碩士學位論文

二次曲線의 幾何學的 理解

－ 高等學校 數學Ⅱ 教科를 中心으로 －

指導教授 鄭 承 達

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

高 亨 碩

2001年 8月

二次曲線의 幾何學的 理解

－ 高等學校 數學Ⅱ 敎科를 中心으로 －

指導敎授 鄭 承 達

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2001年 4月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 高 亨 碩

高亨碩의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

2001年 7月 日

審査委員長 ________________ 印

審 査 委 員 ________________ 印

審 査 委 員 ________________ 印

<초 록>

이차곡선의 기하학적 이해
- 고등학교 수학II 교과를 중심으로 -

고형석
제주대학교 교육대학원 수학교육전공
지도교수 정승달

본 논문은 고등학교 수학II에 나오는 이차곡선의 정의 및 정리를 원추곡선(conic)을 도입하여 정의하고 설명함으로서 보다 쉽게 학생들이 이차곡선을 이해하고 또한 실생활에서 응용될 수 있게 하는데 중요한 목표를 두고 있다. 실제로 교과서의 많은 부분의 내용들이 그 원리를 설명하지 않은 채 전개되고 있었고 그 같은 전개가 궁극적으로는 수학의 본질까지도 혼동스럽게 하는 결과를 야기할 수 있다는 판단이 따라 부분적이나마 이런 문제점을 고치기 위하여 본 연구를 수행하게 되었다. *

* 본 논문은 2001 년 8 월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문

목 차

Ⅰ. 서론

학생들이 수학을 어렵다고하든지 재미가 없다고 하는 이유들 중에는 교육제도상의 문제, 교과내용, 및 수학교육을 담당하는 모든 사람들에게도 많은 책임이 있다고 생각한다. 누구나가 지금은 수학이 위기라는 인식을 가지고 있다. 이제는 수준별 교육과정이 도입되는 제 7 차 교육과정이 진행되는 시점에서 수학을 살리기 위해 노력하지 않으면 안된다. 즉, 학생들이 수학을 재미있고 쉽게 이해할 수 있도록 교수·학습 방법이 개발되어야 하고 교육과정 또한 적절하게 편성되어져 있는지 심도있게 연구해 보아야 한다. 물론 이런 문제가 쉽게 해결될 것으로 보지는 않는다 그것은 입시제도라든지 또는 대학에서의 교육과정들과도 연계하여 해결되어야 할 것이다. 그러나 모든 문제를 동시에 해결 하는 것이 어렵다. 그래서 본 논문에서는 수학Ⅱ 과목 중에서 다루어진 이차곡선에 대한 내용을 중심으로 연구되었다. 즉, 수학Ⅱ 과목에서 정의된 용어나 개념들을 분석하고 이 내용들과 이차곡선을 기하학적으로 접근하였을때의 내용들을 비교, 분석하였다.

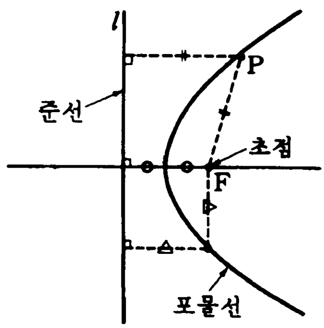
II. 수학Ⅱ 과목에서의 이차곡선의 정의

여기서는 고등학교 교과과정에서 주로 다루는 이차곡선의 방정식의 표준형에 대한 정의 및 성질 에 대하여 알아보자.

1. 포물선

(1) 정의

아래 그림과 같이, 평면 위의 한 정점 F 와 그 점을 지나지 않는 정직선 l 이 있을 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.



<그림 1>

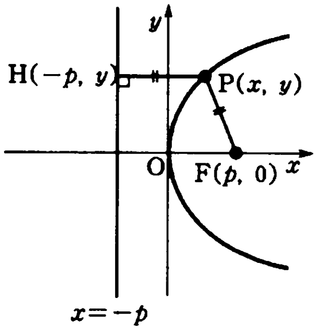
이 때, 정점 F , 정직선 l 을 각각 그 포물선의 **초점**, **준선**이라고 한다. 또, 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭지점**이라고 한다.

(2) 포물선의 방정식의 표준형

아래 그림과 같이, 포물선의 축을 x 축, 꼭지점을 원점, 초점을 $F(p,\ 0)$ 으로 놓으면, 준선 l 의 방정식은

$$x=-p$$

가 된다.



$$y^2=4px\ (p>0)$$

<그림 2>

포물선 위의 임의의 한 점 $P(x,\ y)$ 에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면, 점 H 의 좌표는 $H(-p,\ y)$ 이므로 포물선의 정의로부터

$$\overline{PF}=\overline{PH} \qquad \cdots\cdots\cdots\ ①$$

따라서 $$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p| \qquad \cdots\cdots\cdots\ ②$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$y^2=4px\ (p\neq 0) \qquad \cdots\cdots\cdots\ ③$$

이다. 역으로 ③을 만족하는 임의의 점 $P(x,\ y)$ 는 ②를 만족하므로 ①도 만족한다.

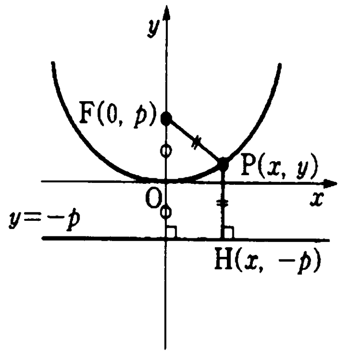
그러므로 점 P 는 포물선 위의 점이다.

따라서 ③ 은 포물선의 방정식이다.

<< 참고>> 특히 ③ 과 같은 꼴의 방정식을 포물선의 방정식의 표준형이라고 한다.

또, 다음 그림과 같이, 포물선의 축을 y 축, 꼭지점을 원점, 초점을

$F(0,\ p)$ 로 놓으면, 준선 l 의 방정식은 $y=-p$ 이다.



$$x^2=4py\ (p>0)$$

<그림 3>

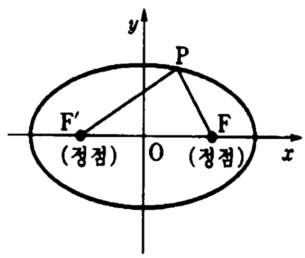
이 포물선의 방정식을 위의 ③을 구한 것과 같은 방법으로 구하면,

$$x^2=4py\ (p\neq 0)$$

2. 타원

(1) 정의

좌표평면 위의 두 정점 F 와 F′ 으로부터의 거리의 합이 일정한 점 P 전체의 집합 $\{P \mid \overline{PF}+\overline{PF'}=$ 일정$\}$ 을 **타원**이라 하고, 이 때의 두 정점 F 와 F′ 을 타원의 **초점**이라고 한다.



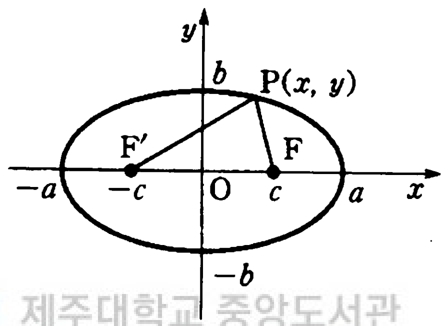
<그림 4>

(2) 타원의 방정식의 표준형

좌표평면위에서 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ 이고, 점 F 와 F$'$ 에서의 거리의 합이 $2a$ (a 는 일정)인 타원의 방정식을 구해보자.

다음 그림에서와 같이 타원 위의 임의의 한 점을 P(x, y) 라 하면,

$$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 2\mathbf{a} \text{ (단, } a > 0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



<그림 5>

따라서 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$

$\therefore \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

이 식을 정리하면 $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$

그런데 문제의 뜻에서 $a > c > 0$ 이므로,

$$a^2-c^2 > 0$$

여기서, $a^2-c^2=b^2$ $(a > b > 0)$ 으로 놓고 ③ 의 양변을 a^2b^2 으로 나누면,

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$) · · ④

역으로 ④를 만족하는 임의의 점 $P(x, y)$ 는 ②을 만족하므로 ①도 만족한다. 따라서 ④는 타원의 방정식이다.

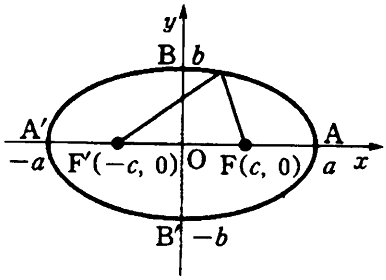
<<참고>> 특히 ④와 같을 꼴의 방정식을 타원의 방정식의 표준형이라고 한다.

마찬가지로 y 축 위에 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ 를 잡고 점 F 와 F′ 에서의 거리의 합이 $2b$ 인 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하여 ①과 같은 방법으로 하면 다음과 같은 타원의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>a>0,\ c=\sqrt{b^2-a^2} \text{)}$$

(3) 용어의 정의

두 초점이 x 축 위에 있는 타원 $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 과 좌표축의 교점을 알아보자. $y=0$ 일 때 $x=\pm a$ 이므로, 이 타원과 x 축의 교점은 $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ $x=0$ 일 때 $y=\pm b$ 이므로, y 축과의 교점은 $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ 이다.



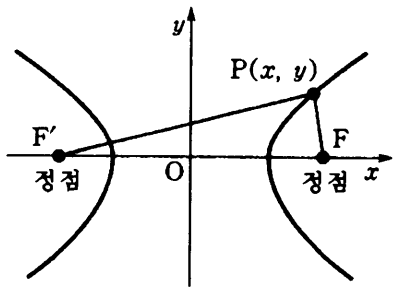
<그림 6>

이 때 타원과 x 축과의 교점을 각각 A, A′ 이라 하고, y 축과의 교점을 각각 B, B′ 이라 하면 A, A′, B, B′ 을 모두 타원의 **꼭지점**이라고 한다. 그런데 이 경우에는 $a > b > 0$ 이므로, $\overline{AA'} > \overline{BB'}$ 이다. 이 때, $\overline{AA'}$ 을 **장축**, $\overline{BB'}$ 을 **단축**이라 하고, 장축과 단축을 통틀어 타원의 축이라고 한다. 또 타원의 교점 O 를 타원의 **중심**이라고 한다.

3. 쌍곡선

(1) 정의

좌표평면 위의 두 정점 F, F′ 로부터의 거리의 차가 일정한 점 P 전체 집합 $\{ P \mid \overline{PF} - \overline{PF'} = \text{일정} \}$ 을 **쌍곡선**이라 하고, 이 때의 두 정점 F 와 F′ 를 쌍곡선의 초점이라고 한다.



<그림 7>

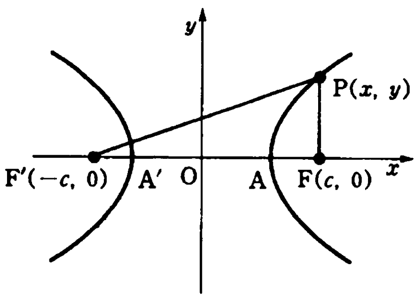
(2) 쌍곡선의 방정식의 표준형

다음 그림과 같이 두 초점의 좌표를 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$,으로부터의 거리의 차가 $2a$ (a 는 일정)인 쌍곡선의 방정식을 구해보자. 단,

$c > a > 0$ 으로 한다.

이 쌍곡선 위의 임의의 한 점을 $P(x,\ y)$ 라 하면,

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a \text{ (일정)} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$



<그림 8>

그러므로 다음 식이 성립한다.

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

양변을 제곱하면 $-a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 양변을 다시 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$

여기서 $c^2 - a^2 > 0$ 이므로 $c^2 - a^2 = b^2$ $(b>0)$으로 놓고 양변을 a^2b^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b^2 = c^2 - a^2) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

역으로 ③을 만족하는 점 $P(x,\ y)$ 는 방정식 ②를 만족하므로 관계식 ①도 만족한다.

그러므로 ③을 만족하는 점은 $F(c, 0)$, $F'(-c,\ 0)$,을 초점으로 하고, 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선 위의 점이다.

따라서 방정식 ③은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

<<참고>> 특히 ③ 과 같은 꼴의 방정식을 쌍곡선의 방정식의 표준형이라고 한다.

마찬가지로 y 축 위에 두 초점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$ 를 잡고, 점 F 와 F′ 의 거리의 차가 $2b\,(c>b>0)$ 인 점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면 ① 과 같은 쌍곡선의 방정식을 얻을 수 있다.

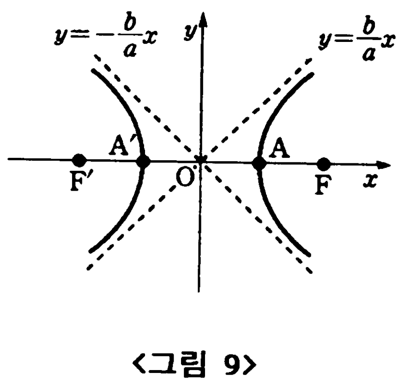
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (\text{단, } a^2=c^2-b^2)$$

(3) 용어의 정의

쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

에서 특히 $y=0$ 일 때 $x=\pm a$ 이므로, ③ 은 x 축과 두 점 $A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$ 에서 만난다.



<그림 9>

이 점 A, A′ 을 쌍곡선의 **꼭지점**이라고 하고, $\overline{AA'}$ 를 쌍곡선의 **주축**, 또 주축 $\overline{A'A}$ 의 중점 O 를 을 쌍곡선의 **중심**이라 한다. 또, 직선 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 를 쌍곡선의 **점근선**이라 한다.

4. 이차곡선의 일반식

평면에서 x, y 의 이차방정식의 일반식은

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (단, $A \neq 0$ or $B \neq 0$ or $C \neq 0$)

이다.

위의 식은 상수 A 와 B 의 관계에 따라 다음과 같은 도형을 나타낸다.

(단, $C = 0$, D, E, F, $\neq 0$)

(1) 원

$A = B \neq 0$

(2) 포물선

$A = 0$, $B \neq 0$ 또는 $A \neq 0$, $B = 0$

(3) 타원

$A \neq B$, $AB > 0$

(4) 쌍곡선

$AB < 0$

5. e (이차곡선에서)

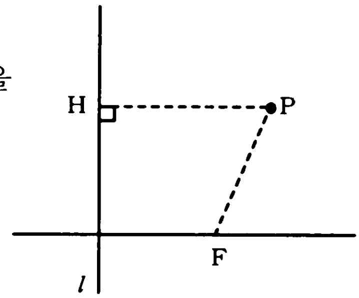
일반적으로, 일정한 직선 l 과 그 위에 없는 점 F 및 양의 상수 e 가 주어져

있다고 하자.

이 때, 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선을 PH 라고 하면

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}} = e \text{ (일정)}$$

가 되는 점 P 의 집합은



<그림 10>

▶ $e=1$ 이면 포물선

포물선은 곡선위의 임의의 점에서 정점과 정직선까지의 거리가 같으므로 그 비의 값도 같다.

▶ $0 < e < 1$ 이면 타원

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 에서 $e=\frac{c}{a}$ (단, $c=\sqrt{a^2-b^2}$)

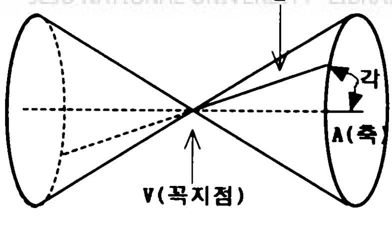
▶ $e>1$ 이면 쌍곡선

이다.

Ⅲ. 이차곡선의 기하학적 이해

1. 원추곡선

E^3 에서 선분 L 과 A 가 있다고 하고 A 를 기준축으로 L 을 회전시키면, 회전하는 선의 자취는 하나의 곡면을 만든다. 이 때, 생긴 곡면을 **원추**라고 부른다. 선분 A 는 원추의 **축**, L 과 A 의 교점인 점 V 는 원추의 **꼭지점**, 선분 L 과 A 의 사이각을 원추의 **각** 이라고 부른다. **원추곡선**은 평면과 원추가 만나는 교집합을 말한다. 즉 원추를 K 로 하고 평면을 H 라 하면

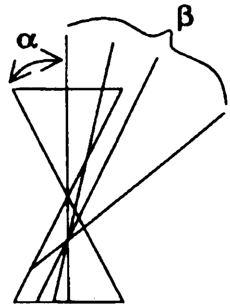


[그림Ⅲ-1] 원추

원추곡선 $C = K \cap H$ 이다.

더욱이

α 를 원추 K 의 각 $(0 < \alpha < 90^\circ)$, β 를 원추 K 의 축과 평면 H 사이의 각이라고 하자.



[그림Ⅲ-2] 옆에서 본 모양

그러면 원추곡선의 모든 형태는 각 α 와 β 의 상대적인 크기와 꼭지점 V 가 평면 H 에 속하느냐 아니냐에 따라 6 가지 형태로 분류가 된다.

[정의 3.1.1] $C=H\cap K$ 를 원추곡선이라 하자.

a) 만약 $V\notin H$ 일 때, 원추곡선 C 를 **매끄러운 곡선**이라고 한다.

b) 만약 $V\in H$ 일 때, 원추곡선 C 를 **특이곡선**이라고 한다.

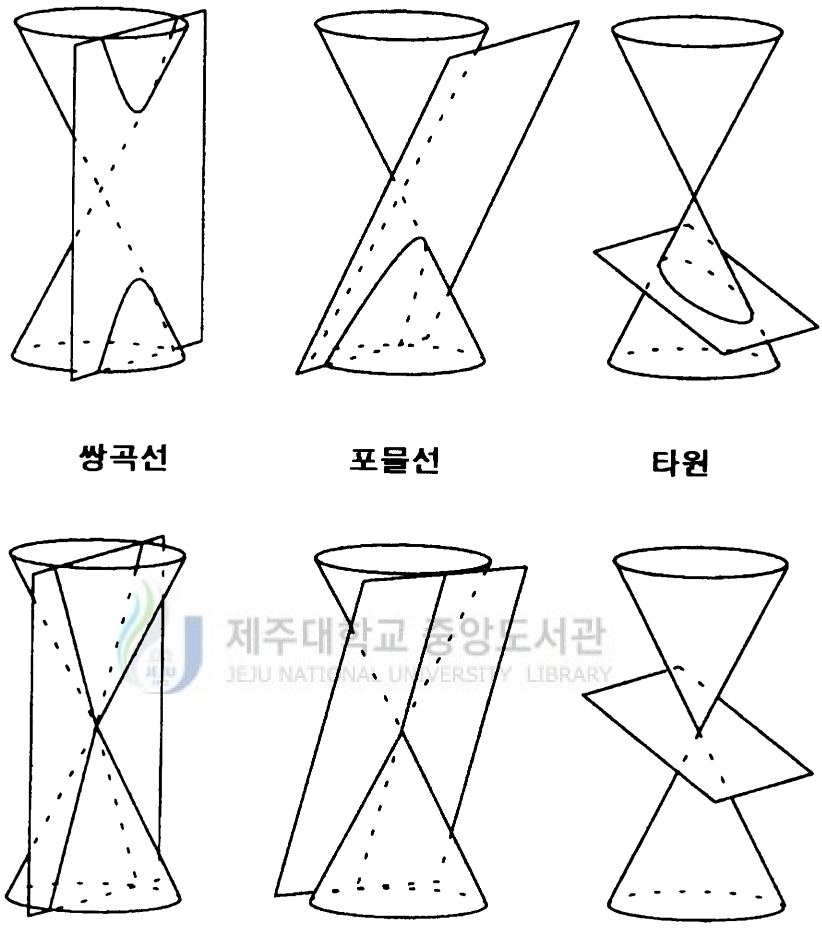
그리고,

i) 만약 $\alpha<\beta$ 이면 곡선 C 를 **타원**이라고 한다.

ii) 만약 $\alpha=\beta$ 이면 곡선 C 를 **포물선**이라고 한다.

iii) 만약 $\alpha>\beta$ 이면 곡선 C 를 **쌍곡선**이라고 한다.

보기. [정의 3..1.1] 에 따라 원추곡선은 아래와 같이 6 가지의 기본형태로 표현할 수 있다.



[그림Ⅲ-3]

2. 원추곡선의 성질

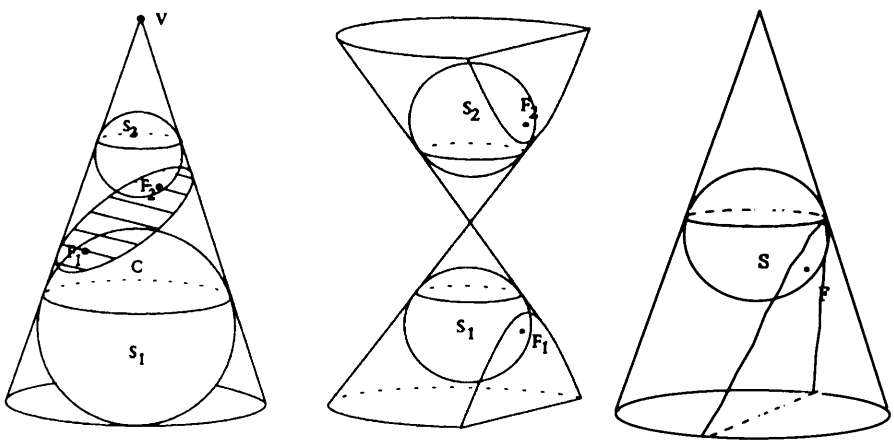
원추곡선의 성질은 실제로 자연현상에서 많이 응용되고 있다. 구체적인 사례는 다음 단원에서 다루기로 하고 여기서는 그 기본 성질들을 조사하겠
.

다. 우선 본 단원의 내용은 1822 년 벨기에의 수학자 G.P.Dandelin의 연구를 중심으로 원추곡선의 성질들을 공부하려고 한다. 그 중, 원추곡선의 중요한 성질중의 하나인 초점의 성질부터 살펴보자. 본 단원에서 다루는 원추곡선은 매끄러운 곡선이라고 하자.

원추곡선이 타원이거나 쌍곡선이면 원추 K 와 평면 H 에 접하는 2 개의 구가 존재하고 포물선인 경우는 1 개의 구가 존재한다. 이 때, 내접하는 구와 평면의 접점이 원추곡선의 **초점**이라고 한다.

[정의 3.2.1] ([그림Ⅲ-4] 참조) S_1 과 S_2 를 원추 K 에 내접하면서 동시에 평면 H 에 접해있는 두 개의 구라고 하자.

이 때 $F_1 = S_1 \cap H$, $F_2 = S_2 \cap H$ 를 원추곡선 $C = K \cap H$ 의 **초점**이라고 한다.

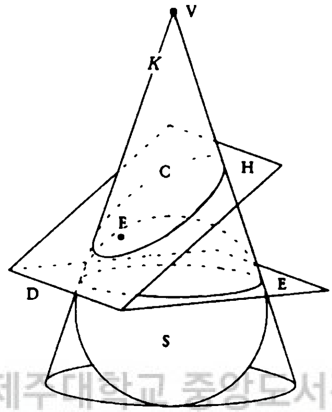


[그림Ⅲ-4]

또한 원이 아닌 모든 매끄러운 원추곡선은 적어도 하나의 준선을 가진다.

[정의 3.2.2] ([그림Ⅲ-5] 참조) S 를 K 와 H 에 접하는 구라 하자. 그러면 $S \cap K$ 는 원이다. 이 원 $S \cap K$ 를 포함하는 평면을 E 라고 하면 원추곡선 $C = K \cap H$ 의 **준선**은 $D = E \cap H$ 이다.

이 때, 초점 $F = S \cap H$ 는 "준선 D 의 **초점**" 이라고 한다.



[그림Ⅲ-5]

참고. 만약 원추곡선이 원이라면 E 와 H 는 평행하고 그래서 준선은 존재하지 않는다.

[정의 3.2.3] 원추곡선 C 의 **이심률**은

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

로 주어진다.

[정리 3.2.4] C 를 매끄러운 원추곡선이라고 하자. 그러면 다음과 같은 사실이 성립한다.

i) $e > 1$ 이면 C 는 **쌍곡선**이다.

ii) $e=1$ 이면 C 는 **포물선**이다.

iii) $0 < e < 1$ 이면 C 는 **타원**이다.

iv) $e=0$ 이면 C 는 **원**이다.

정리 3.2.5) C 가 준선이 D 이고 이심률이 e 인 원이 아닌 매끄러운 원추곡선이라고하면 C 에 속하는 모든 P 에 대해

$$PF = e(PD)$$

이다. 여기서 F 는 준선 D 의 초점이다.

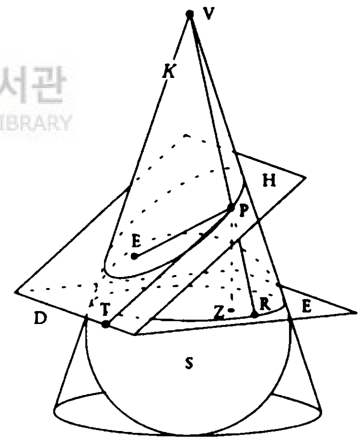
증명) 오른쪽 그림에서 E 는 $S \cap K$ 를 포함하는 평면이라 하자. 그리고 P 는 C 위의 임의의 점이라 하자. 그때

$$Z \in E,\ \overline{ZP} \perp E$$

$$T \in D,\ \overline{TP} \perp D$$

$$R = VP \cap S$$ 를 만족하는

Z, T, R 을 택하면 $\overline{ZP}$ 와 원추곡선의 축이 E 에 수직이므로 $\overline{ZP}$ 는 원추곡선의 축과 평행하다. $\overline{ZP}$ 는 E 와 수직 이고 D 는 E 에



[그림Ⅲ-6]

있으므로 $\overline{ZP}$ 는 D 에 수직이다. $\overline{TP}$ 역시 D 에 수직이므로 평면 $\overline{ZPT}$ 는 D 에 수직이다. D 가 H 에 있으므로 $\overline{ZPT} \perp H$ 이다. 따라서 $\overline{ZP}$ 가 원추곡선의 축에 평행이므로 $\angle ZPT = \beta$ 이고 같은 이유로 $\angle ZPR = \alpha$ 이다. 이렇게 해서 $PZ = PR\cos\alpha = PT\cos\beta$ 를 얻는다.

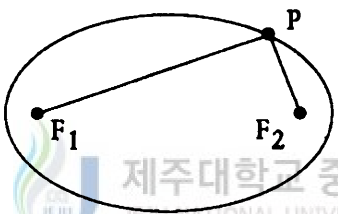
그러나 $\overline{PR}$, $\overline{PF}$ 가 R, F 에서 S 에 접하므로 $PR = PF$ 이다. 그리고 $\overline{PT} \perp D$ 이므로 $PT = PD$ 이다. 따라서

$$PF\cos\alpha = PD\cos\beta \ .$$

위식의 양변을 $\cos\alpha$ 로 나누면 $PF = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}PD$ 이다. ▨

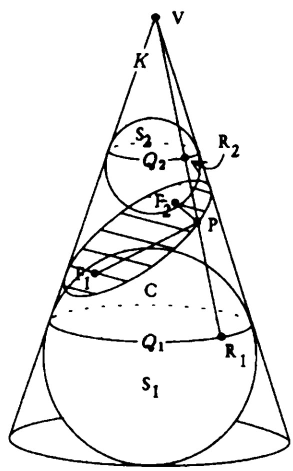
가. 타원의 성질

정리 3.2.6) 만약 C 가 타원이라면 타원위에 있는 모든 점 P 에 대해서 $PF_1 + PF_2$ 는 항상 일정하다.



[그림Ⅲ-7] 타원

증명) 오른쪽 그림에서 점 P 를 타원위의 임의의 점이라 하자. $\overleftrightarrow{PF_1}$ 은 F_1 에서 S_1 에 접한다. $\overleftrightarrow{PF_2}$ 는 F_2 에서 S_2 에 접한다. 또한 $Q_i = S_i \cap K$ $(i=1,\ 2)$ 라 두면 Q_1, Q_2는 원이다. 더구나 $R_1 = \overleftrightarrow{PV} \cap S_1$, $R_2 = \overleftrightarrow{PV} \cap S_2$ 라 두면 $\overleftrightarrow{PR_1}$ 은 R_1 에서 S_1 에 접하고, $\overleftrightarrow{PR_2}$ 는 R_2 에서 S_2 에 접한다. 그러므로, $PF_1 = PR_1$, $PF_2 = PR_2$ 이다.



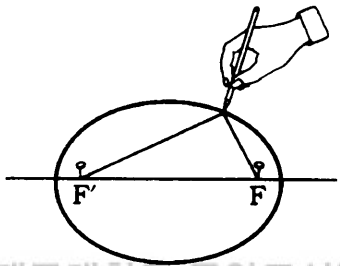
[그림Ⅲ-8]

따라서, $PF_1 + PF_2 = PR_1 + PR_2 = R_1R_2$ 가 성립한다. 더구나 R_1R_2 는 원 Q_1, Q_2 사이의 거리이고 Q_1, Q_2 사이의

거리가 P 에 의존하지 않으므로, 그것은 C 에 속하는 모든 점 P 에 대하여 PF_1+PF_2 는 같다는 것을 의미한다. 따라서 PF_1+PF_2 는 일정하다. ▨

참고. (타원그리기)

준비물 : 연필과 못 2 개, 그리고 팽팽한 실

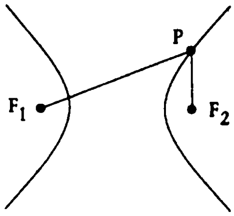


[그림Ⅲ-9]

방법 : 점 F, F' 에 못을 고정시키자. F, F' 사이의 거리 보다 길이 (l) 가 긴 실을 매자. 그 다음 연필을 실에 걸어서 팽팽하게 못 주위를 그리면 곡선이 나타난다. 이 곡선은 방정식 $PF+PF'=l$ 을 만족시키는 초점이 F, F' 인 타원이 될 것이다.

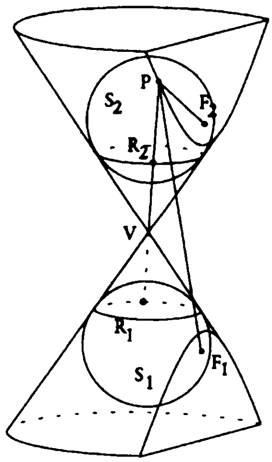
나. 쌍곡선의 성질

정리 3.2.7) 만약 C 가 쌍곡선이라면 C 에 속해 있는 모든 점 P 에 대해서 $|PF_1-PF_2|$ 는 일정하다.



[그림Ⅲ-10] 쌍곡선

증명) 아래 그림에서 점 P 를 타원위의 임의의 점이라 하자. $\overleftrightarrow{PF_1}$ 은 F_1 에서 S_1 에 접한다. $\overleftrightarrow{PF_2}$ 는 F_2 에서 S_2 에 접한다. 또한 $Q_i = S_i \cap K$ $(i=1, 2)$ 라 두면 Q_1, Q_2 는 원이다. 더구나 $R_1 = \overleftrightarrow{PV} \cap S_1$, $R_2 = \overleftrightarrow{PV} \cap S_2$라 두면 $\overleftrightarrow{PR_1}$ 은 R_1 에서 S_1 에 접하고, $\overleftrightarrow{PR_2}$ 는 R_2 에서 S_2 에 접한다.



[그림Ⅲ-11]

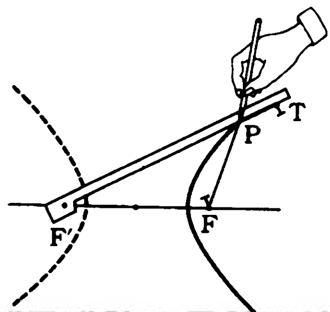
그러므로, $PF_1 = PR_1$, $PF_2 = PR_2$ 이다.

따라서, $|PF_1 - PF_2| = |PR_1 - PR_2| = R_1R_2$ 가 성립한다. R_1R_2 는 원 Q_1, Q_2 사이의 거리이다. Q_1, Q_2 사이의 거리가 P 에 의존하지 않으므

로, 그것은 C 에 속하는 모든 점 P 에 대하여 $|PF_1 - PF_2|$ 는 같다는 것을 의미한다. 따라서 $|PF_1 - PF_2|$ 는 일정하다. ▨

참고. (쌍곡선 그리기)

준비물 : 연필과 못 2 개, 그리고 팽팽한 실, 그림과 같은 막대기



[그림Ⅲ-12]

방법 : 한 정점 F' 에는 자를 회전하도록 고정시키고 다른 한 정점 F 와 자 위의 점 T 를 자의 길이보다 짧은 끈으로 연결한 다음 연필의 끝으로 끈이 자에 붙도록 선을 그리면 점 P 는 매끄러운 곡선이 된다.

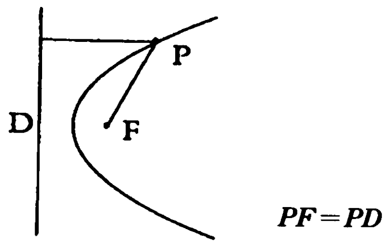
이 때, $|PF' - PF|$ 의 값은 일정하다.

다. 포물선의 성질

정리 3.2.8) 만약 C 가 준선이 D 이고 초점 F 를 갖는 포물선 이라면 C 에 속하는 모든 P 에 대하여

$$PF = PD \qquad \textbf{(2.1)}$$

이다.

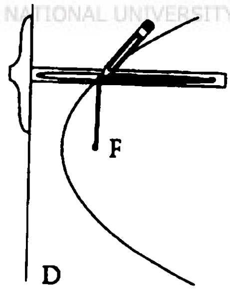


[그림Ⅲ-13] 포물선

증명) 만약 C 가 포물선이라면 $e=1$ 이 되어 위의 정리 3.2.5) 에 의해 성립한다. ▨

참고 (포물선 그리기)

준비물 : 연필과 못 1 개, 그리고 팽팽한 실, T 자



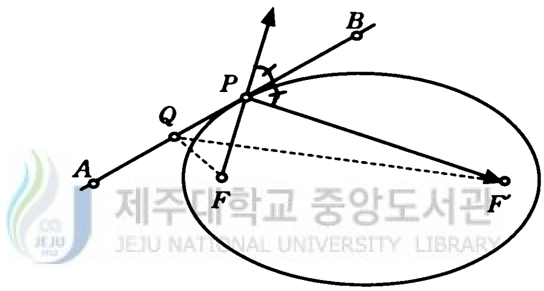
[그림Ⅲ-14]

방법 : T 자의 몸통과 같은 길이를 가진 실을 T 자의 몸통끝과 점 F 에 고정시키자. 연필의 끝으로 실을 팽팽하게 유지하면서 직선 D 를 따라 T 자를 수직으로 이동시키자. 이 곡선이 초점이 F 이고 준선이 D 인 포물선이다.

3. 원추곡선의 접선

정리 3.3.1) C 가 타원이고, F, F' 를 C 의 초점이라 할 때, 임의의 점 $P \in C$ 에서 $-\overrightarrow{PF}$ 와 $\overrightarrow{PF'}$ 사이의 각을 이등분하는 직선은 점 P 에서 C 에 접한다.

증명) ([그림Ⅲ-15] 참조) $\overleftrightarrow{AB}$ 는 A 와 B 가 양끝점인 $P \in C$ 를 지나는

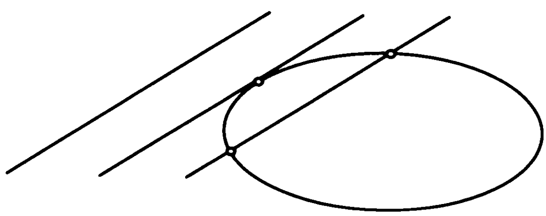


[그림Ⅲ-15]

직선 이라 하자. $\angle APF \cong \angle BPF'$ 이므로 $FP + PF'$ 는 F 에서 $\overleftrightarrow{AB}$ 를 지나 F' 까지의 거리중 제일 짧은 거리를 의미한다. 그러므로, 만약 $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ 그리고 $Q \neq P$ 면

$$QF + QF' > k.$$

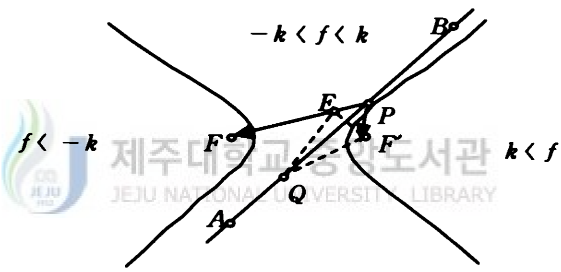
즉, $\overleftrightarrow{AB}$ 는 P 에서 C 와 유일하게 만난다. 그래서 어떤 직선이 타원과 한점에서 만나면 그 직선은 타원의 접선이 된다. ▨



[그림Ⅲ-16]

정리 3.3.2) C 가 쌍곡선이고, F, F' 를 C 의 초점이라 할 때, 임의의 점 $P \in C$ 에서 $-\overrightarrow{PF}$ 와 $\overrightarrow{PF'}$ 사이의 각을 이등분하는 직선은 점 P 에서 C 에 접한다.

증명) ([그림Ⅲ-17] 참조) $\overleftrightarrow{AB}$ 는 A 와 B 가 양끝점인 $P \in C$ 를 지나는 직선이라 하자. 그러면 $|PF - PF'| = k$(상수)이다. 또한 E 를 $PE = PF'$ 인 $\overrightarrow{PF}$ 위에서 점 이라면 $EF = |PF - PF'|$. 그래서 $EF = k$ 이다.



[그림Ⅲ-17]

지금 $\overleftrightarrow{AB}$ 가 $\angle FPF'$ 를 이등분하므로 $\overleftrightarrow{AB}$ 가 이등변삼각형 $\triangle EPF'$ 의 밑변의 수직이등분선이다. 이렇게 해서 $Q \neq P$ 는 $\overleftrightarrow{AB}$ 위에서 임의의 점이라면 $\triangle EQF'$ 는 이등변삼각형이다. 즉, $QE = QF'$ 이다. 한편 Q, E, F 는 같은 직선 위에 있지 않으므로, $QE < QF + EF$, $QF < QE + EF$ 이 성립하고, 따라서

$$QE - EF < QF < QE + EF$$

이다.

위식에서 양변에 QE 를 빼면 $-EF < QF - QE < EF$ 이다. 즉,

$$|QF - QE| < EF = k$$

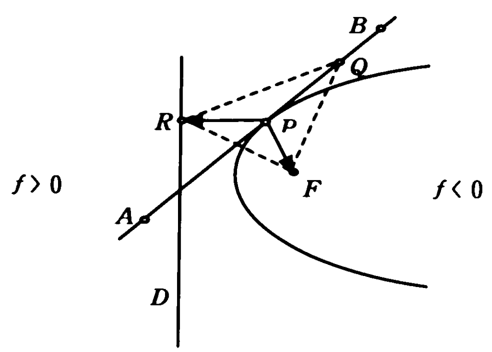
이다. $QE = QF'$ 이므로 $|QF - QF'| < k$ 이다. 한편 쌍곡선은 평면을 3

개의 연결되어 있는 영역으로 나눈다.

만약 $Q \in C$ 이면 $f(Q) = QF - QF' = \pm k$ 이고, Q 가 F 를 포함하는 영역에서는 $f < -k$, 중간영역에서는 $-k < f < k$, F' 를 포함하는 영역에서는 $f > k$ 임을 알 수 있다. 그래서 부등식 $|QF - QF'| \le k$ 을 만족하는 점 $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ 는 다음 부등식 $-k \le f \le k$ 을 만족한다. 그래서 $\overleftrightarrow{AB}$ 는 어떤 다른 영역과도 만나지 않는다. 즉, $\overleftrightarrow{AB}$ 가 쌍곡선의 접선이라는 것을 말해 준다. ▨

정리 3.3.3) 원추곡선 C 가 포물선이고 F 가 C 의 초점, D 는 C 의 준선이라 하자. 이 때, 임의의 점 $P \in C$ 에서 $\overline{PR} \perp D$ 인 $R \in D$ 을 선택하면 $\overline{PF}$ 와 $\overline{PR}$ 사이의 각 을 이등분하는 선은 P 에서 C 에 접한다.

증명) ([그림Ⅲ-18] 참조) C 가 포물선이고 $\angle FPA \cong \angle RPA$ 라 가정하면 정리 3.2.8) 에 의하여 $P \in C$ 인 필요충분조건은 $PF = PD$ (P 에서 준선 D 까지의 거리) 이다. $\overline{PR} \perp D$ 이므로 $PR = PF$ 이다. 그래서 $\triangle RPF$ 는 이등변삼각형이다. $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ 이라 하자. $\triangle RQF$ 역시 이등변 삼각형이므로 $QF = QR$ 이다.



[그림Ⅲ-18]

만약 $Q \neq P$ 이면 $\overline{QR} \not\perp D$ 이다. 그래서 $QR > QD$ 이고 $QF - QD = QR - QD > 0$ 이다. 즉, $Q \notin C$ 이다.

따라서 $\overleftrightarrow{AB}$ 는 점 P 에서 포물선과 만난다. 그리고 포물선은 평면을 두 개의 영역으로 나눈다. 그래서 함수 f 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(Q) = QF - QD .$$

이 때 초점을 포함하는 영역에서는 $f < 0$. 준선을 포함하는 영역에서는 $f > 0$ 이다. $\overleftrightarrow{AB}$ 위의 모든 점 에서는 $f \geq 0$ 이므로 $\overleftrightarrow{AB}$ 는 결코 서로 다른 영역을 지나지 않는다. 따라서 $\overleftrightarrow{AB}$ 는 접선이다. ▨

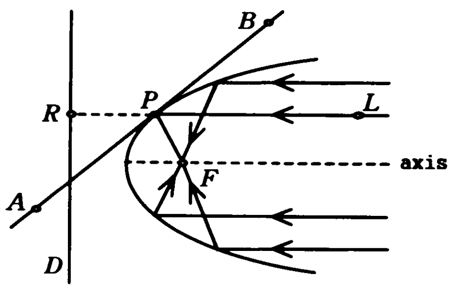
4. 원추곡선의 응용 및 초점의 성질

빛과 소리는 부드러운 곡선같은 표면에서 같은 방향으로 반사된다. 그것들은 표면에 접한 평면에 반사되고 입사각은 반사각과 같다는 성질을 갖고 있다. 원추곡선과 그것들에 접해있는 타원거울, 포물선거울, 쌍곡선 거울들은 실생활의 응용과 밀접한 관계를 가지고 있다

가. 포물선 거울

그림 [그림III-12] 은 대칭축에서 평행한 방향에서 포물선 거울로 들어오는 빛은 포물선의 초점으로 반사된다는 것을 보여주고 있다. 그들은 맞꼭지각이므로 $\angle LPB \cong \angle RPA$. 정리 3.3.1) 에 의해 $\angle LPB = \angle FPA$. 그러므로 입사각은 반사각과 같다. 반사 현미경은 포물선 거울을 사용한다. 왜냐하면 많은 빛을 한 점으로 모을 수 있는 포물선 거울의 능력은 천문학자들이 탐색하기에 어려운 물체들을 보는 것을 가능하게 한다. 포물선 거울

의 초점으로부터 나오는 에너지는 축에 사용되고 있다. 포물선 거울의 초점으로부터 나오는 에너지는 축에 평행한 전파를 반사한다.



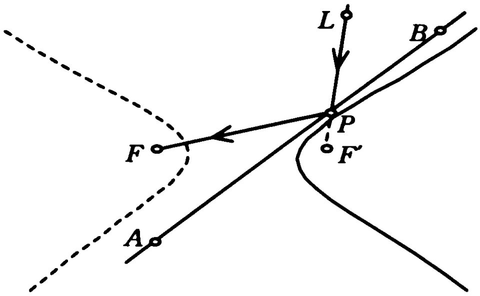
[그림Ⅲ-19]

이러한 포물선 반사각에 대한 생각은 전조등, 스포트라이트, 방향 변환 안테나를 만들었다. 예를 들어 무궁화 위성은 하늘에 정지해 있기 때문에 그 방향으로 안테나를 고정시켜 놓으면 무궁화 위성이 내보내는 전파가 접시형 반사면에 반사되어 초점에 모두 모이게 된다. 그 초점에 수신기를 놓으면 약한 전파를 집중시켜 강하게 만들 수 있다. 또한 모아 불을 붙이려 한다면 포물선 모양의 거울의 초점을 찾아 그곳에 불이 잘 타는 물건을 두면 모든 빛이 반사되어 초점에 모이고, 이 빛들이 열을 만들어 불을 만들 수 있다. (아르키메데스는 거울로 배를 태운적도 있다.) 이러한 사건에는 포물선의 준선에 수직인 상태로 도달한 모든 빛이 초점을 지난다는 반사성질과 같은 시각에 준선에 수직인 직선지점을 통과한 빛은 같은 시각에 초점에 도달한다는 성질이 모두 만족하기에 가능한 것이다.

나. 쌍곡선거울

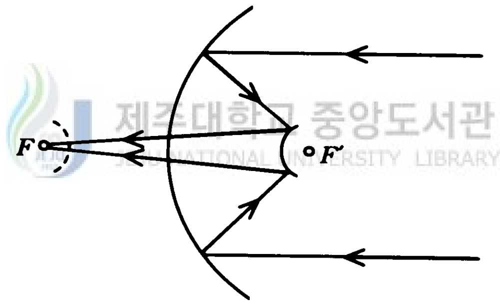
쌍곡선 거울의 한 초점에서 빛은 다른 초점쪽을 향해 거울을 반사시킨다. 그림 [그림Ⅲ-17] 과 정리 3.3.1) 에 의해 맞꼭지각의 합동

$$\angle LPB \cong \angle FPA.$$



[그림III-20]

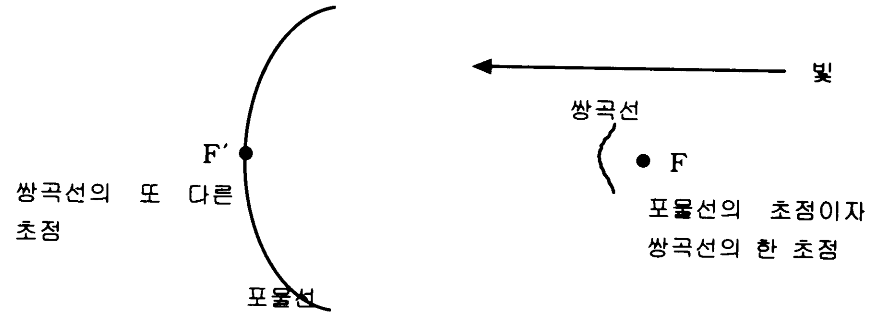
어떤 반사현미경은 좀 더 편리한 점에서 주된 초점으로부터 나오는 빛을 다시 향하게 하는 주 포물반사기와 더불어 쌍곡거울을 사용한다.



[그림III-21]

[그림III-21] 에서와 같이 같은 초점 F' 를 가진 포물선거울과 쌍곡선거울을 생각해 보자. 빛이 들어가는 포물선 거울은 F' 를 향해 반사한다면, 쌍곡선 거울에 의해 튕겨날 것이고 것이고 쌍곡선의 다른 초점으로 간다. 쌍곡선이 망원경에 이용되는데 그것은 포물면 모양의 반사경의 초점에 사람이 눈을 대고 관찰을 하려면 들어오는 빛을 가리게 되기 때문이다. (머리가 큰 사람은 특히 더) 대신 그곳에 쌍곡면 모양의 작은 볼록거울을 놓아 빛을 다른 곳에 모을 수 있다. 그곳에 눈 또는 측정기를 놓고 관찰하면 되는 것이다.

예를 들어 망원경의 구조를 살펴보면 아래 그림과 같다.

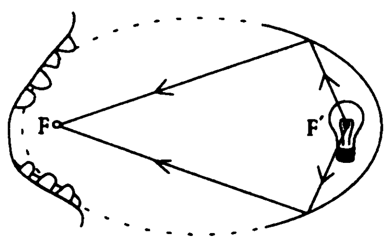


[그림Ⅲ-22]

쌍곡선은 망원경으로 들어오는 빛을 막지 않도록 최대한 작게 만든다. 그리고 F′ 에 접안렌즈를 둔다.

다. 타원거울

정리 3.3.1) 의 성질은 타원반사기의 초점에서 반사되는 에너지는 다른 초점으로 모인다는 것이다. 예로 치과의사의 램프는 환자의 입안의 한점을 초점으로 하고 램프를 또다른 초점이라 하면 의사가 원하는 곳(초점)으로 빛이 집중하는 것을 알 수 있다.



[그림Ⅲ-23]

또 하나의 예로 타원 당구를 살펴보자.

▶ 타원 당구(타원의 반사성질)

멀리 있는 공을 정확히 맞추려 할 때, 그것도 벽에 한번 맞춘 후에 맞추려 하면(일명 원쿳션) 여간 어려운 일이 아닐것이다.

그런데 타원당구에서는 한 초점에 칠 공 하나를 놓고 또 다른 초점에 맞힐 공을 놓으면 백발 백중으로 맞출 수 있다. 눈을 감고 쳐도 무조건 맞게 되어 있다.

5. 이차곡선의 표준식

원추곡선을 정의한 평면 H 를 좌표평면 R^2 으로 생각한다면 수학Ⅱ 의 내용들을 모두 유도할 수 있다.

가. 포물선의 방정식

C 는 R^2 상에서 초점이 $F=(c,0)$ 이고 준선이 $x=c$ 인 x, y 에 관한 포물선이라고 하면 정리 3.2.8) 는 이 포물선이 방정식 $y^2=4cx$ 을 만족함을 보여준다. (비교 Ⅱ. 2. 가. 참조)

나. 쌍곡선과 타원의 방정식

C 는 R^2 상에서 초점 F_1, $F_2=(\pm c,\ 0)$ 인 쌍곡선 또는 타원이라고 하자. 이 때 정리 3.2.6) 와 정리 3.2.7) 으로부터 곡선 C 는 다음 방정식을 만족한다.

$$\frac{x^2}{a^2}+s\frac{y^2}{b^2}=1,$$

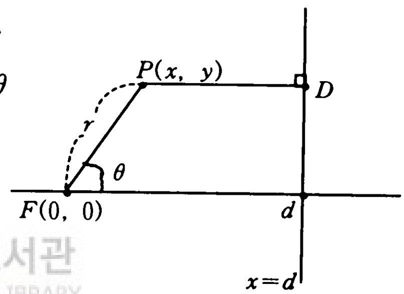
여기서, $b^2=s(a^2-c^2)$, $s=\pm 1$ 이다.

보기. 극 좌표계에서의 원추곡선의 방정식

매끄러운 원추곡선 C 가 준선 $x=d\,(>0)$ 와 이 준선에 대한 초점이 $(0,0)$ 일 때 극좌표에 의한 C 의 방정식은

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},\quad \text{여기서 } p=de \text{ 이다.}$$

증명) 극좌표의 원추곡선의 가장 간단한 표현을 얻기 위하여 극을 초점 $F(0,\ 0)$에 둔다. $PF=e(PD)$ 에서 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 로 놓으면 $PF=r$, $PD=d-r\cos\theta$ 이 된다.



[그림Ⅲ-24]

이것을 $PF=e(PD)$ 에 대입하면

$$e=\frac{r}{d-r\cos\theta}$$

이다.

r 에 관해서 정리하면, $r(e\cos\theta+1)=de$

$$\therefore\ r=\frac{de}{1+e\cos\theta}=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

라. 이차곡선의 표준식으로 변환

임의의 이차방정식

$$Ax^2+Bxy+cy^2+Dx+Ey+F=0\quad (A\neq 0 \text{ 또는 } B\neq 0 \text{ 또는 } C\neq 0) \qquad \textbf{(5.1)}$$

은 적당한 좌표변환에 의해 다음꼴로 바꿀 수 있다.

① 쌍곡선, 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+s\frac{y^2}{b^2}=t,$$

$$s = \begin{cases} 1 & (\text{타원}), \\ -1 & (\text{쌍곡선}), \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} 1 & (\text{매끄러운 곡선}), \\ 0 & (\text{특이 곡선}). \end{cases}$$

② 공타원

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

③ 포물선

$$y^2 = 4cx$$

$$c = \begin{cases} \text{양수} & (\text{매끄러운 곡선}), \\ 0 & (\text{특이 곡선}). \end{cases}$$

이것은 다음과 같은 좌표변환을 하므로써 얻을 수 있다. $(x,\ y)$ 를 R^2 상에서 표준좌표계라 하자. 또 $\vec{i} = (1,\ 0)$ 와 $\vec{j} = (0,\ 1)$ 를 시계 반대방향으로 θ 만큼 회전시킨 두 벡터를 $\vec{i}',\ \vec{j}'$ 이라 하면 $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ 와 $\{\vec{i}',\ \vec{j}'\}$ 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\vec{i}' = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

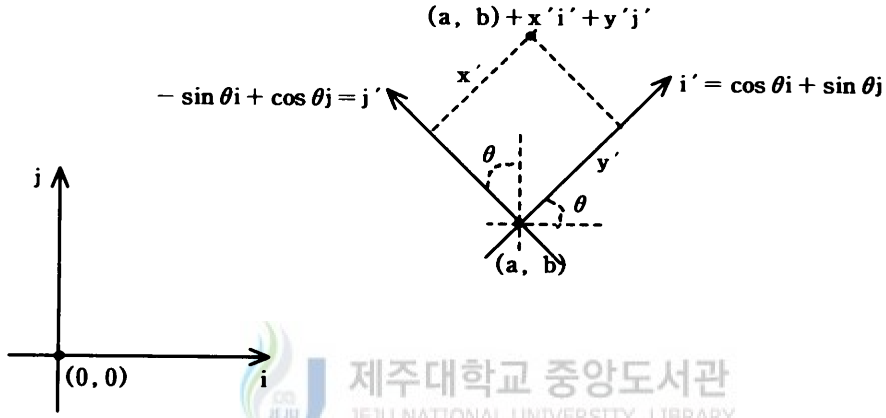
$$\vec{j}' = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\ .$$

이때 $(x,\ y) = (a,\ b)$ 를 원점으로 하고 $\vec{i}',\ \vec{j}'$ 방향으로 축을 가지는 새

로운 직교 좌표계를 (x', y') 이라 하자. 그러면 (x, y) 와 (x', y') 과의 관계식은 아래와 같이 얻어진다.

$$x = a + x'\cos\theta - y'\sin\theta \tag{5.2}$$

$$y = b + x'\sin\theta + y'\cos\theta. \tag{5.3}$$



[그림Ⅲ-25]

식 (5.2), (5.3) 을 방정식 (5.1) 에 대입하면

$$A(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + \cdots + F = 0.$$

이 방정식을 전개하면

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{5.4}$$

여기서,

$A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta,$

$B' = (C-A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta,$

$C' = C\cos^2\theta - B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta,$

$D' = (2Aa + Bb + D)\cos\theta + (Ba + 2Cb + E)\sin\theta,$

$E' = (Ba + 2Cb + E)\cos\theta + (-2Aa - Bb - D)\sin\theta,$

$F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F.$ 이다. 이것으로부터 다음과 같은 등

식을 얻을 수 있다.

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC, \tag{5.5}$$

$$A'E'^2 + F'B'^2 + C'D'^2 - B'E'D' - 4A'C'F'$$
$$= AE^2 + FB^2 + CD^2 - BED - 4ACF. \tag{5.6}$$

그래서 식 (5.4) 를 표준형으로 바꾸려면 $B'=0$, $D'=0$, $E'=0$ 이어야 한다.

먼저 $B'=0$ 을 얻기 위해서는 주어진 좌표계를 $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right)$ 만큼 회전하면 얻을 수 있다.

그 다음에 두 경우로 나누어서 (5.4) 를 판별하자.

i) $B^2 - 4AC \neq 0$ 인 경우

$D'=0$, $E'=0$ 일 필요충분조건은 $a = \dfrac{2CD-BE}{B^2-4AC}$, $b = \dfrac{2AE-BD}{B^2-4AC}$ 이다. 이런 경우 방정식 (5.4) 은 $A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$ 이 된다. 즉, 일반식(5.4) 는 쌍곡선이나 타원임을 의미한다.

ii) $B^2 - 4AC = 0$ 경우 $B'^2 - 4A'C' = 0$ 이다. 이 때, $B'=0$ 이므로 $A'C'=0$ 이다. 즉, $A'=0$, 또는 $C'=0$ 이다.

그러므로

$$C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \text{ 또는}$$

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

을 갖는다.

이것은 일반식 (5.4) 은 포물선임을 의미한다. 이것을 종합하면 다음과 같

은 정리를 얻을 수 있다.

정리 3.5.2) (5.1) 의 방정식의 그래프가 공집합이 아니라면,

i) $B^2-4AC>0$: **쌍곡선**

ii) $B^2-4AC=0$: **포물선**

iii) $B^2-4AC<0$: **타원**

iv) $AE^2+FB^2+CD^2-BED-4ACF\neq 0$, : **부드러움**

v) $AE^2+FB^2+CD^2-BED-4ACF=0$.: **특이함**

Ⅳ. 결론

고등학교 수학Ⅱ 교과서에서 전개된 내용은 다음과 같은 문제점을 지적할 수 있다.

첫째, 이차곡선을 단순히 자취적인 것으로만 정의 함으로서 어떤 기하학적 의미는 부여하지 못하고 있다.

둘째, 각각의 용어에 대한 정의가 구체적으로 어떤 기하학적 의미를 갖는지 설명이 되지 않고 있다. 예로 초점의 정의로부터 왜 모든 빛이 초점으로 모이는지를 설명을 할 수가 없다.

셋째, 일반식을 가지고 이차곡선을 분류하는데 충분한 설명이 없을 뿐만 아니라 xy 항이 왜 없을때만 다루었는지 설명이 없다.

넷째, 이차곡선을 방정식으로만 접근함으로서 학생들의 흥미를 유발하는데 미흡하다.

본 논문에서는 이차곡선을 원추곡선으로 도입하므로서 위의 문제를 다음과 같이 해결할 수 있을 것이다.

첫째, 원추를 정의하여 평면의 절단면에 의해 생기는 각각의 경우로 원추곡선을 정의하므로서 학생들의 시각적 효과를 높이게 하였다.

둘째, 각각의 용어에 대한 정의가 원추곡선에 의해 기하학적으로 접근이 되있고, 여기서는 기하학적 측면에서 초점이 어떻게 해서 나오는가를 명확히 다루었으며 왜 초점으로 빛이 모이는가를 설명하므로써 학생들에게 이차곡선의 이해 측면에서 흥미를 유발시킬 수 있을까 한다.

셋째, 회전 및 직교좌표계를 이용하여 xy 항이 있을 때에도 충분히 이차곡선을 만들어 낼 수 있다는 것을 보여주어 학생들의 사고력을 높일수 있게 하였다.

넷째, 이차곡선을 기하학적인 측면에서 접근하여 실생활에 예를 들어 줌으로서 학생들이 이차곡선을 공부하는데 있어서 홍미를 유발시킬 수 있게 하였다.

위와 같은 연구를 통하여 학생들의 이차곡선의 주요한 성질에 대한 파악을 통하여 명확하게 이해할 수 있었고, 실생활에서 응용된 결과에서 학생들에게 매우 홍미있는 여러 가지 응용물들이 있는 것을 관찰하였다.

새로운 개념을 학습하기 위해 구체적인 경험이 필요할 때 활동주의는 매우 효과적인 학습지도방법이다. 이와 같이 수학교육의 교수-학습방법론에 있어 시대적 조류인 활동주의 수학교육을 행하는 데 있어 힉생들에게 이차곡선은 매우 다양하게 다가갈수 있는 홍미있는 영역일 것이다. 그리고 현장의 수학교사에게도 7차교육과정에서 강조하고 있는 수준별교과과정을 전개하는 것 뿐만 아니라 수학실험실 운영 등 여러 가지 수학적 특활활동에 본 논문이 매우 효과적인 참고자료가 될 것으로 여겨진다.

<참 고 문 헌>

Artzy, Rafael, *Linear Geometry*, Addison-Wesley, 1974.

Thompson, J.E. *Geometry for the Practical Man*, D. Van Nostrand Co., Inc., N.Y., 1934.

George A. Jennings, *Modern Gometry with Applications*, Springer, 1996

이영윤 (1991), 해석학과 해석기하학, 경문사

유옥경 · 윤재환 · 허 원 · 손문구 · 송병희 (2000), 고등학교 수학 2 교과서, 중앙교육진흥연구소

양승갑 · 이성길 · 배종숙 (2000), 고등학교 수학 2 교과서, 금성출판사

김명렬 · 김창동 · 박수화 (2001), 고등학교 수학 2 교과서, 중앙교육진흥연구소

김연식 · 김흥기 (1999), 고등학교 수학 2 교과서, 두산

이홍천 · 강옥기 · 박재석 (2001), 고등학교 수학 2 교과서, 두산

<Abstract>

Geometrical Understanding of Quadratic Curves
- In Highschool mathematics II -

Ko, Hyung Suk
Mathematics Education Major
Gradute School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by Professor Jung, Seoung Dal

Conic approach to the definition and theorems of a quadratic curve, which are introduced in the curriculum of high school mathematics II, has been done in order to enable students to understand quadratic curves more readily and to apply them to everyday lives. Existent textbooks have been found to treat this part without explaining the principles and such an approach, ultimately, could cause the essence of mathematics to be confused. This anxiety is the motive of the present study.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in August, 2001.