된다. ▣

※참고▶ 위의 증명과정에서 $2 < e \leq 3$ 임을 안다. 실제로 e의 값은 대략 $e = 2.718281828459\cdots$ 이며 이것을 자연대수의 밑(base)이라고 한다. ◀

3. 극한값 e의 기하학적 고찰(미분계수에 의한)

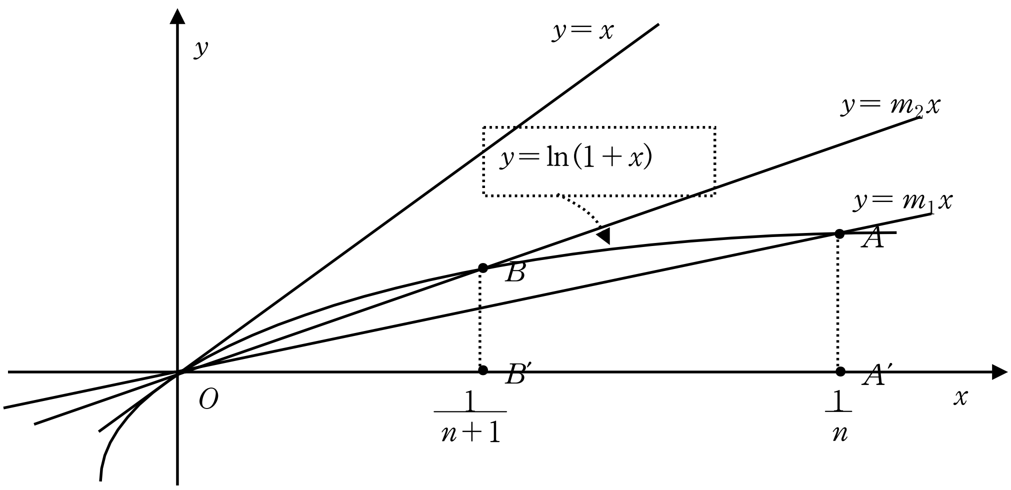
오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 극한값에 대하여 미분계수의 정의에 의하여 기하학적 측면에서 살펴보도록 하자.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \ln a_n$라 하면

$$b_n = \ln a_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

함수 $y = \ln(1+x)$의 그래프 위의 한 점을 $A\left(\frac{1}{n},\ \ln(1+\frac{1}{n})\right)$라 하면

$n \to \infty$일 때, $\frac{1}{n} \to 0$이므로 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 원점에서 함수 $y = \ln(1+x)$에 그은 접선 $y = x$에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



즉, $n \to \infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기 $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to y'_{x=0}=1$가 된다.

따라서, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n = \ln\left\{ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \right\} = 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

두 그래프 $y=m_1x$와 $y=\ln(1+x)$ 및 $y=m_2x$와 $y=\ln(1+x)$의 교점 $A\left(\frac{1}{n},\ \ln(1+\frac{1}{n})\right)$, $B\left(\frac{1}{n+1},\ \ln(1+\frac{1}{n+1})\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면

$$m_1 = \frac{AA'}{OA'} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}, \quad m_2 = \frac{BB'}{OB'} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}$$

$n \geq 1$ 일 때, $m_1 < m_2 < 1$ 이면

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} < \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} < 1 \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{n})^n < \ln(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < 1.$$

즉, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e$

그런데, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 이므로 4장 2절 **정리4**의 스퀴이즈 정리(Squeeze Theorem)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

4. 오일러의 수열과 유사한 수열

수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$은 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$과 다르게 감소수열이고 그 극한값이 e임을 다음의 정리에서 알 수 있다.

정리1. 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$은 수렴하고 그 극한값은 e이다.

【증명】 $0 \le a < b$ 이면

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + b^{n-3}a^3 + \cdots + ba^{n-1} + a^n$$

$$> a^n + a^n + a^n + a^n + \cdots + a^n + a^n = (n+1)a^n$$

$$\therefore\ b^{n+1} - a^{n+1} > (b-a)(n+1)a^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a = 1+\frac{1}{n+1}$, $b = 1+\frac{1}{n}$ 을 대입하면

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right)(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right)(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right)(n+1)\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots (1)$$

또한, $\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0$$

$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2$이므로

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \cdots\cdots\cdots (2)$$

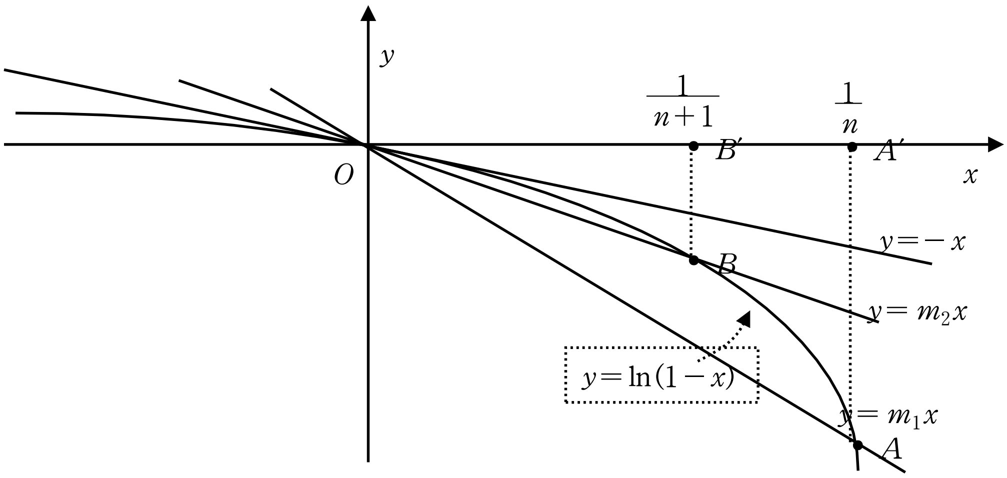
위의 식 (1), (2)에서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

따라서, $a_n > a_{n+1} > 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래로 유계이고 동시에 감소수열이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$ ▣

보기1: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ 임을 그래프를 이용하여 알아보자.

【증명】 함수 $y=\ln(1-x)$ 의 그래프 위의 두 점 $A\left(\frac{1}{n},\ \ln(1-\frac{1}{n})\right)$, $B\left(\frac{1}{n+1},\ \ln(1-\frac{1}{n+1})\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 A', B'이라 하면



두 직선 $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ 방정식을 각각 $y=m_1x$, $y=m_2x$라 하면

$$m_1=\frac{AA'}{OA'}=\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}},\quad m_2=\frac{BB'}{OB'}=\frac{\ln(1-\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}$$

$n\geq 1$ 일 때, $m_1<m_2<-1$ 이므로 $\dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}<\dfrac{\ln(1-\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}<-1$

따라서, $\ln(1-\frac{1}{n})^n<\ \ln(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}<-1$ 즉, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<e^{-1}$

이것은 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$이 위로 유계인 증가수열임을 의미하므로 극한값을 갖는다.

그런데, 위의 그림에서 $n\to\infty$일 때, $\frac{1}{n}\to 0$이므로 직선 $\overleftrightarrow{OA}$는 원점에서 함수 $y=\ln(1-x)$에 그은 접선 $y=-x$에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $n\to\infty$일 때, 직선 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기는 $\dfrac{AA'}{OA'}=\dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\to y'_{x=0}=-1$가 된다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln(1-\frac{1}{n})^{n}=\ln\left\{\ \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}\right\}=-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}\qquad\clubsuit$$

보기2: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ 을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}$ 및 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}$을 구하여 보자

【풀이】 $n=am$ 이라 하면 $n\to\infty$일 때 $m\to\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{am}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{a}=e^{a}$$

마찬가지로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{abm}=\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{ab}=e^{ab}\qquad\clubsuit$$

5. 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}$의 극한값 e의 추정

수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}$의 극한값 e를 추정하기 위하여 $\phi_{\alpha}(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$의 성질에 대하여 다음과 같이 조사하고자 한다.

$x>0$ 에 대하여 $\phi_{\alpha}(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}=e^{(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$라 하고

$$\psi_{\alpha}(x)=\{\ln(x+1)-\ln x\}-\frac{x+\alpha}{(x+1)x}$$

로 두면 $\phi_{\alpha}{}'(x)=\phi_{\alpha}(x)\cdot\psi_{\alpha}(x)$임을 알 수 있다. $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ 라 하면, 테일러 정리의 나머지에 의하여 다음 식을 만족하는 적당한 수 $y=y_{x}\in(x,\ x+1)$ 가 존재한다.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}<f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{3y^{3}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{3x^{3}}$$

여기서 함수 $\phi_{\alpha}(x)$의 증가, 감소상태를 다음의 두 경우로 나누어 추정해보자.

(1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}<f(x)=\ln(x+1)-\ln x$, (2) $f(x)=\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^2}$

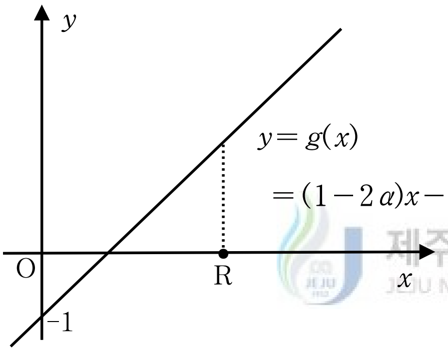
경우(1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}<f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ 일 때

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{x+\alpha}{x(x+1)}<f(x)-\frac{x+\alpha}{x(x+1)}=\psi_\alpha(x)$

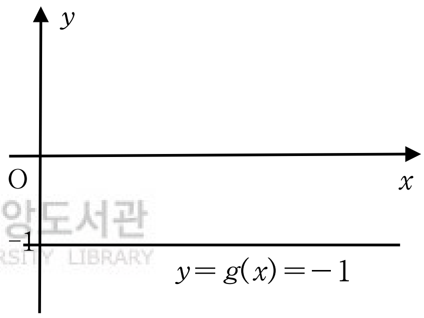
그런데, $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{x+\alpha}{x(x+1)}=\frac{(1-2\alpha)x-1}{2x^2(x+1)}$ 이므로

$g(x)=(1-2\alpha)x-1$ 라 할 때 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

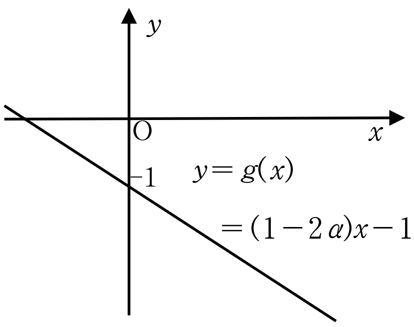
① $\alpha<\frac{1}{2}$, 즉 $1-2\alpha>0$ 일 때



② $\alpha=\frac{1}{2}$, 즉 $1-2\alpha=0$ 일 때



③ $\alpha>\frac{1}{2}$, 즉 $1-2\alpha<0$ 일 때



①, ②, ③의 그래프 개형에서 알 수 있듯이, $\alpha<\frac{1}{2}$ 일 때, 적당한 실수 R 이 존재하여 $x>R$ 인 실수 x 에 대하여 $g(x)=(1-2\alpha)x-1>0$ 이고,

이 때 $\frac{2x-1}{2x^2}>\frac{x+\alpha}{(x+1)x}$

따라서, $\psi_\alpha(x)=f(x)-\frac{x+\alpha}{(x+1)x}>0$ 인 실수 R 이 존재하고, $R<x$ 인 실수 x 에 대하여 $\phi_\alpha(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 는 증가한다.

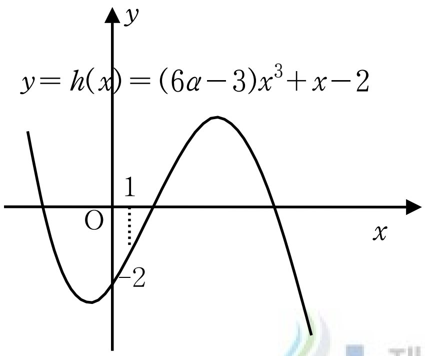
경우(2) $f(x) = \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^2}$ 일 때

$\psi_\alpha(x) = f(x) - \frac{x+\alpha}{x(x+1)} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{x+\alpha}{x(x+1)}$

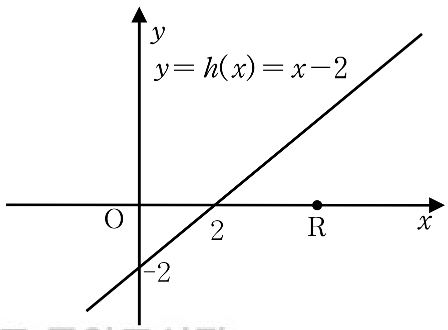
그런데, $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{x+\alpha}{x(x+1)} = -\frac{(6\alpha-3)x^3+x-2}{6x^3(x+1)}$ 이므로

$h(x) = (6\alpha-3)x^2+x-2$ 라하고, $y = h(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.

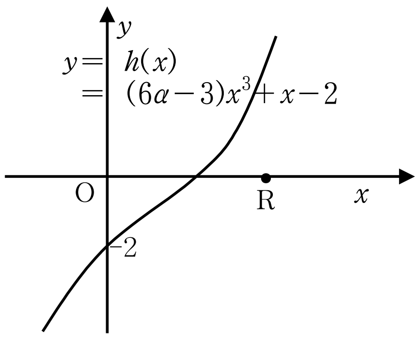
① $\alpha < \frac{1}{2}$, 즉 $6\alpha-3<0$일 때



② $\alpha = \frac{1}{2}$, 즉 $6\alpha-3=0$일 때



③ $\alpha > \frac{1}{2}$, 즉 $6\alpha-3>0$일 때



①, ②, ③의 그림에서도 알 수 있듯이, ② $\alpha \geq \frac{1}{2}$ 일 때에만 적당한 실수 R이 존재하여

$x > R$ 인 실수 x에 대하여

$h(x) = (6\alpha-3)x^2+x-2>0$ 이므로

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{x+\alpha}{x(x+1)} < 0$$

따라서, $\psi_\alpha(x) = f(x) - \frac{x+\alpha}{(x+1)x} < 0$ 인 실수 R이 존재하고, $R < x$ 인 실수 x에 대하여 $\phi_\alpha(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$는 감소한다.

위의 논의의 결과로부터 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리3. (1) $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 일 때, $\{\phi_\alpha(n)\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}$는 e에 수렴하는 증가수열이다.

(2) $\frac{1}{2}\le\alpha$일 때, $\{\phi_\alpha(n)\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}$는 e에 수렴하는 감소수열이다.

컴퓨터 프로그램 「Mapple V」의 명령어 「>evalf(seq((1+1/n)^(n+i), n=1..1000));」에 i= 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 을 대입하여 실행결과에 의하여 n의 값 1 에서 1000 까지 $\phi_0(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$, $\phi_{\frac{1}{4}}(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+\frac{1}{4}}$, $\phi_{\frac{3}{4}}(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+\frac{3}{4}}$, $\phi_1(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}$의 값을 산출하여 그 값의 일부를 다음과 같이 표로 작성하면 **정리3**을 확인할 수 있다.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{4}}$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{3}{4}}$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	2.000000⋯	1	2.378414⋯	1	3.363585⋯	1	4.000000⋯
2	2.250000⋯	2	2.490034⋯	2	3.049656⋯	2	3.375000⋯
3	2.379370⋯	3	2.547128⋯	3	2.941170⋯	3	3.160493⋯
4	2.441406⋯	4	2.581472⋯	4	2.886174⋯	4	3.051757⋯
5	2.488320⋯	5	2.604363⋯	5	2.852936⋯	5	2.985984⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	2.593742⋯	10	2.656287⋯	10	2.785937⋯	10	2.853116⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	2.653297⋯	20	2.685859⋯	20	2.752187⋯	20	2.785962⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	2.794813⋯	100	2.711550⋯	100	2.725074⋯	100	2.731861⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	2.711517⋯	200	2.714900⋯	200	2.721678⋯	200	2.725074⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	2.715568	300	2.716016⋯	300	2.720546⋯	500	2.72099⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	2.716923⋯	500	2.716925⋯	500	2.719640⋯	1000	2.719640⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	e	∞	e	∞	e	∞	e

VII. 결　　론

수학교과의 교수-학습시에 수학과목에 대한 학생들의 흥미를 유발시켜 학생들로 하여금 자기 주도적 학습력을 향상시켜 준다는 것은 교수-학습 현장에서 학습지도에 임하는 교사들의 막중한 책임이기도 하다. 그러므로 교사들은 교과서를 중심으로 한 획일적 교수-학습 방법에서 탈피하여 학생들에게 새롭고 창의적인 문제해결의 정보 제공을 위한 부단한 노력이 요구된다.

본 논문은 이러한 관점에 중점을 두고 고등학교 수학교과서의 수열 단원을 중심으로 다음과 같이 각 장별로 내용을 세분화하여 연구되었다.

제Ⅱ장에서는 현행 교과서의 수열단원에 대한 학습내용을 조사·분석하여 교수-학습 방법상 개선되어야 할 문제점을 제기하였다.

제Ⅲ장에서는 첫째 수열의 유한합의 유도과정 전개에서 수년 동안 답습하여 응용되고 있는 대수적 방법과 수학적 귀납법으로부터 탈피하여 도형에 의한 기하학적 방법으로 접근하였으며, 둘째 학생들로 하여금 수열이 갖고있는 특성을 발견하게 하여 창의적 해결방법을 스스로 찾을 수 있는 문제를 예로 제시하였다. 따라서 여기서는 선수학습이 잘 이루어지지 못한 학생들에게도 적극적인 학습동기 유발이 기대된다.

제Ⅳ장에서는 첫째 계차수열의 정의를 분명히 하고, 이를 이용하여 학생들이 자주 접하고 있는 점화식을 유형별로 정리하였으며, 둘째 계차수열의 성질을 이용하여 점화식의 유형에 따른 일반항 유도과정을 체계화하였을 뿐만 아니라 이들의 일반항에서 수열의 수렴·발산 관계를 정리하였으며 동시에 이 관계를 쉽게, 직관적으로 이해할 수 있도록 함수의 그래프를 이용하였다. 셋째 수열이 수렴하는 경우 그 극한값을 구하는 과정에서 점화식의 특성방정식을 이용하였으므로 누구나 쉽게 극한값을 구할 수 있다는 자신감을 갖게 될 것으로 기대된다.

제Ⅴ장에서는 수열의 극한에 대한 중요한 개념들로서 이를 함수의 그래프와 연계하여 논리성과 직관성을 동시에 추구하면서, 첫째 수열이 자연수의 집합 N에서 실수의 집합 R로의 함수 $f: N \to R$라는 정의에 따라 증가·감소·진동하는 수열을 함수와 연계하여 이를 정리하였으며 동시에 이를 엄밀한 논리적 사고 과정을 통하여 수렴·발산에 대한 정의를 내린 다음 이를 체계적으로 정리하여 증명하였다. 둘째 함수의 그래프와 연계한 직관적 사고를 통하여 수열의 수렴조건에 대하여 언급하였으며, 또한 이를 쉽게 이해할 수 있도록 하였다. 셋째 유계인 단조수열의 수렴성을 이용하여 일반항의 식을 모르고 수열의 수렴·발산을 판정할 수 있는 방법을 제시하였으며 동시에 점화식

의 특성방정식을 이용하여 이들의 극한값을 구하는 방법을 제시하였다.

여기서 제시되고 있는 일련의 사고 과정의 결과는 고등학교 교과서에서 소개되는 모든 형태의 수열을 초월하여 여러 가지 특수한 형태로 주어지는 수열의 수렴·발산 관계를 판정할 수 있을 뿐만 아니라 수열의 극한값을 쉽게 구할 수 있도록 변화된 교수-학습 내용을 제공하게 됨으로써 학생들로 하여금 자기 주도적 학습력이 향상될 것으로 기대된다.

제Ⅵ장에서는 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 극한값인 무리수 e에 대하여, 첫째 오일러의 수 e가 발견되고, 실용화되면서 수학분야 뿐만 아니라 모든 분야에서 e의 중요성이 부각되기까지의 역사적 고찰을 통하여 e의 정의 및 값과 표현방법 등을 조사하여 소개하였다. 둘째 오일러의 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$의 증가상태, 유계성 등의 특성을 조사하고 이 수열이 논리적으로 수렴함을 증명하고, 또한 함수 $\log_e(1+x)$의 그래프를 이용하여 이 극한값이 e임을 밝혀 보았다.

따라서 지금까지는 막연하게 자연로그의 밑으로만 피상적으로 알고 있던 오일러의 수 e가 우리들에게 자연스럽고 친숙한 수임을 알게되어 보다 더 흥미를 갖게될 뿐만 아니라 e와 관련된 단원 학습에 효과적인 교수-학습이 이루어 질 것으로 기대된다.

위와 같은 연구와 조사를 통하여 수열의 일반항과 분포 상태, 극한 문제 등을 중심으로 수열의 특성, 복잡하게 주어진 수열의 분류를 통한 일반항의 식 등에 대하여 명확히 알 수 있고, 중요 수열의 점화식, 극한과 유한수열의 합을 구하는 기하학적 표현을 통하여 수열의 효과적인 교수-학습방법을 제시하고 있다. 아울러 논리적 사고와 직관적 사고의 영역을 넓히고 수학의 유용성과 생활과의 관련성을 이해할 수 있다. 따라서 고등학교 교과서의 지도상에서 수열들의 애매 모호한 성질이나 특성을 분명히 파악할 수 있어서 선행학습이 이루어지지 않은 학생들을 대상으로 하는 수준별 수업뿐만 아니라 특별활동에 편성되고 있는 수학반 운영 등 수열단원과 관련한 모든 교수-학습시에 효과적이고 가치 있는 참고자료가 될 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] 강옥기외, 고등학교 수학Ⅰ, 두산동아, 1997. 3

[2] 고등부 세미나 1팀, 수학사랑, 수학사랑 가을호(통권 제9호)

[3] 권택연외, 해석학, 문운당, 1968. 3.

[4] 박수은, 수열의 합 구하기의 방법에 관한 연구, 석사학위 논문, 충북대학교, 1990. 12.

[5] 양영오, 해석학, 청문각, 1995. 8.

[6] 윤옥경외, 고등학교 수학Ⅰ, 중앙교육진흥연구소, 1998. 3.

[7] 이광수, 점화식과 극한, 한샘출판사, 1994. 3.

[8] 정몽하외, 고등학교 수학Ⅰ, 형설출판사, 1996. 3.

[9] 하광철외, 고등해석학, 문운당, 1967. 3.

[10] C. Reid, (허민 역), 영부터 무한대까지, 경문사, 1997. 10.

[11] J.Davis · R,Hersh (양영오 · 허민 역), 수학적 경험, 경문사, 1995. 12.

[12] Eberhard L. Stark, Application of a Mean Value Theorem for Integrals to Series Summation, Monthly Amer. math. Soc, 85 (1978), p482

[13] Bart Braden, Calculating Sum of Infinite Series, Monthly Amer. math. Soc, 99 (1992), pp. 649-655

<Abstract>

Geometrical approach to the finite sum and the limit of sequence and Euler's sequence

Lee Dong-nam

Mathematics Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by Professor Yang Youngoh

In the current curriculum of high school, the developing process of the content in the sequence units is stated by the intuitional and superficial description and solved by using only the algebraical solution. Also, since an irrational number "e" is introduced as the limiting value $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, and the learning and teaching procedure is done without the grasp of the clear definition of "e", most students are losing interest in the units concerning "e".

In this paper, the geometrical solution to the content of "e" using the geometrical figure and the graph of function is used in order to persue the logicality and immediacy and to make the systematic and effective learning-teaching procedure in answering the question of the finite sum of sequence and of the limit.

In addition, an irrational number "e" is emphasized as the familar number to the students through historical surveying, and it is proved logically that the limiting value of the sequence $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ is equal to "e" using the graph of function $y=\log_e(1+x)$.