碩士學位論文

意思 決定과 最適化에 관한 研究

- 高等學校 離散數學을 中心으로 -

指導敎授　梁　永　五

濟州大學校 敎育大學院
數學敎育專攻

朴　權　龍

2002年 8月

意思 決定과 最適化에 관한 研究

- 高等學校 離散數學을 中心으로 -

指導敎授　梁　永　五

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2002年　5月　日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者　朴　權　龍

朴權龍의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

2002年　7月　日

審査委員長　　　　　　印

審 査 委 員　　　　　　印

審 査 委 員　　　　　　印

<抄錄>

意思 決定과 最適化에 관한 研究

- 高等學校 離散數學을 中心으로 -

朴 權 龍

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 梁 永 五

사회구조가 지식기반사회로 전환됨에 따라 사회의 변화 추세에 맞추어 학교 수학교육도 많은 변화를 요구받고 있다. 그에 따라 일선 학교의 교사들은 새로운 교수-학습 방법을 연구하여 활용하고 있다. 그 예로 컴퓨터나 계산기와 같은 교육공학을 도입하여 활용하는 방법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 그러나 이에 앞서 논리적 사고력과 수학적 추론능력의 향상을 위하여 이산수학의 도입은 반드시 필요하다고 생각한다. 이런 변화에 맞추어 우리나라에서도 2002년도부터 적용되는 고등학교 제7차 교육과정에서 이산수학을 심화 선택 과목 중의 하나로 채택하고 있다.

본 논문에서는 우리나라 고등학교에서 처음 도입되는 이산수학의 역사적 배경과 개념을 소개하고, 고등학교 수학에서 이산수학의 필요성을 강조하였다. 그리고 우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용을 분석하여 미국수학교사협의회(NCTM, The National Council of Teachers of Mathematics)에서 제시한 이산수학의 내용과 비교하였다. 아울러 1984년에 Heath가 설문 조사한 수학과와 컴퓨터 관련 학과에서 이산수학의 과정에 포함되어야 할 내용과도 비교하였다. 또한, 의사 결정과 최적화 단원에 포함되어 있는 게임과 의사 결정, 선거와 정당성, 계획세우기의 최적화, 최적의 경로 등을 중심으로 예문을 이용하여 이론적

배경을 설명하였고, 실생활과 관련된 문제도 제시하였다.

본 논문의 주제인 의사 결정과 최적화의 내용은 현재 고등학교에 재직하고 있는 교사들인 경우에 고등학교 다닐 때는 물론 대학교육과정에서도 거의 접해보지 못했던 생소한 내용이어서 학생들을 지도하는데 어려움이 많을 것으로 사료된다. 그래서 예문을 이용하여 용어를 정의하고, 이론적 배경을 설명하며, 실생활과 관련된 문제들을 제시하여 학생을 지도하는 교사들에게 유용한 도움을 주고자 노력했다.

* 본 논문은 2002년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

<초록>

I. 서 론

우리는 지금 산업사회를 지나 지식과 정보를 축으로 하는 지식기반사회를 살아가고 있다. 21세기에는 정보를 떠나서는 생활을 할 수 없는 사회가 될 것이다. 이러한 지식기반사회를 이루는데 중요한 역할을 한 것 중의 하나가 컴퓨터의 개발과 빠른 발전 속도에 있다는 것은 누구도 부인할 수 없는 사실이다. 사회가 정보화 되어감에 따라 수학은 사회의 기본적 기능의 수행과 발전을 위해 핵심적 역할을 담당하게 되었고, 그에 따라 자연과학뿐만 아니라 그 외의 많은 분야에까지 응용되고 있다. 컴퓨터와 통신산업이 사회 영역에서 널리 이용되고 있는 지금 새롭게 부각되고 있는 수학의 한 분야가 바로 **이산수학**(Discrete Mathematics)이다.

컴퓨터의 등장은 수학 문제의 특성을 변화하게 만들었다. 과거의 수학 문제가 물리적 현상을 다루는 과정에서 연속량과 관계된 미분적분학이 주로 활용되었다면, 최근에는 컴퓨터가 광범위하게 사용됨으로써 여기에 요구되는 수학적인 지식은 주로 이산적인 수학으로 변화하게 된 것이다. 컴퓨터는 본질적으로 유한적이고 이산적인 기계이다. 따라서 이산수학의 내용은 컴퓨터를 사용하는 문제해결에 필수적이다.[1] 컴퓨터를 이용하여 해결한 대표적인 문제로 수학자들의 오랜 관심 사항 중의 하나였던 **4색문제**(Four Color Problem)를 들 수 있는데, 그 내용은 다음과 같다.

> 지도에 나라별로 색칠을 할 때는 인접한 국경이 색에 의하여 구분될 수 있도록 서로 다른 색깔로 칠해야 할 것이다. 이 때, 가장 적은 수의 색으로 색칠을 하려 한다면 최소한 몇 가지 색으로 칠하는 것이 가능할까하는 것이 사색문제이다. 이 사색문제는 1840년 뫼비우스가 강의에서 처음 문제를 제기하였다. 그런데 드 모르강에 의하면 지도를 만드는 인쇄업자들은 경험에 의하여 네 가지 색으로 모든 지도의 구분이 가능함을 이미 알고 있었다고 한다.
>
> 영국의 수학자 Arthur Cayley는 1878년 런던수학회에서 어떤 지도도 4가지 색만

1) 김향선(1998), “이산수학의 한 분야인 점화관계에 관한 연구”, 碩士學位論文, 전남대학교 교육대학원, p.5.

으로 국경이 구별되도록 칠할 수 있음을 증명하도록 문제를 제시하였고, 1879년 Kempe가 증명을 발표하였으나 증명과정에서 약간의 오류가 있음이 발견되었다.

그 후 100여년간 많은 연구가 계속되었지만 증명되지 못하다가 일리노이대학의 Wolfgang Haken이 Kempe의 증명을 보완하여 증명해 내었다. 하켄은 처음에는 혼자서 이 문제를 연구하였는데 모든 지도를 1936종류의 표준형으로 환원시켜 발전하는 과정에서 사람의 힘으로는 불가능함을 알게 되었다. 그는 같은 대학의 Kenneth Appel 교수와 컴퓨터의 힘을 빌어(컴퓨터 1200시간 가동) 4년만에 공동으로 문제를 해결하였다.[2)]

미래에는 컴퓨터를 사용하여 정보를 생산·분석·교환하는 시대가 되므로 이산수학의 필요성이 더욱 증대될 것이다. 이런 점에서 학생들에게 이산수학의 개념과 방법을 경험하게 하는 것은 매우 중요하다고 생각된다.

21세기의 세계화·정보화시대를 주도할 자율적이고 창의적인 사람을 육성하기 위해서는 우리 수학도 전통적인 수학만을 고집할 것이 아니라 시대의 흐름에 부응하는 방향으로 나아가야 하고, 그 흐름에서 중요한 역할을 하는 분야가 이산수학이라 볼 수 있다. 이런 변화에 맞추어 우리나라에서도 2002년부터 적용되는 고등학교 제7차 교육과정에서 이산수학을 수학 교과의 심화 선택 과목 중의 하나로 채택하고 있는데, 그 목표를 다음과 같이 제시하고 있다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 하는데 있다.[3)]

이산수학은 연속적인 상황을 다루는 미분적분학, 고전적 해석학 등의 연속수학과 대별되는 개념으로서 미분적분학이 실수체계를 중심으로 둔 반면 이산수학은 정수체계를 주로 다룬다. 이런 이산수학은 전자계산기와 컴퓨터 등을 도구로 하여 전산학의 여러 분야에서 다루어지는 여러 가지 문제를 해결하기 위하여 수학의 개념과 기술을 이용하기 때문에 학생들로 하여금 수학을 이해하여 즐거움을 느끼게 하는데 적합한 수학이라 할 수 있다. 또한 프로그램을 작성하고 컴퓨터를 사용

2) http://mathstart.org /수학자사전.
3) 교육부(1997), 「수학과 교육과정[별책8]」, 대한교과서 주식회사, p.131.

해 보는 것도 중요하지만 그보다 수학적 사고에 익숙해지고 수학적 모델링과 문제해결에 자신감을 갖는 것도 중요하다. 이런 면에서 이산수학은 학생들에게 수학이 매우 활용 범위가 넓으며, 재미있는 학문이라 느낄 수 있게 하는 과목이라 할 수 있다.[4)]

본 논문에서는 우리나라 고등학교에 처음 도입되는 이산수학의 역사적 배경과 개념을 소개하고, 고등학교 수학에서 이산수학의 필요성을 강조한다. 그리고 우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용과 미국수학교사협의회(NCTM, The National Council of Teachers of Mathematics)에서 제시한 이산수학의 내용을 비교할 뿐만 아니라, 1984년 Heath가 설문 조사한 수학과와 컴퓨터 관련 학과에서 이산수학의 과정에 포함되어야 할 내용과도 비교하고자 한다. 특히, 의사 결정과 최적화 단원에 포함되어 있는 게임과 의사결정, 선거와 정당성, 계획 세우기의 최적화, 최적의 경로 등을 중심으로 예문을 이용하여 이론적 배경을 설명하고, 실생활과 관련된 문제를 제시하여 교사들이 이산수학을 가르치는데 유용한 도움을 주고자 한다.

4) 석기원(2001), “이산수학의 중요 요소 및 그 지도에 관한 연구”, 碩士學位論文, 인제대학교 교육대학원, p.2.

II. 고등학교 교육과정과 이산수학

1. 이산수학의 역사적 배경과 개념

역사적으로 B.C. 300년경 유클리드가 그의 저서 「원본(*Elements*)」에서 유클리드식 알고리즘을 소개하였고, 그 후 1202년 피보나치는 그의 저서 「*Liber Abaci*」에서 피보나치의 수를 소개함으로 이산수학이 싹트는 계기가 되었다. 또한 18세기의 오일러의 출현으로 이산수학은 그 전성기를 맞이하였고, 최근의 컴퓨터 관련 테크놀로지의 발달로 정보화사회에서의 이산수학의 중요성과 그 힘을 점점 인식하고 그 교육의 필요성이 부각되고 있다.[5)]

이산이라는 말은 사전적 의미로 "떨어져 흩어짐"[6)]을 의미하며, **이산**(discrete)은 **연속**(continuous)에 대비되는 뜻을 가지고 있다. 그러므로 이산수학의 내용은 서로 떨어져 있는 대상들이 갖는 수학적 원리 및 내용으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 이산수학은 수학의 한 분야로 일반적으로 미분, 적분과 같은 연속수학에 대조되는 개념이다. 연속수학에서 셀 수 없는 집합이 관심의 대상인 반면에, 이산수학에서 다루는 대부분의 집합은 유한하거나 셀 수 있는 집합이 관심의 대상이다. 연속수학의 주된 목적이 양의 측정과 관계된 문제상황에 있다면, 이산수학의 초점은 세기(counting)를 하는데 있다. 이처럼 이산과 연속이 대비되는 면이 있어서 구별되어 지지만 실제적 응용에 있어서는 상호 보완적인 역할을 한다.[7)]

이산수학은 이산대상물들(discrete objects)의 연구에 이바지하는 수학의 한 분야이다. 여기서 이산은 서로 다르던가 혹은 연결되어 있지 않는 원소들로 구성하는 것을 의미한다. 이산수학을 이용해서 풀 수 있는 문제들을 살펴보면, 컴퓨터 시스

5) 김민경(1999), "컴퓨터 기반의 이산수학에 관한 연구 - Leslie 행렬 모델을 중심으로 -", 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제38권, 제2호, 한국수학교육학회, p.189.
6) 民衆書館, 이희승 編(1994), 「국어대사전」.
7) 황대훈(2000), 「이산수학」, 생능출판사, p.12.

템에서 유효 암호를 선택할 수 있는 방법의 수 구하기, 교통망에서 두 도시를 연결하는 최단거리 구하기, 정수들의 리스트에서 증가하는 숫자로 분류하는 방법 등이 있다.[8)]

이산수학이 유한과정을 다룬다는 의미에서 일부 주제에 대하여 유한수학과 매우 흡사한 것처럼 보이나, 그들은 서로 다르게 정의되어진다. 예를 들어, 그래프이론과 차분방정식 같은 것은 유한수학에서 찾아볼 수 없으며, 이산수학에서는 특히 알고리즘 방법을 강조한다. 알고리즘 분석은 극한에서의 개념과 유사한 사고를 요구한다. 이것은 후에 컴퓨터 공학이나 극한을 이해하는데 매우 유용한 도구가 될 수 있기 때문에 모든 학생들에게 알고리즘을 가르치는 것은 가치가 있는 일이다.

그렇다고 이산수학이 전혀 생소하고 낯선 주제만은 아니다. 현행 고등학교 교육과정 중 집합, 논리, 행렬, 수열, 수학적 귀납법, 점화식, 알고리즘과 순서도, 순열, 조합, 확률, 통계, 수형도 등 여러 영역에서 이산수학적 내용이 도입되고 있음을 알 수 있다. 특히, 조합론은 이산수학이라는 기초 위에 세워진 보다 전문적인 것을 다루는 과목이며 개수를 세는 것을 중요한 과제로 여긴다.

앞으로의 사회 발전 추세에 비추어 볼 때 더 응용적이고 더 활용적인 이산수학의 내용이 다루어져야 할 것이다. 또, 미국수학교사협의회(NCTM, The National Council of Teachers of Mathematics)에서 발표한 「*Curriculum and Evaluation standards for School Mathematics* (학교수학을 위한 교육과정 및 평가 규준)」에서는 이산수학을 미래의 수학이라고 규정하고, 이산수학이 수학의 독립된 영역으로서가 아닌 수학의 모든 영역을 통합시켜주는 방향으로 나아가야 한다고 주장하고 있다.

2. 고등학교 수학에서 이산수학의 필요성

고등학교에서 다루어지는 이산수학은 컴퓨터를 이용하여 정보를 분석, 처리하는 부분에만 국한되는 것이 아니라, 수학에 대한 배경이 없이도 쉽고 흥미롭게 다

8) 박진홍(2001), 「전산학을 위한 이산 구조」, 교우사, p.42.

가갈 수 있으며 수학적 사고력, 문제해결을 위한 구성, 알고리즘적 사고를 향상시켜 현실 속에서 수학을 볼 수 있는 능력을 길러줄 수 있는 과목이다.

이러한 이산수학을 배우는 이유를 다음과 같이 제시할 수 있다.[9)]

첫째, 이산수학은 수학적으로 성숙할 수 있도록 도와준다. 즉 수학적인 논증을 이해하고 창조하는 능력을 기를 수 있게 한다.

둘째, 이산수학은 수학적인 과학의 모든 부분에서 더 진보된 과정의 통로라 할 수 있다. 이산수학은 많은 컴퓨터 과학의 과정을 이해하기 위한 수학적인 기초를 제공한다.

셋째, 이산수학은 문제해결력을 향상시켜 준다. 알고리즘적 문제해결 과정을 통해 효율적인 문제해결 방법을 찾을 수 있게 되며 문제해결을 위한 사고가 향상된다.

넷째, 이산수학은 많은 응용력을 가지고 있다. 이산수학은 과학기술과 공학, 컴퓨터 과학, 상업, 산업 등 많은 부분에 활용이 된다.

다섯째, 이산수학은 전통 수학을 보충하고 풍부하게 한다. 전통 수학의 대수, 기하, 미적분의 내용들을 보충해 준다. 예를 들면, 기하에서 그래프이론은 학생들이 다각형과 다면체의 학습을 다양한 방법으로 경험하게 한다.

결국, 이산수학이 고등학교에서 지도되어야 하는 이유는 수학에 대한 많은 지식을 갖고 있지 않아도 수학에 가까이 갈 수 있으므로 수학에 흥미를 갖게 할 수 있데 있다. 그리고 수학에 대한 학생들의 불안정성을 해소할 수 있을 뿐만 아니라, 현실 속의 여러 상황들이 이산수학의 소재가 되므로 수학이 현실과 유리된 학문이 아니라는 사실을 일깨워줄 수 있다는데 있다. 또한 이산수학은 수학적 사고력을 향상시키는 좋은 소재나 방법이 많이 들어 있고, 우리 주변의 현상이나 사건을 모델링하는 수학적 이론을 제공할 뿐만 아니라, 지식기반사회에서 활용 폭이 더욱 확대되는 컴퓨터의 중요성을 인식하고 컴퓨터와 친숙해질 수 있는 여건을 조성할 수 있다는데 있다.

---

9) 崔信愛(2001), “이산수학에서의 알고리즘에 관한 考察”, 碩士學位論文, 성균관대학교 교육대학원, pp.10～11.

3. NCTM의 규준(Standards)에서 강조한 이산수학

1960년대부터 1980년대까지 미국의 수학교육과정은 세 차례의 큰 변화가 있었다. 1950년대 말부터 1970년대 초반까지 지속된 새수학운동, 1970년대 초반 새수학운동에 대한 반동으로 일어난 back-to-basics 운동, 그리고 1980년대 기본 기능(skill)의 범위를 좁은 의미의 계산 기능에서 문제해결을 비롯한 고차원의 수학적 사고 전반으로 확대해야 한다는 문제해결(problem solving)운동이 그것이다. 1990년대의 미국 수학교육의 동향은 문제해결력이나 사고력을 강조하는 1980년대의 움직임의 연장선상에서 컴퓨터와 계산기 등 교육공학이 대폭적으로 도입되는 방향으로 진행되고 있다. 1980년대와 비교하여 큰 차이가 나타나는 것은 기본 철학의 차이가 아니라, 교육목표를 달성하는 측면 즉, 내용이나 교수방법에서의 획기적인 방향전환을 시도하고 있다는 점이다.

이러한 움직임은 지금까지의 미국 수학교육 전반에 걸친 자기반성을 통한 결과이다. 미국 학생들의 수학성적이 일본이나 유럽은 물론 한국 등과 같은 신흥공업국가에 비해서도 엄청나게 떨어진다는 보고서들은 수학교육이 획기적으로 변화되어야 한다는 여론을 불러일으켰다. 또한, 1980년대 미국 경제의 급격한 하향 추세는 수학과 과학교육의 질적 하락과 밀접히 관련이 있으며 이런 추세라면 앞으로 예상되는 급격한 사회 변화와 첨예화되는 국제 경쟁에 대비할 수 없다는 분석이 제기되었다.

미국 수학교육자들은 미국 수학교육이 당면한 문제를 다음과 같이 제기하였다.[10]

첫째, 너무 많은 학생들이 생산적인 삶을 영위하는데 필요한 수학적 지식을 갖추지 못한 채 학교를 졸업하고 있다. 대다수의 미국 학생들은 현대의 기술 지향적 사회를 유지하는데 필요한 최소한의 수준조차도 학습하지 못하고 있다.

---

10) 구광조 외(역)(1992), 「수학교육과정과 평가의 새로운 방향」, 경문사, 미국수학교사협의회(NCTM), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* pp.8~10.

둘째, 미국 대중들의 수학에 대한 기대치가 대단히 낮다. 수학만큼은 성적이 낮아도 용납되는 분위기이다. 또한, 대중의 수학에 대한 이해에 문제가 있다. 수학은 엄밀하며, 절대적이며, 딱딱하며, 어렵고 재미없다는 인식이 널리 퍼져 있다.

셋째, 초·중등학교와 사범대학의 교육과정이 시대에 뒤떨어져 있다. 고차원의 사고에 대한 사회적 요구와 수학 및 과학의 엄청난 확장을 반영하지 못하고 있다. 또한 학생들의 수학을 학습하는 방법에 대한 연구 결과가 실제 수업과 잘 연계되지 못하고 있다. 특히, 사범대학의 교육과정이 질적으로 대단히 정체적이며 장차 교사가 될 학생들의 수학적 흥미를 유발시키지 못하고 있다.

넷째, 유치원에서 대학원에 이르기까지 질적으로 우수한 수학교사의 수가 심각하게 줄어들고 있다. 특히 소수 인종의 학생이 늘어나는 반면, 소수 인종을 가르치는 수학교사의 수는 절대적으로 부족하다.

다섯째, **컴퓨터와 계산기가 수학교육에 미칠 수 있는 잠재력에도 불구하고 수학교수법에 큰 영향을 미치지 못하고 있다.**

여섯째, 현재 널리 쓰이고 있는 평가 방법 즉, 기본 계산 기능을 주 내용으로 하는 사지선다형의 표준화된 검사는 고차원적 사고를 평가하는데 도움을 주지 못한다.

일곱째, 수학교육의 문제점에 대한 해결책으로 단순히 강의 시간을 늘리거나 내용을 좁은 의미의 계산 기능으로 축소하려는 경향이 있다.

미국의 수학교육자들은 이러한 문제점을 극복하기 위한 교육내용과 방법에서의 획기적인 방향전환을 요청하고 있다. 그 개혁 방향을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학교수학의 목표와 대상을 설정할 때, 대다수의 학생들에게는 최소한의 기초 수학이면 충분하고 극소수의 학생들에게만 고등수학이 필요하다는 이분법을 탈피하여 모든 학생에게 의미 있는 공통 목표를 설정해야 한다.

둘째, 수학의 학습지도가 지식 전달이라는 권위주의적 모델에서 학습의 흥미 유발을 강조하는 학생 중심으로 옮겨가야 한다.

셋째, 수학학습에 대한 대중들의 태도가 현저하게 개선되어야 한다. 뿐만 아니라, 과학이나 공학이 발달하기 위해서는 수학이 중요하며, 정보화 사회에서는 수학

적 소양(mathematical literacy)이 언어적 소양(verbal literacy)만큼 중요하다는 것을 인식해야 한다.

넷째, 수학교육의 목표가 기본 계산 기능을 연마하는 것에서 수학의 위력을 느끼게 하는 방향으로 전환되어야 한다. 이것은 단편적 지식보다는 관계성을 고려하고, 논리적으로 추론을 통해 가정에서 결론을 얻는 활동을 하며, 비정형 문제를 해결하기 위해 다양한 수학적 방법을 사용하는 것을 의미한다.

다섯째, **수학학습의 내용이 미래를 대비시키는 내용으로 전환되어야 한다. 통계, 확률, 자료분석, 모델구축(model-building), Operational Research, 이산수학 등이 추가될 필요가 있다.**

여섯째, **수학수업에서 계산기와 컴퓨터의 사용이 대폭 허용되어야 한다. 이들 교육공학은 많은 사람들이 우려하는 것과 같은 계산 능력의 하락으로 이어져서는 안되며 건설적인 목적을 위해 사용되어져야 한다.**

일곱째, 수학에 대한 학생과 대중의 인식이, 수학이 자의적인 규칙이라는 생각에서 규칙을 활용하는 과학으로 전환되어야 한다. 탐구하고 역동적이며 전환되어 가는 과목으로서의 수학에 대한 인식이 없으면 어떤 종류의 수학학습도 기대할 수 없다.

그러면 이러한 방향을 추구하기 위해 미국 수학교육계는 어떤 구체적 목표와 어떤 방법론을 가지고 있는가? 여기에 대한 최초의 해답은 1989년 4월 NCTM에서 발표한 「학교수학을 위한 교육과정 및 평가 규준」에서 찾아볼 수 있다.

어느 시대의 교육개혁도 그 시대의 사회적 성격과 밀접히 관련된다. 1990년대 이후의 사회적 성격을 한마디로 규정짓는다면 지식기반사회라 할 수 있다. 지식기반사회는 정보를 능동적으로 찾거나 생성하여 여러 가지 비정형적인 문제를 해결해 가는 사회이다. 따라서 교육은 적극적으로 정보를 처리하고 해석하며 판단하는 능력을 길러주는 방향으로 나가야 하며, 여기에는 수학교육도 예외는 아니다.

앞에서도 언급했듯이 학교 현장에서 컴퓨터나 계산기와 같은 교육공학을 활용한 수업을 강조하고 있는 시점을 감안할 때, 고등학생들에게 이산수학을 가르치는 것은 필수적이라고 할 수 있다.

4. 제7차 교육과정에서의 이산수학[11)]

1) 성격

'이산수학'은 10단계의 수학에 도달 여부와 관계없이 학생들이 선택할 수 있는 과목으로서, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속의 이산 상황의 문제를 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르게 한다. 이 과목은 수학에서 이산적인 내용의 학습을 경험하고자 하는 학생들이 이수하기에 알맞은 과목이다.

'이산수학'의 내용은 이산적인 상황에 맞는 사고의 적용을 강조하여 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사 결정과 최적화 등의 영역으로 하고, 이산적 상황의 문제를 쉽고 흥미롭게 학습할 수 있도록 다양한 실생활을 소재로 하여 구성한다.

'이산수학'의 학습에서는 수학 학습에서 습득된 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 이산적인 상황을 간결히 표현하고 처리할 수 있도록 하는데 중점을 둔다. 또, 전 영역에 걸쳐서 복잡한 계산이나 문제 해결을 위하여 계산기나 컴퓨터를 적극적으로 활용한다.

2) 목표

수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있다.

(1) 일상적인 정보에서 수량적인 관계나 법칙을 계산기나 컴퓨터를 이용하여 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

(2) 세기의 기본이 되는 방법과 집합이나 자연수를 나누는 방법을 이해하고, 이를 이용하여 실생활에서 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.

(3) 사물의 현상을 그래프와 행렬 등을 이용하여 조직·해석하고, 이를 활용할 수 있다.

---

11) 교육부(1997), 前揭書 , pp.131~135.

(4) 여러 가지 문제를 알고리즘적으로 사고하고 처리하는 능력을 기른다.

(5) 다양한 의사 결정 과정과 상충적인 상황에서 합리적이고 논리적인 사고를 하여 문제를 해결할 수 있다.

3) 내용

(1) 선택과 배열

① 순열과 조합

㉠ 합·곱의 법칙을 이해하고, 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.

㉡ 순열과 조합의 뜻을 알고, 어떤 주어진 조건을 만족하는 순열이나 조합을 모두 나열할 수 있다.

㉢ 일일이 나열하지 않고도 어떤 주어진 조건을 만족하는 순열이나 조합의 수를 구할 수 있다.

② 세기의 방법

㉠ 비둘기집의 원리를 이용하여 배열의 존재성에 관련된 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

㉡ 포함배제의 원리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

㉢ 유한집합을 서로 소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.

㉣ 어떤 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.

㉤ 주어진 조건에 맞는 여러 가지 분배의 수를 구할 수 있다.

(2) 그래프

① 그래프

㉠ 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 용어를 안다.

㉡ 그래프에서 꼭지점의 차수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.

㉢ 여러 가지 그래프를 이해한다.

② 수형도

㉠ 수형도에서 꼭지점의 수와 변의 수 사이의 관계를 이해한다.

㉡ 주어진 그래프의 생성수형도를 찾을 수 있다.

③ 여러 가지 회로

㉠ 오일러회로와 해밀턴회로의 뜻을 알고, 간단한 그래프에서 오일러회로와 해밀턴회로를 찾을 수 있다.

㉡ 그래프에서 오일러회로가 존재하기 위한 필요충분조건을 이해한다.

㉢ 그래프에서 해밀턴회로가 존재하기 위한 필요충분조건을 이해한다.

④ 그래프의 활용

㉠ 행렬의 뜻을 알고, 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있다.

㉡ 그래프를 행렬로 나타내고, 그 성질을 알 수 있다.

㉢ 색칠 문제 등의 실생활 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

(3) 알고리즘

① 수와 알고리즘

㉠ 수와 관련된 여러 가지 규칙성의 문제를 해결할 수 있다.

㉡ 자연수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 이해한다.

㉢ 소수를 판정하는 알고리즘을 이해한다.

㉣ 최대공약수와 최소공배수를 구하는 알고리즘을 이해한다.

② 점화관계

㉠ 두 항 사이의 관계식을 이해한다.

㉡ 세 항 사이의 관계식을 이해한다.

(4) 의사 결정과 최적화

① 의사 결정 과정

㉠ 결정적인 2×2 게임에서 의사 결정 과정의 변화를 안다.

㉡ 여러 가지 선거 방법의 수학적 의미와 그 정당성을 이해한다.

② 최적화와 알고리즘

㉠ 실생활에 나타나는 계획세우기의 최적화 문제를 해결할 수 있다.

㉡ 도로망에서 최적의 경로를 구할 수 있다.

5. 이산수학의 내용 비교

우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용과 NCTM이 제시한 내용을 표로 나타내면 다음과 같다.

우리나라			NCTM	
단원		내용	구분	내용
선택과 배열	순열과 조합	· 순열 · 조합	일반 학생	· 유한 그래프, 행렬, 수열과 재귀관계와 같은 이산구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다. · 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다. · 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다. · 세기(enumeration)와 유한 확률문제를 풀 수 있어야 한다.
	세기의 방법	· 배열의 존재성 · 포함배제의 원리 · 집합의 분할 · 수의 분할 · 여러 가지 분배의 수		
그래프	그래프	· 그래프의 뜻 · 여러 가지 그래프		
	수형도	· 여러 가지 수형도 · 생성수형도		
	여러 가지 회로	· 오일러회로 · 해밀턴회로		
	그래프의 활용	· 행렬의 뜻 · 그래프와 행렬 · 색칠 문제		
알고리즘	수와 알고리즘	· 수와 규칙성 · 수와 알고리즘	대학 진학생	· 선형 프로그래밍과 계차 방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다. · 알고리즘의 응용과 컴퓨터 타당화 과정과 관련되어 생기는 문제상황을 탐구할 수 있어야 한다.
	점화관계	· 두 항 사이의 관계식 · 세 항 사이의 관계식		
의사 결정과 최적화	의사 결정 과정	· 2×2 게임 · 선거와 정당성		
	최적화와 알고리즘	· 계획세우기 · 그래프와 최적화		

또한, 1984년에 Heath는 수학과와 컴퓨터 관련 학과에서 이산수학의 과정에 포함되어야 할 내용에 대하여 설문조사를 하였는데, 그 내용은 다음과 같다.[12)]

(ⅰ) 집합론과 관계된 주제 : 집합, 관계, 함수, 동치관계와 순서관계, 곱집합

(ⅱ) 조합론 : 순열, 조합, 분할, 점화식, 포함과 배제, 생성함수, 계차방정식

(ⅲ) 그래프 이론 : 그래프, 유향 그래프, 트리

(ⅳ) 수학적 귀납법 : 귀납법, 재귀법

(ⅴ) 기초적인 논리 : 진리표, 명제, 부울대수, 술어논리

(ⅵ) 행렬대수

결국, 우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용 중에 선택과 배열, 그래프, 알고리즘은 NCTM과 Heath의 설문조사의 내용에도 포함되어 있으나, 본 연구의 주제인 **의사 결정과 최적화**의 내용은 NCTM과 Heath의 설문조사 뿐만 아니라 대학에서 사용하고 있는 이산수학 교재에서도 찾아보기가 어렵다. 그래서 더욱 더 연구할 가치가 있다고 볼 수도 있고, 의사 결정과 최적화의 내용이 이산수학에 포함되는지 논의해볼 필요도 있다고 생각한다.

12) 김향선(1998), 前揭書, p.7.

III. 의사 결정과 최적화

1. 교재 분석

2003학년도부터 고등학교 2학년에 심화 선택 과목 중 하나로 채택된 ‘이산수학’의 교재는 2002년 3월 1일 발행된 「고등학교 이산수학」뿐이다. 이 교과서는 저작권자가 교육인적자원부이고, 편찬자는 강원대학교 1종 도서편찬위원회이며, 집필진이 신현성 외 10명으로 구성되어 있다.

여기에서는 이 교재의 구성과 내용을 분석하여 나름대로 장·단점을 서술해보고자 한다.

1) 장점

(1) 단원을 시작하면서 단원의 배경을 제시하여 학생들이 흥미를 유발할 수 있도록 하였다.

♠ 단원의 배경

두 집단이 이해 관계에 의해 서로 관련되어 있을 때 어떤 전략을 선택하는 것이 각 집단에 유리할까? 많은 의사 결정 과정은 대부분이 어떤 물질적인 양적 요소보다는 정보나 문화적인 요소를 많이 내포하여 수학과는 아무런 관련이 없는 듯 보이지만 본질적으로는 수학적인 요소로 이해되고 규명될 수 있다.

1950년에 케네스 애로우는 각 후보자나 안건에 순위를 결정하는 선거 절차를 연구하여 게임 이론에 수학적 정당성을 제공함으로써 노벨 경제학상을 받았다. 최근 수학자들은 인간의 행동 양식이나 가치, 상호 작용, 갈등, 의사 결정 등과 같은 연구에도 깊은 관심을 보이고 있다.

(2) 학습목표를 확실하게 제시하여 학생들이 무엇을 해야할 것인가를 분명히 알게 하였다.

♠ 학습 목표

게임과 관련된 여러 의미를 알고, 유리한 전략을 선택하는 방법을 알 수 있다.

(3) 처음 제시하는 탐구문제를 실생활과 관련된 문제로 주어 학생들이 수학과 실생활이 유리된 것이 아님을 느끼게 하였다.

♠ **탐구문제**

경쟁 관계에 있는 인접한 두 레스토랑에서 갑과 을은 매달 다음과 같은 전략 중 한 가지만을 쓰고 있다.

전략A : 주문한 음식만을 제공한다.

전략B : 주문한 음식과 후식을 제공한다.

갑의 입장에서 시장 조사를 하였더니 아래 표와 같았다.

갑 \ 을	전략A	전략B
전략A	60만원	40만원
전략B	-20만원	30만원

즉, 갑이 전략B를 선택하고 을이 전략A를 선택하면 갑은 을보다 수익을 20만원 적게 올린다는 뜻이다.

(1) 전략A와 B 중에서 어느 것이 갑에게 유리한가?

(2) 전략A와 B 중에서 어느 것이 을에게 유리한가?

(4) 탐구문제를 해결하면서 (활동) → (토론) → (한 번 더 생각하기) 순서로 풀이해 학생들이 이해하는데 많은 도움을 주었다.

♠ **(활동)**

(1) 갑이 전략A를 선택했을 때 을에게 유리한 전략은 무엇인가?

(2) 갑이 전략B를 선택했을 때 을에게 유리한 전략은 무엇인가?

(3) 갑과 을에게 유리한 전략은 각각 무엇인가?

(토론)

(1) 갑은 을이 어떤 전략을 선택할 것인지 예측할 수 있는가?

(2) 을은 갑이 어떤 전략을 선택할 것인지 예측할 수 있는가?

앞의 수익을 나타내는 표에서 갑은 각 행에서 원소들의 최소값을 생각한 뒤 이들 중 가장 큰 값을 선택하게 된다. 한편, 을은 각 열에서 원소들의 최대값을 생각한 뒤 이들 중 가장 작은 값을 선택하게 된다. 이 탐구의 경우에

는 행의 최소값 중 최대값과 열의 최대값 중 최소값이 모두 40으로 일치하고 이것으로 갑과 을의 전략이 결정됨을 알 수 있다.

(한 번 더 생각하기)

(1) 을이 전략A를 선택했을 때 갑에게 불리한 전략은 무엇인가?

(2) 을이 전략B를 선택했을 때 갑에게 불리한 전략은 무엇인가?

(3) 갑은 을의 각 전략에 따라 불리한 전략이 서로 다를 수 있다. 갑은 A, B 중 어떤 전략을 선택해야 덜 불리할까?

(5) 탐구문제 바로 다음에 그와 유사한 문제를 주어 학생들로 하여금 문제를 스스로 해결해볼 수 있게 하였다.

♠ 문제

영호와 철수는 동전을 각각 하나씩 가지고 게임을 하려고 한다. 동시에 동전을 손바닥에 내어 동전이 둘 다 앞면이면 영호는 철수에게 200원을 받고, 동전의 면이 서로 다르면 100원을 받는다. 한편, 동전이 둘 다 뒷면이면 영호가 철수에게 300원을 주기로 한다.

(1) 영호의 입장에서 이 게임을 행렬로 나타내어라.

(2) 영호는 앞면과 뒷면 중 무엇을 내야 유리한가?

(3) 철수는 앞면과 뒷면 중 무엇을 내야 유리한가?

(4) 이 게임은 영호와 철수 중 누구에게 더 유리한가?

(6) 단원 마지막에 연습문제와 종합문제를 주어 학생들이 다양한 문제를 접할 수 있게 하였다.

(7) 단원의 맨 끝에 단원과 관련된 <읽을 거리>를 주어 학생들이 더욱 관심과 흥미를 갖게 하였다.

♠ 읽을 거리

(올림픽 개최지 결정 방식)

올림픽 개최지는 국제올림픽 위원회에서 각 위원이 개최 후보 도시 중 하나를 선택하여 투표하고 그 중에서 과반수 표를 얻은 도시로 결정된다. 만약 과반수 표를 얻은 도시가 없으면 가장 표를 적게 얻은 도시를 제외하고 나머지 도시에 대하여 다시 투표하여 같은 방식으로 결정한다.

아래는 2000년 하계 올림픽 개최지를 선정하기 위해 1993년에 행하여진 국제올림픽 위원들의 투표 결과이다.

	1차 투표	2차 투표	3차 투표	4차 투표
북경	32	37	40	43
시드니	30	30	37	45
맨체스터	11	13	11	
베를린	9	9		
이스탄불	7			
기권	0	0	1	1

1차, 2차, 3차 투표에서 어느 도시도 과반수의 표를 얻지 못해 각 투표에서 가장 표를 적게 얻은 이스탄불, 베를린, 맨체스터를 차례로 제외하고 투표하여 4차 투표에서 비로소 올림픽 개최 도시를 결정할 수 있었다. 위에서 보듯이 1차, 2차, 3차 투표까지 가장 많은 표를 얻은 북경이 강력한 하계 올림픽 개최지로 예상되었으나 4차 투표에서 역전되어 결국 2000년 하계 올림픽 개최지는 시드니로 돌아갔다.

2) 단점

(1) 교재의 내용 전개에 있어서 게임, 전략 등 필요한 용어에 대한 설명 없이 예문을 제시하고 있어서 처음 접하는 교사나 학생들이 이해하는데 어려움이 있다고 판단된다.

(2) 학생들에게 수학에 대한 많은 지식을 갖고 있지 않아도 충분히 학습할 수 있다는 점을 강조하기 위한 것으로 판단되나, 이론적 배경에 대한 설명이 거의 없다.

(3) 지면의 분량 등 여러 가지 요인이 있겠지만 다양한 실생활 문제가 제시되지 않고 있다.

2. 게임과 의사 결정

1) 게임이론의 역사적 배경과 개념

사람들은 늘 게임을 즐긴다. 시대마다 인기를 누린 게임이 존재했다. 대부분의 게임은 기술과 운이 결합된 형태이고 정말 훌륭한 게임꾼은 게임이 여러 차례 거듭된 후 운명의 부침이 균형을 찾은 이후에 등장한다. 게임 중에는 그야말로 죽기 살기의 문제가 되는 게임도 있다. 시뮬레이션 전장에서는 전술상 실수의 대가가

훨씬 작기 때문에 군사 전략가들은 전술을 가다듬기 위한 전쟁게임에 관심이 많다. 체스와 바둑 게임이 모두 전쟁 상황을 가상하는 것도 우연은 아니다.

19세기에 프러시아는 '전쟁게임(Kriegspiel)'이라는 것을 개발했다. 판 위에서 벌어지는 이 순수전략게임은 실제 전장의 데이터를 바탕으로 한 데다가 분쟁 상황에 대한 중재자까지 두면서 더욱 현실과 유사해졌다. 그 전쟁게임 시뮬레이션을 통해 발전된 전략적 사고에 크게 힘입어 프러시아 군대는 승승장구했다. 이 게임은 멀리 미국과 일본에까지 퍼져갔다. 2차 대전에서 일본이 참패함으로써 이 게임의 명성은 갑자기 끝났다. 새로운 무기와 수송 체제가 급속히 발달하면서 군사전략의 전체 틀을 새롭게 짜야한다는 점이 명확해진 셈이었다. 당시까지 전략이란 전쟁사를 완벽하게 꿰고 있는 장군들의 몫이었다. 하지만 이제 군대는 군수품이나 무기 제작을 위해서 뿐만 아니라 전략적 조언을 얻기 위해서도 수학자와 과학자들을 필요로 했다. 2차 대전이 끝난 후 특히 초강대국이 대량살상무기를 보유하고 있다는 인식은 전쟁의 규칙을 완전히 바꾸었다. 기병대와 포병대가 있는 게임은 역사의 유물이 되고 말았다.

실제 응용 가능한 이론을 만들어 내기 위해서는 전략게임에 대한 분석이 계속 이루어져야 했다. 1920년대 프랑스의 수학자이자 프랑스 해군 목사였던 에밀 보렐(Emil Borel)은 포커에서 허세작전 등을 분석하고 게임 수학을 경제나 정치에 적용하는 내용을 담은 「게임의 이론(*La Theorie du jeu*)」이라는 책을 썼다. 보렐의 영향력이 얼마나 컸는지는 1944년 헝가리 수학자인 존 폰 노이만[13](John Von Neumann)과 호주의 경제학자 오스카 모르겐슈테른이 쓴 「게임과 경제 행동 이론(*Theory of Games and Economic Behavior*)」을 보면 알 수 있다. 이 두 사람은 게임이론을 통해 경제적 상호 작용의 모델을 만들 수 있다고 생각했다. 경제학

13) 존 폰 노이만(John Von Neumann, 1903 ~ 1957) : 헝가리의 부다페스트에서 출생했는데 어린 시절부터 경이로운 계산 실력을 자랑했다고 함. 1921년 몇 안 되는 유대인 학생자리를 얻어 부다페스트 대학에 입학했고, 1926년 게임이론으로 박사학위를 취득함. 하지만 정작 게임이론에 관한 강의는 하나도 듣지 못한 채 아버지의 희망에 따라 베를린과 취리히에서 화학을 공부했다고 함. 헤르만 바일이나 게오르크 폴리아 같은 수학들의 지도를 받았고, 나중에는 괴팅겐의 다비드 힐베르트와도 함께 연구했다. 대표적인 연구분야는 게임이론과 양자 역학, 컴퓨터 계산법이었다.

자들도 서서히 이 군사전략이론의 유용한 면을 발견하게 된 것이다.

게임의 가장 간단한 형태는 두 참여자가 두 가지 전략을 가지는 제로섬(zero-sum)게임이다. 참여자들은 완벽하게 이성적으로 행동하며 승리를 위해 머리를 짜낸다. 전체 자원은 0이다. 즉 한 쪽이 얻으면 다른 한 쪽은 잃는 것이다. 제로섬게임의 재미있는 예로 '케이크 나누기'가 있다. 많은 가정에서 흔히 발생하는 이 상황의 조건은 다음과 같다. 두 아이가 케이크를 나누어 먹어야 한다. 그리고 상대방이 더 큰 조각을 가졌다고 생각하는 아이가 있어서는 안 된다. 해법은 두 단계 과정이다. 한 아이가 케이크를 절반으로 자르고 다른 아이가 먼저 자기 조각을 선택하는 것이다. 두 아이 모두 더 큰 조각을 가지고 싶어하며 서로 그런 마음이라는 것을 안다. 그리하여 최적해법이 나온다. 첫 번째 아이는 가능한 한 공정하게 케이크를 자른다. 어느 절반이 더 크면 다른 아이가 당연히 그 쪽을 선택할 것이기 때문이다. 폰 노이만이 주창한 미니맥스(minimax)이론에 따르면 게임에 참여하는 양측이 모두 만족할 수 있는 최적의 해법인 안장점(saddle point)이 존재한다. 참여자가 두 사람 이상으로 늘어날 수도 있는데 그렇게 되면 모두를 만족시키기가 점점 더 어려워진다.

1940년대 존 포브스 내쉬[14](John Forbes Nash)는 폰 노이만의 이론을 제로섬게임 바깥으로 확대시킨다. 이런 게임의 예로 주식 시장이 있다. 참여자들은 승자와 패자로 갈리지만 시장의 자금 총액 역시 변화한다. 내쉬는 이러한 비 제로섬게임에도 균형해법(equilibrium solution)이 존재한다는 것을 발견했다.

내쉬의 연구에서는 당연해 보이는 적정 결과가 나오지 않을 수도 있는 시나리오가 제시된다. 유명한 예는 멜빈 드레스너가 고안하고 앨버트 터커가 심리학 수강 학생들에게 제시한 죄수의 딜레마라는 상황이다. 두 사람이 위법 혐의로 체포되어 각각 따로 취조실에 들어가 있다. 한 사람이 죄를 자백하면 그는 석방되고

14) 존 포브스 내쉬(John Forbes Nash) : 1928년 웨스트버지니아에서 태어나 카네기 공과대학을 졸업하고, 1950년 프린스턴에서 박사 학위를 받음. 논문 주제는 비협력적 게임이었다. 박사 학위 과정 중 쓴 논문으로 1994년 경제학 분야 노벨상을 공동 수상한다. 1951년부터 메사추세츠 공과대학에서 교편을 잡았고 기하학, 리만의 다양체, 유클리드 공간 등에 탁월한 연구를 진행했다.

다른 사람은 구금된다. 둘 다 자백하면 모두 구금된다. 마지막으로 아무도 자백하지 않으면 둘 다 석방될 것이다. 이 딜레마의 핵심은 두 사람 모두를 위한 최적의 결과가 자백하지 않고 석방되는 것임에도 불구하고 혹시라도 입을 다물고 있다가 상대가 자백하면 끝장이라는 두려움 때문에 결국 둘 다 자백해서 갇혀버리기 쉽다는데 있다. 이러한 전략게임이나 시나리오는 전쟁이나 비즈니스 혹은 개인적 협상과정에서 쉽게 응용된다.

최적 전략이 존재하고 일단 그 전략이 드러나면 아주 시시해져 버리는 그런 종류의 게임도 있다. 예를 들어 '삼목 놓기' 놀이는 아이들이 좋아하는 게임이지만 일단 전략이 알려져 참여자들이 이성적으로 행동하기 시작하면 매번 무승부가 되어 재미가 없어진다. 내쉬는 체스에도 적정 전략이 존재하지만 게임이 워낙 복잡한 탓에 적정 전략이 아직 발견되지 않았고 결과가 무승부일지 혹은 승패로 날지도 분명하게 알 수 없다는 점을 증명했다. 그 적정 전략이 발견된다면 체스도 '삼목 놓기'처럼 시시한 게임이 되고 말 것이다.

전략게임에서는 협력과 변절에 관한 용어들이 사용된다. 게임이론은 인간을 너무도 자기 중심적인 존재로 다룬다는 점 때문에 냉소적이라고 비판받았지만 후속연구들은 인간의 실생활 전략이 상대적 성취에 대한 인식을 반영하고 있음을 보여주었다. 제로섬게임에서는 무승부인 경우 각 참여자의 상황이 출발 때와 동일한 수준에 머물지만 주식시장과 같이 비제로섬게임일 때는 승리와 패배가 상대적이고 결국 참여자들은 상대를 물리치는 것보다는 자신의 승리를 최대화하는데 초점을 맞추게 된다. 따라서 협력은 두 참여자가 교환에서 무언가 얻을 수 있을 때 나타난다. 서서히 발전한 끝에 이제 게임이론은 경제 시장 분석의 중요한 일부가 되었다. 최근에는 공공 인프라 부분을 민간에 매각해서 더 많은 수익을 창출하고 새로운 시장 발전의 계기를 마련하는 전 세계적 현상이 게임이론을 통해 분석되었다. 세계 시장은 협력과 경쟁이라는 게임 상황이 번갈아 펼쳐지는 무대이다.[15]

게임이론은 상대가 어떤 행동을 취하는가 알 수 없는 상태에서 자신의 행동을

15) 이상원 (역)(2002), 「문명과 수학」, 경문사, 리처드 만키에비츠, pp.214~ 220.

정하는 행동결정의 방법을 연구하는 이론이다. 서로 대립 관계 또는 경쟁 관계를 해결하려고, 자기가 합리적인 행동을 취하려면 어떻게 하면 될 것인가? 경쟁적인 입장에 있는 두 사람의 경쟁자가 각각의 이익을 되도록 크게 하고, 손실은 되도록 작게 하려는 행위를 게임(game)이라 한다. 그리고 게임에 참가한 경쟁자의 행동을 합리적으로 결정하는 이론을 **게임이론**(game theory)이라 한다.

게임이론은 단지 자기 자신의 입장만의 의사 결정이 아니고, 상대가 어떤 경쟁자인지를 고려하여 그 상황에서 상대쪽 보다 유리한 전략을 결정해 가려는 것이다. 단, 이 게임이론에서는 상대쪽은 늘 최적인 수단을 강구하고 있다는 것을 전제로, 자신이 취할 수 있는 각 전략의 기대값을 계산한다. 그 결과에서 어느 전략을 취할 것인가는 단지 기대값이 큰 것으로만 하는 것이 아니고, 여러 가지 의사 결정 원리를 비추어 보아서 최종적으로 의사결정자 자신이 정하는 것이다.

결국, 게임이론은 이해관계가 꼭 일치하지는 않는 상황의 여러 가지 방책에서 각 경쟁자가 합리적인 전략을 결정하는 수학적 이론으로서 합리적인 행동 및 결과의 안정성 등을 연구하는 이론이다. 게임이론은 군사나 정치뿐만 아니라 여러 가지 게임을 닮은 경쟁 상태의 문제에 응용되고 있다.

본 연구에서는 게임이론 중 가장 기본적이고 초보적인 경쟁자가 2인인 게임의 예를 이용하여 용어의 정의를 명확히 하고, 안점이 있는 경우의 게임과 혼합전략을 갖는 경우의 게임에 대해서 이론적 배경을 설명하며, 실생활에서 접할 수 있는 문제를 제시하고자 한다.

2) 용어의 정의

게임에서 두 경쟁자의 각각의 전략에 대한 이해 관계는 표로 나타내면 편리하다. 여기에서는 게임의 예를 이용하여 게임 이론에 사용되는 용어 - **영합 2자 게임**(zero-sum two persons game), **비영합게임**(non-zero sum game), **안점**(saddle point), **게임의 값**(value of game), **최대최소전략**, **최소최대전략**, **순수전략**(pure strategy), **혼합전략**(mixed strategy) - 등을 정의해보고자 한다.

▣ 경쟁자 A, B의 어떤 게임의 이득이 아래 표와 같다고 하자.

[표 1] A의 이득표

		B의 전략			최소값
		b_1	b_2	b_3	
A의 전략	a_1	3	-3	-1	-3
	a_2	2	1	3	1
	a_3	-2	-1	4	-2
최대값		3	1	4	

사실상 이 표는 경쟁자 A의 이득표이고, B의 이득표는 이 표의 이득 또는 손해를 나타내는 수치의 부호를 바꾼 것이 된다. 이 표는 만일 경쟁자 A가 전략 a_1을 쓰고 경쟁자 B가 전략 b_1을 쓰면 경쟁자 A는 3의 이득이 있고, 경쟁자 B는 3의 손해가 있다는 것이다. 이 이득표와 같이 양자의 이득의 합이 늘 0이 되는 게임을 **영합 2자 게임**(zero-sum two persons game)이라 하고, 이에 대하여 양자의 이득의 합이 0이 아닌 게임을 **비영합게임**(non-zero sum game)이라 한다.

[표 1]의 A의 이득표를 B의 이득표로 나타내면 다음과 같이 나타내어진다.

[표 2] B의 이득표

		A의 전략			최소값
		a_1	a_2	a_3	
B의 전략	b_1	-3	-2	2	-3
	b_2	3	-1	1	-1
	b_3	1	-3	-4	-4
최대값		3	-1	2	

이 표에서는 B가 전략 b_1을 쓰고, A가 전략 a_1을 쓰면, 경쟁자 B는 -3의 이득(3의 손해)을 얻는 것을 나타내고 있다.
영합 2자 게임에서 이해는 서로 상반된다. 즉, 한쪽 경쟁자의 이익은 다른쪽 경쟁자가 얻는 것의 부호를 반대로 한 값과 같다. 따라서 영합 2자 게임의 분석에 있어서는 한쪽 경쟁자의 이익만을 살피는 것으로 충분하다.

영합 2자 게임은 다음 조건에서 가능하다.
(ⅰ) 전략의 수는 유한이어야 한다.
(ⅱ) 상대가 취하는 전략의 종류는 알고 있으며, 그 경우의 득점도 알고 있어야 한다. 그러나 상대가 어떤 전략을 취할 것인가는 모르고 있다.

영합 2자 게임에서는 다음 원칙에 입각하여 게임에 임한다.
(ⅰ) 각 경쟁자는 그의 보장된 수익을 최대가 되게 행동한다.
(ⅱ) 각 경쟁자는 안정된 전략을 취한다. 즉, 모험을 하지 않는다.

[표 1]과 같은 영합 2자 게임에서 경쟁자 A와 B는 어떤 전략을 써야 A가 최대의 이익을 얻을 수 있는지 살펴보자.
경쟁자 A와 B가 서로 상대방의 전략을 알 수 있다고 하자. 그러면 우선 A가 큰 이득을 위하여 전략 a_3을 쓴다면, 이것을 안 B는 손해를 적게 하기 위하여(이익을 크게 하기 위하여) 전략 b_1을 쓸 것이고, 이것을 안 A는 이익을 크게 하기 위하여 전략 a_1을 쓸 것이고, 이것을 안 B는 그의 이익을 크게 하기 위하여 전략 b_2를 쓸 것이고, 이것을 안 A는 그의 이익을 크게 하기 위하여 전략 a_2를 쓸 것이고, 이것을 안 B는 손해를 적게 하기 위하여 전략 b_2를 쓸 것이며, 경쟁자 A는 그것을 알 때 전략 a_2를 쓸 것이다. 즉, 결국 A는 전략 a_2를, B는 전략 b_2를 쓰게 된다. 이런 사실은 [표 2]를 사용해도 마찬가지이다.

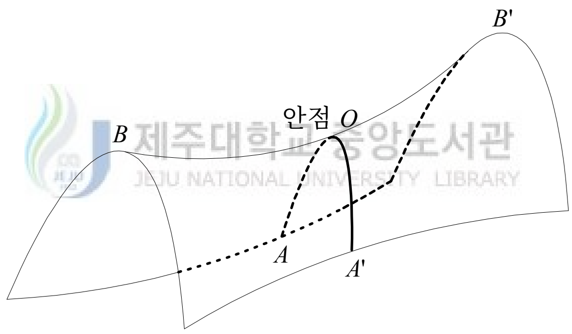
이렇게 이 게임에서는 경쟁자 A, B의 안정된 전략이 정해진다. 정해진 이 전략은 A와 B의 타협점이라고 볼 수 있다. 즉, 이 전략으로 타협할 수밖에 없다. 이 타협점은 말안장의 중심선과도 같아서 **안점**(saddle point)이라 한다.

영합 2자 게임에서 안점이 있을 때, 안점의 값을 **게임의 값**(value of game)이라 한다.

위의 [표 1]에서 게임의 값은 1이다.

또 이 값은 [표 1]에서 각 행의 최소값 가운데 최대값을 취하는 전략인 **최소최대전략**과 각 열의 최대값 가운데 최소값을 취하는 전략인 **최대최소전략**이 일치하는 값임을 알 수 있다.

안점은 전후 (또는 좌우)에서 볼 때 계곡의 파진 부분과 같고, 좌우 (또는 전후)에서 볼 때 산정이 되는 점으로 아래 그림과 같다.



이와 같이 안점이 있는 경우, 2인의 경쟁자 A, B가 모두 같은 방침에 의한 전략을 취하는 한, 그 전략이 상대측에 알려져도 상대는 아무런 이득도 얻지 못한다. 즉, 전략을 바꾸면 손실을 가져오는 결과가 된다. 이런 전략을 **순수전략**(pure strategy)이라 한다. 이에 비하여 두 가지 이상의 전략을 확률적으로 혼합하여 사용하는 전략을 **혼합전략**(mixed strategy)이라 한다.◘

3) 안점이 있는 경우의 게임

(1) 이론적 배경

안점이 있는 2×2 게임의 예를 이용하여 이론적 배경을 살펴보고, 그 결과를 분석하여 일반적인 해법을 찾아보고자 한다.

【예제 1】 아래 표와 같이 두 경쟁자를 A, B라 하고, A는 전략 a_1, a_2, a_3, a_4 가운데 하나를 선정하고, B는 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 가운데 하나를 선정한다고 하자. A, B가 서로 상대방이 취하는 전략을 미리 알 수 없는 경우의 합리적인 전략은 어떤 것인가를 아래 이득표를 써서 찾아보아라.

		B의 전략					최소값
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
A의 전략	a_1	4	-3	[5]	(-5)	[6]	-5
	a_2	[5]	4	2	[(-2)]	4	(-2)
	a_3	(-4)	[6]	2	-3	3	-4
	a_4	-3	5	-3	-3	(-4)	-4
최대값		5	6	5	[-2]	6	

【풀이】 (i) A의 전략

▶ A가 전략 $a_1 \sim a_4$ 각각의 전략을 취할 경우의 최소의 이익을 조사한다.

A가 전략 a_1을 취하는 경우에 B가 전략 b_4를 취하면 A의 이익은 -5로 최소가 된다. -5에 ( )를 한다. 마찬가지로 전략 a_2, a_3, a_4에서 최소값에 ( )를 한다. 그러면 ( )에 싸인 값은 각 행의 최소값이다.

▶ 각 행의 최소값 가운데 최대의 이익을 주는 전략을 선정한다. 즉, 위에서 구하는 각 행의 최소값 -5, -2, -4, -4 가운데서 최대값은 -2이므로 전략 a_2를 취한다.

(ⅱ) B의 전략

▶ 마찬가지로 B에 대하여 각 열의 최소의 이익(표에서는 최대값)을 살펴서 각 열마다 해당되는 수에 [ ]를 한다.

▶ 각 열의 최대값 가운데 최소의 값(최소의 손실)인 전략을 선정한다. 각 열의 최대값 5, 6, 5, -2, 6에서 최소값은 -2이므로 전략 b_4를 선정한다. 이렇게 A가 전략 a_2를 취하고, B가 전략 b_4를 취하면, A는 최악의 경우에도 -2의 이득(2의 손실)을 보게 된다.

여기서 A가 전략 a_2를 취한다는 것을 사전에 B가 알고 있다 하여도 B가 최악의 사태를 생각하여 그 안에서 최선의 전략을 취한다는 방침에 따른다면, B에게의 최선의 전략은 역시 b_4이다. 또 B가 취하는 전략이 b_4임을 사전에 A가 알고 있다 하여도 A가 최악의 사태를 생각하여 그 안에서 최선의 전략을 취한다는 방침에 따른다면, A에게의 최선의 전략은 역시 a_2이다.

각 행의 최소값 가운데 최대값과 각 열의 최대값 가운데 최소값이 일치하는 경우, 그 값을 게임의 값이라 하고, 이 점이 안점이다.◘

결론적으로 안점이 있는 경우의 전략은 아래 표와 같다.

안점이 있는 경우의 전략(순수전략)

♠ 경쟁자 A는 각 순수전략에서 최소의 이득 가운데 최대인 전략 즉, 최소최대전략을 사용한다.

♠ 경쟁자 B는 각 순수전략에서 최대의 손실 가운데 최소인 전략 즉, 최대최소전략을 사용한다.

(2) 실생활 문제

【문제 1】 A와 B는 귤을 가지고 있다. A는 2와 3이 적힌 카드 두 장, B는 1과 4가 적힌 카드 두 장을 가지고 있다. 각자가 동시에 카드 한 장 씩 내밀어 내민 숫자의 차만큼 귤을 주고받기로 하는데, 차가 홀수이면 작은 쪽이 큰 쪽에게 주고, 짝수이면 큰 쪽이 작은 쪽에게 주기로 한다. 각자는 어느 카드를 내미는 것이 유리할까? 그리고 게임의 값을 구하여라.

【풀이】 다음과 같이 표로 정리하여 보자.

		B의 전략	
		1	4
A의 전략	2	1	2
	3	-2	-1

A는 최소최대전략을 사용하여 2가 적힌 카드를 내밀고, B는 최대최소전략을 사용하여 1이 적힌 카드를 내미는 것이 유리하다. 결국, 이 경우 게임의 값은 1이고, A에게 유리한 게임이다.◘

【문제 2】 A와 B는 가위바위보를 하여 아래의 표와 같이 상금을 주고받기로 하였다. 양수는 A가 B로부터 받는 금액이고, 음수는 B가 A로부터 받는 금액이다. A, B는 무엇을 내미는 것이 유리할까? 그리고 게임의 값을 구하여라.

		B의 전략		
		가위	바위	보
A의 전략	가위	3	0	-4
	바위	2	3	1
	보	-4	2	-1

【풀이】 A는 최소최대전략을 사용하여 바위를 내고, B는 최대최소전략을 사용하여 보를 내는 것이 유리하다. 결국, 이 경우 게임의 값은 1이고, A에게 유리한 게임이다.◘

4) 혼합 전략을 갖는 경우의 게임

(1) 이론적 배경

앞에서 두 가지 이상의 전략을 확률적으로 혼합하여 사용하는 전략을 혼합전략(mixed strategy)이라고 했다. 여기에서는 혼합전략을 갖는 2×2 게임의 예를 이용하여 이론적 배경을 살펴보고, 그 결과를 분석하여 일반적인 해법을 찾아보고자 한다.

【예제 2】 두 경쟁자를 A, B라 하고, A는 전략 a_1, a_2 가운데 하나를 선정하고, B는 b_1, b_2 가운데 하나를 선정한다 하자. A, B가 서로 상대방이 취하는 전략을 미리 알 수 없는 경우의 합리적인 전략은 어떤 것인가를 아래 이득표를 써서 찾아보아라.

		B의 전략	
		b_1	b_2
A의 전략	a_1	2	-1
	a_2	-2	3

【풀이】 A가 전략 a_1을 쓰면, 그것을 안 B는 그의 손실을 최소화하기 위하여 전략 b_2를 쓸 것이고, 이것을 안 A는 전략 a_2를 쓸 것이고, 이것을 안 B는 전략 b_1을 쓸 것이고, 이것을 안 A는 전략 a_1을 쓸 것이고, 이것을 안 B는 b_2를 쓸 것이고, … 끝없이 반복되어 안정된 전략을 찾을 수가 없다.

안점이 없는 경우는 안정된 게임의 전략이 찾아지지 않는다. 이런 경우는 경

쟁자 A, B가 자신의 전략을 혼합하여 사용하는 것이 최선의 전략이 된다는 것이 알려져 있다. 물론 각 전략을 쓰는 비율은 A에게는 자신의 이익을 최대로 하고, B에게는 자신의 손실을 최소가 되게 각 전략을 혼합하여 사용하는 비율을 정해야 한다.

경쟁자 A가 전략 a_1을 쓰는 확률을 p

경쟁자 A가 전략 a_2를 쓰는 확률을 $1-p$로 하고

경쟁자 B가 전략 b_1을 쓰는 확률을 q

경쟁자 B가 전략 b_2를 쓰는 확률을 $1-q$

로 하자. 그러면 이 게임 1회당 A의 이득의 기대값을 E_A라고 하면,

$$
\begin{aligned}
E_A &= 2pq - p(1-q) - 2(1-p)q + 3(1-p)(1-q) \\
&= 8pq - 4p - 5q + 3 \\
&= 8\left(p - \frac{5}{8}\right)\left(q - \frac{4}{8}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

이므로, 1회의 게임당 A가 평균적으로 얼마나 이익을 얻겠느냐에 대한 A의 기대값은 A의 전략인 p에만 의존하지 않고 B의 전략인 q에도 좌우된다.

이 식을 p를 가로축으로 잡고, 세로축을 A의 기대값 E_A로 잡아서 그래프를 그려보자.

$q=0$일 때, $E_A = -4p+3$이므로 감소함수

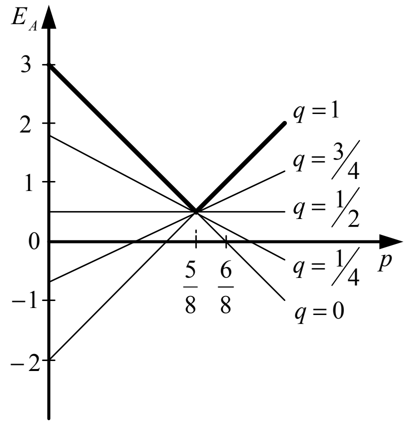
$q=\frac{1}{4}$일 때, $E_A = -2p+\frac{7}{4}$이므로 감소함수

$q=\frac{1}{2}$일 때, $E_A = \frac{1}{2}$이므로 늘 일정

$q=\frac{3}{4}$일 때, $E_A = 2p-\frac{3}{4}$이므로 증가함수

$q=1$일 때, $E_A = 4p-2$이므로 증가함수

따라서 q의 값을 0에서 1까지 변화시킬 때 E_A를 나타내는 그래프는 다음과 같다.



$q=0$ 일 때 $p=0$ 에서 $E_A=3$, p 가 증가함에 따라 E_A 는 감소하고,

$p=\frac{4}{8}$ 일 때 $E_A=1$, $p=\frac{5}{8}$ 일 때 $E_A=\frac{1}{2}$ 이고,

$p=\frac{6}{8}$ 일 때 $E_A=0$ 이다.

$q=\frac{1}{2}$ 일 때는 p 의 값에 관계없이 $E_A=\frac{1}{2}$ 로서 일정하다.

$q=1$ 일 때는 $p=0$ 일 때 $E_A=-2$ 이고, E_A 는 p 의 증가함수가 된다.

이렇게 q 의 값에 따라서 E_A 의 값이 변하는데, 그 안에서 이득이 최대가 되는 것을 선정한다. 모든 p 의 값에 대하여 A의 이득 E_A 는 두 직선 $q=0$ 과 $q=1$ 인 경우의 두 직선 사이에 존재한다. 어떤 p 에 대해서도 A의 최대의 이득을 최소로 하는 것은 꺾어진 굵은 선에 있으므로 A에 대하여 최대최소전략은 이 굵은 선의 꼭지점 즉, $p=\frac{5}{8}$ 로 하는 경우이다.

이 경우 기대 이득 $E_A=\frac{1}{2}$ 이고, $p=\frac{5}{8}$ 로 하기만 하면 B의 어떤 전략에도 관계없이 즉, q 의 값 여하에 관계없이 A의 기대값은 $E_A=\frac{1}{2}$ 보다는 작

아질 수는 없다. 따라서 A에게 안정된 게임은 $p=\frac{5}{8}$, $1-p=\frac{3}{8}$ 즉, 전략 a_1 대 a_2의 비율을 $\frac{5}{8}:\frac{3}{8}=5:3$ 으로 하는 것이다.

다음은 경쟁자 B의 혼합전략을 구해보자. B의 기대이득 E_B는

$$E_B = -8pq + 4p + 5q - 3$$

$$= -8\left(p-\frac{5}{8}\right)\left(q-\frac{4}{8}\right)-\frac{1}{2}$$

이 된다. 이 식의 그래프를 그려보자. 가로축을 q축으로 하고, 세로축은 B의 기대값 E_B의 값을 나타내자.

p에 값 $p=0$, $p=\frac{3}{8}$, $p=\frac{5}{8}$, $p=1$ 에 대한 그래프를 그려보자.

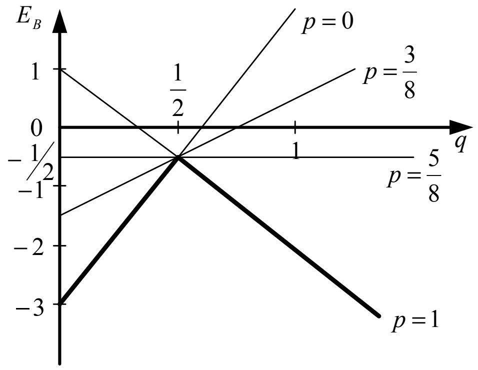
$p=0$ 일 때, $E_B = -5q-3$

$p=\frac{3}{8}$ 일 때, $E_B = 2q-\frac{3}{2}$

$p=\frac{5}{8}$ 일 때, $E_B = -\frac{1}{2}$

$p=1$ 일 때, $E_B = -3q+1$

그래프는 다음과 같다.



이 그래프에서 q의 값을 여러 가지로 변화시킬 때, 이들 직선은 $p=0$과 $p=1$인 경우의 직선 사이에 든다. 따라서 B에 대하여 최소의 이득을 최대로 하는 전략은 그래프에서 굵은 선에서 꺾어진 꼭지점에서 이루어진다. 이 점은 $q=\frac{1}{2}$이고, 이 경우 A의 어떤 전략에 대해서도 B에게는 $-\frac{1}{2}$의 이득이 보장된다. 사실은 $\frac{1}{2}$의 손실이다.

따라서 B에게는 전략 b_1과 b_2를 $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1:1$의 비율로 혼합전략을 쓸 때, B의 손실은 $\frac{1}{2}$ 보다 더 많아지지 않는다. 이것이 B의 최선의 전략이다.

결국 이 게임의 전략은 다음과 같다.

A는 전략 a_1과 a_2를 $5:3$의 비율로 쓰고,

B는 전략 b_1과 b_2를 $1:1$의 비율로 쓴다.

이 경우 게임의 값은 $\frac{1}{2}$로서 A에게는 $\frac{1}{2}$의 이득이 있고, B에게는 $-\frac{1}{2}$의 이득($\frac{1}{2}$의 손실)이 있다.[16] ◘

(2) 실생활 문제

【문제 3】 A와 B는 귤을 가지고 있다. A는 1과 2가 적힌 카드 두 장, B는 4와 5가 적힌 카드 두 장을 가지고 있다. 각자가 동시에 카드 한 장 씩 내밀어 내민 숫자의 차만큼 귤을 주고받기로 하는데, 차가 홀수이면 작은 쪽이 큰 쪽에게 주고, 짝수이면 큰 쪽이 작은 쪽에게 주기로 한다. 이 게임의 값을 구하여라.

16) 유동선(1998), 「새로운 OR 원론」, 교우사, pp.308~311.

【풀이】 이 문제를 표로 정리하면 다음과 같다.

		B의 전략	
		4	5
A의 전략	1	-3	4
	2	2	-3

이 문제는 안점이 없는 게임이다. 따라서 혼합전략을 이용하여 문제를 해결해야 한다.

A가 1이 적힌 카드를 내밀 확률을 x

A가 2가 적힌 카드를 내밀 확률을 $1-x$로 하고

B가 4가 적힌 카드를 내밀 확률을 y

B가 5가 적힌 카드를 내밀 확률을 $1-y$로 하자.

그러면 이 게임 1회당 A와 B의 이득의 기대값 E_A와 E_B는

$$\begin{aligned} E_A &= -3xy+4x(1-y)+2(1-x)y-3(1-x)(1-y) \\ &= -12xy+7x+5y-3 \\ &= -12\left(x-\frac{5}{12}\right)\left(y-\frac{7}{12}\right)-\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_B &= 3xy-4x(1-y)-2(1-x)y+3(1-x)(1-y) \\ &= 12xy-7x-5y+3 \\ &= -12\left(x-\frac{5}{12}\right)\left(y-\frac{7}{12}\right)+\frac{1}{12} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

결국, A는 1의 카드와 2의 카드를 $5:7$의 비율로 쓰고, B는 4의 카드와 5의 카드를 $7:5$의 비율로 쓴다. 그리고 게임의 값은 $-\frac{1}{12}$로서 A에게는 $\frac{1}{12}$의 손실이 있다.◘

【문제 4】 야구 경기에서 어떤 타자는 투수의 볼이 직구라고 예상하고 있다가 직구를 쳤을 때 안타가 될 확률은 5할이고, 변화구를 쳤을 때는 안타가 될 확률은 1할이라고 한다. 또, 투수의 볼이 변화구라고 예상하고 있다가 직구와 변화구를 쳤을 때 안타가 될 확률은 각각 2할과 3할이라고 한다. 이 게임에서 타자가 한 번 칠 때 안타가 될 확률은?

【풀이】 타자 입장에서 이 게임을 나타내는 표는 다음과 같다.

		투수의 투구	
		직구	변화구
타자의 예상	직구	0.5	0.1
	변화구	0.2	0.3

타자가 직구라고 예상할 확률을 1

타자가 변화구라고 예상할 확률을 0으로 하고

투수가 직구를 던질 확률을 x

투수가 변화구를 던질 확률을 $1-x$로 하자.

그러면 이 게임 1회당 타자가 안타를 칠 확률 E_A는

$E_A = 0.5x + 0.1(1-x) = 0.4x + 0.1$ 이다.

이 식으로 미루어 투수가 직구와 변화구의 비율을 $1:1$로 던지면 타자가 안타를 칠 확률은 3할이 되고, 직구와 변화구의 비율을 $3:1$로 던지면 타자가 안타가 칠 확률은 4할이 된다.◘

3. 선거와 정당성

선거는 각 개인의 의사를 반영하여 집단 내에서 합일된 결론을 이끌어 내는 과정이다. 학급의 임원, 국회의원, 대통령 등을 선출할 때는 물론 올림픽 개최지의

선정과 같은 의사 결정 과정은 다양한 방법의 선거로 이루어진다. 여기서는 선거에서 당선자를 결정하는 여러 가지 방법을 알아보고, 선거하기 전에 당선자 결정 방법을 확실하게 정해두는 것이 중요함을 강조하고자 한다.

다음과 같은 네 가지 당선자 결정 방법에 대해서 생각해 보자.

(ⅰ) 방법 A : 최다득표를 한 후보가 당선되는 방법

(ⅱ) 방법 B(보르다[17]의 방법) : 투표자들이 각각의 후보들에게 1위, 2위, 3위, … 와 같이 순위를 매기고 각 후보들의 평균순위를 계산하여 가장 높은 후보가 당선되는 방법

(ⅲ) 방법 C(Hare의 방법) : 보르다의 방법에서와 같이 투표자들이 각각의 후보들에게 1위, 2위, 3위, … 와 같이 순위를 매긴다. 첫 번째 순위를 가지고 후보를 비교해서 만약 과반수의 득표자가 없으면 먼저 최소 득표자를 탈락시키고, 이렇게 탈락시킨 후보의 표는 그 투표자들이 두 번째로 지정한 후보에게 주는 방법

(ⅳ) 방법 D : 두 후보의 선호도를 비교하여 우세한 후보에게는 2점, 열세한 후보에게는 0점, 비겼을 때는 1점을 주기로 한다. 각 후보가 얻은 점수의 합이 가장 큰 후보가 당선되는 방법

【예제 1】 세 후보자 갑, 을, 병이 출마한 선거를 생각하자. 이 선거에서 35명의 유권자가 모두 투표하여 각 후보자에게 아래 표와 같이 순위를 정했다고 가정하자. 위에 주어진 네 가지 당선자 결정 방법으로 당선자를 결정하시오.

후보의 순위	갑,을,병	갑,병,을	을,갑,병	을,병,갑	병,갑,을	병,을,갑
유권자의 수	9	5	3	7	4	7

17) 보르다(Jean Charles Borda 1733 ~ 1799) 프랑스의 물리・천문학자임.

【풀이】 (i) 방법 A

14명이 갑을, 10명이 을을, 11명이 병을 선호하고 있으므로 최다 득표자는 갑이 되며 갑이 당선된다.

(ii) 방법 B

1순위 후보자에게는 3점을, 2순위 후보자에게는 2점을, 3순위 후보자에게는 1점을 주기로 하고 각 후보자의 점수를 계산하자.

첫 칸에 있는 9명의 유권자는 갑에게는 $9\times3=27$점, 을에게는 $9\times2=18$점, 병에게는 $9\times1=9$점을 주었다.

이와 같이 각 후보자의 총점을 계산하면 다음과 같다.

(갑의 총점) = $(9\times3)+(5\times3)+(3\times2)+(7\times1)+(4\times2)+(7\times1) = 70$점

(을의 총점) = $(9\times2)+(5\times1)+(3\times3)+(7\times3)+(4\times1)+(7\times2) = 71$점

(병의 총점) = $(9\times1)+(5\times2)+(3\times1)+(7\times2)+(4\times3)+(7\times3) = 69$점

이상에서 갑의 평균순위 점수는 70/35, 을의 평균순위 점수는 71/35, 병의 평균순위 점수는 69/35이므로 을이 당선된다.

(iii) 방법 C

첫 번째 순위만 살펴보면 분명히 과반수의 득표자는 없다. 따라서 을의 첫 번째 순위에 의한 득표수가 최소이므로 을을 탈락시킨다. 을을 1순위로 투표한 10명의 표 중에 3표는 갑에게, 7표는 병에게 준다. 그러면 결국 갑은 $14+3=17$표를, 병은 $11+7=18$표를 얻게되어 병이 당선된다.

(iv) 방법 D

두 후보끼리의 선호도를 비교하여 표로 나타내면 다음과 같다.

후보간 선호도 비교	득표수	점수
갑 : 을	18 : 17	갑 : 2점, 을 : 0점
갑 : 병	17 : 18	갑 : 0점, 병 : 2점
을 : 병	19 : 16	을 : 2점, 병 : 0점

따라서 이 방법으로는 당선자를 결정할 수 없다.

위의 예에서 알 수 있듯이 똑같은 선거 결과에서도 당선자를 결정하는 방법에 따라 당선자가 달라질 수 있다. 그러므로 선거하기 전에 그 선거의 성격에 맞는 당선자를 결정하는 방법을 정해 두는 것이 중요하다.◘

일반적으로 공정한 선거에서 당선자를 결정할 때는 다음과 같은 사항들을 고려한다.

첫째, 1위를 차지한 후보의 표수가 전체 투표수의 절반을 넘으면 그 후보를 당선자로 한다.

둘째, 두 후보끼리만 선호도를 비교할 때, 한 후보가 언제나 다른 후보보다도 더 선호되면 그는 그 선거의 당선자가 된다.

셋째, 당선자는 몇 명의 투표자가 이전보다 당선자에게 더 유리하게 투표하고, 나머지 투표자는 이전과 동일한 후보에게 투표한 재선거에서도 당선된다.

넷째, 당선자는 한 낙선자가 사퇴하여 그 낙선자를 제외한 후 재검표해도 또 다시 당선된다.

결국, 당선자 결정 방법의 선택에 따라 원하는 선거 결과를 나오게 할 수 있는데, 이것을 애로우[18]의 이론이라고 한다. 이 이론에 따르면 현재는 물론 앞으로도 완벽한 선거방법은 있을 수 없다는 것이다.

4. 계획세우기의 최적화

1) 선형계획법

생산회사에서는 조금이라도 이익이 많이 남는 제품을 보다 많이 생산하여 최대

18) 애로우(Kenneth Joseph Arrow, 1921 ~) 미국의 경제학자. 그의 저서 「사회적 선택과 개인적 평가」를 통해 민주주의적인 결정(決定)에 내재하는 모순을 제시한 '투표의 역리(逆理)'라는 문제를 처음 밝혀 주목을 끌었음.

의 이익을 얻는 것이 목적이고, 수송회사에서는 트럭 한 대 당 적재량을 많이 해서 수송 횟수를 줄이고, 수송경로를 되도록 짧게 하여 수송경비를 최소가 되게 하는 것이 목적일 것이다.

가정에서는 주부가 주부식 재료를 살 때 가족의 기호와 영양가를 생각하여 되도록 식비가 적게 들도록 하려면 어떻게 주부식의 재료를 사야할 것인가를 생각하게 된다.

회사에서는 현재 보유하고 있는 기계와 노동력으로 여러 가지 제품을 각각 얼마나 생산하면 전체 이익이 최대가 되겠는가를 생각하게 된다.

이러한 문제는 한 기업만이 문제가 아니고 지역 계획, 광역 행정, 국가적인 정책 등 얼마든지 대규모의 것으로 확장해 나갈 수 있다.

이들 목적을 달성하기 위해서는 조건이 붙는다는 것에 주의해야 한다. 생산회사에서는 공장의 생산능력이나 사용되는 원료에는 한계가 있을 것이다. 수송회사에서는 트럭의 크기나 대수, 그리고 적재량 등에 여러 가지 제약이 있을 것이다.

이와 같이 어떤 제약조건에서 최대의 효과를 얻으려는 방법을 찾아서 행동하지 않으면 안 되는 경우, 제약조건이나 효과가 어떤 변수의 일차식으로 주어지는 최적화문제가 선형계획문제로서 이것을 해결하려는 기법이 선형계획법이다.

최적화 문제의 중심에 있는 것 중의 하나가 선형계획법이다. 물론 이산수학에서는 이산최적화 문제를 다루어야겠지만, 본 연구에서는 일반적인 최적화 문제를 다룬다. 여기서는 실생활에서 접할 수 있는 최대화 문제와 최소화 문제를 통하여 이론적 배경과 원리를 알아보고자 한다.

【예제 1】 어느 자동차 회사에서 트럭 한 대를 생산하기 위하여 철강 2톤, 노동력 1명을 필요로 한다. 한편 승용차 한 대를 생산하는데 철강 1톤, 노동력 4명이 필요하다. 철강이 100톤, 노동력이 120명밖에는 사용할 수 없다. 또, 트럭 한 대를 제조하면 20만원의 이익이 생기고, 승용차 1대를 생산하면 30만원의 이익이 생긴다. 트럭과 승용차를 몇 대씩 생산하면 총 이익을 최대로 할 수 있겠는가?

【풀이】 이 문제를 표로 정리하면 다음과 같다.

	철강	노동력	이익
트럭	2톤	1명	20만원
승용차	1톤	4명	30만원
제한	100톤	120명	

이익을 최대로 할 트럭과 승용차의 제조 대수가 이 문제의 최적해이다.

트럭을 x 대, 승용차를 y 대 생산한다고 하고 이 문제를 정식화하면 다음과 같다.

철강 : $2x + y \le 100$ …①

노동력 : $x + 4y \le 120$ …②

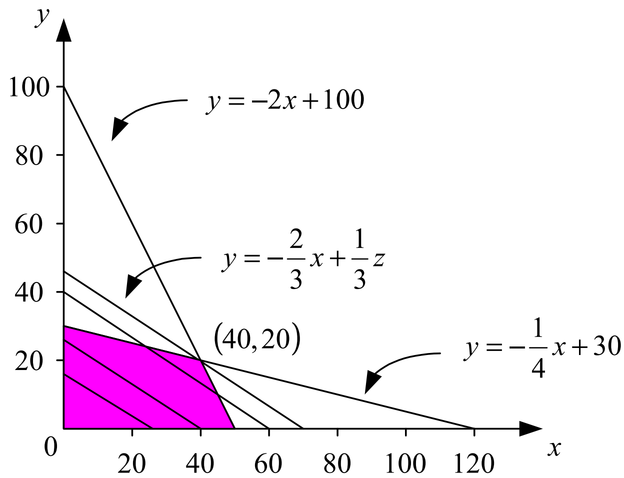
$x \ge 0$, $y \ge 0$ …③

이익 : $z = 20x + 30y$ …④

식 ① ~ ③은 제약조건식이고, 식 ④는 목적함수이다.

또 이익 z를 최대로 하는 x, y의 값이 최적해이다.

이렇게 정식화된 문제는 그래프를 이용하여 풀 수 있다. 제약조건식을 그래프로 나타내면 아래 그림과 같다.



$x \ge 0$, $y \ge 0$이므로 제1사분면에 한정된다.

제약조건식 ①, ②는 $y \leq -2x+100$, $y \leq -\frac{1}{4}x+30$ 이 되어 제약조건식이 성립하는 범위는 그림에서 어두운 부분이다.

다음은 목적함수의 식 ④를 변형하여 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{30}z$ 가 되어 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 인 직선이 된다. 이 직선이 점 $(40, 20)$ 을 지날 때 y 절편 $\frac{1}{3}z$ 의 값이 최대가 된다.

따라서 트럭 40대, 승용차 20대를 생산할 때 이익이 최대가 되고, 그 이익 z 는 다음과 같다. $z = 20\times40 + 30\times20 = 140$ (만원).◘

【문제 1】 제단사가 면직 $16\,m^2$, 비단 $11\,m^2$, 모직 $15\,m^2$ 의 재료를 이용하여 옷들을 만들 수 있다. 남성복 한 벌을 만드는 데는 면직 $2\,m^2$, 비단 $1\,m^2$, 모직 $1\,m^2$ 이 필요하다. 여성복 한 벌을 만드는 데는 면직 $1\,m^2$, 비단 $2\,m^2$, 모직 $3\,m^2$ 이 필요하다. 남성복 한 벌은 30달러에 수출되고, 여성복 한 벌은 50달러에 수출된다고 한다. 이것을 표로 나타내면 아래와 같다. 이 때, 최대의 달러를 벌어들이기 위해 몇 벌의 남성복과 여성복을 각각 만들어야 하는가?

	남성복	여성복	제한량
면직	2	1	16
비단	1	2	11
모직	1	3	15
이익	30(달러)	50(달러)	

【예제 2】 어느 양계장에서 두 종류의 사료 A, B를 쓰고 있다. 닭 한 마리 사육에 필요한 탄수화물, 단백질의 단위 무게당 함유량 및 사료의 가격 및 닭 한 마리당 이들 영양소의 필요량이 다음 표와 같다. 최소의 비용으로 닭을 사육하려면 사료 A와 사료 B를 닭 한 마리 당 몇 단위씩이 필요한가?

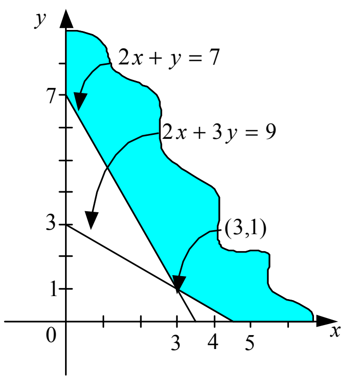
영양소	사료A	사료B	필요량
탄수화물	4	2	14
단백질	2	3	9
단가	10	8	

【풀이】 닭 한 마리 당 1일 필요한 사료 A와 B의 양을 x 단위, y 단위라 하면, 다음과 같은 사료에 관한 제약식이 성립한다.

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 14 \\ 2x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

그리고 이 경우 사료의 총비용은 $z = 10x + 8y$가 된다.

우리는 z의 값을 최소로 하는 x, y의 값을 구하면 된다. 제약조건식을 그림으로 나타내면 아래 그림의 어두운 부분과 같다.



목적식 $10x+8y=z$ 즉, 직선 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{z}{8}$ 가 두 직선 $4x+2y=14$ 와 $2x+3y=9$ 의 교점 $(3, 1)$를 지날 때, y절편 $\frac{z}{8}$ 가 최소가 되므로 z의 최소값은 $z=10\times3+8\times1=38$ 이다.◘

【문제 2】 아래 표는 주식과 부식에서 각각 1kg에 포함되어 있는 영양소 A, B, C의 양을 나타낸 것이다. 이 경우에 주식과 부식을 1일에 몇 kg 섭취하면 최소의 비용이 들겠는가?

영양소	주식	부식	필요량(mg/일)
A	3	1	6
B	4	3	12
C	2	5	10
가격	700원/kg	1050원/kg	

2) 배낭꾸리기

배낭꾸리기 문제는 가치가 매겨져 있는 물건을 제한된 용기에 가치의 합이 최대가 되도록 담는 문제이다. 여기에서는 예문을 이용하여 효과적인 알고리즘을 생각해 보고자 한다.

【예제 1】 영수는 야영에 필요한 품목의 무게와 그 품목의 가치를 점수로 나타내었더니 아래 표와 같았다. 영수가 운반할 수 있는 배낭의 무게를 14.5kg 이하라고 할 때, 배낭에 꾸려진 품목의 가치의 합을 되도록 크게 하려면 영수는 어떻게 배낭을 꾸려야 할까?

품목	무게(kg)	가치(점)
식기・버너 세트	6.3	5
침낭	3.6	4
비상 식량	2.2	3
비상 약품	1.1	4
놀이 기구	1.1	3
여벌 옷	0.7	3
책	0.5	2
밧줄	0.9	5
카메라	0.2	3

【풀이】 이 문제는 여러 가지 방법으로 생각해 볼 수 있다.

(i) 무게가 많이 나가는 것부터 차례로 배낭을 꾸리는 방법

이 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

품목	무게(kg)	가치(점)	누적무게	누적가치
식기・버너 세트	6.3	5	6.3	5
침낭	3.6	4	9.9	9
비상 식량	2.2	3	12.1	12
비상 약품	1.1	4	13.2	16
놀이 기구	1.1	3	14.3	19
밧줄	0.9	5	15.2	24
여벌 옷	0.7	3	15.9	27
책	0.5	2	16.4	29
카메라	0.2	3	16.6	32

따라서 이 방법으로 배낭을 꾸리면 영수가 운반할 수 있는 배낭의 무게가 14.5kg 이하이기 때문에 식기・버너 세트, 침낭, 비상 식량, 비상 약품, 놀이기구까지는 가지고 갈 수 있으나, 밧줄, 여벌 옷, 책, 카메라는 가지고 갈 수 없다. 결국 배낭에 꾸려진 품목의 가치의 합은 19점이 된다.

(ⅱ) 가치가 높으면서 무게가 적게 나가는 것부터 차례로 배낭을 꾸리는 방법

이 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

품목	무게(kg)	가치(점)	누적무게	누적가치
밧줄	0.9	5	0.9	5
식기・버너 세트	6.3	5	7.2	10
비상 약품	1.1	4	8.3	14
침낭	3.6	4	11.9	18
카메라	0.2	3	12.1	21
여벌 옷	0.7	3	12.8	24
놀이 기구	1.1	3	13.9	27
비상 식량	2.2	3	16.1	30
책	0.5	2	16.6	32

따라서 이 방법으로 배낭을 꾸리면 영수가 운반할 수 있는 배낭의 무게가 14.5kg 이하이기 때문에 밧줄, 식기・버너 세트, 비상 약품, 침낭, 카메라, 여벌 옷, 놀이기구는 가지고 갈 수 있으나, 비상 식량과 책은 가지고 갈 수 없다. 결국 배낭에 꾸려진 품목의 가치의 합은 27점이 된다.

(ⅲ) 무게가 적게 나가는 것부터 차례로 배낭을 꾸리는 방법

이 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

품목	무게(kg)	가치(점)	누적무게	누적가치
카메라	0.2	3	0.2	3
책	0.5	2	0.7	5
여벌 옷	0.7	3	1.4	8
밧줄	0.9	5	2.3	13
놀이 기구	1.1	3	3.4	16
비상 약품	1.1	4	4.5	20
비상 식량	2.2	3	6.7	23
침낭	3.6	4	10.3	27
식기・버너 세트	6.3	5	16.6	32

따라서 이 방법으로 배낭을 꾸리면 식기・버너 세트를 제외하고는 모두 가지고 갈 수 있다. 결국 배낭에 꾸려진 품목의 가치의 합은 27점이 된다.

(ⅳ) 각 품목마다 그 품목의 가치를 무게로 나눈 kg당 가치를 소수 둘째 자리까지 구하여 점수가 높은 것부터 차례로 배낭을 꾸리는 방법

이 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

품목	무게(kg)	가치(점)	kg당 가치	누적무게	누적가치
카메라	0.2	3	15.00	0.2	3
밧줄	0.9	5	5.56	1.1	8
여벌 옷	0.7	3	4.29	1.8	11
책	0.5	2	4.00	2.3	13
비상 약품	1.1	4	3.64	3.4	17
놀이 기구	1.1	3	2.73	4.5	20
침낭	3.6	4	1.11	8.1	24
식기・버너 세트	6.3	5	0.79	14.4	29
비상 식량	2.2	3	0.73	16.6	32

따라서 이 방법으로 배낭을 꾸리면 비상 식량을 제외하고는 모두 가지고 갈

수 있다. 결국 배낭에 꾸려진 품목의 가치의 합은 29점이 된다.

위의 예제에서는 방법(ⅳ)가 가장 효과적인 알고리즘이나 경우에 따라서는 다른 알고리즘이 더 효과적일 수 있다. 결국 배낭꾸리기 문제의 정확한 해를 알아내기 위해서는 넣을 수 있는 경우의 가치를 모두 비교해 보아야 하는데 물건의 개수가 많으면 그 경우의 수를 구하거나 가치를 비교하는데 많은 시간이 걸린다. 그러므로 배낭꾸리기 문제를 해결할 수 있는 효과적인 알고리즘을 찾아내는 것이 중요하나 아직까지 미해결 문제로 남아 있다.◘

5. 최적의 경로

의사결정문제는 단번에 의사결정이 이루어지는 문제도 있지만 많은 문제에서 결정이라는 행위가 한 번에 완료되는 일은 드물고, 몇 번이고 상황에 따라서 결정을 내리는 다단계 결정문제라는 꼴로 모델화되는 것이 많다. 이와 같은 형의 문제는 경제배분문제, 스케줄링문제, 재고문제 등 폭넓게 존재한다. 이런 문제를 점차 결정문제라 한다. 여기에서는 점차 결정문제의 최적해 유도에서 대단히 유력한 수법인 수리계획법을 생각해 본다.

한 시스템이 시간변수를 포함하여 과거와 미래에 관련지워질 때, 그 계는 동적이라고 한다. 이러한 시스템에서는 어느 한 시점에서만 착안한 1회로 결정을 하는 것이 아니고, 어느 기간에 걸쳐서 차례로 몇 회의 결정을 내려야 한다. 이러한 결정에서 개개의 결정만을 생각하여 최적화해서 얻는 일련의 결정이 전체적으로 최적이라는 보장은 없다.

여기에서 다루는 내용은 일정한 알고리즘은 없으나, 구체적인 함수형으로 표현되지 않는 경우에도 적용되는 널리 쓰이는 수법이다. 그리고 이 수법은 미국의 수학자 Bellman이 최초로 제안하여 여러 분야에서 널리 적용되는 '최적성의 원리'라고 부르는 성질을 기초로 하고 있다.

Principle of Optimality

An optimal policy has the property that what ever the intial state and intial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.

최적성의 원리

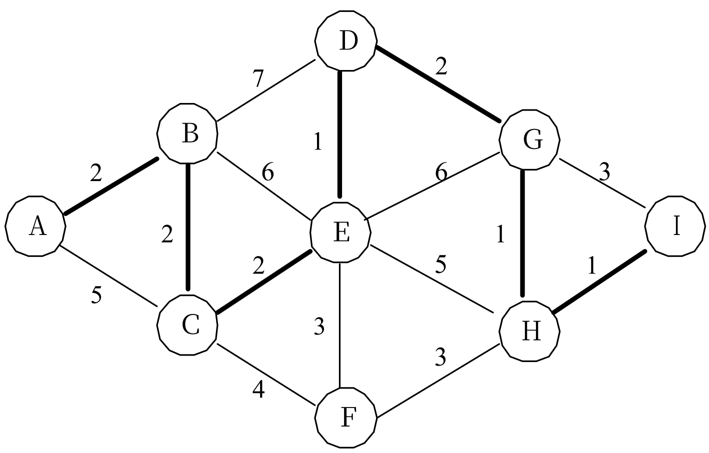
최초의 상태와 최초의 결정이 무엇이었든지, 남은 결정은 최초의 결정의 결과로 생긴 상태에 관하여 최적정책이 되지 않으면 안 된다.

1) 그래프를 이용한 최적의 경로

(1) 이론적 배경

최적의 경로를 구하는 방법에는 여러 가지가 있다. 여기서는 그 중에 예를 이용하여 후퇴형 최적화법과 전진형 최적화법의 원리와 이론적 배경을 살펴본다.

【예제 1】 아래 그림은 지점 A에서 지점 I로 가는데 경유하는 각 지점간의 시간을 나타낸 것이다. 목적지까지의 최단경로를 구하여라.



【풀이】 A지점에서 I지점까지 가는 모든 경로의 수는 64가지가 있다. A지점에서 I지점까지의 최단경로를 구하기 위해 모든 경로에 대하여 조사한다는 것은 비능률적이다.

(i) **후퇴형 최적화법** : 조사 방법을 줄이는 한 가지 방법으로 종점 I에서 역으로 각 지점까지의 최단경로를 거꾸로 더듬어 나가면서 최단경로에 포함되지 않는 경로는 지워나간다.

▶ 1단계 : 지점 G에서 I까지의 최단경로

G - I : 3시간

G - H - I : 2시간이므로, G - H - I가 최단경로이다.

최단경로가 아닌 G - I는 지워 버린다.

▶ 2단계 : (1) 지점 D에서 I까지의 최단경로

D - G - H - I : 4시간

D - E - G - H - I : 9시간

D - E - H - I : 7시간

D - E - F - H - I : 8시간이므로,

D - G - H - I 가 최단경로이다.

(2) 지점 E에서 I까지의 최단경로

E - D - G - H - I : 5시간

E - G - H - I : 8시간

E - H - I : 6시간

E - F - H - I : 7시간이므로,

E - D - G - H - I가 최단경로이다.

E - G와 E - H는 지워버린다.

(3) 지점 F에서 I까지의 최단경로

F - H - I : 4시간

F - E - G - H - I : 11시간이므로,

F - H - I가 최단경로이다.

▶ 3단계 : (1) 지점 B에서 I까지의 최단경로

B – D – G – H – I : 11시간

B – E – D – G – H – I : 11시간

B – C – E – D – G – H – I : 9시간이므로,

B – C – E – D – G – H – I가 최단경로이다.

B – D, B – E는 지워버린다.

(2) 지점 C에서 I까지의 최단경로

C – E – D – G – H – I : 7시간

C – E – F – H – I : 9시간

C – F – H – I : 8시간이므로,

C – E – D – G – H – I가 최단경로이다.

C – F, E – F는 지워버린다.

▶ 4단계 : A에서 I까지의 최단경로

A – B – C – E – D – G – H – I : 11시간

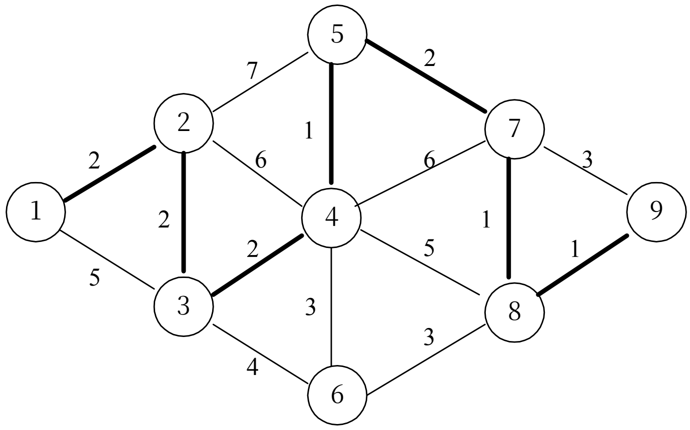
A – C – E – D – G – H – I : 12시간이므로,

A – B – C – E – D – G – H – I가 최단경로이다.

A – C는 지워버린다.

따라서 A에서 I까지의 최단경로는 A – B – C – E – D – G – H – I이고, 최단 소요 시간은 11시간이다.

(ii) **전진형 최적화법** : 이번에는 시점 A에서부터 I까지 이 순서대로 최단경로를 구해보자. 그러기 위해 각 지점을 숫자로 나타내는 것이 편리하고, 그것을 그림으로 나타내면 아래 그림과 같다.



각 지점을 노드라고 하고, 노드간의 연결된 길을 호라고 하자.

그리고, $f_i =$ 노드①에서 노드ⓘ까지의 최단경로의 길이라고 하고,

$t_{ij} =$ 노드ⓘ에서 이 노드와 이웃한 노드ⓙ까지의 거리라고 하자.

그러면, $f_i + t_{ij} =$ 노드①에서 노드ⓘ까지의 최단거리 + 호 (i, j)의 길이

이므로, 노드①에서 노드 ⓙ까지의 최단경로의 길이 f_j는

$f_j = \min\ \{f_i + t_{ij}\}$ 이다.

이제 모든 $j = 2, 3, 4 \cdots$ 에 대하여 차례로 f_j를 구해나가면 된다.

$$f_2 = \min\ \{f_1 + t_{12}\} = \min\{0+2\} = 2$$

이 경우의 경로는 ①→②

$$f_3 = \min\ \{f_1 + t_{13},\ f_2 + t_{23}\} = \min\{0+5,\ 2+2\} = 4$$

이 경우의 경로는 ①→②→③

$$f_4 = \min\ \{f_2 + t_{24},\ f_3 + t_{34}\} = \min\{2+6,\ 4+2\} = 6$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④

$$f_5 = \min\ \{f_2 + t_{25},\ f_4 + t_{45}\} = \min\{2+7,\ 6+1\} = 7$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④→⑤

$$f_6 = \min\ \{f_3 + t_{36},\ f_4 + t_{46}\} = \min\{4+4,\ 6+3\} = 8$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④→⑥

$$f_7 = \min\{f_4 + t_{47},\ f_5 + t_{57}\} = \min\{6+6,\ 7+2\} = 9$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④→⑤→⑦

$$f_8 = \min\{f_4 + t_{48},\ f_6 + t_{68},\ f_7 + t_{78}\}$$

$$= \min\{6+5,\ 8+3,\ 9+1\} = 10$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④→⑤→⑦→⑧

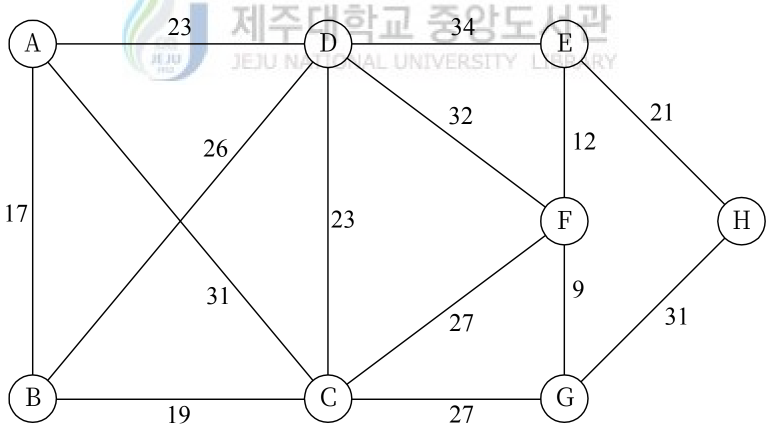
$$f_9 = \min\{f_7 + t_{79},\ f_8 + t_{89}\} = \min\{9+3,\ 10+1\} = 11$$

이 경우의 경로는 ①→②→③→④→⑤→⑦→⑧→⑨

따라서 최단거리는 11이다.◘

(2) 실생활 문제

【문제 1】 다음은 어느 마을 8가구를 연결하는 전산망 구축 비용을 조사하여 나타낸 그림이다. 최소 비용을 구하면 얼마인가?



2) 여러 가지 최단 거리를 구하는 문제

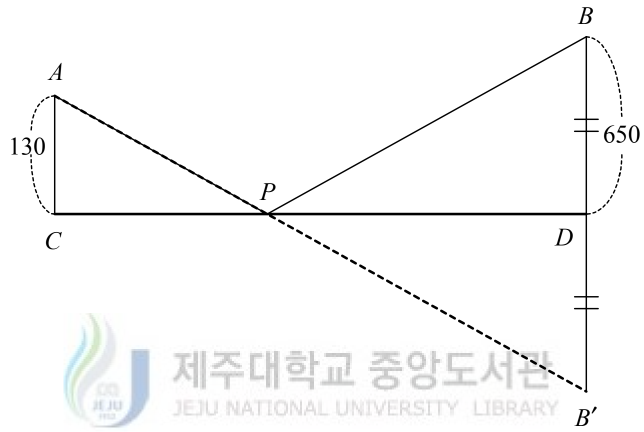
여기서는 이산수학과 상관없이 여러 가지 최단 거리 구하는 문제를 제시하여 해결해 보고자 한다.

【문제 1】 아래 그림과 같이 철수는 점 A 지점에서 소에게 풀을 먹인 후, 강 가 CD에 소를 몰고 가서 물을 먹인 다음 B 지점에 있는 외양간으로 소를 몰고 갈려고 한다. 가장 짧은 거리로 이동할 경우, 강 CD의 어느 지점에서 소에게 물을 먹여야 하는지를 결정하여라.

(단, $\overline{CD} = 1140(m)$, $\overline{CP} = x$ 이다.)

【풀이】 아래 그림과 같이 선분 CD를 중심으로 점 B의 반대쪽에

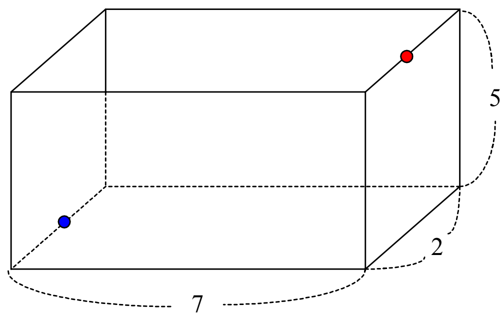
$\overline{BD} = \overline{B'D}$ 인 점 B' 을 잡으면 $\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이다.



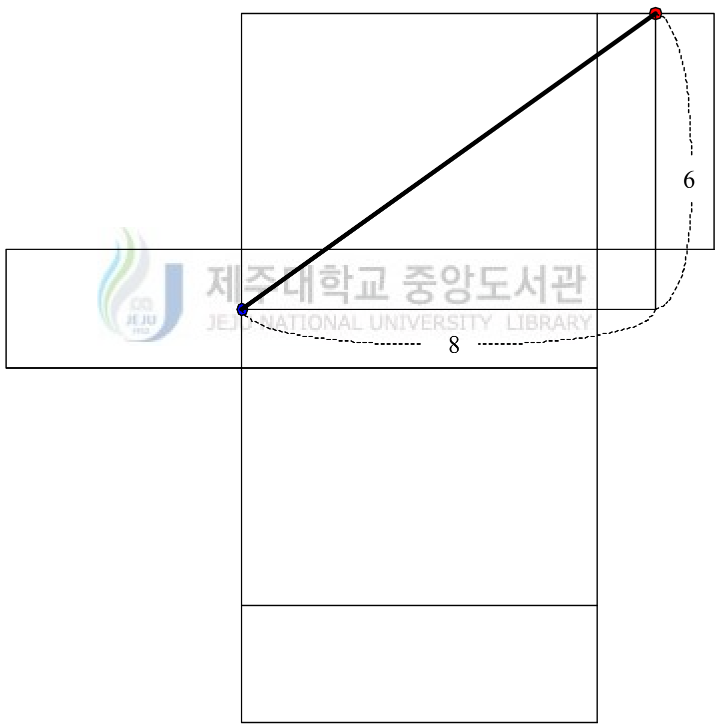
따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소값은 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소값과 같다. 그러므로 세 점 A, P, B' 는 동일한 직선 위에 놓이게 된다. 이 때 삼각형 ACP 와 삼각형 $PB'D$ 는 서로 닮은 삼각형이고, 닮은비는 $13:65 = 1:5$ 이다.

따라서 $1:5 = x:(1140 - x)$ 이 된다. 그러므로 $x = 190(m)$ 가 된다.◘

【문제 2】 가로, 세로, 높이가 각각 7, 2, 5인 직육면체의 유리 상자의 한 모서리 중앙에 앉아 있던 거미가 반대편 아래 모서리 중앙에 앉아 있는 파리를 보았다. 파리가 날아가 버리기 전에 상자의 면을 기어가서 파리를 잡으려고 한다. 가장 빠른 길을 나타내어 보고 거리를 구하여라.



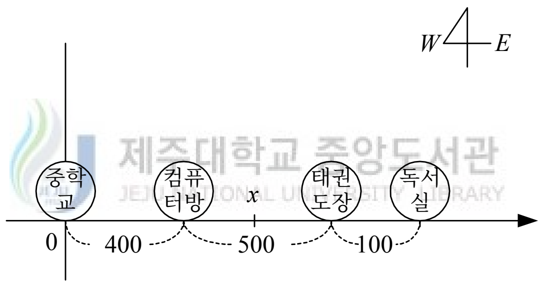
【풀이】 다음과 같이 유리상자의 전개도를 그려보자. 거미와 파리 사이의 최단거리는 그림과 같은 굵은 직선이 된다.



결국, 최단거리는 10이다.◘

【문제 3】 동서 방향으로 직선으로 난 도로가 있다. 이 도로에는 서쪽에서부터 중학교, 컴퓨터방, 태권도 도장, 독서실 순서로 위치하고 있다. 철수는 날마다 새벽에 집에서 출발하여 태권도 도장에 가서 운동을 한 후 곧바로 학교에 가서 공부를 한 다음, 독서실로 가서 복습을 한다. 그 다음 컴퓨터방에 가서 게임을 한 후 집으로 돌아간다. 어디에 방을 얻는 것이 걷는 거리를 최소로 할까? (단, 학교에서 컴퓨터방까지 거리는 400m, 컴퓨터방에서 태권도장까지는 500m, 그리고 도장에서 독서실까지 거리는 100m이다.)

【풀이】 아래 그림과 같이 중학교의 위치를 수직선 위의 원점에 잡고, 방을 얻을 위치를 x라고 하자.



철수가 이동한 거리를 y라고 하면,

$$y = |x - 900| + 900 + 1000 + 600 = |x - 900| + 2500$$

따라서 $x = 900$ 일 때, 걷는 거리가 최소가 된다.

즉, 태권도장에 방을 구하는 것이 걷는 거리가 최소가 된다는 것이다.◘

IV. 요약 및 결론

사회구조가 지식기반사회로 전환됨에 따라 사회의 변화 추세에 맞추어 학교 수학교육도 많은 변화를 요구받고 있으며 그에 따라 새로운 교수-학습 방법을 연구하여 활용하고 있다. 그 예로 컴퓨터나 계산기와 같은 교육공학을 도입하여 활용하는 방법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 그러나 그에 앞서 논리적인 사고력과 수학적 추론능력의 향상을 위하여 이산수학의 도입은 반드시 필요하다고 생각한다. 이런 변화에 맞추어 우리나라에서도 2002년도부터 적용되는 고등학교 제7차 교육과정에서 이산수학을 심화 선택 과목 중의 하나로 채택하고 있다.

이산수학(Discrete Mathematics)이란 이산집합(discrete set) -원소들이 개수를 셀 수 있는(countable) 집합- 위에서 정의된 수학적 체계에 대하여 연구하는 수학의 한 분야로써, 조합론(Combinatorics), 그래프 이론(Graph Theory), 기호 논리학(Symbolic Logic), 이산적 최적화(Discrete Optimization), 암호론(Coding Theory), 정수론(Number Theory), 부울 대수학(Boolean Algebra), 알고리즘 분석(Analysis of Algorithms) 등이 포함된다. 이산수학이 응용되는 분야로는 전산학, 정보통신, 전기공학, 사회학, 심리학, 생태학 등이 있는데, 이렇듯 다양한 분야에 응용될 수 있다는 점 때문에 최근에 급속히 발달하고 있다.

본 논문에서는 제Ⅱ장 고등학교 교육과정과 이산수학에서 이산수학의 역사적 배경과 개념을 설명하였고, 고등학교에서 이산수학의 필요성을 강조하였다. 그리고 우리나라 고등학교 제7차 교육과정에 편성된 이산수학의 내용과 NCTM의 규준(Standards)에서 강조하고 있는 이산수학의 내용을 비교하였을 뿐만 아니라, Heath(1984)가 설문 조사한 수학과와 컴퓨터 관련 학과에서 이산수학의 과정에 포함되어야 할 내용을 제시하여 비교하였다.

제Ⅲ장 의사 결정과 최적화에서는 2003학년도부터 고등학교 심화 선택 과목에 편성된 이산수학에서 교재로 사용될 「고등학교 이산수학」 교과서를 분석하여 나름대로의 장·단점을 서술해 보았다. 그리고 게임과 의사결정에서는 예문을 이

용하여 용어를 정의하고, 이론적 배경을 설명하였을 뿐만 아니라 실생활에서 접할 수 있는 문제를 제시하였다. 아울러 선거와 정당성에서는 예문을 이용하여 똑같은 선거 결과에서도 당선자를 결정하는 방법에 따라 당선자가 달라질 수 있기 때문에 선거하기 전에 당선자 결정방법을 정해두는 것이 중요함을 강조하였다.

또한, 계획세우기의 최적화에서는 실생활에서 접할 수 있는 두 가지 유형의 선형계획 문제를 통하여 이론적 배경과 원리를 소개하였고, 가치가 매겨진 물건을 제한된 용기에 가치의 합이 최대가 되도록 담는 배낭꾸리기 문제에 대하여 예문을 이용하여 효과적인 알고리즘을 찾아보았다. 그리고 그래프를 이용하여 최적의 경로를 구하는 알고리즘을 생각해봤을 뿐만 아니라 실생활과 관련된 여러 가지 최단 거리 구하는 문제도 제시하였다.

이산수학을 학습하는데는 특정한 수학적 지식을 요구하지 않기 때문에 선행학습이 후속학습에 거의 영향을 주지 않아 단계에 상관없이 학습에 임할 수 있다. 또한, 이산수학의 문제들이 실생활과 밀접하게 관련되어 있기 때문에 복잡한 계산문제와 같이 틀에 박힌 수학문제로 인하여 수학에 대한 흥미와 관심을 잃은 학생들에게도 이산수학 문제를 통하여 수학에 대한 의미와 흥미를 제공할 수 있으므로 의사 결정과 최적화뿐만 아니라 이산수학의 다른 분야에서도 끊임없는 연구가 이루어져야 하겠다.

◀ 참고 문헌 ▶

[1] 교육부(1997), 「수학과 교육과정[별책8]」, 대한교과서 주식회사.

[2] 신현성 외(2002), 「이산수학」, (주)천재교육, 교육인적자원부, 강원대학교 1종 도서 편찬위원회.

[3] 유동선(1998), 「새로운 OR 원론」, 교우사.

[4] 황대훈(2000), 「이산수학」, 생능출판사.

[5] 박진홍(2001), 「전산학을 위한 이산 구조」, 교우사.

[6] 이상원 (역)(1999), 「문명과 수학」, 경문사, 리처드 만키에비스츠.

[7] 스티븐 G. 크란츠, 「문제해결의 수학적 전략(*Techniques of Problem Slovin g)*」, 좌준수・임중삼 역(2000), 京文社.

[8] 구광조 외(역)(1992), 「수학교육과정과 평가의 새로운 방향」, 경문사, 미국수학교사협의회(NCTM), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.*

[9] 김향선(1998), "이산수학의 한 분야인 점화관계에 관한 연구", 碩士學位論文, 전남대학교 교육대학원.

[10] 석기원(2001), "이산수학의 중요 요소 및 그 지도에 관한 연구", 碩士學位論文, 인제대학교 교육대학원.

[11] 崔信愛(2001), "이산수학에서의 알고리즘에 관한 考察", 碩士學位論文, 성균관대학교 교육대학원.

[12] 김민경(1999), "컴퓨터 기반의 이산수학에 관한 연구 - Leslie 행렬 모델을 중심으로 -" , 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제38권, 제2호, 한국수학교육학회.

[13] 民衆書館, 이희승 編(1994), 「국어대사전」.

<Abstract>

A Study on the Decision-Making and Optimization
- In High School Discrete Mathematics -

Park, Kwon-Ryong

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Yang, Young-Oh

As the social structure is converted to the knowledge-based community, the mathematics education is requiring much changes depending on the social change trend. Accordingly, teachers of secondary schools should take advantage of the new teaching and learning methods. They should also research and utilize methods that introduce the education technologies such as computer or calculator. Before these, the introduction of discrete mathematics, however, is necessary for elevation of logical thinking faculty and mathematical reasoning ability. Meeting this change, discrete mathematics is selected as deepening elective course in high school in the seventh curriculum applied since 2002 years in our country.

This thesis introduces the historic background and concept of discrete mathematics firstly introduced in high school, and emphasizes the necessity of discrete mathematics in high school. Discrete mathematics in the seventh high school curriculum is analyzed and compared with discrete mathematics suggested in NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics). It was also compared with discrete mathematics in Department of mathematics and Department related with computer through questionnaire by Heath in 1984. Theoretical background is explained by giving illustrative sentences laying stress on game, decision-making, election, justification, optimization of plan-making, the most suitable path included in decision-making and

optimization units. Mathematical problems are presented in relation to real life.

Because the present high school teachers hardly contacted the decision-making and optimization in a high school or at university, the decision-making and optimization of this thesis may be so unfamiliar that teachers will feel difficult in teaching. So, terminologies and theoretical backgrounds are explained by giving example sentences. Mathematical problems connected with real life are presented to give useful help to teachers.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in August, 2002.