碩士學位論文

圓周率 π의 計算 方法과 數學敎科 課程에서 槪念 指導에 관한 硏究

指導敎授 梁 永 五

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

高 成 武

1998年 8月

圓周率 π의 計算 方法과 數學教科 課程에서 概念 指導에 관한 研究

指導教授 梁 永 五

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

1998年 6月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 高 成 武

高成武의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1998年 7月 日

審査委員長 印
審 査 委 員 印
審 査 委 員 印

목 차

抄錄

제주대학교 교육대학원 수학교육 전공

고 성 무

초등학교에서는 실험적인 방법에 의하여 직관적으로 취급함으로써 π =3.14라는 고정관념에 빠져들고 있으며 중학교에서는 π =3.141592… 라는 주입식 교육을 하고 있는 실정이다. 이에 본 논문에서는 원주율에 관해 수학사적 고찰과 원주율의 근사값을 구하는 방법과 π 의 여러 가지 표현에 대해 정리하였다. 또한 π 에 관련된 인터넷 사이트를 조사하였다.
그리고 중등학교에서 교육되고 있는 원주율에 대한 내용을 효과적으로 지도하기 위한 방안을 제시하였다.

지 도 교 수 : 양 영 오

Ⅰ. 서 론

수의 개념에 대한 구체적인 발달과정은 알려지지 않고 있으나 수학의 발달과정을 추정해 볼 수 있는 자료들이 나타나기 시작한 것은 B.C. 2000년 이후의 일이었다. 인류는 먼저 간단한 수를 세는 것을 터득하게 되었을 것이고, 오랜 시간이 경과한 후에는 좀 더 복잡하고 어려운 수에 대한 인식을 갖게 되었을 것이다.

수학사를 돌이켜 볼 때 많은 수학자들의 관심을 끈 문제는 허다하지만, 그 중에서도 특히, "원주율 π"를 계산하는 문제는 오랜 세월에 걸쳐서 수학자들의 연구 대상으로 부각되었던 것들 중의 하나다. 수학의 3대 난문 중의 하나는 한 원과 면적이 같은 정사각형을 자와 컴퍼스만으로 작도하는 문제이다. 이 문제를 해결하기 위해 원의 지름과 원주의 비인 원주율를 연구하게 되었고, 이로 인해 수학이 발달할 수 있었다고 해도 과언이 아니다.

스위스의 수학자인 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)가 1737년에 저서「무한 급수에 관한 다양한 관찰」둘레 "$\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\sigma$(페리헤레이아)"의 첫문자 π를 따서 원주율로 표시함으로써 일반적인 기호가 되었다. π의 발달과정을 고찰해 보면 B.C. 2000년 경부터 이미 바빌로니아인들은 $\pi = 3\frac{1}{8}$, 이집트인들은 $\pi = 4 \cdot (\frac{8}{9})^2 = 3.16049\cdots$이라고 알고 있었다. 또 이들은 단순한 계산뿐 아니라 π의 존재와 의미에 대해서도 상당히 알고 있었을 것으로 추정된다. 그 후 아르키메데스의 의해 π값을 계산하는 최초의 과학적인 방법이 도입되었다. 즉 정다각형을 원에 내접시키고 그 변의 수를 점차 크게 함으로써 원주의 길이를 계산하게 되었다. 최근에는 컴퓨터의 발달로 놀라울 정도의 속도로 근사값을 계산할 수 있게 되었다.

본 논문에서는 역사적 사실을 바탕으로 하여 원주율에 관해 수학사적으로 고찰하고 원주율의 근사값을 구하는 방법을 살펴보며, π의 여러 가지 표현과 π에 관련된 인터넷 사이트를 소개하고자 한다. 특히 초·중등학교에서 교육되고 있는 원주율에 대한 내용을 효과적으로 지도하기 위한 방안도 제시해 보고자 한다.

Ⅱ. 원주율 π값에 관한 역사적 고찰

1. 그리스 3대 작도 문제

그리스인들의 3대 작도(불가능) 문제는 다음과 같다([11]).

① 정육면체 배적 문제 : 정육면체의 한 변의 길이가 주어졌을 때, 그 부피를 2배로 하는 정육면체의 한 변의 길이를 작도에 의해서 구하라.
② 각의 3등분 문제 : 임의의 주어진 각의 3등분선을 작도하라.
③ 원적 문제 : 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하라.

여기서 말하는 작도란 서술한 바와 같이 '자와 컴퍼스를 유한회 사용한 작도'을 의미한다. 멋대로 아무것이나 그리면 된다는 것이 아니고 매우 한정된 요청으로 되어있는 점에 유의하기 바란다. 이들 3대 작도 문제는 2천수백 년의 긴 세월에 걸쳐서 수많은 수학자들을 괴롭힌 끝에 겨우 19세기가 되면서부터 해결되었다. 그것도 풀리지 않는 것이 증명되었다라는 형태로 해결할 수 있었다. 아무튼 고대의 이 3대 난문을 풀기 위한 끊임없는 노력 덕분에 새로운 수학의 발전과 창조가 이루어졌다.

정확히 말하면 ①과 ②의 불가능성을 완체르(P.L Wantzel, 1814~1848)가 보여준 것이 1837년이고, 린데만(Lindemann, 1852~1848)에 의해서 ③의 불가능성이 증명된 것은 1882년의 일이다.

가. "각의 3등분각"의 등장

세상에는 어떠한 일에도 반드시 이의 신청을 하지 않고는 못견디는 사람이 있다. 이는 아마추어 수학팬의 세계에도 예외는 아니다.

어떤 사람은 '풀리지 않는다는 것을 알았다고 해서 그 문제가 풀린 것으로 되지는 않는다. 풀리지 않는 것을 알고 있기 때문에 풀려고 하는 것이고 또한 풀만한 가치가 있는 것이다'라고 생각하였다.

나. '3대 작도 문제는 불가능!'의 증명

앞에서 말한 것처럼 3대 작도 문제는 모두 불가능하다는 것이 증명되어 있다. 증명의 요점을 간단하게 해설해보자.

우선 '컴퍼스와 자를 사용해서 작도하라.'라는 요청을 대수의 말로 번역해 둔다. 컴퍼스는 원을, 자는 직선을 작도하는 도구이다. 물론 사용방법에 따라서는 창의적인 고안을 하여 별개의 용도로도 사용할 수 있으나 그러한 사용법은 금지한다. 수학도 일종의 게임이기 때문에 게임의 룰은 지키지 않으면 안된다. 그래서 이 룰에 따르는 이상, 작도에서 얻어지는 점의 위치는 원과 원, 원과 직선, 직선과 직선의 교차점으로서 밖에 나타나지 않는다. 또한 선분의 길이라 해도 그래서 얻어진 점끼리의 최단거리로서 밖에는 나오지 않는다.

이것을 방정식의 말로 바꿔 말하면 원과 직선을 나타내는 각종 방정식을 연립시켜서 점의 위치를 구하고 점끼리의 길이는 거리의 공식으로 구하는 것이 된다. 이렇게 해서 얻어지는 값은 방정식의 각 계수에 가감승제와 제곱근을 유한회 사용해서 만들어지는 수뿐이다. 참으로 개략적인 견해이나 당분간은 이것으로 충분할 것이다.

(1) 예컨데 델리안 문제(Delian problem) 즉, 정육면체 배적 문제이다. 최초에 주어진 정육면체의 한 변의 길이를 a, 구하고자 하는 부피가 2배인 정육면체의 한 변의 길이를 x라고 하자. 그러면 a와 x와의 관계는 다음과 같은 간단한 식으로 나타낼 수 있다.

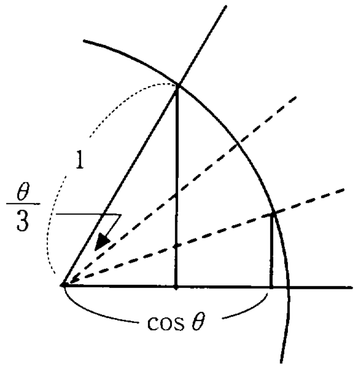
$$x^3 = 2a^3,\ \ a>0, x>0 \qquad \therefore x = 2^{\frac{1}{3}}a$$

결국 길이가 a의 $2^{\frac{1}{3}}$ 배인 선분의 컴퍼스와 자로 작도될 수 있다면 이 문제는 풀리게 된다. 여기서 $2^{\frac{1}{3}}$란 세제곱근해서 2가 되는 수를 말하는 것으로 '2의 세제곱근 '이라 부른다. 그런데 앞에서 확인해 둔 것처럼 컴퍼스와 자로 그을 수 있는 선분의 길이는 가감승제와 제곱근을 유한회 사용해서 만들어질 수 있는 수뿐이고 이 목록 속에는 세제곱근을 사용한 수는 포

함되어 있지 않다. 즉 a의 $2^{\frac{1}{3}}$배가 되는 수를 길이로 갖는 선분은 작도 불가능이라는 결론이 된다.

(2) 각의 3등분에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다. 이 경우 문제는 <임의의 각을 3등분하라>였기 때문에 작도할 수 없는 실례를 하나 들면 '임의의 각'에 관한 명제 바로 그것을 부정하는 데 충분하다.

반례는 아무것이나 좋으나 물론 90 ° 나 120 °$=\theta$ 로 둔다



<그림 1>

오른쪽 그림으로부터 길이 $\cos\frac{\theta}{3}$의 선분이 작도될 수 있으면 된다. 3배각 공식

$\cos 3\frac{\theta}{3} = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$ 및

$\cos\theta = \cos 120° = -\frac{1}{2}$ 로부터

$4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} = -\frac{1}{2}$ $\cos\frac{\theta}{3} = x$ 라고 두면 x 는 $4x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 실수해. 그런데 이 풀이는 가감승제와 제곱근 유한회 사용하는 것만으로는 나타낼 수 없다. 따라서 120 °의 3등분선은 작도할 수 없다.

135 °처럼 바로 3등분할 수 있는 예로는 곤란하다. 여기서는 흔해 빠진 각이라는 것으로 120 °를 예로 들었다. 이와 같이 정육면체 배적 문제와 각의 3등분 문제와는 본질적으로 같은 것이다. 그 요점은 구하고자 하는 수가 세제곱근을 포함하고 있는 것에 있었다.

(3) 그러면 세 번째의 원적 문제는 어떠할까. 실은 이것 특히 어렵다. 해결이 반세기 가까이나 그 밖의 두 문제보다 늦어진 것도 무리는 아닌 이야기였던 것이다. 원적문제에서는 원주율 π가 난관이다. 원적문제를 방정식으로 고쳐 써 보자. 주어진 원의 반지름을 그것과 같은 넓이를 갖는 구하고자 하는 정사각형의 한 변의 길이를 x 로 한다. 그러면 이 관계는

$$\pi r^2 = x^2 \quad r>0,\ x>0 (\text{단, } \pi \text{는 원주율})$$

라고 하는 2차방정식으로 나타낼 수 있다. 단순히 이것을 풀면

$$x = r\sqrt{\pi}$$

확실히 계수의 가감승제와 제곱근만을 사용하고 있다. 세제곱근은 그림자도 형태도 없다. 이것은 컴퓨터와 자로 작도할 수 있을 것이라고 생각하고 싶은 바이지만 이것이 전연 불가능한 것이다. 왜 그럴까? 문제는 원주율 π에 있다. 조금 전에는 작도가능하기 위한 조건은 필요한 값을 구하기 위해 세운 방정식의 풀이가 그 계수의 가감승제와 제곱근을 유한회 사용해서 표시되어 있지 않으면 안된다고 말하고, 특히 '가감승제'이하의 부분('제곱근을 유한회')을 강조하였다. 그러나 만일 그 계수가 처음부터 세제곱이 되는 수로 설정되어 있었다고 하면 어떠할까?

그렇다. 앞의 두 문제도 작도가능하게 되어 3등분가들을 미치도록 기쁘게 할 것이다. 결국 앞에서는 엄밀한 표현은 굳이 하지 않은 것인데 사실인즉 방정식을 생각할 때에는 계수를 어떠한 범위로 생각하는 가가 매우 중요하다는 것이다.

이 시점의 전환은 단순히 식을 계산하거나 방정식을 푸는 것에서 참된 의미에서의 대수학(추상대수학)으로의 제1보이다. 계수의 범위 및 풀이의 범위를 어떻게 잡는가에 따라 수학적인 내용은 싹 바뀌어 버린다. 그리고 이번에는 그러한 수의 집합 전체를 생각하여 그 구조를 밝힌다는 형태로 수학적 시야가 자꾸만 확대되어 가는 가는 것이다.

2. 아르키메데스의 원주계산

아르키메데스의 연구중 중세에 가장 많은 사람들에게 알려진 라틴어로 번역된 최초의 것은 <원의 측정, *The Measurement of a Circle*〉 이었다. 오랜 연구의 일부분인 것 같은 그것은 단지 3개의 명제로 구성된 매우 짧은 학설이다. 주된 목적은 어떤 원의 둘레의 길이가 알려져 있으면 그 원의 면적은 계산될 수 있다는 것을 보이는 것이다([13]).

명제 1.

어떤 원의 면적은 한 변의 길이가 원의 반지름과 같고 또 다른 한 변의

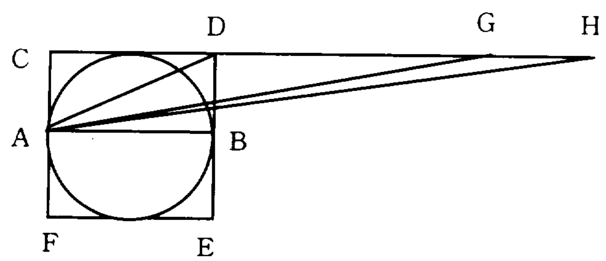
길이가 원의 둘레의 길이와 같은 직각삼각형의 면적과 같다.

증명을 포함할 다음 명제는 만일 한 원의 둘레가 지름의 $3\frac{1}{7}$배이면 그 원의 면적 대 지름을 제곱한 값에 대한 비율이 11 : 14라는 것을 입증한다. 아르키메데스는 그 근사치가 '명제 3'의 결과에 달려있어서 원래는 그 명제를 '명제 3'앞에 두지 않았었다.

명제 2.

한 원의 면적 대 그 원의 지름을 제곱한 값의 비율은 11 : 14에 거의 근접한다.

(증명) 아래 그림과 같이 지름이 AB인 한 원과 그 원에 외접하는 정사각형 $CDEF$를 두자. 변 CD를 연장해서 DG가 CD의 두 배이고 GH가 CD의 $\frac{1}{7}$의 길이가 되도록 한다. 삼각형 ACG와 삼각형 ACD의 면적이 21 : 7이고 삼각형 ACD와 삼각형 AGH가 7 : 1이므로 삼각형 ACH와 삼각형 ACD는 22 : 7이다. 그런데 정사각형 $CDEF$는 삼각형 ACD의 네 배이므로 삼각형 ACH 대 정사각형 $CDEF$의 비는 22 : 28 즉 11 : 14이다. AC는 반지름과 같고 CH는 원의 둘레와 같으므로 ('명제 3'에서 원의 둘레는 지름의 $\frac{22}{7}$배이다라는 것에 의거) 삼각형 ACH는 원의 면적과 같다. 따라서 원과 정사각형 $CDEF$는 11 : 14에 거의 근접한다.



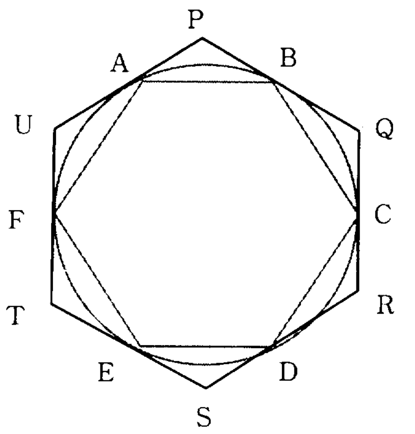
<그림 2>

<원의 측정, *The Measurement of a Circle*> 중에서 가장 중요한 명제는 아르키메데스가 π의 수치적 값을 계산한 것을 포함한다. 그는 π라고 명명하지는 않았다. 지름에 대한 원주율을 나타내는 기호 π는 아르키메데스나 다른 어떤 그리이스의 수학자에게서도 사용되지는 않았다.

그것은 1706년 영국의 무명작가인 William Jones의 저서 <*Synopsis Palmariorum Matheseos*> 와 <*New Introduction to the Mathematics*>에 처음 도입되었다. 초심자를 위한 이 책에서 Jones는 지름에 대한 원주율을 소수점 100자리까지 정확하게 나타냈다. 그것은 유명한 오일러의 저서 (Leonhard Euler) <무한소 해석 입문, *Introductioin Analysin Infinitorum*>(1748)저서에서 사용됨으로써 비로소 그리이스어의 *Perimetros*(원주)의 첫 글자이기도 한 문자 π는 결정적으로 채택되었다.

아르키메데스가 π의 값을 얻는 데 포함한 접근법은 다음의 사실에 기인한다. 변이 n개인 정다각형을 한 원에 내접 및 외접시킨다. n이 증가할수록 내접 및 외접한 두 n각형의 둘레와 원의 둘레의 차이는 점점 작아진다. 이런 형식의 증명은 다각형과 원 사이의 면적의 차이가 점차적으로 감소한다는 이론으로써 더 잘 알려져 있다. 하지만 그것은 변의 수가 무한히 증가하는 것 만큼 내접 또는 외접한 다각형의 극한으로서의 원을 고려한 반면 극한에 이르는 직접적인 과정은 없다. 그런 과정이 그리이스 수학자들에 있어서는 무한정 단계가 계속된다고는 결코 생각할 수도 없었다. 그러나 아리스토텔레스는 단지 정확도가 요구되어지기 위해서 유한한 단계에서 실행하여야 한다고 생각하였다.

π에 대한 적당한 근사치를 계산함에 있어서 아르키메데스는 원 내부 및 외부에 정 6, 12, 24, 48, 96각형을 연속적으로 내접 및 외접시켰다. 변의 수를 선택하는 것은 당연했다. 모든 정다각형 중에서 정육각형이 가장 쉽게 원에 내접되기 때문이다. 간단히 원주의 임의의 한 점에서 반지름의 길이와 같은 길이의 현을 6개의 꼭지점 A, B, C, D, E, F가 생기도록 연결한다. 점 A, B, C, D, E, F 에서 접선을 그었을 때 또 다른 정육각형이 그려진다. 이것은 그 원에 외접한다.



<그림 3> 아르키메데스의 π 계산법

정육각형으로부터 내접한 정십이각형은 정육각형에 외접한 원 위의 정육각형의 각 변에 대응하는 호를 이등분함으로써 작도되어지는 데 이와 같은 추가점을 찾아서 정육각형의 꼭지점들과 연결하면 원하는 정십이각형의 모양이 된다.

아르키메데스가 계산한 결과는 다음과 같이 명제로 표현된다.

명제 3.

임의의 원의 둘레는 지름의 $\frac{1}{7}$보다 작고 $\frac{10}{71}$보다는 큰 차이만큼 지름의 3배를 초과한다.

이에 대한 증명을 다음 두 가지 방법으로 살펴보고자 한다.

가. 방법 1.

만일 내접 및 외접한 정 n각형의 둘레를 각각 p_n과 P_n이라 하고 원의 둘레를 C라고 하면 다음과 같다.

$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < \cdots < p_n < C < P_n < \cdots < P_{96} < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$

이러한 수열 $< p_n >$, $< P_n >$ 유계인 단조수열이 되고 각각은 극한값을 가

지게 된다. 그리고 극한값은 같다. 즉, C 라는 공통값을 갖는다는 것이 증명되어진다. 더 나가서 P_{2n}은 p_n과 P_n의 조화평균이고 p_{2n}은 p_n과 P_{2n}의 기하평균이다.

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \qquad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

d를 원의 지름이라 할 때 $p_6 = 3d\,P_6 = 2\sqrt{3}\,d$ 이라 놓으면 누구나 아르키메데스에 의해 얻어진 P_{96}과 p_{96}의 값을 구할 때까지 연속적으로 P_{2n}과 p_{2n}을 계산하기 위해서 위의 점화관계를 사용할 수 있다. 부등식

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

을 가정하면 더이상의 설명이 필요없이 알려진 것처럼 아르키메데스는 다음의 사실을 발견했다.

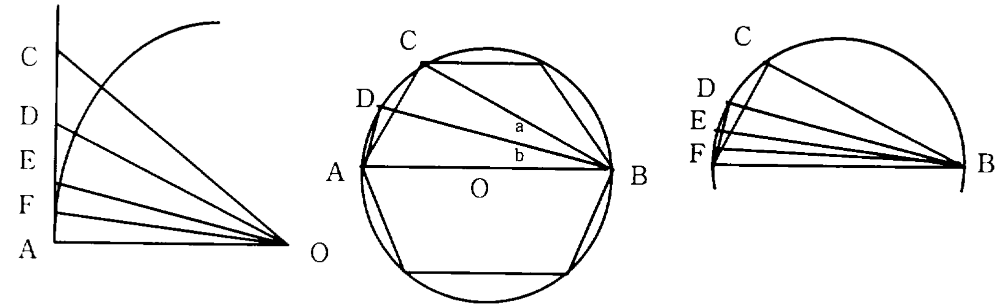
$$\left(3+\frac{10}{71}\right)d < \frac{96\cdot 66}{2077\frac{1}{4}} \quad 과 \quad P_{96} < \frac{96\cdot 153}{4673\frac{1}{2}} < \left(3+\frac{10}{70}\right)d$$

결과적으로 $\qquad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. ■

나. 방법 2. (정96각형을 이용한 아르키메데스의 다른 계산)

아르키메데스는 그의 논문 <원의 측정, *The Measurement of a Circle*> 에서 원에 외접하는 정96각형과 내접하는 정96각형의 둘레의 길이를 구하여 그 두 둘레의 길이 사이에 π가 들어감을 이용하여 π의 근사값을 계산하고 있다.

(1) 외접 정96각형의 경우



<그림 4> 아르키메데스의 π의 계산

점 O를 중심으로 하는 원주 위의 한 점 A에서 접선을 긋고, 이 접선 위에 한 점 C를 택하여 $2\overline{AC} = \overline{OC}$ 되도록 한다. 그러면 $\overline{OC} : \overline{CA} = 2:1$이다. 따라서

$$\overline{OC} : \overline{CA} = 306 : 153 \cdots\cdots ①$$

(1) $\overline{AC}$ 를 153등분한 길이를 d라 하면 $\overline{AC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 $153^2 = 23049$개의 정사각형으로 이루어진다. 또, $\overline{OC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 $306^2 = 93636$개의 정사각형으로 이루어진다. 따라서 $\overline{OA}$ 를 한 변으로 하는 정사각형은 피타고라스의 정리에 의하여

$93636 - 23409 = 70227$(개)의 한 변으로 길이가 d인 정사각형으로 이루어지게 된다. 그런데, $70227 > 70225 = 265^2$이므로

$$\overline{OA}^2 : \overline{AC}^2 > 265^2 : 153^2$$

$$\overline{OA} : \overline{AC} > 265 : 153 \cdots\cdots ②$$

$\angle AOC$의 2등분선이 접선 $\overline{AC}$와 D에서 만나면

$$\overline{OC} : \overline{OA} = \overline{CD} : \overline{DA}$$

따라서 $(\overline{OC} + \overline{OA}) : \overline{OA} = (\overline{CD} + \overline{DA}) : \overline{DA}$

곧 $(\overline{OC} + \overline{OA}) : \overline{OA} = \overline{CA} : \overline{DA}$

$\therefore (\overline{OC} + \overline{OA}) : \overline{CA} = \overline{OA} : \overline{DA}$

곧 $(\overline{OC} : \overline{CA}) + (\overline{OA} : \overline{CA}) = \overline{OA} : \overline{DA}$

①, ②에 의해서

$$\overline{OA} : \overline{AD} > (306 : 153) + (265 : 153) = 571 : 153$$

즉, $\overline{OA}:\overline{AD} > 571:153$ ……③

$$\overline{OD}^2+\overline{AD}^2 = (\overline{OA}^2+\overline{AD}^2) : \overline{AD}^2 = (\overline{OA}^2 : \overline{AD}^2)+1$$

$$> (571^2+153^2)+1 \qquad = 349450 : 153^2 \text{ 이고}$$

$$349450 = 591^2+169$$

$$> 591^2+2\times591\times\frac{1}{8}+(\frac{1}{8})^2$$

$$=(591+\frac{1}{8})^2$$

따라서 $\overline{OD}^2 : \overline{AD}^2 = (591\frac{1}{8})^2 : 153^2$

결국 $\overline{OD}:\overline{AD} = (591\frac{1}{8}):153$…… ④를 얻는다.

(1) $\angle AOD$의 2등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 E라 하면

$$\overline{OD}:\overline{OA} = \overline{DE}:\overline{EA}$$

$$\therefore (\overline{OD}+\overline{OA}):\overline{OA} = (\overline{DE}+\overline{EA}):\overline{EA}$$

곧 $(\overline{OD}+\overline{OA}):\overline{OA} = \overline{DA}:\overline{EA}$

이것은 $(\overline{OD}+\overline{OA}):\overline{DA} = \overline{OA}:\overline{EA}$와 같이 쓸 수 있고,

따라서 $\overline{OA}:\overline{EA} = (\overline{OD}:\overline{DA}) + (\overline{OA}:\overline{DA})$로 된다. 따라서 ③, ④에 의해서

$$\overline{OA}:\overline{EA} > (591\frac{1}{8}:153)+(571:153)$$

$\therefore \overline{OA}:\overline{EA} > 1162\frac{1}{8}:153$ ……⑤를 얻는다.

$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$이므로

$$\overline{OE}^2 : \overline{EA}^2 = (\overline{OA}^2+\overline{AE}^2) : \overline{EA}^2$$

$$= (\overline{OA}^2 : \overline{AE}^2)+1$$

$$\overline{OE}^2 : \overline{EA}^2 > \left\{(1162\frac{1}{8})^2 : 153^2\right\}+1 = 1373943\frac{33}{64} : 153^2$$

으로 된다. 위와 같은 계산에 의하여

$$\overline{OE} : \overline{EA} > 1172\frac{1}{8} : 153 \cdots\cdots ⑥$$

(3) $\angle AOE$의 2등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 F라 하면 ③, ⑤을 얻은 것과 같은 방법으로

$$\overline{OA} : \overline{AF} > 2334\frac{1}{4} : 153 \cdots\cdots ⑦$$

을 얻게 되고, 또 $\overline{OF}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AF}^2$이므로

$$\overline{OF}^2 : \overline{FA}^2 > \left\{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\right\} : 153^2 = 5472132\frac{1}{16} : 23409$$

$$\therefore \overline{OF} : \overline{FA} > 2334\frac{1}{4} : 153 \cdots\cdots ⑧$$

(4) $\angle AOF$의 2등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 G라 하면 같은 방법으로

$$\overline{OA} : \overline{AG} > (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153$$

$$\therefore \overline{OA} : \overline{AG} > 4673\frac{1}{2} : 153 \cdots\cdots ⑨$$

$\angle AOC = 30°$이고 이 각을 4회 2등분하여 $\angle AOG$를 얻으므로

$$\angle AOG = \frac{1}{48} \times 90°$$

지금 $\angle AOG$와 크기가 같은 $\angle AOH$를 $\overline{AO}$와 반대쪽에 그려 접선 $\overline{AC}$와의 교점을 H라 하면 $\angle GOH = \frac{1}{24} \times 90°$ 이므로 $\overline{GH}$는 이 원에 외접하는 정96각형의 한 변의 길이와 같게 된다.

$\overline{AB} = 2\overline{OA}$, $\overline{GH} = 2\overline{AG}$ 이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\text{정96각형의 둘레의 길이}} = \frac{2\overline{OA}}{96 \times \overline{GH}} = \frac{\overline{OA}}{96 \times \overline{AG}}$$

⑨에 의하여 $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AG}} > \dfrac{4673\frac{1}{2}}{153}$ 이므로

$$\frac{\overline{AB}}{\text{정96각형의 둘레의 길이}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \times 153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$$

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}$$

이고 원둘레의 길이는 외접 96각형의 둘레의 길이보다 작으므로

$$\pi = \frac{\text{원둘레의 길이}}{\text{지름 } \overline{AB}} < \frac{\text{외접96각형의 둘레의 길이}}{\overline{AB}} < 3\frac{1}{7}$$

(2) 내접 정96각형의 경우

내접 정96각형의 경우에도 외접 정96각형의 경우와 마찬가지로 방법의 계산에 의하여

$$\pi > \frac{\text{내접정96각형의 둘레의 길이}}{\overline{AB}} > \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1137}{8096} > 3\frac{10}{71}$$ 을 얻고 있다.

결국 (1),(2)에서

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

을 얻게 되며, 이것이 아르키메데스가 계산한 π의 값의 범위인 것이다. ■

$\frac{22}{7}$의 근사치는 종종 아르키메데스의 π값이라 불린다. $\frac{22}{7} = 3.1429$는 π의 실제값보다 0.2퍼센트 큰 값보다는 작고 보통 계산에 의한 단순한 수치이므로 고대 대부분의 목적에 이용하기에는 충분한 값이다. 아르키메데스는 이론적으로는 정192각형이나 정384각형을 이용한 더 정확한 근사치를 구할 수도 있었지만 부적당한 그리이스 알파벳 숫자 기호 때문에 어려운 산술은 불가능했다.

과학의 역사가들은 지름에 대한 원주율(즉, π)의 근사값에 이르기 위한 고대 학자들의 시도에 많은 관심을 가졌었는데 아마도 원주율에 대한 정확도가 증가하는 것이 그 당시의 학문의 정도에서 수학적 기술의 측정을 제공하는 것이라고 보았기 때문일 것이다. 고대 중국인들은 그 당시의 서양학자

들보다 산술적 계산에 있어서는 보다 더 발달되어 있었기 때문에 그들이 놀랄만큼 정확하게 π값을 도출한 것은 놀라운 게 아니다. 기원전부터 교과서에는 π에 대한 근사치로서 3을 사용했었다. 그러나 1세기경부터 중국의 수학자들은 보다 더 가까운 근사치를 찾고 있었다. Liu Hsin (약23년경)은 3.1547을 사용하였고 Chang Heng (78-139년)는 대략 3.1622인 $\sqrt{10}$을 사용했었고 또는 약 3.1724인 분수 $\frac{92}{29}$를 사용했었다. 다각형에 외접한 원의 지름에 대한 내접한 정다각형의 둘레의 비율을 계산함에 있어서 3세기의 수학자들은 보다 더 정확한 근사값을 얻었다. Liu Hui(유휘)는 그의 <구장산술, *Arithmetic in the Sections* 또는 *Nine Chapters of the Mathematical Art*> 라는 주해에서 π의 범위를 $3.141024 < \pi < 3.142904$이라 유도하기 위해서 정384각형을 이용하였고 정 3072각형을 사용함으로써 π의 거의 정확한 값, 즉 3.14159를 도출해냈다. 5세기에는 뛰어난 중국의 수학자이자 천문학자인 Tsu Chung-Chi(조충지)(430-501)는 $3.1415926 < \pi < 3.1415727$ 의 값을 얻는 방법을 발견하였다.

3. 프랑수아 비에트(Francois Viete)의 해석적 표현

다음은 '비에트의 공식'이라고 불리어지는 것인데, '무한'과정의 곱의 형식에 의해 최초로 나타내어진 π의 값이다.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

가. 방법 1. 원의 지름을 1로 잡고, 이 원에 내접하는 정4, 8, 16, … 각형의 면적을 계산하면, 먼저 원에 내접하는 정4각형의 면적은 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

이고, 변수를 2배로 늘인 정8각형의 면적은 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}$이 된다. 정16각형

의 면적은 $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

비에트는 이런 계산 결과를 바탕으로, 내접정다각형의 변수를 아주 크게 하면,

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots}$ 의 꼴로 나타내어질 것으

로 추측하였다. 지름 1인 원의 면적은 $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots}$$

을 얻는다. ■

비에트는 또 아르키메데스의 방법을 응용하여, 6각형으로부터 $2\times6^{16}=293216$각형까지 실제로 계산해 보고, 지름이 100000일 때에는

$314159\frac{26535}{100000}<\pi<314159\frac{26537}{100000}$ 을 얻었다.

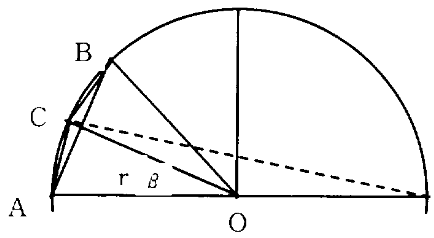
나. 방법 2.

<그림 5>에서 정 n각형의 넓이를 $A(n)$이라 하면

$$\begin{aligned} A(n) &= n\cdot\triangle OAB \\ &= \frac{1}{2}nr^2\sin2\beta \\ &= nr^2\cos\beta\sin\beta\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$A(2n) = 2n \cdot \triangle COB$$
$$= 2n \frac{1}{2} r^2 \sin\beta$$
$$= nr^2 \sin\beta \cdots\cdots ②$$



<그림 5>

①과 ②에서

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \cos\beta$$

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} = \cos\beta \cos\frac{\beta}{2}$$

얻는다. 같은 방법으로 k회 반복하면

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} \cdots \frac{A(2^{k-1} n)}{A(2^k n)} = \cos\beta \cos\frac{\beta}{2} \cdots \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right) \cdots ③$$

k를 무한히 크게 하면 다각형은 원에 가까워지므로

$$\lim_{k\to\infty} A(2^k n) = \pi r^2 \cdots\cdots ④$$

③식에 ①과 ④를 대입하면

$$\frac{\frac{1}{2} nr^2 \sin 2\beta}{\pi r^2} = \cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdots \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)$$ 이므로

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \sin 2\beta}{\cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdots \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)}$$

여기에서 $n = 4,\ \beta = 45^\circ$ 라 하면

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta},\ \cos\frac{\theta}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$ 이 된다. 따라서

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots} \quad \blacksquare$$

위의 내용은 아르키메데스의 다각형을 벗어나 해석적 표현에 의해 대수적 연산의 무한수열로 나타낸 최초의 사람이었고 대수와 삼각법을 기하학과 혼합하여 계산하였다. 그러나 비에트는 수렴의 개념을 알지 못했고, 이 수열이 수렴하는지 발산하는지에 대한 생각을 갖지 못했으므로 π를 계산

하는데 거의 쓸모가 없는 것이었다.

다. 방법 3. (반각공식을 이용한 방법)

삼각함수 반각공식 $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$의 연속적용에 의해

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \cos(\theta/2)\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} = \cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\frac{\sin(\theta/4)}{\theta/4}$$

$$= \cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\cdot\cdot\cdot\cos(\theta/2^n)\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}$$

을 얻는다.

n이 무한히 클때 $\sin(\theta/2^n)(\theta/2^n)$은 1에 가까워진다. 따라서 오일러의 공식

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \cos(\theta/2)\cos(\theta/4)\cos(\theta/8)\cdot\cdot\cdot ⑤$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$로 놓고 삼각함수의 반각공식 $\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$를 이용하면 ① 에 의해서

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

을 얻는다. ■

이 공식은 1593년 비에트(F. Viete)에 의해 처음으로 주어진 결과이다. 또한 이 비에트의 공식은 π에 대한 최초의 해석적 표현이다.

오일러 공식 ⑤에 로그를 취하면

$$\ln\sin\theta - \ln\theta = \ln\cos(\theta/2) + \ln\cos(\theta/4) + \ln\cos(\theta/8) + \cdot\cdot\cdot$$

다시 미분하면

$$\cot\theta - \frac{1}{\theta} = -\frac{1}{2}\tan(\theta/2) - \frac{1}{4}\tan(\theta/4) - \frac{1}{8}\tan(\theta/8) - \cdot\cdot\cdot$$

즉, $\frac{1}{\theta} = \cot\theta + \frac{1}{2}\tan(\theta/2) + \frac{1}{4}\tan(\theta/4) + \frac{1}{8}(\theta/8) + \cdots$ 여기서 $\theta = \frac{\pi}{4}$로 놓으면

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2}\tan(\pi/8) + \frac{1}{4}\tan(\theta/16) + \cdots$$

이의 계산은 17세기 데카르트(Rene Descartes)의 기하학 계산과 일치한다.

4. 월리스 공식

1650년 영국의 수학자 존 월리스(John Wallis)는 그의 저서 <무한의 수론, Arithmetica infinitorum, 1655년>에 다음과 같은 식을 만들었다. 즉,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

증명)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

그러므로, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx \quad (n\geq 2)$

여기서, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$라고 두면

$I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$, $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}(n\geq 2)$의 점화식이 된다.

n 이 짝수일 때, $n=2m$이라고 두면

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots④$$

n 이 홀수일 때, $n=2m+1$이라고 두면

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\quad\cdots\cdots⑤$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1$이 되므로 ④, ⑤에서 위의 식을 얻을 수 있다

5. 오일러의 예상과 원주율의 표현

오일러는 $x=\pm n\pi(n=1,2,3,\cdots)$에서 0 이고 R에서 연속인 다음 함수를 생각하였다.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

이 함수는 $x=0$일 때 1이고 $x=\pm n\pi(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$에서 0이므로

$$f(x)=\Pi\sum(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

$$=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\cdots \quad ①$$

로 표현할 수 있다고 가정하였다. 이 표현은 참이 된다는 것이 밝혀졌지만 오일러가 공표했을 당시에는 이는 귀중한 예상이었다.

오일러 공식 ①에서 $x=\frac{\pi}{2}$을 놓으면

$$\frac{2}{\pi}=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{36})(1-\frac{1}{64})\cdots$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 11}{10\cdot 10}\cdots$$

$$=\frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdots}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdots}$$

즉, $\pi=2\lim_{n\to\infty}(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot\cdot(2n-1)})^2$이다.

오일러는 ①에서 인수를 곱하고 x의 멱에 대하여 정리하여

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)+\cdots \quad ②$$

를 얻는다. 한편 $\frac{\sin x}{x}$ 대한 마클로린 전개로부터

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots \quad ③$$

②와 ③에서 x^2의 계수를 비교하여 오일러는

$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$가 발견한다. 계속하여 x^4의 계수를 비교하여

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots \quad ④$$

을 발견한다.

또한 방정식 $1-\sin x = 0$는 근 $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \cdots$ 을 갖고 이들 모두는 중근이다. 즉, 곡선 $y = 1-\sin x$는 이들 점에서 x 축에 접하게 된다. 다시 말하면, 이들 각 점에서 이 함수의 미분계수는 0이 된다. 따라서

$$1-\sin x = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= (1-\frac{2x}{\pi})^2(1+\frac{2x}{3\pi})^2(1-\frac{2x}{5\pi})^2(1+\frac{2x}{7\pi})^2\cdots$$

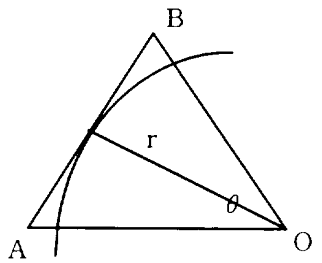
로 쓸 수 있다. 1차항의 계수를 비교하여 오일러는

$$-1 = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} + \frac{4}{7\pi} - \cdots$$

또는 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$을 알았다. 이 급수는 라이프니츠의 급수로 알려지고 있다.

6. 데카르트(Rene Descartes, 1596 ~ 1650) 의 연구

아르키메데스의 다각형의 방법의 마지막 시도자로 비에트의 방법과 비슷하지만 다각형의 넓이가 아닌 다각형의 변이 원이 될 때까지 원에 외접하는 정 n각형의 변의 수를 2배로 만들어 나간다.



<그림 6> π를 구하는 데카르트의 방법

만약 둘레의 길이가 L이고 $\overline{AB}$가 외접하는 정n다각형의 한 변이라고 하면

$$L = 2nr\tan\frac{\theta}{2}\ ,\quad r = \frac{L}{2n\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{L}{2n}\cot(\theta/2)$$

변의 수를 2배로 늘리는 횟수를 k번 하면 내접원의 반지름 $r(k)$는

$$r(k) = \frac{L\cot(\theta/2^k)}{2^k n} \cdots\cdots ①$$

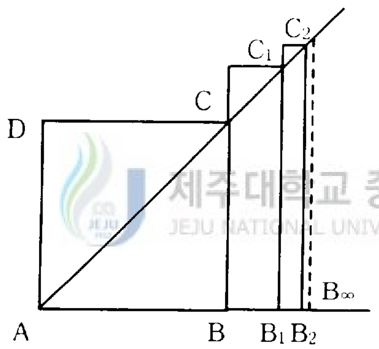
$$\pi = \frac{L}{2r(k)} = \frac{L}{2\cdot\frac{L\cot(\theta/2^k)}{2^k n}} = \frac{2^k n\tan(\theta/2^k)}{2}$$

①에서 정사각형 $n=4,\ \theta=\frac{\pi}{2}$ 이면

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k \tan\frac{\pi}{2^k} \cdots\cdots ②$$

를 얻을 수 있다.

데카르트는 ②식을 얻지는 못했지만 <그림 7>을 사용하였다.



<그림 7> 데카르트의 작도

둘레의 길이를 L인 정사각형 ABCD를 작도하면 $\overline{AB}=\frac{L}{4}$ 이 된다. 대각선 $\overline{AC}$의 연장선 위에 C_1를 잡고 연장하여 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이 되도록 사각형 BCC_1B_1을 작도한다. 같은 방법으로 새로운 사각형이 앞의 사각형의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이 되도록 계속해서 점 C_2, C_3, …를 잡는다. 그러면 AB_∞는 원주가 L인 원의 직경이 된다.

만약 $AB_k = x_k$, $AB = x_0$라 하면 $x_k(x_k - x_{k-1}) = x_0^2/4^k$이 되어 $x_k = \frac{x_0}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^k}$ 이 만족된다.

이때 $x_k = \frac{x_0}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}$는 ①식의 $r(k) = \frac{L\cot(\theta/2^k)}{2^k n}$에서 $L = 4x_0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $n = 4$ 일 때 같은 값이다.

7. 존 마친(John Machin, 1680~1751)의 방법

영국의 수학자 존 마친(John Machin, 1680~1751)은 그레고리 급수를 이용하여 π의 값을 계산하였다.

우선 $-1 < t < 1$이면 $1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \cdots\cdots = \frac{1}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}$

이므로

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \cdots\cdots)dt \quad (\text{단, } 0 < x < 1)$$

여기서, $t = \tan\theta$, $\left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\theta}{4}\right)$로 두면

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\sec^2\theta} \quad \text{이고} \quad dt = \sec^2\theta\, d\theta \text{ 이므로}$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{\sec^2\theta}\cdot\sec^2\theta\, d\theta = \int d\theta = \theta + c = \tan^{-1}t + c.$$

그래서 $[\tan^{-1}t]_0^x = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + - \cdots\cdots\right]_0^x$이므로

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \ (0 < x < 1)$$

이것을 그레고리(James Gregory, 1638~1675)의 급수라 한다.

한편 $\tan\alpha = \frac{1}{5}$로 두면

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{5}{12},\ \tan 4\alpha = \frac{120}{119}$$

이고, $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$ 이다. 이것을 역삼각함수로 고치면

$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{239}$ 이다.

그래서 $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \tan^{-1}\frac{1}{239} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$

$$= 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + - \cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + - \cdots\cdots\cdots\right\}$$ ⇐ Gregory 급수에 대입

$\fallingdotseq 4(0.2 - 0.0026667 + 0.0000640 - 0.0000018) - 0.0041841$

$= 0.7853979$

따라서 $\pi = 0.7853979 \times 4 = \underline{3.1415916} < 3.14159265\cdots\cdots$

소수 5자리까지 정확히 구할 수 있다.

이것을 자세히 계산하면

$$\frac{\pi}{4} \fallingdotseq 4(0.2 - 0.00266666667 + 0.00006400000$$

$$- 0.00000182857 + 0.00000005689 - 0.00000000186)$$

$$-(0.00418410041 - 0.00000002441)$$

$=4\times 0.19739555979-0.00418407600$

$=0.78539816316$

따라서 $\pi \fallingdotseq 0.78539816316\times 4=\underline{3.14159265264} < 3.1415926535897933\cdots\cdots$
소수 8자리까지 정확히 구할 수 있다.

8. 원주율 π의 근사치에 관한 약사

가. 기원전-정다각형 이용

π의 값은 원주의 지름의 비이므로 처음 무렵은 당연히 원에 내접 또는 외접하는 정다각형을 이용하여 계산하였다. 이것은 기하학 발전의 이론 단계에서 생각한 것으로서 아주 옛날에는 원주율은 지름의 약 3배로 쳤다. 그러면 여기에서 작도를 생각해 보자. 원주를 반지름으로 잘라 가면 꼭 6개로 나눠진다. 이 정육각형의 한 변의 길이를 1/2이라고 하면, 원주는 대략 3이면 된다.

그러나 3보다 조금 길다(π > 3)고 느낄 것이다. 변수를 늘려서 내접 정12각형(정12각형)을 그리면 어떻게 되는가, 원에 내접하는 정12각형의 계산을 해보자.

정12각형의 한 변의 길이를 x라고 하고 반지름과 정육각형의 한 변과의 교점을 P라고 한다.

정12각형의 1변 x=AA′이므로 A′P= y 라고 놓기로 하고, 먼저 y의 길이를 구한다.

$\triangle$APO는 $\angle$AOP=30° 이므로 AP:AO:PA=1:2:$\sqrt{3}$ 가 되어 있다. 따라서,

$$PO=AP\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ 이다.}$$

이것에서 $y=A'O-PO=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

여기서, $\triangle AA'P$에 유명한 피타고라스의 정리를 사용하여 $\overline{A'A}^{\,2} = x^2 = \overline{AP}^{\,2} + \overline{A'P}^{\,2}$ 로부터 $\pi \fallingdotseq 3.1059\cdots$이라고 생각했을 것이다.

정12각형에서 소수 제1자리까지 올바르게 되었으므로, 그 후, 정 24, 48, …로 변의 수를 늘려 갔다

나. 연분수에 의한 계산

연분수에 의한 π의 계산은 많은 사람이 도전한 것은 아니고 전개식 쪽이 많이 사용된 것 같다. 연분수의 연구는 카타르디라는 수학자가 시작했다. 영국의 윌리엄 브러운커(William Brouncker, 1620 ~ 1684)은 연속분수의 형태로 처리하였다. 즉, 수렴하는 급수

$$S = a_0 + a_1 + a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + \cdots$$

를 생각하자. 이것이 번분수식

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cdots}}}$$

와 같다는 것을 알 수 있다. 여기서, $\tan^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$이고

$a_0 = 0,\ a_1 = x,\ a_2 = -\dfrac{x^2}{3},\ a_3 = -\dfrac{3x^2}{5},\ a_4 = -\dfrac{5x^2}{7}$라고 하면,

$$\tan^{-1}x = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 \cdots}}}}$$

이 되고, $x = 1$이라고

하면,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2} \cdots}}}}$$ 을 유도해 내었다.

이 되므로 이것으로부터 π값은

$$\frac{4}{\pi} = \frac{10395}{7734} \text{에서 } \pi = \frac{4 \times 7734}{10395} = \frac{30936}{10395} = 2.9760\cdots$$

가 되므로 자릿수를 많이 잡지 않으면, 여간해서는 3을 넘을 수 없다.

다. 전개공식에 의한 π의 계산

현재로는 전개공식에 의한 π계산법이 π의 자릿수를 늘이는 유일한 방법이 된 것 같다.

여러 가지 전개공식은 어느 것이나 일장일단이 있다. 처음의 라이프니츠 - 그레고리의 식은 형식은 간단하지만, 결점은 수렴성이 늦는 것이었다. 마틴과 오일러의 공식은 실용적이고 수렴도 다른 것에 비하여 빠른 것 같지만 10항이나 20항에서는 기원전의 아르키메데스의 것에도 미치지 못했다.

arcsin $\frac{1}{2}$을 사용한 뉴턴의 방법은 비교적 빨리 π로 수렴하는 것 같다.

실제로 π의 근사값은 3.1416이나 355/113으로 충분하다.

여기에서 이런 전개식을 적어보면 다음과 같다.

(1) 라이프니츠(독일, 1646 ~ 1716) : 1673년 (수렴이 늦다)

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right)$$

(2) 오일러(스위스, 1707~1783) : (컴퓨터을 사용한 계산)

$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right)$$

(3) 마친(Machin)(1680 ~ 1751) : 1706년

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$

$$= 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} - \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} + \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)$$

(4) 뉴턴(Newton 영국, 1642~1727) : 1665년

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots\right)$$

(5) 베가(Vega, 1754~1802) : 1794년

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 8\arctan\frac{1}{408} + 4\arctan\frac{1}{1393}$$

(6) 가우스(Gauss 독일, 1777~1855) : 1840년

$$\pi = 12\arctan\frac{1}{4} + 4\arctan\frac{1}{20} + 4\arctan\frac{1}{1985}$$

(7) 크라우젠(Clausen, 1801~1855) : 1847년

$$\pi = 8\arctan\frac{1}{5} + 4\arctan\frac{1}{7}$$

(9) 러더포드(W. Rutherford, 1798~1871) : 1841년

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{70} + 4\arctan\frac{1}{99}$$

또한 이러한 전개식 이외에도 다음과 같은 공식도 있다.

(10) 샤프(Sharp) : 1705년

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right)$$

(11) 월리스(Wallis 영국, 1616~1703) : 1655년

$$\pi = 2 \times \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

(12) 뉴턴(Newton영국, 1642~1727) : 1665년

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 2^8} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2^{11}} - \frac{163 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 2^{13}} - \cdots\right)$$

또한 일본의 에도시대의 수학자가 생각한 공식도 있는데, 이것을 현대수학의 표현법으로 고치면 다음과 같다.

(13) 마쓰나가 요시스케(일본, 1692~1748)

$$\pi = 3\left(1 + \frac{1^2}{4 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \cdots\right)$$

9. 초월수의 존재

계수 $a_i\,(i=0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots\ n)$가 모두 정수 (다만 $a_0 \neq 0$)인 n차 대수방정식

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

의 근(풀이)이 될 수 있는 수를 '대수적 수'라고 한다. 계수를 유리수, 즉 분수의 범위에서 잡는 경우도 있으니 그 경우는 각 계수의 모든 분모의 최소공배수를 양변에 곱해 주면 결국은 정수계수가 되기 때문에 마찬가지다.

대수적 수로 될 수 없는 즉 어떠한 정수계수의 대수방정식을 취해도 그 근 (풀이)이 될 수 없을 '초월수'라고 한다. 초월수는 물론 무리수 즉 유리수가 아닌 수이지만 무리수는 반드시 초월수로는 되지 않는다. 예컨대 무리수인 $\sqrt{2}$나 $\sqrt[3]{2}$ 는 각각

$x^2-2=0$, $x^3-2=0$의 근이 되기 때문에 대수적 수이다.

초월수의 존재는 1844년에 서둘러 보여졌다. 또한 그 수가 자연수나 유리수보다도 '많이 있다'는 것도 알고 있었다. 그러나 처음으로 세상에 알려진

초월수는 인공적인 것이었다. 또는 초월수가 아닌가 하고 의심되고 있던 가장 자연스런 상수, 예컨대 지금 문제로 삼고 있는 원주율 π라든가 고등학교의 '미분적분'에서 배우는 자연로그의 밑 e가 실제로 초월수라는 것이 증명된 것은 훨씬 뒤의 일이다.

생각해 보면 정의 바로 그것으로 초월수가 되는 것은 매우 파악하기 어려운 느낌이 든다. 대수적 수가 되지 않는다는 것 때문에 어떠한 교묘한 방법으로 대수 방정식을 세워 보아도 헛된 노력이다. 신이라면 무한개가 있는 대수방정식의 모두를 한꺼번에 '주사'해서 초월수인지 아닌지를 체크할 수 있을지 모르나 인간에게는 물론 컴퓨터에게도 이러한 것은 영원히 불가능하다. 문자대로의 의미로 '영원히'이다.

결국 초월수라는 것을 증명하기 위해서는 대수적도 기하적도 아닌 전혀 별개의 방법을 채택하지 않으면 안되었다. 대수적으로도 기하적으로도 아니라면 나머지는 해석적 방법 즉 미분, 적분 등 무한소를 취급하는 수학이 된다. 실제 에르미트(1822 ~ 1901)가 1873년에 자연로그의 밑 e가 초월수라는 것을, 이어서 9년 늦게 린데만이 원주율 π가 초월수라는 것을 증명하는 데에 사용한 전략은 다름아닌 '해석적 방법' 바로 그것이었다.

이리하여 π가 초월수라는 것이 증명되어 버리면 원적 문제를 자와 컴퍼스를 유한회 사용해서 푸는 것은 불가능하다라는 것이 자명한 것으로 된다.

해석학의 진보된 용어를 사용하지 않으면 설명이 불가능하기 때문에 구체적인 내용은 언급하지 않지만 초월수론은 1930년대 이후 비약적인 발전을 이루고 있다. 특히 1970년에 필즈상을 수상한 베이커의 작업은 그때까지 알려져 있던 약간뿐인 초월수의 실례, 즉 e, π, $\pi+\log 2$, $2^{\sqrt{3}}$ 등을 거의 모두 포괄하는 거대한 업적이었다.

그러나 예컨대 대학 교양과정의 해석 입문에 반드시 등장하는 오일러의 상수

$$r = \lim_{n \to \infty}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right\}$$

와 같은 흔해빠진 수조차 그것이 초월수인지 아닌지는 아직도 판정되어 있지 않는 것이 현상황이다 (이 γ는 그것이 무리수인지 어떤지조차 모르고 있다). 유리수의 '수(농도)'보다도 더 많다고 하는데 우리들이 입수한 초월수는 정말 헤아릴 수 있을 정도밖에 없다. 비유를 해 보면 바다에 한번도 가본적이 없는 사람이 몇 개의 조개껍질을 보물처럼 소중히 방의 아래목에 장식하고 있다는 것이 초월수에 대한 우리들의 현상황인 것이다.

언제 넓은 바닷가에 가서 넘쳐흐를 만큼의 조개껍질에 파묻혀서 그 조개껍질로 목걸이를 만들 수 있을 것인가? 그리스의 3대 작도 문제가 2천수백년 동안 수수께끼에 싸여 있었던 것처럼 초월수가 북적거리는 바닷가도 몇세기 동안이나 불가사의 베일에 계속 숨겨지는 것일까? 또는 세계는 미래로 달리는 세 번째의 "전설"의 도래를 대망하고 있는지도 모른다.

10. π의 소수점 아래 자리수 경쟁

1. 네덜란드 수학자 아드리안 안토니죤(Adriaan Anthoniszoon)

   π의 값 $= \frac{335}{113}$ ⇒ 소수 6자리까지 정확

2. 비에트(프랑스, 1540~1603) 1593년 ⇒ 소수 9자리까지 정확

3. 같은해 아드리안 반 루만(Adriaem Van Rooman) ⇒ 소수 15자리까지 정확

4. 3년 후 네덜란드 루돌프 반 세우렌(Ludolph Van Ceulem) 「원에 관하여」 ⇒소수 20자리까지

5. 4번의 부인 1615년 「대수학과 기하학의 기초」 ⇒소수 32자리
   π를 루돌푸의 수라 불렀다.

6. 천문학자 아브리함 사프(Abraham Sharp) arcsine 급수 ⇒ 소수 72자리

7. 1706년 존 마친(John Machin) (영국, 1680~1751) arctan 급수의 차를 이용

→소수 100자리

8. 요한 마르틴 자카라이스 다제(Johann Martin Zacharias Dase)⇒소수200자리

9. 러더포스 (Rutherforth)⇒ 소수 440자리

10. 1947년 샹크스(Shanks) ⇒ 소수 710자리

11. 대형 컴퓨터를 이용 ⇒ 소수 2억자리까지

12. 인터넷 사이트
Takahashi and Kanada 1995년 10월 6,442,450,938(60억 자리)

Ⅲ. π 개념 지도에 대한 문제점과 개선 방향

1. 초등·중학교 과정에서의 π 관련 단원

가. 초등학교 산수 6학년 1학기 (교과서 교육부 74~75 쪽)

다음 여러 가지 물건에서 원으로 된 것의 원주와 지름의 길이를 재어 보고 빈칸에 알맞은 수를 써 넣어라.

물건	지름의 길이	원의 둘레	(원주)÷(지름)
병	7 cm	22 cm	22÷7=3.142…
통조림통	8.5 cm	26.7 cm	
큰쟁반	35 cm	110 cm	

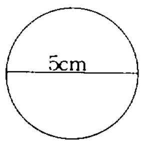
위에서 각각의 원의 둘레의 길이는 지름의 길이의 몇 배가 되는지 알아보아라.

원의 둘레의 길이를 원주라 하고 지름의 길이에 대한 원주의 비율을 원주율이라고 한다.

모든 원의 원주율을 3.14이다. 흔히 원주율을 반올림하여 3.14로 사용한다.

(원주율)=(원주의 길이)÷(지름의 길이)=약 3.14

보기) 지름이 5 cm인 원의 원주를 알아보자.



(원주) = 5 ×3.14

= 15.7 cm

<그림 8>

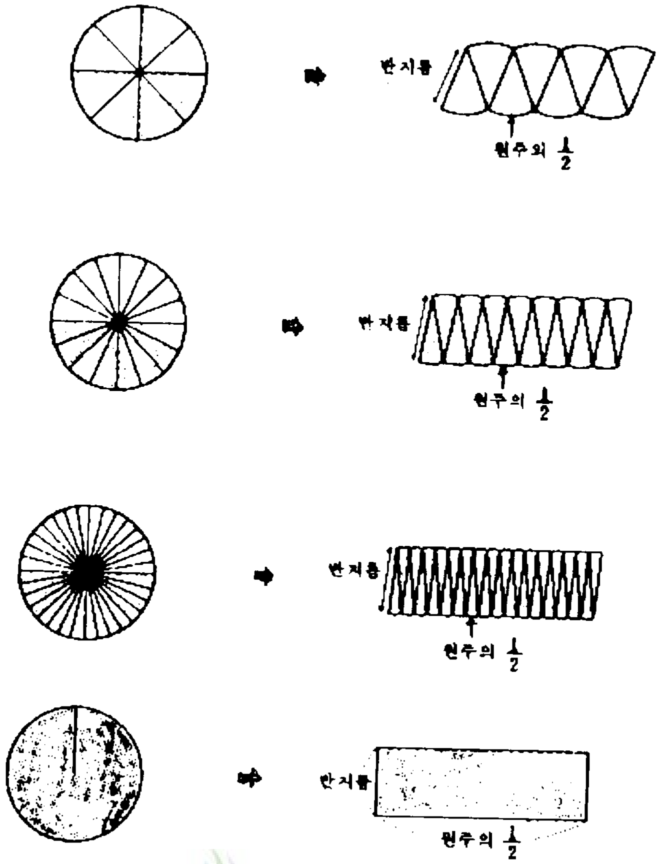
(원주의 길이) =(지름의 길이)×(원주율)

=(지름의 길이)×3.14

=(반지름의 길이)×2×3.14

원의 넓이를 알아보자.

원의 넓이를 다음과 같은 방법으로 알아보아라.



<그림 9>

위와 같이 원을 한없이 잘게 잘라 붙이면 원의 넓이는 가로의 길이가 원주의 $\frac{1}{2}$ 이고, 세로의 길이가 반지름의 길이와 같은 직사각형의 넓이와 점점 같아진다.

(원의 넓이)=(원주의 $\frac{1}{2}$)×(반지름의 길이)

= (지름의 길이)×(원주율)× $\frac{1}{2}$ ×(반지름의 길이)

=(반지름의 길이)×(반지름의 길이)×(원주율)

그러므로 원의 넓이는 다음과 같은 식으로 구한다.

(원의 넓이)=(반지름의 길이)×(반지름의 길이)×(원주율)

나. 중학교 수학

원주와 원의 넓이에 대해서는 초등학교에서 배웠다. 곧

(원주)=2×(반지름의 길이)×(원주율)

(원의 넓이)=(반지름의 길이)×(반지름의 길이)×(원주율)

(원주율)=(원주의 길이)÷(지름의 길이)

여기서 원주율의 값을 3.14로 사용해 왔으나 정확한 값은 3.141592…과 같이 한없이 계속되는 소수라는 것이 알려져 있다.

원주율은 그리스 문자 π로 나타내고 파이라고 읽는다. 따라서, 반지름의 길이가 r인 원의 원주를 ℓ, 넓이를 S라고 하면, 각각 $\ell = 2 \times r \times \pi = 2\pi r$

$S = r \times r \times \pi = \pi r^2$과 같이 나타내어진다. 곧 다음과 같다. $\ell = 2\pi r$ $S = \pi r^2$

2. 교재구성에서의 문제점

가. 초등학교

1) 일상생활에서 접할 수 있는 원형인 물건들의 지름과 원주를 재어 보고 그 비율이 약 3.14가 됨을 유도하고 있는데 측정의 정확도에 따라 값이 어떻게 변하는지를 비교하지 않고 있기 때문에 그 값이 약 3.14가 된다는 식의 지도 방법은 지나치게 의도적이다. 또, 측정값의 지름과 원주의 비율이 유한소수로 구해지는 경우가 많아서 원주율을 유한소수로 인식하는 오류가 생길 수 있다.

2) (원주율) = (원주의 길이)÷(지름의 길이) 표시하고 있는데 원의 크기에 상관없이 그 값이 일정하다는 설명이 없다.

3) 오차의 한계가 설정되어 있지 않은 상태에서, 원주율 약 3.14라고 했으면서도, (원주의 길이) = (지름의 길이)×3.14로 표시하는 것은 근사값의 개념을 흐리게 할 수 있다.

4) 원주율을 세밀히 구하면 3.141592… 와 같이 계속된다고 했는데 세밀히 계산할 수 있는 방법에 대해서는 언급하지 않고 있다.

5) 원주율 도입이나 원의 넓이 구하는 식을 유도하는데는 지나치게 지면을 아낀 것에 비하여, 단순히 주어진 식을 이용해 원의 넓이나 부채꼴의 넓이 구하는 문제를 많이 다루고 있어서 학생들로 하여금 공식을 이용해서 값을 구하기만 하면 된다는 식의 사고에 빠져들게 할 위험성을 갖고 있다.

나. 중학교

1) 초등학교 교과서에는 원의 넓이를 구할 때 '원판을 한없이 잘라 붙이면 원의 넓이는 세로의 길이가 원주의 1/2인 직사각형의 넓이와 점점 같아진다'는 방법에 의한 결과를 제시하고 있지만, 중학교에서는 아무런 언급없이 그대로 이용하고 있다.

2) 원주율을 기호 π로 쓰기로 했는데 왜 기호를 사용해야 하는가의 이유가 설명되어 있지 않다.

3) 반지름이 r인 원주를 초등학교에서는 (원주) = 2×(반지름의 길이)×3.14로 설명하고, 중학교 과정에서는 (원주) = $2\pi r$이라고 설명하므로 π=3.14로 인식되어 π는 정확한 값이 3.141592…로서, 무한소수이다라는 설명을 이해하기 어렵다.

3. 문제점 해소를 위한 개선 방향

위에서 지적한 문제점들이 중등학교의 학습과정을 통해 해결되기 위해서 중등학교에서는 π개념 지도에 있어서 적어도 다음 사항들이 고려되어야 할 것 같다.

첫째, π는 무한 소수이다라는 사실을 이해시킨다.

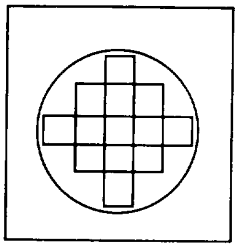
둘째, 왜 기호를 사용해야 하는가를 이해시킨다.

셋째, 모든 원에 대해서 (원주의 길이)÷(지름의 길이)이 일정하다는 직관적인 이해의 결과를 증명을 통해서 확인시킨다.

위에서 제시한 사항들을 충족시키기 위한 한 방법으로 다음과 같은 개념 도입 방법을 제시해 보고자 한다.

정의 : 반지름이 1인 원의 넓이를 π라고 한다.

이렇게 π를 정의하면 확실히 π는 상수이다. 또한 모눈종이 위에 다음 그림과 같이 반지름이 1인 원을 그리고 원 안에 있는 정사각형들의 면적을 계산함으로써 π의 근사값을 구할 수 있다.



<그림 10>

실제로, 모눈종이 위에 10cm를 반지름으로 했을 때의 근사값은 $3.101 < \pi < 3.162$ 이고 20cm를 반지름으로 했을 때의 근사값은 $3.131 < \pi < 3.159$임을 확인할 수 있다.

정의 1은 표현상의 편리를 위해 (원주)÷(지름의 길이)를 π로 정의한 방법이고 정의 2는 반지름이 1인 원의 넓이를 정의한 방법을 표시한다.
그러면 (정의 1)과 (정의 2)의 차이점을 위에서 언급했던 문제점을 중심으로 비교해 보자.

첫째, (정의 1)에서 π의 근사값을 구하는 방법으로 원형인 물건들의 지름과 원주를 측정해서 그 비를 알아보게 한다. 이 방법은 측정한 사람에 따라 다르고 또한 원주를 정확하게 재는 것이 불가능하므로 근사값에 대한 신뢰도가 떨어진다. 그러나 (정의 2)에 의하면 반지름의 크기를 늘려가는 방법(여전히 반지름은 1로 놓자)으로 얼마든지 근사값을 구할 수 있다.

둘째, (정의 1)에서는 근사값을 구할 때 오차의 한계를 알 수 없지만, (정의 2)에서는 원주 상에 놓여 있는 정사각형들의 면적을 계산하면 그 합이 오차의 한계가 된다.

셋째, (정의 1)에서는 π가 무한소수라는 것을 설명할 수 없지만 (정의 2)에서는 사각형을 아무리 쪼개어 가도 π의 정확한 값을 구할 수 없으므로 π가 무한소수라는 것을 확신 할 수 있다. 따라서 이 값은 정확하게는 표시가 불가능하므로 π라는 기호를 사용했으며 이 기호는 '둘레'라는 의미의 그리스어 $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$(페리헤레리아)의 머리 글자를 따온 것으로 이해시킬 수 있다.

넷째, (정의 1)에서는 <그림 9>에서와 같이 원의 넓이 구하는 식을 유도하고 있는데, (정의 2)에서는 (원주) = $2\pi r$이라는 사실이 밝혀지지 않았으므로 다

음과 같은 방법으로 원의 넓이 구하는 식을 증명해보자. 서론에서 언급한 바와 같이 초등학교 과정에서는 직관적인 이해를 유도하고 중등학교에서는 형식적인 논리를 보강해 가는 3단계의 증명 방법을 제시해 본다.

정리 1. 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2 이다.

(증명 1) [초등학교 수준]

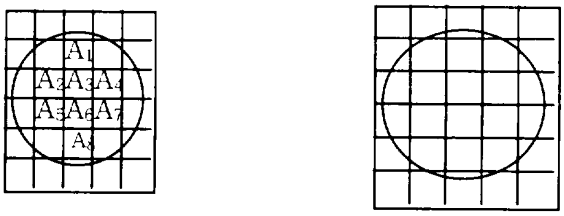
먼저 정사각형의 변의 길이가 2배, 3배 등으로 커지면 넓이는 4배, 9배등으로 커짐을 그림으로 설명한다. 그런 후에 다음 그림과 같이 반지름 1인 원을 그리고 원에 외접하는 정사각형을 그리면 정사각형은 한 변의 길이가 2이므로 면적은 4가 될 것이다. 이 정사각형의 변을 두 배로 확대해 보자. 그러면 정사각형의 넓이는 16이 되어 면적이 4배가 됨을 알 수 있다. 따라서 내접하는 마름모를 그림과 같이 생각해보자. 그러면 마름모는 4배로 됨을 알 수 있다. 따라서 원의 넓이도 4배가 될 것이다. 반지름이 1인 원의 넓이가 π이므로 반지름이 2인 원의 넓이는 π의 4배 즉 $4\times\pi$가 됨을 알 수 있으며 이 값은 $\pi\times$(반지름) $\times$(반지름)이 된다.

<그림 11>

(증명 2) [중학교 수준]

두 변의 길이가 각각 a, b 인 직사각형의 넓이는 ab 이고, 두 변의 길이가 각각 ra, rb 인 직사각형의 넓이는 r^2ab 이므로 임의의 직사각형의 두 변을 r 배해서 만들어진 직사각형의 넓이는 원래 직사각형 넓이의 r^2 배가 됨을 알 수 있다. 이제는 원에 대해서 생각해 보자. 먼저 반지름이 1인 원과 반지름이 r 인 원을 각각 생각하고 반지름이 1인 원 위에 다음과 같이 바둑판 무늬를 그려보

자. 그리고 원 내부에 위치한 각각의 직사각형의 넓이를 A_1, $A_2, \cdots$, A_8로 표시해 보자. 그러면 이러한 직사각형들에 대응하는 반지름 r인 원에서의 직사각형들의 넓이는 $r^2A_1, r^2A_2, \cdots, r^2A_8$이 될 것이다.



<그림 12>

반지름이 1인 원의 내부에 위치한 직사각형의 면적을 더하면
$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_8$이 되고 반지름이 r 인 원의 경우는

$$r^2A_1+r^2A_2+\cdots+r^2A_8=r^2(A_1+A_2+\cdots+A_8)$$

이 된다. 이 값들은 각각의 원 넓이의 근사값이 된다. 좀더 정확한 근사값을 구하고 싶으면 더 작은 직사각형들로 나누어 가면 될 것이다. 이 과정을 계속해 가면 원의 넓이는 직사각형들의 넓이의 합으로 근사시킬 수 있다. 즉, $A_1+A_2+\cdots+A_n$에서 n 을 무한히 키워가면 이 값은 반지름의 길이가 1인 원의 넓이 즉, π가 될 것이다. 이러한 직사각형들에 대응하는 반지름이 r 인 원 내부의 직사각형들의 면적을 생각하면 이

$$r^2A_1+r^2A_2+\cdots+r^2A_n=r^2(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

이 되므로 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2 이 되어 증명이 끝난다.

주의 : 원판을 나눌 때 원판 전체를 골고루 나누어야 한다.

(증명 3) [고등학교 수준]

반지름이 1인 원판 위에 바둑판 무늬를 그려 원 내부에 위치한 직사각형들을 생각하고 그 직사각형들의 넓이를 A_1, A_2, $\cdots$,A_n 등으로 표시하자. 얼마나 세밀하게 혹은 어떤 방법으로 나누었는가에 따라 직사각형들의 수는 많아질 수도 있고 그 형태들이 바뀔 수도 있다. 이러한 방법들을 '분할'이라고 하자. 그

러면 '분할'은 무수히 많이 존재한다. P를 임의의 '분할' 이라고 하고 P에 의해서 얻어지는 원 내부에 위치한 직사각형들의 면적을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라고 할 때 그 중에서 가장 큰 값을 $|P|$로 표시하자. 즉, $|P| = \max\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$

한편 A_1, A_2, $\cdots$, A_n의 면적을 갖는 직사각형들에 대응하는 반지름이 r인 원에서의 직사각형들의 넓이는 $r^2A_1, r^2A_2, \cdots, r^2A_n$이 되고 $r^2A_1 + r^2A_2 + \cdots + r^2A_n$은 반지름이 r인 원이 넓이에 대한 근사값이 된다. 그리고 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$은 반지름이 1인 원의 넓이 즉, π의 근사값이 되고

$\lim_{|P| \to 0}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \pi$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{반지름이 r인 원의 넓이}) &= \lim_{|P| \to 0}(r^2A_1 + r^2A_2 + \cdots + r^2A_n) \\ &= \lim_{|P| \to 0} r^2(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\ &= r^2 \lim_{|P| \to 0}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\ &= \pi r^2 \text{이므로 정리가 증명되었다.}\end{aligned}$$

■

다섯째, (정의 1)에서는 모든 원의 지름에 대한 원주의 비가 일정하다는 사실을 직관적으로 이해하도록 하고 그 값(원주의 길이)÷(지름의 길이)을 π로 정의하고 있다. 그러나, 이러한 직관적이 이해에 대해서 논리적인 설명이 보강되지 않기 때문에 학생들은 여러 가지 오류들을 범할 수 있다. 그러나 (정의 2)에서는 모든 원의 지름에 대한 원주의 비가 일정하다는 것(정리 2)을 증명해 보임으로써 이러한 오류들을 제거할 수 있다.

정리 2. 반지름이 r 인 원둘레의 길이는 $2\pi r$ 이다.

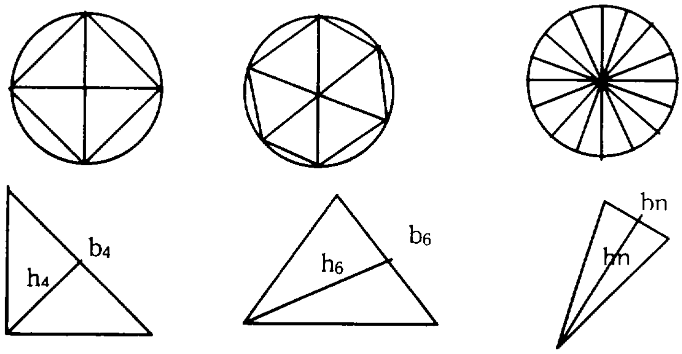
(증명 1) [초등학교 수준]

<그림 9> 방법에 의해서 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 (반지름의 길이)× $\frac{1}{2}$ ×(원주)가 됨을 알 수 있다. 그런데 반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 π 이므로 $\pi = 1 \times 1/2 \times$(원주)가 된다. 따라서 반지름이 1인 원의 원주는 $2 \times \pi \times 1$

이다. 마찬가지로, 반지름의 길이가 2인 원의 넓이는 $\pi \times 2 \times 2 = 2 \times \frac{1}{2} \times$(원주)가 된다. 따라서 반지름의 길이가 2인 원의 원주는 $2 \times \pi \times 2$가 되므로 원주는 $2 \times \pi \times$(반지름)이 된다. 따라서, (원주)$= 2 \times \pi \times$(반지름)이다.

(증명 2) [중학교 수준]

반지름이 r 인 원을 생각하고 그 둘레의 길이를 C 라고 하자. 그러면 $C=2\pi r$임을 보이면 된다. 원의 넓이를 삼각형으로 근사시켜 보자. <그림 13>과 같이 원판위에 같은 크기의 삼각형들을 그려보자.



<그림 13>

삼각형의 개수를 늘려가면 원의 넓이에 대한 더 가까운 근사값을 구할 수 있다. 각각의 삼각형을 T_4, T_6, T_n이라 하고 그 삼각형들의 밑변과 높이를 각각 b_4, h_4, h_6, h_6, b_n, h_n이라고 하자. 그러면 이들 삼각형들의 면적은 $\frac{1}{2}b_nh_n$, $\frac{1}{2}b_6h_6$, $\frac{1}{2}b_nh_n$이 될 것이다. 또한 <그림 13>에서 정n각형은 같은 크기의 이등변삼각형 T_n의 n개로 되어 있음므로 그 넓이를 A_n이라고 하면 $A_n = n \cdot \frac{1}{2}b_nh_n$이 된다. 그리고 정 n각형의 둘레의 길이를 L_n라고 하면 $L_n = nb_n$이므로 정 n 각형의 넓이는

$$A_n = \frac{1}{2}nb_nh_n = \frac{1}{2}L_nh_n \cdots ①$$

이 된다. 여기서 n이 커지면 식①의 우변의 정 n 각형의 둘레 L_n은 원둘레에

가까워지고 h_n은 반지름에 가까워진다.

한편 식①은 좌변에서 다각형 내부의 넓이 A_n은 원의 넓이에 가까워진다. 따라서 n 을 한없이 키워가면

$\pi r^2 = \frac{1}{2} Cr,\quad \pi r = \frac{1}{2} C \cdots$② 가 된다. 그러므로 원둘레 $C = 2\pi r$ 이 된다.

(증명 3) [고등학교 수준]

식 ①에서 식②가 유도되는 과정만 살펴보자.

$A_n = \frac{1}{2} L_n h_n$이므로 양변에 극한을 취하면

$$\pi r^2 = (\text{원의 넓이}) = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} L_n h_n$$

$$= \frac{1}{2} (\lim_{n \to \infty} L_n)(\lim_{n \to \infty} h_n) = \frac{1}{2} Cr$$

따라서 $\quad C = 2\pi r$

Ⅳ. π의 인터넷 사이트

본장에서는 π에 관련된 여러 가지 인터넷 사이트를 소개해 본다.

1. The π Pages

π의 계산이야기와 π소식 π를 컴퓨터로 소수 몇째자리 까지 계산했는가 등.

http://www.cecm.sfu.ca/pi

The π Pages

Why ?

"The story of pi reflects the most seminal, the most serious and sometimes the silliest aspects of mathematics. A surprising amount of the most important mathematics and a significant number of the most important mathematicians have contributed to its unfolding -- directly or otherwise.

Pi is one of the few concepts in mathematics whose mention evokes a response of recognition and interest in those not concerned professionally with the subject. It has been a part of human culture and the educated imagination for more than twenty five hundred years.

The computation of Pi is virtually the only topic from the most ancient stratum of mathematics that is still of serious interest to modern mathematical research. And to pursue this topic as it developed throughout the millennia is to follow a thread through the history of mathematics that winds through geometry, analysis and special functions, numerical analysis, algebra and number theory. It offers a subject which provides mathematicians with examples of many current mathematical techniques as well as a palpable sense of their historical development."

The above passage is taken from the introduction to "Pi : A Source Book" by L. Berggren, J. Borwein and P. Borwein. It is a large collection of papers on pi and will appear with Springer-Verlag sometime in 1997. Much additional material is available in the 1986 Wiley volume "Pi and the AGM" by J. Borwein and P. Borwein.

Pi Story the history of the computation of Pi
Pi Records current records of computation
Pi People people involved in the computation of Pi in recent years
Pi Literature
- How to Compute 1 Billion Digits of Pi
- How to Compute the 100 Billionth Binary Digit of Pi
- Pi and the AGM
- The Quest for Pi
- Recognizing a Number
- Experimental Pi

Pi News
- Here at SFU
- Science News
- Globe and Mail
- 21 years ago

Pi Aesthetics
- Pi Art
- Pi Formulas

Pi on the net
- The New Pi
- From Number to Formula
- The Miraculous Pi
- The Passion for Pi
- A Question of Numbers

Pi Files
Pi and other numbers : The ISC
More Links to other Pi-Enriched sites

Questions, Comments, and/or Suggestions? Write to:
pi@cecm.sfu.ca

2. B.C.2000년에서 현재까지 π의 계산표

http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/Pihistory.html

Table of computation of Pi from 2000 BC to now

Babylonians	2000? BCE	1	3.125 = 3 + 1/8
Egyptians	2000? BCE	1	3.16045
China	1200? BCE	1	3
Bible (1 Kings 7:23)	550? BCE	1	3
Archimedes	250? BCE	3	3.1418 (ave.)
Hon Han Shu	130 AD	1	3.1622 = sqrt(10)
Ptolemy	150	3	3.14166
Chung Hing	250?	1	3.16227 = sqrt(10)
Wang Fau	250?	1	3.15555 = 142/45
Liu Hui	263	5	3.14159
Siddhanta	380	3	3.1416
Tsu Ch'ung Chi	480?	7	3.1415926
Aryabhata	499	4	3.14156
Brahmagupta	640?	1	3.162277 = sqrt(10)
Al-Khowarizmi	800	4	3.1416
Fibonacci	1220	3	3.141818
Al-Kashi	1429	14	
Otho	1573	6	3.1415929
Viete	1593	9	3.1415926536
(ave.)			
Romanus	1593	15	
Van Ceulen	1596	20	
Van Ceulen	1615	35	
Newton	1665	16	
Sharp	1699	71	

Seki	1700?	10
Kamata	1730?	25
Machin	1706	100
De Lagny	1719	127 (112 correct)
Takebe	1723	41
Matsunaga	1739	50
Vega	1794	140
Rutherford	1824	208 (152 correct)
Strassnitzky and Dase	1844	200
Clausen	1847	248
Lehmann	1853	261
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	707 (527 correct)

The 20'th century

Ferguson	1946	620
Ferguson	Jan. 1947	710
Ferguson and Wrench	Sep. 1947	808
Smith and Wrench	1949	1,120
Reitwiesner et al. (ENIAC)	1949	2,037
Nicholson and Jeenel	1954	3,092
Felton	1957	7,480
Genuys	Jan. 1958	10,000
Felton	May 1958	10,021
Guilloud	1959	16,167
Shanks and Wrench	1961	100,265
Guilloud and Filliatre	1966	250,000
Guilloud and Dichampt	1967	500,000
Guilloud and Bouyer	1973	1,001,250
Miyoshi and Kanada	1981	2,000,036
Guilloud	1982	2,000,050
Tamura	1982	2,097,144
Tamura and Kanada	1982	4,194,288
Tamura and Kanada	1982	8,388,576
Kanada, Yoshino and Tamura	1982	16,777,206
Ushiro and Kanada	Oct. 1983	10,013,395
Gosper	1985	17,526,200
Bailey	Jan. 1986	29,360,111
Kanada and Tamura	Sep. 1986	33,554,414
Kanada and Tamura	Oct. 1986	67,108,839

Kanada, Tamura, Kubo et al	Jan. 1987	134,217,700
Kanada and Tamura	Jan. 1988	201,326,551
Chudnovskys	May 1989	480,000,000
Chudnovskys	Jun. 1989	525,229,270
Kanada and Tamura	Jul. 1989	536,870,898
Kanada and Tamura	Nov. 1989	1,073,741,799
Chudnovskys	Aug. 1989	1,011,196,691
Chudnovskys	Aug. 1991	2,260,000,000
Chudnovskys	May 1994	4,044,000,000
Takahashi and Kanada	Jun. 1995	3,221,225,466
Takahashi and Kanada	Aug. 1995	4,294,967,286
Takahashi and Kanada	Oct. 1995	6,442,450,938

The n'th binary digit

Bailey, Borwein, Plouffe (hexa 921C73C6838FB2)	Nov. 1995	40,000,000,000
Bellard (hexa 1A10A49B3E2B82A4404F9193AD4EB6)	Jul. 1996	200,000,000,000
Bellard (hexa 9C381872D27596F81D0E48B95A6C46)	Oct. 1996	400,000,000,000

3. π를 소수점 아래 10000자리까지 계산한 사이트

http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/dataB/isc/C/pi10000.txt

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640
628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535
940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593
344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360
726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036
001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738
193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983
367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317
675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717
872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196
086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783

875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235
378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525
720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389
124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838
175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471
018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906
949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764
024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503
028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498
720275596023648066549911988183479775356636980742654252786255181841757467
289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136
115735255213347574184946843852332390739414333454776241686251898356948556
209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438
382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608412848862
694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437
191728746776465757396241389086583264599581339047802759009946576407895126
946839835259570982582262052248940772671947826848260147699090264013639443
745530506820349625245174939965143142980919065925093722169646151570985838
741059788595977297549893016175392846813826868386894277415599185592524595
395943104997252468084598727364469584865383673622262609912460805124388439
045124413654976278079771569143599770012961608944169486855584840635342207
222582848864815845602850601684273945226746767889525213852254995466672782
398645659611635488623057745649803559363456817432411251507606947945109659
609402522887971089314566913686722874894056010150330861792868092087476091
782493858900971490967598526136554978189312978482168299894872265880485756
401427047755513237964145152374623436454285844479526586782105114135473573
952311342716610213596953623144295248493718711014576540359027993440374200
731057853906219838744780847848968332144571386875194350643021845319104848
100537061468067491927819119793995206141966342875444064374512371819217999
839101591956181467514269123974894090718649423196156794520809514655022523
160388193014209376213785595663893778708303906979207734672218256259966150
142150306803844773454920260541466592520149744285073251866600213243408819
071048633173464965145390579626856100550810665879699816357473638405257145

910289706414011097120628043903975951567715770042033786993600723055876317
635942187312514712053292819182618612586732157919841484882916447060957527
069572209175671167229109816909152801735067127485832228718352093539657251
210835791513698820914442100675103346711031412671113699086585163983150197
016515116851714376576183515565088490998985998238734552833163550764791853
589322618548963213293308985706420467525907091548141654985946163718027098
199430992448895757128289059232332609729971208443357326548938239119325974
636673058360414281388303203824903758985243744170291327656180937734440307
074692112019130203303801976211011004492932151608424448596376698389522868
478312355265821314495768572624334418930396864262434107732269780280731891
544110104468232527162010526522721116603966655730925471105578537634668206
531098965269186205647693125705863566201855810072936065987648611791045334
885034611365768675324944166803962657978771855608455296541266540853061434
443185867697514566140680070023787765913440171274947042056223053899456131
407112700040785473326993908145466464588079727082668306343285878569830523
5808933065757406795457163775254202114955761581400250126222859413021647155
097925923099079654737612551765675135751782966645477917450112996148903046
399471329621073404375189573596145890193897131117904297828564750320319869
151402870808599048010941214722131794764777262241425485454033215718530614
228813758504306332175182979866223717215916077166925474873898665494945011
465406284336639379003976926567214638530673609657120918076383271664162748
888007869256029022847210403172118608204190004229661711963779213375751149
595015660493186294726547364252308177036751590673502350728354056704038674
351362222477158915049530984448933309634087807693259939780541934144737744
184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735381
297416772947867242292465436680098067692823828068996400482435403701416314
965897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647165122
893578601588161755782973523344604281512627203734314653197777416031990665
541876397929334419521541341899485444734567383162499341913181480927777103
863877343177207545654532207770921201905166096280490926360197598828161332
316663652861932668633606273567630354477628035045077723554710585954870279
081435624014517180624643626794561275318134078330336254232783944975382437
205835311477119926063813346776879695970309833913077109870408591337464144

2822772634659470474587847787201927715280731767907707157213444730605700733
349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788
518529092854520116583934196562134914341595625865865570552690496520985803
385072242648293972858478316305777756068887644624824685792603953527734803
048029005876075825104747091643961362676044925627420420832085661190625454
337213153595845068772460290161876679524061634252257719542916299193064553
779914037340432875262888963995879475729174642635745525407909145135711136
941091193932519107602082520261879853188770584297259167781314969900901921
169717372784768472686084900337702424291651300500516832336435038951702989
392233451722013812806965011784408745196012122859937162313017114448464090
389064495444006198690754851602632750529834918740786680881833851022833450
850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175461
395398468339363830474611996653858153842056853386218672523340283087112328
278921250771262946322956398989893582116745627010218356462201349671518819
097303811980049734072396103685406643193950979019069963955245300545058068
550195673022921913933918568034490398205955100226353536192041994745538593
810234395544959778377902374216172711172364343543947822181852862408514006
660443325888569867054315470696574745855033232334210730154594051655379068
662733379958511562578432298827372319898757141595781119635833005940873068
121602876496286744604774649159950549737425626901049037781986835938146574
126804925648798556145372347867330390468838343634655379498641927056387293
174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830722
012690147546684765357616477379467520049075715552781965362132392640616013
635815590742202020318727760527721900556148425551879253034351398442532234
157623361064250639049750086562710953591946589751413103482276930624743536
325691607815478181152843667957061108615331504452127473924544945423682886
061340841486377670096120715124914043027253860764823634143346235189757664
521641376796903149501910857598442391986291642193994907236234646844117394
032659184044378051333894525742399508296591228508555821572503107125701266
830240292952522011872676756220415420516184163484756516999811614101002996
078386909291603028840026910414079288621507842451670908700069928212066041
837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293486
003415872298053498965022629174878820273420922224533985626476691490556284

250391275771028402799806636582548892648802545661017296702664076559042909
945681506526530537182941270336931378517860904070866711496558343434769338
578171138645587367812301458768712660348913909562009939361031029161615288
138437909904231747336394804575931493140529763475748119356709110137751721
008031559024853090669203767192203322909433467685142214477379393751703443
661991040337511173547191855046449026365512816228824462575916333039107225
383742182140883508657391771509682887478265699599574490661758344137522397
096834080053559849175417381883999446974867626551658276584835884531427756
879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178
583829204197484423608007193045761893234922927965019875187212726750798125
547095890455635792122103334669749923563025494780249011419521238281530911
407907386025152274299581807247162591668545133312394804947079119153267343
028244186041426363954800044800267049624820179289647669758318327131425170
296923488962766844032326092752496035799646925650493681836090032380929345
958897069536534940603402166544375589004563288225054525564056448246515187
547119621844396582533754388569094113031509526179378002974120766514793942
590298969594699556576121865619673378623625612521632086286922210327488921
865436480229678070576561514463204692790682120738837781423356282360896320
806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279839
400415297002878307667094447456013455641725437090697939612257142989467154
357846878861444581231459357198492252847160504922124247014121478057345510
500801908699603302763478708108175450119307141223390866393833952942578690
507643100638351983438934159613185434754649556978103829309716465143840700
707360411237359984345225161050702705623526601276484830840761183013052793
205427462865403603674532865105706587488225698157936789766974220575059683
440869735020141020672358502007245225632651341055924019027421624843914035
998953539459094407046912091409387001264560016237428802109276457931065792
295524988727584610126483699989225695968815920560010165525637568

4. title : Technology Centers for the Integrated Technology Classroom 통합기술 수업을 위한 기술 집단 개관 : 교육과정 및 통합기술 과정을 포함한 주제 : π를 미국 초등학교에서 어떤 식으로 교육하고 있는가?

http://forum.swarthmore.edu/paths/measurement/disc.pi.html

π Discovering Pi π

Middle School Lessons || Contents

A lesson in which students work with circumference in order to discover Pi.

Author: Jack Eckley, Sunset Elem., Cody, WY
Grade Level/Subject: 5-7, geometry
Overview: Many students tend to memorize, without understanding, formulas that we use in geometry or other mathematic areas. This activity allows students to discover why pi works in solving problems dealing with finding circumference.
Objectives: The students will:
Measure the circumference of an object to the nearest millimeter.
Measure the diameter of an object to the nearest millimeter.
Explain how the number 3.14 for pi was determined.

Demonstrate that by dividing the circumference of an object by its diameter you end up with pi.
Discover the formula for finding circumference using pi, and demonstrate it.
Resources/Materials: Round objects such as jars, lids,etc., measuring tapes, or string and rulers, paper, pencil,calculator
Activities and Procedures:
Divide class into groups of two.
Give materials to student teams.
Have student teams make a table or chart that shows name or number of object, circumference, diameter, and ?.
Have students measure and record each object's circumference and diameter, then divide the circumference by the diameter and record result in the ? column.
Have students find the average for the ? column and compare to other groups in the class to determine a pattern. Students can then find the average number for the class.
Explain to the students that they have just discovered pi, which is very important in

finding the circumference of an object. (You may wish to give some historical information about pi at this time or have students research the information.)
Have students come up with a formula to find the circumference of an object knowing only the diameter of that object, and the number that represents pi. Students must prove their formula works by demonstration and measuring to check their results.

Tying it all together:

Have students write their conclusions for the activities they have just done. Students may also share what they have learned with other members of the class.
Give students three problems listing only the diameter of each object and have them find the circumference.
Encourage students to share learned knowledge with parents.

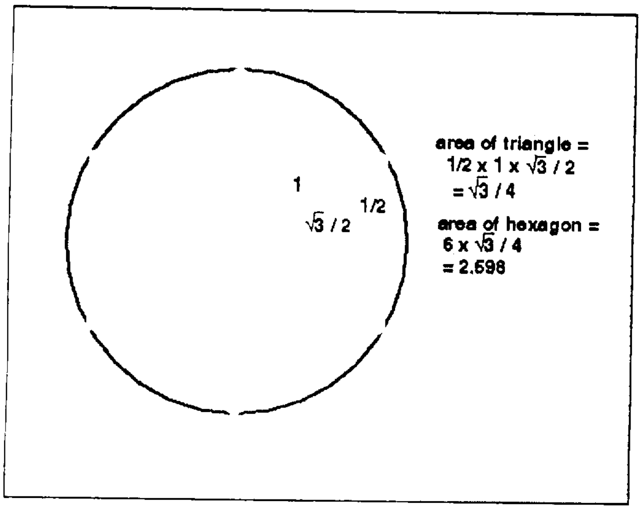
Back to Middle School Lessons and Materials

Suggestion Box || Home || Steve's Dump || Help Desk || Quick Reference || Search

The Math Forum ** webmaster@forum.swarthmore.edu ** 26 July 1997

5. 아르키메데스의 π 계산법

http://www.math.psu.edu/dna/archimedes/area.gif



6. π 마크

http://dolphin.upenn/pics/

7. The Monte Carlo Method to approximate Pi

http://www.daimi.aau.dk/~u951581/pi/MonteCarlo/pi.MonteCarlo.htm

The Monte Carlo Method to approximate Pi

Alexandru Csete
stud.scient.
Intsitute of Physics and Astronomy
University of Aarhus

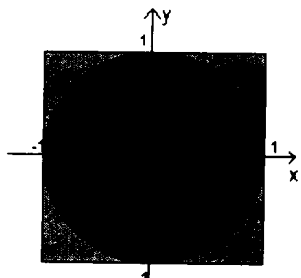


Figure 1

1. Introduction

In the following I will describe a statistical method for approximating pi called The Monte Carlo Method. It is a simple method and easy to implement on a computer, as you will see.

2. Definitions

We have to look at the unit circle (radius=1) within a rectangle with sides equal to 2 (see figure 1). I will use the notation and for regions inside and outside the unit circle with the following obvious definitions:

from which it follows that:

3. How to calculate?

Now pick two random numbers (x,y) and do it N times. Lets say that M of those times, the random point lies inside the unit circle. Now, the probability of that a random point lies inside the unit circle is given as a fraction between the area of the unit circle ( ) and the rectangle. Thus Pi can be calculated as:

4. Programming

As you can see in the final formula for Pi, the precision (number of digits) depends on how many times you pick an (x,y) pair. The greater N and M are the more digits you get. You can have a look and try my sample Pascal program (Turbo Pascal) at montcarl.pas . There is also an executable montcarl.exe for PC's if you don't have a Pascal compiler.

5. My Results

I did run the above mentioned program 10 times with N=100000 on a simple i386 based machine. It gave me the value 3.14142±0.00441 - not bad I think!

6. References

Here are some links related to the Monte Carlo method:

A Java Applet Illustrating the Monte Carlo Method.

Monte Carlo Method for Estimating Definite Integrals.

Last modified: April 22nd, 1998 by Alexandru Csete.

8. π의 아름다움을 찬양한 시(poem) 사이트
http://www.ugcs.caltech.edu/~eveander/beauty.html

Beauty

three point one four one five nine

två sex fem tre fem åtta nio
siete nueve tres dos tres ocho cuatro
enam dua enam empat tiga tiga delapan
Drei Zwei Sieben Neun Fünf Null Zwei
hachi hachi yon ichi ku shichi ichi
chwech nawr tri nawr nawr tri saith
cinq un zero cinq huit deux zero
jiu qi si jiu si si wu
tisha'a shanyim shlosha efes shiv'ya shmona echad
kuus neli null kuus kaks kaheksa kuus
dua nila osem devat devat osem sest
dwa osiem zero trzy cztery osiem dwa
Ha Sarm Si Song Neung Neung Chet
zero sei sette nove otto due uno
quattuor octo nihil octo sex quinque unus
kolme kaksi kahdeksan kaksi kolme nolla viisi
shesh tcha-har haft sefr noh-h seh hasht
vier vier zes nul negen vijf vijf
gong oh pal e e sam il
yedi iki bes üç bes dokuz üç
pagh chorgh wa' cha' chorgh loS chorgh
en en en sju fire fem null
theo okto tessera ena methen theo epta
nista jedan devet tri osam pet dva
één één nul vijf vijf vijf negen
anom apat apat anom siduwa siduwa siyam
ceithir ochd naoi co/ig ceithir naoi tri\
sifr thalaatha thamaaniya waahid tis'a sitta arba'a
char do aat aat ake sifur naw
chat\ ng/ luhk luhk ng/ gau/ saam\
tri ceathair ceathair se haon do ocht
kvar ses kvin cent kvar sep du
ci ci ze bi xa ze bi

thien ek chay phaunch tho saath ek
dva nool' awdin dyevyat' nool' dyevyat' awdin
knolla unja aara knolla etta unja aara
chhow now bay thron chaar chhow shoonya
három négy nyolc hat egy nulla négy
cinci patru trei doi sase sase patru
astoni divi viens tris tris devini tris
sex núll sjö tveir sex núll tveir
keturi devyni vienas keturi vienas du septyni
Drie Sewe Twee Vier Vyf Agt Sewe
'ole 'ole 'eono 'eono 'ole 'eono 'ekolu
en fem fem otte otte en syv
quatro oito oito um cinco dois zero
Na_oo Don Shunya Na_oo saha Don aath
twai niun twai fimf fidwor ni ains niun
wah shefekh wah diw khemet shershew fedew
dri siksi seybi ayti neygi tu feyfi
siyam wala tatlo anim wala wala isa
{{}} {{}, {{}}, {{}, {{}}}} {{}, {{}}, {{}, {{}}}} {} {{}, {{}}, {{}, {{}}}, {{}, {{}},
{{}, {{}}}}, {{}, {{}}, {{}, {{}}}, {{}, {{}}, {{}, {{}}}}}} {{}, {{}}, {{}, {{}}}} {}
5 4 8 8 2 0 4
shest shest pet dva eden tri osum
wha kotahi wha ono iwa rima kotahi
onbadhu naangu onru aindhu onru onru aaru
sunna thommidhi naalgu moodu moodu sunna aidhu
eallu erradu eallu sunne moodu aaru aizhdhu
bay nam chín nam chín môt chín
tano tatu si kitu tisa mbili moja nane
guhta okta okta cieza golema gavtti okta

[View the source code if you want to see what language each line is in.]

9. π 의 계산 역사

http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/records.html

Inverse Symbolic Calculator

Table of current records for the computation of constants

by Simon Plouffe

Associate Member of the CECM

last update was April 13, 1998

History of the computation of Pi

N'th binary digit computations

Big numbers

Notes

The table of records of computation has now a new home

V. 결 론

수학의 역사상 가장 오랜 난문중 하나인 원적문제가 자와 컴퍼스로 해결할 수 없다는 것이 19세기에 와서 π가 초월수라는 결과가 나옴으로써 증명되었다. 오늘날에는 컴퓨터의 등장으로 60억자리 이상의 정확한 값을 계산하는등 선진국에서는 π의 자리수를 늘이는 경쟁을 하고 있는 중이다.

우리 나라의 원주율에 대한 역사는 내세울만한 사실이 발견되고 있지 않다. 다만 원주율 자체에 대해 연구한 것은 없으나, 중국의 수학관련 서적을 들여와 근대에까지 π의 값으로서 3, 3.14, 22/7 , 3.1415926535라고 정하여 사용하고 있다. 현재 초등학교 6학년 1학기 교과서와 중학교 1학년 교과서에서 π에 관하여 간단히 소개되고 있다.

초등학교에서는 실험적인 방법에 의하여 직관적으로 취급함으로써 π=3.14라는 고정 관념에 빠져들고 있으며 중학교에서도 π=3.141592… 라는 주입식 교육을 하고 있는 실정이다.

초·중등학교의 수학 교육의 목적이 사고하는 능력을 기르고 합리적으로 문제를 해결할 수 있게 한다고 하면 주입식 교육보다는 원주율이 연구되어온 과정을 역사적으로 소개하는 것이 더 타당하다고 생각된다. 그렇게 함으로써 원주율을 이해하게 되고, 직관적 사고에서 벗어나 보다 논리적으로 합리적인 학습 결과가 이루어지리라 기대된다.

※ 참 고 문 헌

1. 교연미디어, 수리영역 교사용 지도서, 1997.
2. 교육부, 초등학교 교사용 지도서, 1997.
3. 교학사, 중학교 교사용 지도서, 1997.
4. 김경수, "원주율 지도에 관한 연구", 석사학위 논문, 홍익대학교 교육대학원.
5. 김순길, "원주율의 수학사적 연구", 석사학위 논문, 단국대학교 교육대학원.
6. 김용운, 김용국, 재미있는 수학여행 서울 : 김영사, 1995.
7. 박래식, 수학나라에 바보는 없다, 서울 : 푸른산, 1995.
8. 양영오, π의 해석적 표현과 구성주의, 수학교육.제9집, 제주도 중등수학교과 교육연구회, pp.1～14.
9. 오노에이치(한명수 역), PC로 도전하는 원주율(π의 역사에서 계산까지), 전파과학사, 1994.
10. 육인선, 수학은 아름다워 서울 : 동녘, 1996.
11. 이우영, 수학사, 경문사, 1997.
12. Peter Beckmann, 박영훈 역, π의 역사, 실천문학사, 1997.
13. DM. Burton, The history of mathematics; an introduction, Wm. C. Brown Publishers, 1991.

<Abstract>

A study on the computation of Pi(π) and teaching its concept in mathematics

Ko Sung-moo

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by Professor Yang Young-oh

Pi has been mechanically treated as 'π=3.14' by experimental method in the elementary school mathematics class. And in the middle school mathematics class, Pi has been required to memorize as 'π=3.141592…".

In this paper we deal with the followings: mathematical history about Pi(π), the method of approximating Pi(π), various presentations, and Internet sites concerning Pi(π). Also, we will give the effective teaching method of Pi(π) in the middle school mathematics class.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1998.

감사의 글

기대하는 마음으로 문을 두드리던 일이 어제 같은데 이제 과정을 마치게 되었습니다.

본 논문이 완성될 수 있도록 바쁘신 가운데도 많은 시간을 할애하여 친절하고 세심하게 지도해 주신 양영오 교수님과 그 동안 많은 가르침과 격려를 해 주신 수학교육과, 수학과 교수님들께 진심으로 고마운 말씀을 드립니다.

그리고 학교 수업진행의 어려움이 많은 데도 과정을 마칠 수 있도록 배려해 주신 제주대학교 사범대학 부속중학교 교장 선생님을 비롯한 동료 선생님께도 감사드리며, 같이 과정을 시작하여 낙오없이 전 과정을 마칠 수 있도록 협조해 주신 대학원 동기 여러분의 우의에도 감사드립니다.

끝으로 노심초사 자식을 걱정하시는 부모님, 어려움을 참으면서 인내와 사랑으로 내조해준 아내와 항상 건강하고 밝게 자라는 상현, 승현이와 함께 이 조그마한 성취의 기쁨을 나누고자 합니다.

1998년 7월

고성무 드림