

碩士學位論文

웨이브렛 변환을 이용한 영상의 잡음 제거



濟州大學校 大學院

通信工學科

金 眞 經

2001 年 12 月

웨이브렛 변환을 이용한 영상의 잡음 제거

指導教授 李 鎔 鶴

金 眞 經

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

2001 年 12 月

金眞經의 工學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 金 興 洙 印

委 員 林 載 允 印

委 員 李 鎔 鶴 印

濟州大學校 大學院

2001年 12 月

Denoising of The Image Using Wavelet Transform

Jin-kyoung Kim
(Supervised by professor Yong-hak Lee)

A thesis submitted in partial fulfillment of
the requirement for the degree of Master of
Science

2001. 12.

This thesis has been examined and approved.

Thesis director, Heung-soo Kim, Prof. of Telecom. Eng.

(Name and signature)

_____ Date

DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATION ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

목 차

Abstract	1
I. 서론	2
II. 웨이브렛 변환	5
1. 푸리에 변환과 단시간 푸리에 변환	5
2. 웨이브렛 변환	7
3. 다해상도 분해	9
4. 쌍직교 웨이브렛	14
5. 웨이브렛 변환을 이용한 영상의 다해상도 표현	16
6. 웨이브렛 관련 필터	18
III. 웨이브렛 변환을 이용한 잡음제거	19
1. 기존의 임계치를 이용한 방법	20
2. 대역별 임계치 적용 기법	21
IV. 모의 실험 및 결과	24
1. Lenna 영상의 잡음제거	26
2. Baboons 영상의 잡음제거	29
3. Girl 영상의 잡음제거	31
V. 결론	34
참고문헌	35

Abstract

Wavelet transforms can decompose a signal into several scales that represent different frequency band. The position of signal's instantaneous at each scale can be determined approximately by wavelet transform. Such a property can be used to denoise. Threshold-based denoising method was proposed by Donoho. Threshold-based denoising method is used hard-threshold or soft-threshold. It is very simple and satisfy performance. But it is not satisfied each band characteristic of the analyzed multi-resolution image.

This paper proposes the threshold techniques which applied threshold method according to each band characteristic of image. The proposed method analyzed image into multi-resolution by wavelet transform and considered each band characteristic of the analyzed image. It is used hard-threshold to LL band that have form of original image mostly, and soft-threshold to LH band that have horizontal component of original image, HL band that have vertical component of original image and HH band that have diagonal component of original image.

In this paper, we simulated with three different 512×512 images that are Lenna, Baboons and Girl, and compared threshold-based method with the proposed method. The simulation results showed that the proposed method could achieved higher quality image improvement of about 0.9dB, 1.4dB, 1.9dB each Lenna, Baboons, Girl than hard-threshold method and about 3dB, 2.2dB, 3dB each Lenna, Baboons, Girl than soft-threshold method. We can convince that the proposed method is more efficient than the threshold-based method.

I. 서론

사회가 고도로 정보화 됨에 따라 초고속 정보 통신망, 인터넷을 비롯한 여러 종류의 채널이나 매체를 통해 다양한 멀티미디어 정보 서비스가 제공되고 있다. 멀티미디어 정보는 영상과 음향을 중심으로 문자, 도형, 음성 등이 결합된 다중 정보로서, 이 정보의 단순 PCM 데이터의 양은 방대하여 고속 통신망으로도 감당하기 어렵게 된다. 특히, 멀티미디어 정보 중 영상 데이터는 대용량의 영상정보를 고 능력으로 압축하면서 응용 분야에 따른 요구 조건을 만족해야 한다. 이러한 방법으로 JPEG, MPEG-1, MPEG-2, H.261과 H.263 등 영상부호화에 대한 표준이 이미 제정되었다. 그리고 차세대 영상부호화 방식으로 정지영상은 JPEG-2000, 동영상은 MPEG-4를 중심으로 국제 표준의 제정이 완료되고 있으며 각국의 표준 및 기술 선점을 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.(Wallace, 1992)(ITU-T SG 15, 1995) 현재 JPEG(Joint Photographic Expert Group)과 MPEG(Moving Picture Expert Group)표준에서는 DCT(Discrete Cosine Transform)을 기반으로 하는 블록 단위의 변환을 사용하고 있다. 이 변환 기법은 낮은 비트율에서 블록간의 경계가 현저하게 나타나는 블록경계현상이 발생한다.(Mallat, 1989) 이에 비하여 웨이브렛 변환에서는 공간 및 주파수의 해상도를 가변적으로 나타낼 수 있으므로 평탄하게 변하는 부분과 윤곽선 정보와 같이 급격하게 변하는 부분을 동시에 효율적으로 다룰 수 있으므로 낮은 비트율 압축에서 블록경계현상을 일으키지 않는다. 따라서 낮은 비트율 압축을 위해서는 웨이브렛 변환을 이용하는 것이 효과적이다.(Averbuch, 1996)

웨이브렛 변환은 1910년 Haar가 처음으로 직교 웨이브렛을 만들었으며, 80년대 중반 Morlet 등이 처음으로 웨이브렛을 지진파 연구에 이용하였다. 이후 Daubechies와 Mallat 등에 의해 다중해상도 이론이 발표된 후 영상부호화에 있어서 웨이브렛의 응용에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.(Daubechies, 1992) 이러한 웨이브렛 변환은 신호를 다해상도로 분해하며, 입력 신호는 서로 다른 해상

도로 표현하기 위한 부 신호들과 나머지 신호들을 표현하기 위한 세부 신호들로 나누어진다. 영상이나 음성 등의 신호들은 에너지 분포를 주파수 영역에서 관찰할 때 고르지 못한 분포를 가지고 있다. 이로 인해 신호를 분해하는 것이 필요하게 되었으며, 기본적으로 도입된 개념이 스펙트럼을 부대역으로 분할하여 각각의 부대역을 독립적으로 목적에 맞도록 처리하는 M 대역분해이다. 신호를 다해상도로 분해하는 것은 두 가지 방법이 있다. 하나는 M개의 동일한 대역으로 분할하는 방법이고 다른 하나는 dyadic 트리 구조로의 분해인데 웨이브렛 변환이 이에 속한다. 웨이브렛으로 변환된 영상신호는 서로 다른 주파수 특징을 갖고 이들간에는 어느 정도의 상관관계가 존재한다. 웨이브렛 변환을 이용하여 영상을 다해상도로 분해한 후 영상을 압축하는 것은 기존의 DCT를 이용한 방법보다 압축률을 높일 수 있고 블로킹현상이 일어나는 적절한 압축방법이다.

영상을 디지털화하거나 처리, 전송, 저장하는 과정에서 여러 가지 요인에 의해서 열화가 발생하게 된다. 영상에서 열화가 발생하면 영상 자체의 인지도를 떨어뜨릴 뿐만 아니라 여러 가지 영상 처리 응용 분야에서 급격한 성능 저하가 발생하게 된다. 따라서 영상처리와 영상 인식 분야에 있어서 열화를 제거하는 일은 매우 중요하다. 영상복원(Image Restoration)은 이러한 열화를 제거하거나 재구성하고 복원하기 위하여 디지털 신호 처리 알고리즘을 이용하여 주어진 영상 신호를 개선하는 과정이다. 영상 신호에 가산되는 잡음은 주어진 상황에 따라 감지기 및 전자회로에서 발생하는 가우스 잡음, 데이터 획득 과정 등에서 일어날 수 있는 임펄스잡음 등 여러 가지가 존재한다. 그중 가우스 잡음에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 이러한 잡음을 제거하기 위해서는 가우스 필터, 이동 평균 필터, 메디안 필터, 위너 필터 등 선형 필터를 이용하며 비선형 필터로는 시그마 필터, Morphological 필터 등이 이용된다. 가우스 잡음은 선형 필터로 처리하는 것이 좋은 성능을 보이며 비선형 필터들은 임펄스 잡음에 대하여 우수하나 가우스 잡음에 대해서는 선형 필터에 비해 성능이 떨어지게 된다. 그러나 선형 필터들은 잡음 제거의 성능 면에서는 우수하나 영상내의 선, 윤곽이 번지는 블러링 현상이 나타나는 단점을 갖고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 연구로서 웨이브렛이 갖고 있는 장점인 원래의 영상 신호와 잡음을 잘 분리하는 특징을 이용하여 예지 성분을 보존하면서 필터링을 수행하는 영상 향상 기법들이 제안되어 왔다. David Donoho는 웨이브렛

해석을 잡음 제거 기법에 적용한 임계치 기법을 제안하여 잡음을 분리해내는데 우수한 결과를 얻을 수 있었다.(Donoho, 1994) 이 기법은 웨이블릿 변환을 이용하여 다해상도로 분해된 영상의 각 대역별 특성을 고려하지 않아서 완전히 잡음을 제거하지는 못했다.

본 논문에서는 웨이블릿 변환을 이용하여 잡음이 첨가된 영상에서 잡음을 제거하는 기법에 대하여 제시한다. 이 기법은 Donoho가 제안한 임계치 기법을 영상의 각 대역별 특성에 따라 적용한다. 먼저 웨이블릿 변환을 이용하여 영상을 다해상도로 분해한 후 분해된 영상의 각 대역별 특성을 고려하여 원 영상의 형태를 대부분 가지고 있는 LL 대역에는 hard-threshold 기법을 사용하고, 원 영상의 수평 성분을 가지고 있는 LH 대역, 원 영상의 수직 성분을 가지고 있는 HL 대역과 원 영상의 대각 성분을 가지고 있는 HH 대역에는 soft-threshold 기법을 사용한다. 제안한 기법의 성능 평가는 시뮬레이션을 통해 Donoho의 임계치 기법과 비교하여 원 영상과의 차이가 줄어짐을 확인하고 객관적인 영상 화질의 척도인 PSNR(Peak Signal to Noise Ratio)를 이용하여 비교 분석한다.

본 논문의 구성은 I 장에서는 기존의 잡음 제거 기법과 동향에 대한 내용과 연구 방향을 제시하고, II 장에서는 웨이블릿 변환의 특징 및 웨이블릿 함수에 대하여 설명한다. 그리고 III 장에서는 기존의 임계치 기법에 대한 기술과 대역별 임계치 기법으로 잡음 제거하는 방법을 제시한다. IV 장에서는 기존의 방법과 비교하여 우수한 특성을 확인하고, 마지막으로 V 장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

II. 웨이브렛 변환

1. 푸리에 변환과 단시간 푸리에 변환

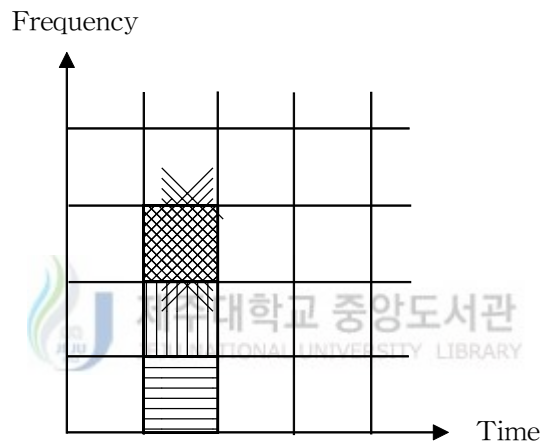
신호를 분석하기 위해 가장 폭넓게 쓰이는 것은 푸리에 변환이다. 푸리에 변환은 입력 신호에 대하여 전 구간에 대해서 적분을 하기 때문에 정상적인 신호에 대해서는 정확한 주파수 특성을 알 수 있다. 그러나 비정체적인 신호에 대해서는 그 신호에 대한 주파수 특성은 알 수 있지만 시간에 대한 주파수별 특성은 알 수 없는 시간-주파수간의 불확정성 원리를 따른다. 따라서 시변 주파수 특성을 갖는 신호를 해석하기 위해서는 시간과 주파수를 동시에 표현하는 방법이 필요하다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 창함수 $w(t)$ 를 사용하여 $w(t)e^{-j\omega t}$ 와 같이 국부적으로 존재하는 함수를 만든다. 이것을 사용하여 수정한 푸리에 변환을 단시간 푸리에 변환(STFT : Short Time Fourier Transform)이라 부른다.

Gabor는 창함수로 가우스 함수 e^{-t^2} 을 사용하여 다음과 같은 단시간 푸리에 변환을 고려하였다.

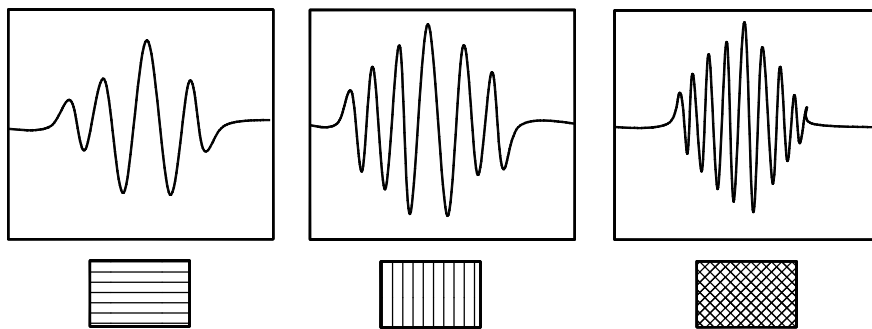
$$F(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{(t-b)^2}{\epsilon^2}} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1)$$

여기서 ϵ 은 실수이고 이 값은 미리 선정하여 놓는다. 식(1)을 Gabor변환이라 부르고 $F(\omega, b)$ 는 신호 $f(t)$ 를 시간과 주파수 평면에 표현한다. 식(1)에서처럼 시간축으로 일정하게 이동하는 시간 윈도우를 적용하고 푸리에 변환을 수행함으로써, Fig 1과 같은 신호에 대한 스펙트로그램(spectrogram)이라고 하는 시간-주파수 표현을 얻을 수 있다. 시간축으로 이동하는 윈도우에 의해 시간 국부성을 확보하고, 이것을 푸리에 변환해서 주파수 특성을 파악함으로써 시변 주파수 특성을

해석할 수 있다. 푸리에 변환에서와 같이 STFT는 윈도우에 의해 결정되는 시간-주파수간의 국부성이 상충관계(trade-off)를 갖는다. 시간 영역에서 버팀을 작게 해서 해상도를 높이면 주파수 영역에서의 해상도는 낮아지고, 주파수 영역에서의 해상도를 높이면 시간 영역에서의 해상도가 낮아진다. 따라서, 비정체적인 특성을 갖는 신호를 효율적으로 분석할 수 없다는 결점이 있다. 이 결점을 보완하기 위해서 신호의 다중해상도 표현이 가능한 웨이블릿 변환이 발전하였다. Fig 1에서 (a)는 창함수에 의해 시간-주파수 평면이 일정한 창의 크기로 나뉘어진 것을 나타내고, (b)는 (a)에 표시된 각 영역에 대한 주파수를 표현한다.



(a) Coverage of the time-frequency plane



(b) Typical basis

Fig 1. Basis functions and time-frequency resolution of STFT

2. 웨이브렛 변환

웨이브렛 변환은 1910년 Haar가 처음으로 고주파 해석을 위하여 푸리에 스펙트럼을 옥타브 밴드로 나눈 직교 웨이브렛을 만들었다. Morlet 등은 단일 원형 함수를 기초로 한 국부 푸리에 해석을 변형하여 지진과 연구에 웨이브렛을 이용하였다. Daubechies는 유한한 길이의 스케일링 함수 및 웨이브렛을 발생시킬 수 있는 Daubechies 웨이브렛을 제안하였고, Mallat 등이 다해상도 이론을 발표한 후 웨이브렛 변환 이론은 크게 발전 및 응용이 되어지고 있다.(Daubechies, 1992)(Combes, 1987)(Mallat, 1989) 웨이브렛 이론은 초기에 수학적인 문제를 다루기 위해 연구된 분야이지만, 공학분야에서도 필터뱅크의 형태로 정리되었다. 웨이브렛 변환은 신호의 해석에 있어 주파수에 따라 신호의 시간 해상도를 달리하여 신호를 해석함으로 신호의 고주파 성분은 시간 해상도를 높여주며 비정체적인 신호 분석에 유리하다.

웨이브렛은 모 웨이브렛(mother wavelet)이라 불리는 함수의 천이와 스케일링을 통해서 생성되는 함수의 재귀적 집합으로 구성된다. 모 웨이브렛은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in R^+, b \in R \quad (2)$$

여기서 R 은 실수, R^+ 는 양의 실수이고 웨이브렛 함수 ψ 는 기본적으로 평균이 영(zero)인 함수로서 식(3)과 같다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3)$$

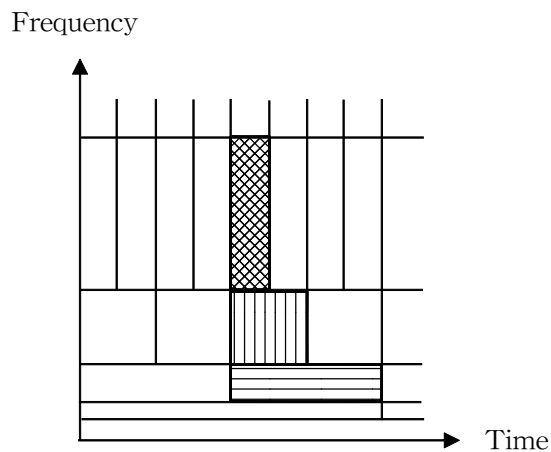
식(2)에서 $\psi(t)$ 는 모 웨이브렛, a 는 스케일링 변수이고 b 는 천이 변수를 나타

낸다. 이때 함수 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 의 웨이블릿 변환은 웨이블릿 $\psi_{a,b}$ 와 $f(t)$ 의 곱의 적분으로 구하여 진다. 여기서 $L^2(\mathbb{R})$ 은 실수 평면을 나타낸다.

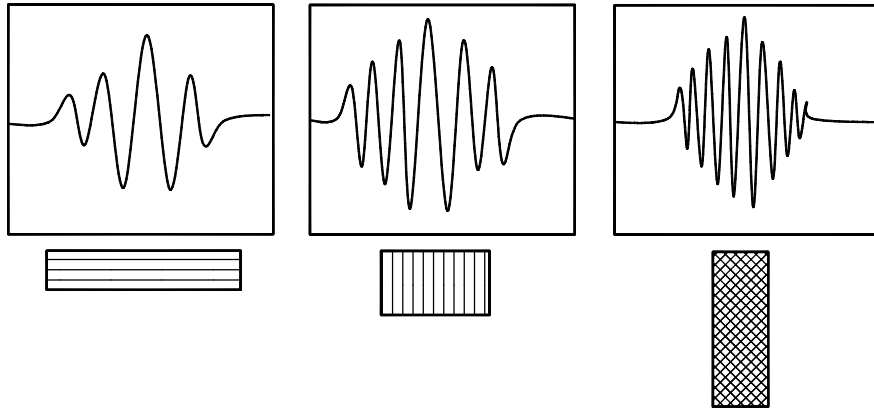
$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4)$$

여기서 $Wf(a, b)$ 는 함수 $f(t)$ 의 웨이블릿 변환이다.

신호처리에 주로 응용되는 웨이블릿은 주파수 영역에서 주파수 국부성을 갖는 대역통과 필터의 특성을 나타내고, 시간영역에서는 옹골 버팀(compactly support)를 가짐으로서 시간 윈도우와 같은 시간 국부성을 내포한다. Fig 2에서처럼 식(4)에서 변수 a 가 감소하면 웨이블릿의 시간 국부성은 낮아지는 반면 주파수 국부성을 높아진다. a, b 를 축으로 2차원 평면에 웨이블릿 변환 값을 계조도나 색깔로 표현한 것을 스케일로그램(scalogram)이라고 하며, STFT의 스펙트로그램과 유사한 해석을 함으로서 신호의 시간-주파수 특징을 나타낼 수 있다. Fig 2에서 (a)는 웨이블릿 변환에 의해 시간-주파수 평면이 각각 다른 창(changing window)의 크기로 나뉘어진 것을 나타내고, (b)는 (a)에 표시된 각 영역에 대한 주파수를 표현한다.



(a) Coverage of the time-frequency plane



(b) Typical basis

Fig 2. Basis functions and time-frequency resolution of wavelet transform

일반적으로 영상에서 에지 등과 같은 높은 주파수를 갖는 신호들은 짧은 공간이나 시간 영역에서 존재하고, 평탄한 영역으로 이루어진 낮은 주파수를 갖는 신호들은 넓은 공간에 분포한다. 이러한 특성을 나타내는 신호를 분석하기 위해 고정된 윈도우를 갖는 STFT를 사용하는 것보다 높은 주파수일 때는 시간영역에서 작은 윈도우를 갖고 낮은 주파수일 때는 넓은 윈도우를 갖는 가변 윈도우를 적용하는 것이 시간-주파수 해상도의 관점에서는 유리하다.

3. 다해상도 분해

신호의 다해상도 표현은 신호 $x(t)$ 를 일련의 내포 부공간 $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{Z}$ 상으로 투영시킴으로써 이루어진다. 여기서 \mathbb{Z} 는 정수이다. 신호 $x(t)$ 의 다해상도 표현 $x_m(t)$ 와 내포 부공간들의 관계는 식(5)와 같다.

$$V_m \subset V_{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5-1)$$

$$\bigcap_m V_m = \{0\} \quad (5-2)$$

$$\bigcup_m V_m = L^2(R) \quad (5-3)$$

$$x(t) \in V_m \Leftrightarrow x(2t) \in V_{m-1} \quad (5-4)$$

$$x_m(t) = \sum_{m,n} \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle \phi_{m,n}(t) \quad (5-5)$$

여기서 m 은 스케일링 변수이고, n 은 시간 천이 변수이다. 또한, 부공간 V_0 의 정규 직교 기저 $\phi(t-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ 를 생성하는 스케일링 함수 $\phi(t)$ 가 존재한다. 이러한 각 내포 부공간의 기저들은 식(6)에서와 같이 스케일링 함수를 시간천이 및 스케일링을 통해 생성된다.

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$



신호를 높은 해상도 공간 V_{m-1} 에서 낮은 해상도 공간 V_m 으로 근사화할 때, 정보의 손실이 발생하는데, 이러한 신호를 잔여신호(residual signal)라고 하며, V_m 의 직교 여 부공간 W_m 상에 존재한다. 상하위 해상도 공간과 직교하는 공간 사이의 관계는 식(7)과 같고, Fig 3에서 이상적인 저대역 부공간 V_m 와 밴드대역 부공간 W_m 들의 스펙트럼을 나타내었다.

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m, \quad V_m \perp W_m \quad (7)$$

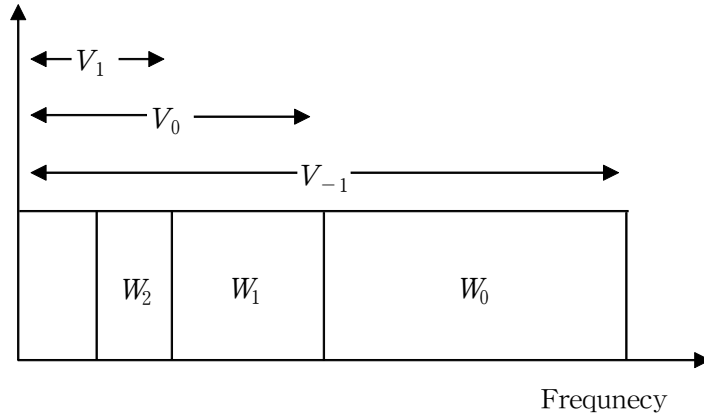


Fig 3. Spectrum of V_m and W_m

부공간 V_m 의 스케일 함수 $\phi(t)$ 와 유사하게 부공간 W_m 을 구성하는 정규직교 기저가 존재하며 기저를 생성하는 모 웨이브렛 $\psi(t)$ 가 존재한다. 식(8)에서와 같이 각 부공간의 기저는 웨이브렛 $\psi(t)$ 을 스케일링과 시간천이를 수행함으로써 생성된다.



$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), \quad m, n \in Z \quad (8-1)$$

$$x_{m-1}(t) = x_m(t) + r_m(t) \quad (8-2)$$

$$r_m(t) = \sum_n \langle x(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (8-3)$$

여기서 $r_m(t)$ 는 V_m 의 직교 여 부공간 W_m 상에 존재하는 잔여신호이다.

하나의 해상도 부공간은 더 낮은 해상도 부공간과 직교 여 부공간으로 표현가능하고, 반복적용을 하면 여 부공간만으로 표현이 가능하다. 따라서, 식(9)과 같이 신호 $x(t)$ 는 W_m 의 기저들로 표현할 수 있다.

$$V_m(t) = W_m \oplus W_{m-1} \oplus W_{m-2} \cdots \quad (9-1)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigcup_m (\oplus W_m), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9-2)$$

$$x(t) = \sum_{m,n} \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle \phi_{m,n}(t) \quad (9-3)$$

한편 $\phi(t) \in V_m$ 이면 $\phi(2t) \in V_{m-1}$ 이고, 식(10)과 같은 관계를 만족한다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2t-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10-1)$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2t-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10-2)$$

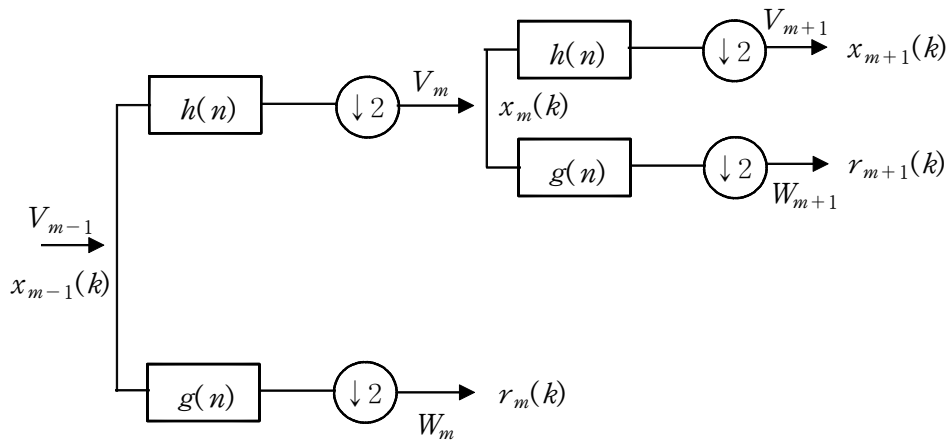
$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (10-3)$$


제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

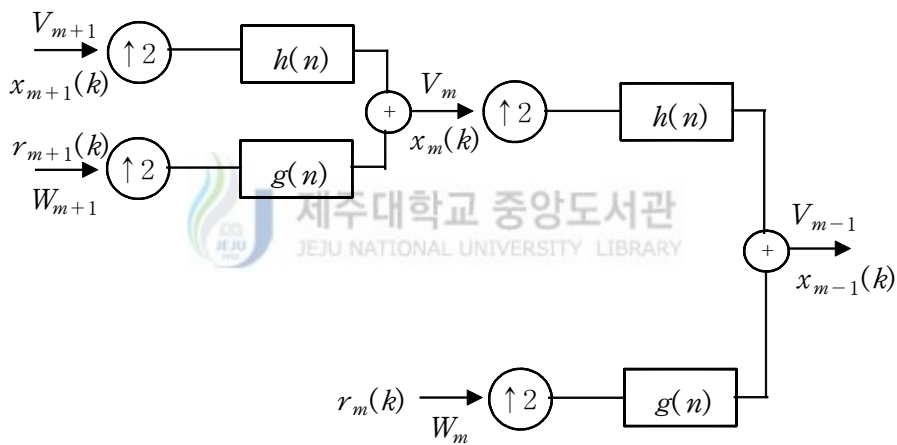
$$g(n) = (-1)^n h(1-n) \quad (10-4)$$

$$\sum_n g(n) = 0 \quad (10-5)$$

신호 $x(t)$ 에 대해 $c_{mn} = \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle$, $d_{mn} = \langle x(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$ 일 때, 부공간 V_m , W_m 과 $h(n)$, $g(n)$ 간의 관계는 Fig 4와 같이 2진 트리 구조를 형성한다.



(a) Wavelet analysis



(b) Wavelet synthesis

Fig 4. Binary tree structure of analysis and synthesis of wavelet

Fig 4에서 $h(n)$ 은 저역통과 필터이고 $g(n)$ 은 고역통과 필터이다. \uparrow 은 upsampling을 나타내고 \downarrow 은 downsampling을 나타낸다.

4. 쌍직교 웨이브렛

영상 신호처리에 주로 사용되는 웨이브렛은 크게 직교 웨이브렛과 쌍직교 웨이브렛(biorthogonal wavelet)의 두 개의 분류로 나눌 수 있다. 직교 웨이브렛은 직교 기저로부터 구현된다. 직교 웨이브렛은 분석 필터 बैं크와 합성 필터 बैं크가 똑같은 웨이브렛 함수로부터 유도된 것으로서, 각 대역의 임펄스 응답은 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\langle h_i(n-2l), h_j(n-2k) \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (11)$$

여기서 h_i 는 분석 필터 बैं크이고 h_j 는 합성 필터 बैं크이다.

영상 부호화에 있어서 직교 웨이브렛의 가장 중요한 성질은 FIR 필터에 대응하는 옹골 버팀이다. 이러한 옹골 버팀 웨이브렛은 Daubechies에 의해 만들어졌고, Mallat에 의해 빠른 계산 알고리즘이 만들어졌다.(Mallat, 1989) 그러나, 이 직교 웨이브렛의 가장 큰 단점은 비대칭성에 있다. 이러한 단점은 FIR 필터와 관련있는 비선형을 의미한다. 따라서 웨이브렛 부대역의 경계부분에 에러가 생긴다. 완전 재구성 특성을 만족하는 유한 차수의 필터가 Daubechies에 의해 설계되었지만 대칭성은 불연속적인 Haar 기저 이외에는 만족시킬 수 없다. 이로 인해 정규 직교 조건을 완화하여 쌍직교 조건을 만족하도록 하는 쌍직교 웨이브렛이 만들어졌다. 쌍직교 웨이브렛은 분석필터 बैं크와 합성 필터 बैं크가 각각 다른 웨이브렛 함수로부터 유도된 경우로, 각 대역간의 직교성이 성립한다. 쌍직교 웨이브렛은 대칭성과 옹골 버팀의 성질 모두를 만족한다.(Daubechies, 1993)

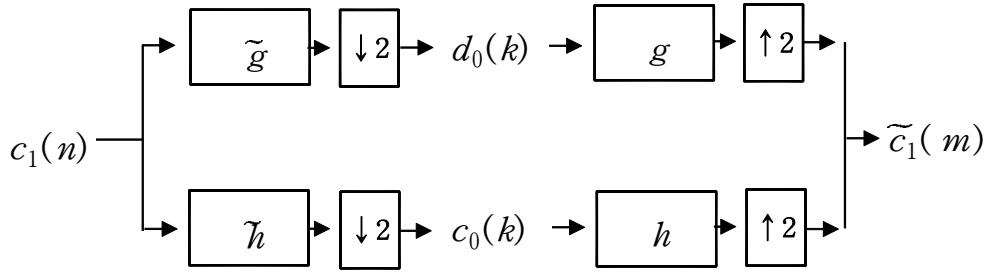


Fig 5. 2-Channel biorthogonal wavelet filter bank

Fig 5는 2채널 쌍직교 웨이브렛 필터 बैं크를 나타낸 것이다. 입력단에 $c_1(n)$ 의 신호가 입력되었을 때 분석필터 बैं크의 출력은

$$c_0(k) = \sum_n \tilde{h}(2k-n)c_1(n), \quad d_0(k) = \sum_n \tilde{g}(2k-n)c_1(n) \quad (12)$$

이고, 합성필터 बैं크의 출력은 식(13)으로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{c}_1(m) = \sum_k [h(2k-m)c_0(k) + g(2k-m)d_0(k)] \quad (13)$$

위 식(12)를 식(13)에 대입함으로써 합성필터 बैं크의 출력을 구할 수 있다.

$$\tilde{c}_1(m) = \sum_n \sum_k [h(2k-m)\tilde{h}(2k-n) + g(2k-m)\tilde{g}(2k-n)]c_1(n) \quad (14)$$

식(14)에서 완전복원을 위해 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\tilde{c}_1(m) = c_1(n) \quad (15)$$

$$\sum_k [h(2k-m)\tilde{h}(2k-n) + g(2k-m)\tilde{g}(2k-n)] = \delta(m-n) \quad (16)$$

식(15), (16)의 조건으로부터 4개의 필터들은 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\tilde{g}(n) = (-1)^n h(1-n), \quad g(n) = (-1)^n \tilde{h}(1-n) \quad (17)$$

식(17)을 식(16)에 대입하면 식(18)과 같은 결과를 얻는다.

$$\sum_n \tilde{h}(n) h(n+2k) = \delta(k) \quad (18)$$

즉, 직교인 경우 $h(n)$ 은 자신의 짝수 천이된 것과 직교인 반면 쌍직교인 경우 h 와 \tilde{h} 가 직교이다.

5. 웨이브렛 변환을 이용한 영상의 다해상도 표현



영상과 같은 2차원 신호를 웨이브렛 변환하면 4개의 성분으로 나누어진다. 나누어진 영상은 에너지 분포가 가장 높은 저 레벨 대역과 수평성분, 수직성분, 대각성분으로 구성된다.

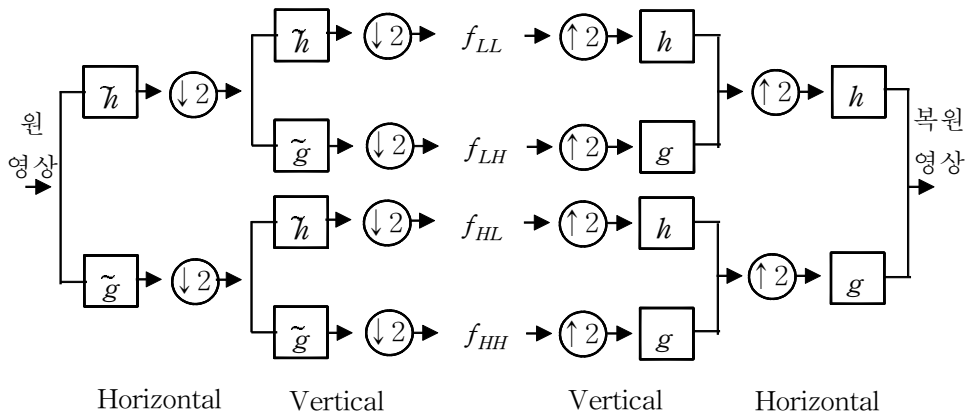


Fig 6. 2-dimension wavelet transform block diagram

Fig 6은 웨이브렛 변환을 이용하여 2차원 신호가 다해상도로 변환되는 과정이다. 임의의 영상 $f(x, y)$ 는 수평 방향으로 필터링되어 저주파 성분인 $f_L(x, y)$ 와 고주파 성분인 $f_H(x, y)$ 로 나누어지고 $f_L(x, y)$ 와 $f_H(x, y)$ 의 대역은 원 신호의 반이기 때문에 수평 방향으로 downsample을 해준다. 그리고 $f_L(x, y)$ 와 $f_H(x, y)$ 을 다시 수직 방향으로 필터링함으로써 4개의 부영상을 얻는다. 즉, f_{LL} , f_{LH} , f_{HL} , f_{HH} 4개의 부영상을 얻는다. f_{LH} 는 영상의 수평 성분을 강조하고, f_{HL} 은 수직 성분을, f_{HH} 는 대각 성분을 강조한다.

2차원 영상의 복원은 각 방향의 세부적인 영상들을 수직방향으로 upsampling한 후 각각의 영상들을 수직방향으로 적절히 필터링을 한다. 이런 과정이 다시 수평 방향으로 이루어져 최종적인 복원된 영상을 얻는다.

LL Approximation	LH Horizontal
HL Vertical	HH Diagonal

Fig 7. Image analysis using wavelet transform

Fig 7에서 LL 대역은 복원 영상에 미치는 영향이 가장 큰 대역으로서 원 영상 신호가 가지고 있는 에너지의 대부분을 포함하고 있다. 그리고, LH 대역은 영상의 수평 에지에 해당하는 고주파 성분이 나타나고, HL 대역에서는 수직 에지에 해당하는 고주파 성분이 나타나며, HH 대역에서는 대각 에지에 해당하는 고주파 성분이 나타난다.

6. 웨이브렛 관련 필터

이산 웨이브렛 변환을 이용한 영상의 다해상도 분해에 사용되는 필터들은 완전 복원을 만족해야 하지만 필터뱅크로 구현시 양자화 에러가 발생한다. 따라서, 응용분야에 따라 선형성이 요구되는 경우 완전복원 조건을 제외하면 필터 설계의 자유도를 높을 수 있다. 영상 처리에 널리 이용되는 웨이브렛 관련 필터에 대해 필터간의 직교성, 선형 위상, 완전 복원 조건 등의 특징을 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Characteristics of filters

특성 필터	직교성	선형위상	완전복원
Equiripple Filter	O	X	O
Daubechies' Filter	O	X	O
Coiflets Filter	O	△	O
Biorthogonal Filter	X	O	O
Johnstone's Filter	X	O	X

여기서 X는 나쁨을 나타내고 △는 보통을 나타내며 O는 좋음을 나타낸다. Equiripple 필터는 regularity가 낮으므로 영상 신호의 손실 부호화에 적용하기에는 부적절하다. Daubechies 필터는 영상 신호에 처리하기에 적절한 regularity가 높은 필터이다. Coiflets 필터는 완전 복원을 만족하면서 가능한 선형 위상에 가깝도록 설계되었다. Biorthogonal 필터는 직교성보다는 선형 위상과 완전 복원을 만족하도록 설계되었다. 그리고 Johnstone 필터는 완전 복원은 만족하지 않지만, 주파수 특성이 완전 복원 필터의 진폭응답과 유사하며 위상 특성을 갖고 있다.

III. 웨이브렛 변환을 이용한 잡음제거

최근의 잡음제거 기술들은 원래의 신호공간을 직교성에 의한 변환을 이용하여 처리하는 방법들을 활용하고 있으며, 이것은 변환된 신호가 원래 신호와 잡음의 특징을 구분할 수 있는 성질을 나타냄으로서 원하는 신호로의 추정을 더욱 쉽게 할 수 있기 때문이다. 또한 변환을 이용한 방법은 신호나 영상에서 잡음을 제거할 때 나타나게 되는 두 가지 주된 관심인 잡음 제거 효율과 에지의 보존성이라는 trade-off를 효과적으로 잘 표현할 수 있게 한다.

일반적으로 잡음이 첨가된 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = x + n \quad (19)$$

여기서 x 는 원신호이고 n 은 백색잡음으로서 $N(0, \sigma^2)$ 의 정규분포를 가지며 신호 x 에 독립적이다. 식(19)의 양변에 웨이브렛 변환을 취하여 신호 x 에 대한 웨이브렛 변환 계수를 $\{s_{j,k}\}$, 잡음 n 에 대한 웨이브렛 변환 계수를 $\{e_{j,k}\}$ 라 하고 잡음화된 신호 y 에 대한 웨이브렛 변환 계수를 $\{w_{j,k}\}$ 라 하면 식(20)과 같이 $w_{j,k}$ 를 원래 신호 계수 $s_{j,k}$ 와 웨이브렛 영역에서도 백색 잡음의 특성이 유지되는 잡음 계수 $e_{j,k}$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$w_{j,k} = s_{j,k} + e_{j,k} \quad (20)$$

여기서 j 는 스케일링 변수이고 k 는 천이 변수이다.

식(19)에서 원 신호 x 의 추정치를 \hat{x} 라 하고 식(20)에서 웨이브렛 변환된 신호 $s_{j,k}$ 의 추정치를 $\hat{s}_{j,k}$ 라 할 때 추정치 \hat{x} 를 찾는 문제는 신호와 잡음의 특성이 잘

분리된 웨이블릿 영역에서의 추정치 $\hat{s}_{j,k}$ 를 구하는 문제로 전환되어진다.

1. 기존의 임계치를 이용한 방법

추정치 $\hat{s}_{j,k}$ 를 구하는데 임계치 기법은 Donoho가 제안한 hard-threshold와 soft-threshold 방법을 사용하여 웨이블릿 영역에서 잡음을 제거하였다. 이 방법을 수식적으로 표현하면 웨이블릿 계수 $w_{j,k}$ 와 임계치 λ 에 대해, soft-threshold는

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} - \lambda & \text{if } w_{j,k} > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| \leq \lambda \\ w_{j,k} + \lambda & \text{if } w_{j,k} < -\lambda \end{cases} \quad (21)$$



이고, hard-threshold는

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} & \text{if } |w_{j,k}| > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (22)$$

이다. 여기서 λ 는 임계치이며 그 값은 $\sigma\sqrt{2\log(n)}$ 이다. σ 는 잡음의 표준편차이고 n 은 원 신호의 길이 이다. 이와 같이 추정된 $\hat{s}_{j,k}$ 를 역 웨이블릿 변환하면 원 신호 x 에 대한 추정치 \hat{x} 를 얻는다. 이러한 임계치 기법을 Donoho는 웨이블릿 변환을 이용하여 영상을 다해상도로 분해했을 때 각 대역 성분의 특성에 관계없이 일괄적으로 soft-threshold나 아니면 hard-threshold 기법을 사용하였다.

2. 대역별 임계치 적용 기법

Donoho가 제안한 임계치 기법은 영상의 잡음을 제거하는데 어느 정도 우수한 성능을 보였으나 각 대역별 특성을 고려하지 않아서 완전히 잡음을 제거하지는 못했다. 본 논문에서 제안한 대역별 임계치 적용 기법은 Fig 8에 나타난 영상처럼 웨이블릿 변환을 이용하여 다해상도로 분해한 후 영상의 대역별 특성을 고려하여 LL 대역에는 hard-threshold 기법을 사용하였고, LH 대역, HL 대역 및 HH 대역에는 soft-threshold 기법을 적용하였다.

웨이블릿 변환으로 분해된 부밴드 영상들은 서로 다른 통계적인 특성을 갖는다. 다른 단계의 부밴드 영상 계수들의 절대치 간에도 일정한 상관성이 존재하는데, 약 0.3정도의 값을 갖는 것으로 알려져 있다.



(a) Original image



(b) Noised image

Fig 8. Multi-resolution of the image

Fig 8(a)는 Lenna 원 영상이 다해상도로 분해된 영상을 나타내었고, Fig 8(b)는 Lenna 영상에 잡음을 첨가한 영상을 다해상도로 분해한 것을 나타내었다. Fig 8(a)에서처럼 웨이브렛 변환을 이용하여 영상을 다해상도로 분해된 대역인 LL 대역, LH 대역, HL 대역 및 HH 대역들은 각기 다른 특징을 가지고 있다. LL 대역 영상은 저주파 통과 필터를 거친 영역으로서 원래 영상보다 해상도가 반으로 줄어든 결과를 갖는다. 그러나 원 영상 신호가 가지는 에너지의 대부분을 가지고 있기 때문에 복원 영상에 미치는 영향이 가장 큰 대역이다. 그리고 Fig 8(a)와 (b)의 LL 대역을 비교하면 LL대역의 웨이브렛 변환 계수가 잡음의 웨이브렛 변환 계수보다 큰 계수들이 많아 잡음에 의한 손상이 작다. 따라서 임계치보다 큰 절대값을 가진 계수들은 남겨두고 임계치보다 작은 절대값을 가진 계수들은 없애는 hard-threshold기법을 적용한다. LL 대역 특성에 비해 비교적 중요하지 않은 LH 대역, HL 대역과 HH 대역은 각각 영상의 수평 에지, 수직 에지와 대각 에지에 해당하는 고주파 성분을 나타낸다. 특히, HH대역은 영상의 대각 성분을 포함하고 있으나, 계수값들의 통계적 특성에 의하면 대부분 0에 가까운 값을 가지고 있으며, 인접한 화소들과 상관관계가 매우 미약하다. 이것은 수직, 수평 방향의 에지를 포

함하는 영상에 대해 웨이브렛 변환을 수행하면 변환 대역에서도 계수들이 에지의 방향으로 존재하지만, 대각선 성분은 영상에서 모서리와 같이 일정한 방향으로 존재하는 것은 아니기 때문이다. 그리고 Fig 8(a)와 (b)의 LH 대역, HL 대역과 HH 대역을 비교하면 이들 각 대역의 웨이브렛 변환 계수가 잡음의 웨이브렛 변환 계수와 비슷하여 잡음에 많이 손상되어 있다. 따라서 각 밴드의 웨이브렛 계수와 잡음 계수의 차를 이용하는 soft-threshold 기법을 적용한다. 이 과정은 Fig 9에 나타나 있다.

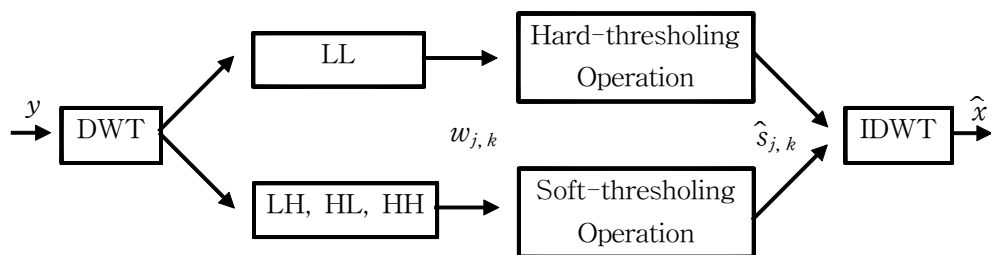


Fig 9. Block diagram of the proposed method

Fig 9를 보면 잡음이 첨가된 영상 y 를 웨이브렛 변환하여 다해상도 분해한다. 그 다음 LL 대역의 웨이브렛 변환된 계수 $w_{j,k}$ 에는 hard-threshold 기법을 적용하여 잡음의 제거된 추정 웨이브렛 계수 $\hat{s}_{j,k}$ 를 얻는다. LH 대역, HL 대역과 HH 대역의 웨이브렛 변환된 계수에는 soft-threshold 기법을 적용하여 잡음이 제거된 웨이브렛 계수를 얻는다. 마지막으로 이 계수를 역 웨이브렛 변환하면 잡음이 제거된 추정 영상 신호 \hat{x} 를 얻는다.

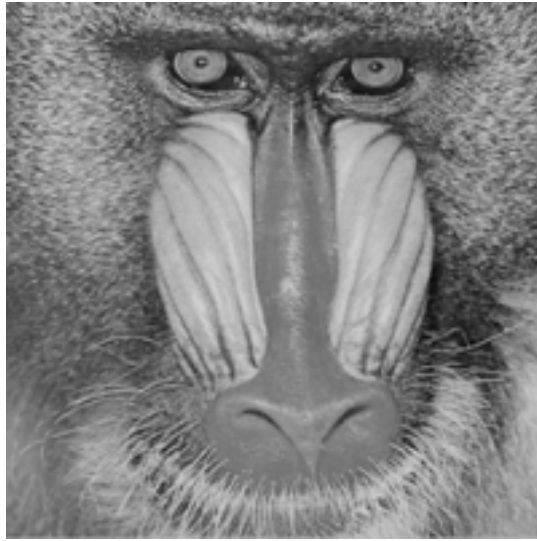
IV. 모의 실험 및 결과

본 논문에서는 3개의 영상을 가지고 시뮬레이션 하였으며 영상의 크기는 512×512 인 흑백 영상으로 명도는 0~255의 값을 가지며 Fig 10에 나타내었다. 각 영상의 특징을 살펴보면 Lenna 영상은 대체적으로 평활한 영상이다. 갑자기 변화하는 부분이 작고 변환 부호화를 수행하였을 경우 저주파 성분에 많은 정보가 포함되어 있다. Baboons 영상은 영상의 전 부분에서 신호가 급격하게 변하는 복잡 영상의 구조이다. Girl 영상은 Lenna 영상과 비슷하며 Lenna 영상보다 조금 덜 복잡한 구조를 갖고 있다.

다분해 해상도를 위한 웨이브렛 필터는 필터간의 직교성과 완전 복원성이 우수한 Coiflets 함수를 사용하였다. 그리고 잡음은 백색 가우시안 잡음을 사용하였다.



(a) Lenna



(b) Baboons



(c) Girl

Fig 10. Original image

1. Lenna 영상의 잡음제거



Fig 11. Noised image

Fig 11은 원 영상에 백색 가우시안 잡음을 첨가한 영상이다. 이 잡음화된 영상을 각각 기존의 hard-threshold기법과 soft-threshold기법과 제안한 방법에 의해 잡음을 제거하였고 비교하기 위해서 각각의 PSNR(peak signal to noise ratio)을 구하였다. PSNR은 원 영상과 복원된 영상의 차이를 제공한 값들의 평균인 MSE(mean square errors)를 이용하여 계산하는데, 두 영상의 유사성을 비교하여 복원력을 나타내는 척도가 된다.

MSE와 PSNR은 다음과 같이 정의된다.

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad dB \quad (23)$$

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^M [u(m, n) - \hat{u}(m, n)]^2 \quad (24)$$

여기서 $u(m, n)$ 과 $\hat{u}(m, n)$ 은 각각 원 영상과 처리된 영상 함수를 나타낸다. 그리고 M 은 원 영상의 수평 크기이고 N 은 원 영상의 수직 크기이다.

Table 2. PSNR of the Lenna image

	hard-threshold 기법	soft-threshold 기법	제안한 기법
PSNR[dB]	31.9899	29.8855	32.8669

Table 2는 Lenna 영상의 PSNR을 나타낸 것으로 Donoho의 hard-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 0.9 dB, soft-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 3 dB 정도 향상되었음을 보인다. 그리고 각 기법으로 잡음 제거된 영상은 Fig 12에는 hard-threshold 기법에 의한 영상이고 Fig 13에는 soft-threshold 기법에 의한 영상이며 Fig 14에는 본 논문에서 제안한 기법에 의한 영상이다.



Fig 12. Denoised image by hard-threshold method



Fig 13. Denoised image by soft-threshold method



Fig 14. Denoised image by proposed method

2. Baboons 영상의 잡음제거

Fig 15는 Fig 10(b)에 나타난 원 영상에 백색 가우시안 잡음을 첨가한 영상이다.

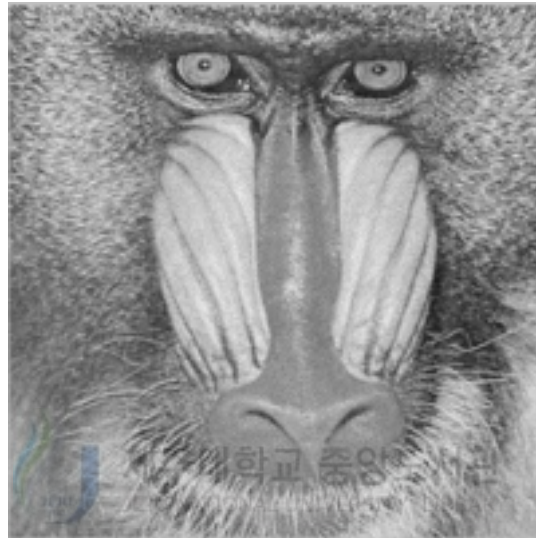


Fig 15. Noised image

Table 3. PSNR of the Baboons image

	hard-threshold 기법	soft-threshold 기법	제안한 기법
PSNR[dB]	22.9798	22.1609	24.3717

Table 3은 Baboons 영상의 PSNR을 나타낸 것으로 Donoho의 hard-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 1.4 dB, soft-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 2.2 dB 정도 향상되었음을 보인다. 그리고 각 기법으로 잡음 제거된 영상은 Fig 16에는 hard-threshold 기법에 의한 영상이고 Fig 17에는 soft-threshold 기법에 의한 영상이며 Fig 18에는 본 논문에서 제안한 기법에 의한 영상이다.



Fig 16. Denoised image by hard-threshold method



Fig 17. Denoise image by soft-threshold method



Fig 18. Denoised image by proposed method

3. Girl 영상의 잡음제거



Fig 19는 Fig 10(c)의 원 영상에 백색 가우시안 잡음을 첨가한 영상이다.



Fig 19. Noised image

Table 4. PSNR of the Girl image

	hard-threshold 기법	soft-threshold 기법	제안한 기법
PSNR[dB]	31.2602	30.1462	33.1536

Table 4는 Girl 영상의 PSNR을 나타낸 것으로 Donoho의 hard-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 1.9 dB, soft-threshold 기법을 사용한 것에 비해서는 약 3 dB 정도 향상되었다. 그리고 각 기법으로 잡음 제거된 영상은 Fig 20에는 hard-threshold 기법에 의한 영상이고 Fig 21에는 soft-threshold 기법에 의한 영상이며 Fig 22에는 본 논문에서 제안한 기법에 의한 영상이다.



Fig 20. Denoised image by hard-threshold method



Fig 21. Denoised image by soft-threshold method



Fig 22. Denoised image by proposed method

V. 결론

본 논문에서는 잡음이 첨가된 영상에서 잡음을 제거하는 기법에 대하여 제안하였다. 이 기법은 Donoho가 제안하였던 임계치 기법을 영상의 대역별 특성에 대해 각기 다른 임계치 기법을 적용하여 잡음을 제거하였다. 영상을 웨이블릿 변환하여 영상의 중요 성분을 포함하고 있는 LL 대역, 영상의 수평 성분을 가지는 LH 대역, 영상의 수직 성분을 가지는 HL 대역과 영상의 대각 성분을 가지는 HH 대역으로 다해상도 분해하였다. 그리고 각 영상의 특성에 맞게 LL밴드에서는 임계치보다 큰 절대값을 가진 계수들은 남겨두고 임계치보다 작은 절대값을 가진 계수들은 없애는 hard-threshold 기법을 적용하고 LH밴드, HL밴드와 HH밴드에서는 각 밴드의 웨이블릿 계수와 잡음 계수의 차를 이용하는 soft-threshold 기법을 사용하였다.

본 논문에서는 실험 데이터로 사용된 512×512인 세 개의 영상 Lenna, Baboons 와 Girl에 대하여 Donoho가 제안한 임계치 기법과 본 논문에서 제안한 영상의 대역별 특성에 따른 임계치 기법의 화질을 비교하였으며 객관적인 척도인 PSNR을 비교 분석하여 보았다. 그 결과 Lenna 영상인 경우, Donoho가 제안한 임계치 기법 중에 hard-threshold 기법으로만 잡음을 제거한 경우에 비해서는 약 0.9 dB 정도 향상되었고 soft-threshold 기법만으로 잡음을 제거한 경우보다는 약 3 dB 정도 향상되었다. Baboons 영상인 경우에는 hard-threshold 기법에 비해서는 약 1.4 dB 정도 향상되었고 soft-threshold 기법에 비해서는 약 2.2 dB 정도 향상되었다. Girl 영상인 경우에는 hard-threshold 기법에 비해서는 약 1.9 dB 정도 향상되었고 soft-threshold 기법보다는 약 3 dB 정도 향상되어 Donoho의 임계치 기법보다 제안된 기법이 우수함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- Antonini, M., et al. 1990, Image coding using vector quantization in the wavelet transform domain , IEEE Pro. on ICASSP, pp. 2297-2300.
- Averbuch, A., D. Lazar and M. Israeli, 1996, Image Compression Using Wavelet Transform and Multiresolution Decomposition, IEEE Trans. on Image Pressing, vol. 5, no. 1, pp. 4-15.
- Bruce A. G., D. L. Donoho, H-Y Gao, R. D. Martin, 1994, Denoising and robust non-linear wavelet analysis, Processings SPIE Conference.
- Burrus C. S., R. A. Gopinath, H. Guo, 1998, Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A primer, Prentice-Hall, 268pp.
- Combes. J. M., A. Grossmann, and P. Tchamitchian, 1989, Wavelet, Time-Frequency Methods and Phase Space, Proceedings of the International Conference.
- Daubechies I., 1992, Ten Lectures on Wavelets, SIAM.
- Daubechies I., Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Comm. in Pure and Applied Math. Vol. 41, pp. 909-996.
- Donoho D. L. and I. M. Johnstone, 1994, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, Biometrika vol.81, pp. 425-455.
- Donoho D. L. and I. M. Johnstone, 1995, Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage, Journal of the American Statistical Association, pp. 1200-1224.
- Donoho D. L., Denoising by Soft-thresholding, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 41.
- Efstratiadis, S. N, D. Tzovaras, and M. G. Strintzis, 1996, Hierarchical

partition priority wavelet image compression, IEEE Trans. Image Processing, vol. 5, no. 7, pp. 1111-1123.

· Ghael S. P., A. M. Sayeed, and R. G. Barraniuk, 1997, Improved Wavelet Denoising via Empirical Wiener Filtering, Proceedings of SPIE, Mathematical Imaging, San Diego.

· Gilbert. G. Walter, 1994, Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications, CRC Pres, 248pp.

· Lewis A. and G. Knowles, 1992, Image compression using the 2-D wavelet transform, IEEE Trans. Image Processing, vol. 1, pp. 244-250.

· Mallat S. G., 1989, A theory for multiresolution signal decomposition the wavelet representation, IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., vol. 11, pp. 674-693.

· Mallat S. G., 1989, Multiresolution Approximations and Wavelet Orthogonal Base of $L^2(\mathbb{R})$, Tran, Amer. Math. Soc., vol. 315, no. 1, pp. 69-87.

· Mallat S. G. and W. L. Hwang, 1992, Singularity Detection and Processing with Wavelets, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 38, No. 2.

· Quan Pan, Lei Zhang, Guanzhong Dai and Hongcai Zhang, 1999, Two Denoising Methods by Wavelet Transform, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 12.

· Rioul O. and M. Vetterli, 1991, Wavelets and signal processing, IEEE Signal Processing Mag., vol. 8, no. 4, pp. 14-38,

· Rioul O, 1993, Regular Wavelet : A Discrete-time approach, IEEE Trans, Signal Processing, vol. 41, no. 12.

· Vetterli M., 1984, Multi-dimensional Sub-band Coding, Signal Processing, Vol. 6, No. 2, pp. 97-112.

· Vetterli M. and C. Herly, Wavelet and Filter banks : Theory and Design, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40.

· Wallace G. K., 1992, The JPEG still picture compression standard, IEEE Transactions on Consumer Electronics, vol. 38, No. 1.

- Woods J. W. and S. O'Neil, 1986, Subband coding of images, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 34, pp. 1278-1288.
- 김충락, 송현중, 장대홍, 홍창곤, 1999, 웨이브렛의 기본이론과 통계에의 응용, 아르케, 212pp.
- 김형준, 2000, 개선된 EZW를 이용한 효율적인 정지영상 부호화, 석사학위논문, 제주대학교, 42pp
- 민병석, 김승중, 정제창, 1997, 웨이브릿 변환을 이용한 영상압축, 한국통신학회 지 제 14 권 제 9 호, pp. 1039-1060



감사의 글

학부를 졸업하고 일 년을 학과 사무실의 유급 조교로 있으면서 대학원에 진학하여 더 많이 배우고 열심히 공부하려고 입학한지 2년이라는 시간이 지났습니다. 처음에 결심한 마음처럼 하지 못한 아쉬움이 남지만 내 생애 정말 소중한 시간이었습니다.

그동안 저를 학문에 대한 배움뿐만 아니라 삶에 대한 조언을 아끼시지 않으셨던 지도교수 이용학 교수님께 진심으로 감사의 말을 드리고 싶습니다. 그리고 본 논문을 세밀히 검토해 주신 김홍수 교수님과 임재운 교수님께 감사드립니다. 또한 많은 충고와 격려를 해주신 강진식 교수님과 문건 교수님께도 깊은 감사를 드립니다. 지금은 멀리 계시지만 항상 온화한 미소로 대해 주셨던 양두영 교수께 감사의 마음을 전합니다.

바쁘신 와중에도 저를 도와주셨던 정동성 선배님께 감사드리고, 대학원에서 같이 동거동락했던 진원이와 종국이 형에게도 고맙다는 인사를 전합니다. 2년 동안 같이 고생했던 아빠가 된 봉수형, 재필형, 엄마가 된 영애, 원률, 광삼이에게도 고마운 마음을 전합니다. 그리고 부식이형, 성욱이형, 권익이형과 창윤, 은진, 철우, 지숙, 수미에게도 고맙다고 전하고 싶습니다.

그리고 언제나 편하게 만날 수 있고 편히 설 수 있는 친구들 춘우, 성하, 효남, 성웅, 재철, 재협, 태욱, 동철이에게도 고맙다고 말하고 싶다.

마지막으로, 저를 위해 모든 뒷바라지를 해주셨던 어머니, 아버지와 저의 졸업을 못 보시고 돌아가신 할머니께 이 논문을 바칩니다.