

碩士學位論文

중학생의 기하 증명에 관한 의식과
증명 과정의 오류 경향 연구
- 제주도 중3 학생을 중심으로 -

指導教授 玄 進 五



濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

洪 仁 善

2002年 8月

중학생의 기하 증명에 관한 의식과
증명 과정의 오류 경향 연구
- 제주도 중3 학생을 중심으로 -

指導教授 玄 進 五

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

2002年 5月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 洪 仁 善



洪仁善의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

2002年 7月 日

審 查 委 員 長 _____ 印
審 查 委 員 _____ 印
審 查 委 員 _____ 印

<초록>

중학생의 기하 증명에 관한 의식과 증명 과정의 오류 경향 연구

- 제주도 중3 학생을 중심으로 -

洪 仁 善

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

指導教授 玄 進 五

본 연구의 목적은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 중학교 2학년 과정에서 배우는 기하 증명에 대한 의식과 기하 증명 능력, 증명 과정의 오류 경향을 분석하여 제시하기 위한 것이다.

이를 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

- (1) 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식은 어떠한가?
- (2) 기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인가?
- (3) 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떠한 것이 있는가?

연구 문제의 분석을 위해 제주도내의 시 지역 남자 중학교 2학급, 여자 중학교 2학급, 남녀공학 2학급, 읍·면 지역 남녀공학 4학급을 대상으로 의식 조사 질문지 검사와 기하 증명 능력 검사를 담당 수학 교사의 협조를 얻어 실시하였다.

연구에 사용된 의식 조사 질문지는 기하 증명에 대한 난이도, 중요도, 선호도, 이해도를 묻는 문항으로 연구자가 자체 제작하여 사용하였고, 기하 증명 능력 검사지의 경우 연구 대상 학생들이 사용하였던 8종 교과서를 분석하여 기본적인 공통된 내용을 추출해서 문항을 작성하였다. 의식 조사 질문지의 경우 각 문항에 따라 빈도와 백분율을 구하고, 증명 능력 검사의 경우 수집된 자료를 설정한 채점 기준에 따라 증명 능력 전체 점수인

PT(Proof Total)와 증명의 완성도에 있어 유효한 증명이 이루어졌을 경우 주어지는 PC(Proof Correct)의 두 가지 방식으로 점수를 산출하였다. 증명 과정의 오류 분석은 류성립(1993)의 연구에서 제시한 9가지 유형에 따라 분류하여 실시하였다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 증명에 대한 의식 조사 질문지를 분석한 결과 전체적으로 도형의 증명에 대해 부정적 의식을 갖고 있는 것으로 나타났다.

둘째, 기하 증명 능력 검사 결과 도형을 그리고 가정과 결론을 구분하는 능력은 어느 정도 있으나 완전한 증명을 기술하는 능력은 매우 부진한 것으로 나타났다.

셋째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 경향을 분석해 보면 증명의 의미를 제대로 이해하지 못하여 논리적 추론이 결여된 직관적인 사고의 결과를 이용하려는 경향이 많이 나타났다, 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하며, 언어로 표현된 문장을 수식으로 기호화하는 능력이 부족할 뿐만 아니라, 용어나 기호의 잘못된 사용에 의한 오류가 많이 나타났다. 또한 증명하는 방법이 미숙하여 증명의 중요한 과정이 일부 생략되는 오류가 있었고, 가정과 결론을 구분하지 못하며, 특히 정의와 성질을 혼동하여 구분하지 못하는 오류가 많이 나타났다.

본 연구에서 얻은 연구 결과를 토대로 하여 제언하면 다음과 같다.

첫째, 도형의 증명에 대한 학생들의 부정적인 의식을 변화시키기 위하여 연역적 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 지도가 이루어져야 하겠다.

둘째, 아직 학생들의 사고가 직관적인 수준에 머물러 있는 경향이 크므로 너무 형식적이고 논리적인 추론을 강조할 것이 아니라 학생들의 수준에 맞는 정도의 엄밀성으로 증명 지도되어야 할 것이다.

셋째, 학생들에게 도형의 정의와 성질을 보다 명확히 구분하여 지도할 필요가 있으며, 이는 기호화나 문장화, 도형의 그림 표시, 가정과 결론의 구분 등과 연결하여 지도가 이루어져야 하겠다.

* 본 논문은 2002년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임

목 차

I. 서론	1
1. 연구의 필요성 및 목적	1
2. 연구 문제	2
3. 용어의 정의	2
4. 연구의 제한점	3
II. 이론적 배경	4
1. 증명의 의미	4
2. 선행 연구 고찰	5
III. 연구 방법 및 절차	10
1. 연구 대상	10
2. 검사 도구	10
3. 검사 방법 및 절차	12
4. 자료의 처리 및 분석	12
IV. 결과 분석 및 논의	15
1. 결과	15
2. 논의	27
V. 요약 및 결론	29
1. 요약	29
2. 결론	30
3. 제언	32
◀참고문헌▶	33
ABSTRACT	35
부록	37

표 목 차

<표Ⅲ-1> 표집된 학생수	10
<표Ⅲ-2> 기하 증명 능력 검사 문항 내용	11
<표Ⅳ-1> 가장 재미있는 단원	15
<표Ⅳ-2> 가장 좋아하는 단원	15
<표Ⅳ-3> 가장 어려운 단원	16
<표Ⅳ-4> 도형의 증명에 대한 난이도	16
<표Ⅳ-5> 도형의 증명에 대한 난이도의 원인	17
<표Ⅳ-6> 도형의 증명에 대한 중요도	18
<표Ⅳ-7> 도형의 증명에 대한 중요도의 원인	18
<표Ⅳ-8> 도형의 증명에 대한 선호도	19
<표Ⅳ-9> 도형의 증명에 대한 선호도의 원인	19
<표Ⅳ-10> 도형의 증명에 대한 이해도	20
<표Ⅳ-11> 도형의 증명에 대한 이해도의 원인	20
<표Ⅳ-12> 기하 증명 능력 검사 결과 PT와 PC	21
<표Ⅳ-13> PC의 각 점수에 대한 학생수와 백분율	21
<표Ⅳ-14> 그림, 가정, 결론을 옳게 표현한 학생수	22
<표Ⅳ-15> 각 문항별 배점에 따른 학생수	23
<표Ⅳ-16> 오류 발생 빈도표	25
<표Ⅳ-17> 오류 유형별 빈도표	26

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

21세기의 지식 기반, 정보화 기반 사회에서의 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다. 이에 대비하기 위한 수학과역의 역할은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제 해결력, 창의력, 수학적으로 사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 수학적 힘(mathematical power)을 기르게 하는 것이다.

이러한 수학적 힘을 기르기 위한 수학 교육 목표의 하나로서 수학적 사고력의 신장을 들 수 있는데, 수학적 사고를 기르는데 특히 중요한 역할을 하는 것이 바로 증명이라고 할 수 있다.

수학에서 증명은 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 수학이라는 학문 자체가 몇 가지 정의와 공리로부터 논리법칙을 이용하여 명제나 정리를 유도하며 확장하여 나가는 공리적인 성격을 지니고 있는데, 그러한 논리 전개가 옳은지 아니면 오류가 있는지를 판별해 주는 기준이 되는 것이 증명이다.

현재 우리 나라 수학 교육 과정에서는 중학교 2학년 기하 단원에서 처음으로 형식적인 증명을 다루고 있는데, Becker(1982)는 기하 영역의 증명 지도에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

“중등학교 수학의 영역 중에서 기하는 증명이 가장 많이 요구되며, 따라서 학생들에게 증명 훈련을 시키는데 가장 적합한 분야로 간주되어 왔다. ‘증명’이라는 용어는 일관성과 관련된 주어진 증명의 평가, 학습한 증명의 재진술 뿐만 아니라, 새로운 증명을 고안해 내는 것과 같은 넓은 분야의 활동을 총체적으로 일컫기도 한다. 그것은 주어진 진술에 대한 일

련의 추론을 구성하고 있다. 이들 능력을 갖추기는 어려워 장기간에 걸친 훈련에 의해서만 할 수 있다. 그러므로 기하 증명에서 어려움과 오류를 분석하고 확인하는 것은 증명을 학습하는데 중요한 치료 수단이 될 것이다.”(p. 123)

그러나 수학 교사들이 지도하기에 다른 어느 영역 못지 않게 어려움을 느끼는 부분이 증명을 이용하여 명제나 정리를 지도하는 부분이며, 그 중요성과 여러 가지 이점에도 불구하고 학생들이 싫어하는 것이 또한 증명이다. 따라서 학생들이 증명 문제에 흥미를 갖게 하고, 증명 능력을 신장시킬 수 있는 지도 방안 마련이 필요하다고 하겠다.

이에 본 연구는 중학교 2학년 과정에서 처음으로 형식적인 기하 증명을 배운 학생들을 대상으로 기하 증명에 대한 의식과 증명 능력 수준을 알아보고, 증명 과정에서 나타나는 오류 경향을 분석하여 바람직한 증명 지도가 이루어질 수 있도록 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다.

2. 연구 문제

앞의 연구 목적을 달성하기 위해 본 논문은 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

- 1) 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식은 어떠한가?
- 2) 기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인가?
- 3) 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떠한 것이 있는가?

3. 용어의 정의

본 연구에 포함되는 개념들을 구체화하기 위해서 다음과 같은 용어를 정의하였다.

1) 증명

수학 대사전(박한식 외, 1993)에서는 증명을 다음과 같이 정의하고 있다.

“논증이라고도 한다. 참이라고 인정되고 있는 몇 개의 명제로부터 유효한 추론에 의해서 다른 명제가 참임을 나타내어 보이는 일을 말한다.”

여기서는 ‘ p 이면 q 이다’라는 합성 명제에서 명제 p 를 가정, 명제 q 를 결론이라고 하고, 참인 전제에서 유효한 추론에 의해 결론을 이끌어 내는 것을 증명이라고 한다. 여기서 유효한 추론이란 전제가 참이면 결론도 참인 추론을 말한다.

2) 증명 능력

증명 능력이란 기하 학습 중 논리적 증명을 통하여 획득되어진 능력으로서, 본 연구에서는 기하 증명 능력 검사를 통하여 얻어진 점수를 증명 능력으로 사용하기로 한다.

3) 오류

오류의 정의는 일반적으로 ‘잘못되어 이치에 어긋남’, ‘이치에 틀린 인식’, ‘착오’ 등으로 기술되고 있는데, 본 연구에서의 오류란 기하 증명 과정에서 나타나는 수학적 오류를 말한다.



4. 연구의 제한점

본 연구의 결과를 일반화시켜 적용함에 있어 다음과 같은 제한점들이 있다.

- 1) 본 연구의 대상자를 제주도내의 중학생으로 임의로 선정하였으므로 연구의 결과는 특성이 다른 집단에 대해서는 다르게 나타날 수도 있다.
- 2) 본 연구에 사용된 검사 문항은 표준화된 검사지가 아닌 본 연구자가 직접 제작한 검사지를 적용하였다.
- 3) 본 연구에서의 점수는 설정된 채점 기준에 따라 본 연구자에 의해 계산 되었으므로 신뢰도에 있어 약간의 오차가 발생할 수도 있다.

II. 이론적 배경

1. 증명의 의의

수학 교육은 수학적 사고를 가르치는 것이며, 이를 통한 인간 형성을 목표로 한다. 수학적으로 사고하는 것을 가르친다는 것은 단지 수학적 지식을 전달하는 것이 아니라, 주어진 목적에 따라 수학적 지식을 사용할 수 있으며, 독자적이고 창의적으로 문제를 해결하며 논증하고 비판적으로 사고하는 등의 소위 know-how를 강조하는 것이며, 그러한 바람직한 사고 태도를 강조하는 것이다.¹⁾

이러한 수학적 사고를 가르치는 데 있어서 중요한 역할을 하는 것 중의 하나가 증명 지도이다. 수학적 진리는 증명을 통하여 검증되며 그 타당성이 인정된다. 또한 증명은 논리적 사고를 가장 많이 요구하기 때문에 수학적 능력의 큰 부분을 차지하고 있다.²⁾

서동엽은 증명의 학교 수학에서의 역할과 지도 이점으로 다음과 같은 점을 들고 있다.³⁾

첫째, 수학의 즐거움을 전할 수 있다.

둘째, 정리가 참이라는 것을 이해시킬 수 있다.

셋째, 증명을 읽어감에 따라서 정리의 내용을 보다 잘 파악하게 할 수 있다.

넷째, 정리의 기억이 선명하게 된다.

다섯째, 증명의 기술을 배울 수 있다.

여섯째, 수학적인 서술 방법에 대한 훈련이 된다.

이러한 증명이란 무엇인가? 중학교 2학년 교과서에 실려 있는 증명의 정의를

1) 김응태외, 수학교육학개론, 서울대학교 출판부, 1985, p. 86.

2) 최현호, 한태식, 기하 영역의 Van-Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구, 수학교육논총, 제8집, 대한수학회, 1990, p. 223.

3) 서동엽, 증명 지도에 관한 연구, 서울대학교 대학원 교육학석사 학위논문, 1992, p. 3.

살펴보면 “실측이나 실험에 의하지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것”⁴⁾, “이미 잘 알려진 사실이나 성질 등을 이용하여 어떤 명제의 가정에서 결론을 이끌어내는 과정을 설명하는 것”⁵⁾ 이라고 하고 있다.

이상을 종합해 보면 증명은 어떤 명제가 참임을 보이기 위하여 논리적으로 유효한 추론을 써서 가정에서 결론을 유도하는 것이라고 볼 수 있다. 이 때 추론이 반복되어 쓰여지며 전제와 결론 사이에 몇 개의 명제의 계열이 얻어지는 것이 보통이다. 올바른 증명은 전제가 참이며 증명 도중에 사용되는 추론이 모두 유효하고 따라서 도중에 출현하는 명제 및 결론이 참인 것으로서 순차적으로 연역되는 논리적 전개이다. 이 경우 도중의 명제들은 그 앞의 명제를 전제로 하는 결론인 동시에 그에 잇따른 명제를 결론으로 하는 전제이다.⁶⁾

2. 선행 연구 고찰

1) Van-Hiele 이론

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

1950년대 네덜란드에서는 기하교육을 둘러싼 많은 문제점들이 제기되었고, 그에 대한 연구가 많이 이루어지고 있었다. 당시 네덜란드의 수학 교사였던 Van-Hiele 부부 역시 중학교 기하에서 자신의 학생들이 직면했던 어려움들의 원인에 대해 의문을 갖고 연구한 결과 학생의 사고 수준을 올리고 기하에 대한 직관을 얻도록 학생들을 돕기 위한 원리들을 고안했다. Van-Hiele은 학생들의 기하에 대한 사고 수준을 다음과 같이 구분하였다.

제1수준 : 시각적 인식 수준

도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서 시각적 외관에 의해 판별한다. 이 수준의 학생은 도형의 성질이나 도형 사이의 관계를 알지 못하며 주변의 대상을 단지 모양이라는 수단에 의해 파악하기 때문에 정사각형과 직사각형

4) 김연석외, 중학교 수학2, (주)두산, 1996, p. 209.

5) 박배훈외, 중학교 수학2, (주)교학사, 1996, p. 197

6) 윤영주, 수리논리학, 형설출판사, 1993, p. 7.

등의 도형을 인지하면서도 직사각형은 정사각형과는 전혀 다른 것으로 인식한다.

제2수준 : 도형의 분석적 수준

주변에 있던 구체물들이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악한다. 아직 도형을 형식적으로 정의할 수 없지만 경험에 의해 도형의 성질을 분석하고 기술할 수 있다. 그러나 아직은 도형의 정확한 정의나 도형의 성질들 사이의 관계를 파악하지 못한다.

제3수준 : 이론적 배열 수준

도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되어 도형의 여러 가지 성질 및 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 도형과 그 성질들 사이의 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 연역의 완전한 관계를 이해하지 못한다. 즉, 간단한 추론은 가능하지만 아직 형식적 증명이 가능할 수도 있으나 가정에서 결론을 이끌어 가는 논리적인 순서는 잘 보지 못한다. 다만 비형식적 논쟁이 가능해진다. 예를 들어 정사각형과 직사각형의 정의를 이해하고 그 포함 관계를 알 수 있다. 그러나 수학의 공리적 역할이나 연역의 중요성을 이해하지 못한다.

제4수준 : 연역적 추론 수준

명제가 연구의 대상이 되며 명제들 사이의 논리적 관계를 통하여 공리, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 기하의 연역적 체계를 파악한다. 또한 이 수준에 이른 학생은 기하학적인 사고의 전개와 형성의 수단인 연역의 의미를 이해하며, 생소한 정의로부터도 연역적인 사고를 할 수 있다.

제5수준 : 기하학의 엄밀화 수준

기하학의 체제 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있다. 이 수준의 학생은 구체적인 대상이 없어도 이론을 전개해 나갈 수 있을 정도로 사물에 대한 추상화가 발달되어 있다. 형식적인 엄밀성과 고도의 추상 능력으로 특징 지워지는 이 수준의 학생들은 비유클리드 기하를 이해할 수 있다.

Van-Hiele의 수학 학습 수준은 다음과 같은 특징을 갖고 있다.⁷⁾

첫째, 학생들은 수학 학습에서 $n-1$ 수준을 통과하지 않고는 n 수준에 도달할 수

7) 우정호, Van-Hiele의 수학 학습 수준 이론에 대한 소고, 사대논총, 제33집, p. 85

없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 차례로 거쳐서 발달한다.

둘째, 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지 않으며, 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고, 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다.

셋째, 앞 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 다음 수준에서 의식화되어 명확히 인식되게 된다.

넷째, 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있다. 수준의 이행은 언어의 확장과 관계된다.

다섯째, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다.

2) 증명 지도와 오류 분석

효율적인 기하 증명 방법을 개발하기 위해서는 무엇보다도 학생들이 증명에 어려움을 느끼는 원인의 분석이 선행되어야 한다. 증명 지도와 오류에 대해 연구한 여러 학자들의 연구 결과가 있는 데, 山本泰二는 그의 논문에서 기하학의 논증에 관하여 일본의 중학생들이 가지고 있는 문제점을 다음과 같이 분석하였다.⁸⁾

- (1) 학생들이 증명을 하는 과정에서 체계성을 갖추지 못하고 있다.
- (2) 증명을 하는 데 있어서 보조선을 발견하는 힘이 부족하다.
- (3) 가정과 결론을 구분하지 못하고 혼동하고 있다.

이를 극복하기 위하여 그는 실제로 학생들이 도형을 작도하도록 시켜보는 것이 아주 효과적임을 주장하였다.

또한 富谷行雄은 도형의 논증 지도에 있어서 학생들이 갖는 저항감의 이유를 다음과 같이 분석했다.⁹⁾

- (1) 당연한 결과에 대하여 왜 증명이 필요한 것인가에 대한 의구심
- (2) 정리와 성질 그리고 결론을 구분 짓는 힘이 부족하다.
- (3) 사고하고 있는 내용을 수식화하는 데 실증을 내고 있다.

이를 극복하기 위한 대책으로 그는 증명을 할 때 기술 증명에 앞서 구술 증명의

8) 山本泰二, 中學 2年の 論證指導, 數學教育, 1977, pp. 84~90.

9) 富谷行雄, 圖形領域 論證指導, 數學教育, 1989, pp. 13~20.

필요성을 강조하였다. 즉, 증명을 할 때, 먼저 말로써 증명을 이해시킨 다음에 그를 수식으로 표현하게 한 바 논증 지도의 효과가 뛰어나다고 강조했다.

한편, Becker는 오류를 유발하는 구성 요소로서 개략적으로 그려진 모델에 관한 측면, 언어 요소, 상황의 주관적 측면, 상황의 객관적 측면 등의 네 가지를 제시하고 있다. 이를 토대로 증명에서 보이는 여덟 가지 오류의 범주로서, 특별한 지식의 부족, 시행 착오 전략, 한 가지 요소를 부적절히 이해하는 오류, 더 수준 높은 단위를 부적절히 이해하는 오류, 기호화, 기호 해독, 재기호화를 할 때 생겨나는 오류, 문장이나 도형의 한 가지 부분이나 요소의 일부 형태가 우세함으로써 생기는 오류, 연산자를 부적절하게 적용하는 데서 오는 오류, 연산자를 적용할 때 정보를 잃는 것 등의 여덟 가지를 제시하고 있다.¹⁰⁾

鳥田茂는 현장 경험을 통하여 학생들이 범하는 중요한 오류의 유형으로 가정하지 않았던 조건의 사용, 증명되지 않은 정리를 사용, 증명 중에 증명할 수밖에 없는 결론을 근거로 사용, 하나의 명제와 그 반대 명제의 혼동 등 네 가지를 제시하고 있다.¹¹⁾

국내의 연구로는 류성림이 중학교 3학년 학생 210명을 대상으로 학생들이 기하 증명 과정에서 범하는 오류 유형을 연구하여, 가정을 잘 이용하지 못하는 오류, 도형에 집착하여 발생하는 오류, 연산자의 잘못된 적용, 연산자의 잘못된 실행, 증명 과정의 일부 생략, 결론을 바르게 내리지 못함, 기술적인 오류, 논리적 추론의 결여, 오류의 애매 모호함 등 9가지로 나누었다. 이 중 연산자의 잘못된 적용이 전체 오류의 37.9%로 가장 많으며, 연산자의 잘못된 실행이 18.7%로 두 번째, 기술적인 오류 11.4%, 도형에 집착하여 발생하는 오류 10.5% 순으로 많이 나타났다고 하였다. 즉, 학생들은 그들이 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 정리의 내용이나 성질을 알고 있으면서도 활용을 할 수 있는 능력이 부족하며, 부주의 또는 실수로 잘못 표기하는 경우가 다수 있으며, 도형의 직관적인 요소에 치우쳐 생각하는 경우가 많다는 것이다.¹²⁾

10) Becker, 前掲書, pp.123~127.

11) 鳥田茂, 證明導入, 教師問題集, 教職數學시리즈 實踐篇10, 東京:公立出版株式會社, 1990, pp. 79~87.

3) 효율적인 증명 지도 방법

수학 교육의 중요한 목표인 수학적 사고력 신장에 있어서 증명은 중요하고 미래 사회에 적응할 수 있는 힘을 길러줄 수 있다. 여기서 수학적 사고력의 신장을 위하여 추론 능력이 길러져야 하는데, 도형의 성질을 연역적으로 증명하는 것은 필수적인 내용중의 하나이다. 그래서 도형을 효율적으로 증명하기 위해 인지해야 할 사항을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 용어의 정확한 정의 알기

용어의 불분명한 정의가 일으키는 혼동을 피하기 위해 용어의 정확한 정의를 알도록 한다. 또한, 정의와 성질을 정확하게 구분하도록 한다.

(2) 증명의 뜻 및 방법 익히기

일반적으로 받아들여진 공리, 정의, 이미 증명된 정리, 약속된 논리 등을 이용하여 당연하게 받아들였던 사실적인 성질 등이 참임을 구체적으로 설명하여보는 활동을 통하여 증명의 뜻을 알고 증명하는 방법을 익힌다. 또, 문제를 그림이나 표 등으로 나타내는 방법도 문제의 이해를 위한 좋은 방법이 될 수 있다. 수학이 갖고 있는 추상을 직접 눈으로 볼 수 있게 그림으로 표현하는 방법은 개념의 이해에서도 강조 되어온 방법이다.

문제를 이해하는데 있어서 가정과 결론의 구분이 중요하고 또한 증명의 방향을 생각하기 위한 수단적인 것이므로 증명하는 방향, 과정에 중점을 두어야 한다.

(3) 이미 증명된 정리는 다른 명제를 증명할 때 활용할 수 있도록 그 내용의 이해에 중점을 둔다.

12) 류성립, 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문, 1993, pp. 61~64

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

중학교 2학년에서 “도형의 성질”, “도형의 닮음”을 배운 제주도내 5개 중학교 3학년 학생 중에서 제주시내 남자중 2학급, 여자중 2학급, 남녀공학 2학급, 읍·면 지역 남녀공학 4학급 314명을 표집하여 조사하였다.

<표Ⅲ-1> 표집된 학생수

구분	시 지역 중학교			읍·면 지역 중학교		합계
	A중	B중	C중	D중	E중	
학생수	73	65	68	53	55	314
	206			108		

2. 검사 도구

1) 의식 조사 질문지

기하 증명 과정을 마친 학생들의 도형 단원의 증명에 대한 의식을 조사해 보고자 실시한 질문지는 다음과 같은 항목으로 구성되어 있다.

- (1) 기하 증명에 대한 난이도와 그 이유
- (2) 기하 증명에 대한 중요도와 그 이유
- (3) 기하 증명에 대한 선호도와 그 이유
- (4) 기하 증명에 대한 이해도와 그 이유

2) 기하 증명 능력 검사지

(1) 형식

기하 증명에 대한 능력과 오류 경향을 조사하기 위하여 다음과 같은 형식으로 구성하였다.

문항1~문항4 : ① 주어진 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호로 나타내기

② 가정 부분을 기호로 나타내기

③ 결론 부분을 기호로 나타내기

④ 명제가 참임을 직접 증명하기

문항5 : ① 가정 부분을 기호로 나타내기

② 결론 부분을 기호로 나타내기

③ 명제가 참임을 직접 증명하기

문항6~문항9 : 명제가 참임을 직접 증명하기

문항10 : 용어의 정의 쓰기

(2) 내용

연구 대상 학생들이 사용하였던(제6차 교육과정) 2학년 8종 교과서를 고찰하여 기본적인 공통적으로 다루고 있는 내용으로 구성하였으며, 각 문항별 구체적인 내용은 <표Ⅲ-2>와 같다.

<표Ⅲ-2> 기하 증명 능력 검사 문항 내용

문항	내 용	난이도
1	이등변삼각형의 성질	중
2	직사각형의 성질	하
3	삼각형의 세 내각의 합	중
4	평행사변형이 되는 조건	중
5	평행사변형의 성질	중
6	삼각형의 합동	하
7	삼각형의 닮음	하
8	직각삼각형의 합동	중
9	삼각형의 중점연결정리	상
10	이등변삼각형, 직각삼각형, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 정의 쓰기	

3. 검사 방법 및 절차

위와 같은 형식과 내용으로 구성된 의식 조사 질문과 증명 능력 검사를 연구 대상으로 표집된 학생 314명에게 실시하였고, 실시 방법은 해당 학교 수학 교사의 협조를 얻어 수학 시간을 이용하여 실시하였다.

4. 자료의 처리 및 분석

의식 조사 질문지의 경우 응답자의 빈도와 백분율을 구하고, 증명 능력 검사의 경우에는 다음과 같은 채점 기준에 따라 채점하고, 오류를 분석하였다.

1) 채점 기준

증명 능력 검사의 채점 기준은 진현미(1996)의 연구에서 이용한 방법을 참고로 하여 다음과 같이 마련하였다.

(1) 문항1~문항5의 (1)~(3)번

0점 : 아무 것도 쓰지 않거나 틀리게 답한 경우

1점 : * 도형을 옳게 그리고 기호를 바르게 나타낸 경우

* 가정 부분을 기호로 바르게 나타낸 경우

* 결론 부분을 기호로 바르게 나타낸 경우

(2) 문항1~문항5의 (4)번, 문항6~문항9

0점 : 응답을 하지 않았거나 전혀 무의미한 것을 답했을 경우

1점 : 적어도 1개의 타당한 연역을 하고 그 근거를 말했을 경우

2점 : 증명의 반 정도를 유효하게 연역해 내었을 경우

3점 : 증명의 각 단계들이 논리적으로 유효하지만, 용어나 기호, 정리의 이름 등에 잘못이 있거나 생략된 경우

4점 : 증명의 모든 전개 과정이 논리적으로 유효하고, 각 증명 단계에 맞는 이유를 정확히 기술하며, 용어나 기호, 정리의 이름 등이 정

확한 경우

채점 결과는 류성립(1993)의 논문을 참고로 하여 증명의 전체 점수인 PT(Proof Total)와 증명의 완성도에 있어 유효한 증명이 이루어졌을 경우 주어지는 PC(Proof Correct)의 두 가지 방식으로 산출하였다. PT의 총점은 50점 만점이고, PC는 명제의 증명 문제에서 3점이나 4점을 얻은 문항 수를 일컬으며, 0점~9점 사이이다.

2) 오류 분석

학생들의 답안 중에서 옳은 답을 제시한 경우(4점)와 아무 것도 기술하지 않은 경우는 오류 분석의 대상에서 제외시켰다. 또, 같은 문제를 증명하는 과정에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 제일 먼저 발생한 오류만을 분석의 대상으로 삼았고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다.

오류의 분류 모델은 류성립(1993)의 논문을 참고로 하여 다음의 9가지로 분류하였다.

(1) 가정을 잘 이용하지 못하는 오류(A)

주어진 문제의 전제 조건을 잘못 이해하거나 활용을 잘 하지 못하여 발생하는 오류로서 가정하지 않은 것을 가정으로 이용하는 경우, 여기에는 결론을 가정으로 이용하는 것까지 포함한다. 가정에 너무 집착하여 그 이상은 생각하지 못하는 경우, 주로 가정 이외에는 더 이상 진술하지 못하는 경우이다.

(2) 도형에 집착하여 생기는 오류(B)

문제의 가정을 무시하고 도형의 직관적인 요소에 너무 집착하여 기인하는 오류이다.

(3) 연산자의 잘못된 적용(C)

연산자를 적용하는데 있어서 'AAA'와 같은 실제로 존재하지 않는 합동조건의 적용 또는 'SAS'를 이용해야 되는데 'ASA'를 이용하는 등과 같은 부적절한 이용으로 인한 오류이다. 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우, 증명할 필요가 없는 곳에 정리 또는 정의를 적용하는 경우, 정리나 정의 또는 성질을 밝히지 않은

경우의 오류이다.

(4) 연산자의 잘못된 실행(D)

정리나 정의를 적용하는 과정에서 잘못이 있는 경우로 일반적으로 올바른 결론의 변경을 낳게 된다.

(5) 증명 과정의 일부 생략(E)

현 단계까지는 맞으나 그 다음 단계의 과정이 생략되었거나 또는 한 단계가 생략된 경우의 오류이다.

(6) 결론을 바르게 내리지 못함(F)

결론 전 단계까지는 잘 연역해 내었으나 결론을 진술하지 않은 경우, 결론을 진술했으나 문제가 요구한 결론을 틀리게 기술한 경우의 오류이다.

(7) 기술적인 오류(G)

기호를 잘못 표기하거나 빠뜨리는 경우 또는 문자를 잘못 옮겨 적는 경우이다.

(8) 논리적 추론의 결여(H)

정리의 적용, 실행 등 증명에 필요한 기본 지식은 잘 알고 있으나 증명 과정의 각 단계가 논리적이기 못하거나 보조선을 그어 그림을 정확히 그렸으나 증명 과정을 기호와 이유를 들어 논리적으로 연역하지 못한 경우이다.

(9) 오류의 애매 모호함(I)

학생들이 주어진 문항을 증명하는 과정에서 글자가 애매 모호하여 위와 같은 오류로 분류하기가 곤란하고, 또 학생이 제시한 답을 보고 학생의 의도를 정확히 알 수 없는 경우이다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 결과

1) 의식 조사 질문 결과

(1) 질문지의 1번 문항은 ‘중2 수학 단원 중 가장 재미있는 단원’을 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-1>과 같다.

<표IV-1> 가장 재미있는 단원

	① 유리수와 근사값	② 식의 계산	③ 방정식, 부등식	④ 함수	⑤ 확률	⑥ 도형	합계
응답자수 (응답율)	34 (10.8)	76 (24.2)	69 (22.0)	15 (4.8)	79 (25.2)	41 (13.0)	314 (100.0)

어느 한 단원에 치우치지 않고 비교적 고른 응답율을 보이고 있고, 도형 단원보다 함수, 유리수와 근사값 단원이 더 낮은 응답율을 보이고 있음을 알 수 있다.

(2) 질문지의 2번 문항은 ‘중2 수학 단원 중 가장 좋아하는 단원’을 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-2>와 같다.

<표IV-2> 가장 좋아하는 단원

	① 유리수와 근사값	② 식의 계산	③ 방정식, 부등식	④ 함수	⑤ 확률	⑥ 도형	합계
응답자수 (응답율)	33 (10.5)	69 (22.0)	74 (23.6)	13 (4.1)	88 (28.0)	37 (11.8)	314 (100.0)

가장 재미있는 단원을 묻는 문항과 비슷한 응답율을 보이고 있음을 알 수 있다.

(3) 질문지의 3번 문항은 ‘중2 수학 단위 중 가장 어렵게 생각되는 단위’을 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-3>과 같다.

<표IV-3> 가장 어려운 단위

	① 유리수와 근사값	② 식의 계산	③ 방정식, 부등식	④ 함수	⑤ 확률	⑥ 도형	합계
응답자수 (응답율)	17 (5.4)	6 (1.9)	25 (8.0)	92 (29.3)	31 (9.9)	143 (45.5)	314 (100.0)

전체 314명중에 143명(45.5%)의 학생이 가장 어렵게 생각되는 단원이 ‘도형’단원이라고 응답하고 있다.

(4) 질문지의 4번 문항은 ‘도형의 증명이 다른 단원에 비해 어떻게 생각되는가’를 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-4>와 같다.

<표IV-4> 도형의 증명에 대한 난이도

	① 매우 어렵다	② 조금 어렵다	③ 보통이다	④ 조금 쉽다	⑤ 매우 쉽다	합계
응답자수 (응답율)	114 (36.3)	121 (38.6)	56 (17.8)	12 (3.8)	11 (3.5)	314 (100.0)

도형의 증명의 난이도를 묻는 문항에 매우 어렵거나 조금 어렵다고 응답한 학생이 74.9%로 나타나고 있으며, 7.3%의 학생만이 쉽다고 응답하고 있다.

도형의 증명의 난이도에 대한 원인은 <표IV-5>와 같다.

<표IV-5> 도형의 증명에 대한 난이도의 원인

	원 인	응답자수(응답율)
어렵게 느껴지는 이유	① 내용 자체가 어려워서	22 (8.5)
	② 외워야할 정의와 정리, 성질들이 많아서	42 (16.1)
	③ 타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문에	124 (47.7)
	④ 증명 절차가 복잡해서	31 (11.9)
	⑤ 생각을 많이 해야 하므로	15 (5.8)
	⑥ 기초 지식이 부족해서	19 (7.3)
	⑦ 기타	7 (2.7)
	합 계	260 (100.0)
쉽게 느껴지는 이유	① 내용 자체가 쉬워서	4 (7.4)
	② 외워야할 용어나 내용이 많지 않아서	5 (9.3)
	③ 열심히 공부하였기 때문에	6 (11.1)
	④ 선생님이 설명을 잘 해 주셔서	14 (25.9)
	⑤ 그림을 그려서 생각하면 쉽게 이해되기 때문에	19 (35.2)
	⑥ 기초 지식이 충분히 있으므로	6 (11.1)
	⑦ 기타	0 (0.0)
	합 계	54 (100.0)

도형의 증명이 어렵게 느껴지는 이유로 ‘타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문’이라고 응답한 학생이 47.7%로 가장 많았으며, 그 다음으로 ‘외워야 할 정의와 정리, 성질들이 많아서’(16.1%), ‘증명 절차가 복잡해서’(11.9%)라고 응답하고 있다.

도형의 증명이 쉽게 느껴지는 이유로는 ‘그림을 그려서 생각하면 쉽게 이해되기 때문에’(35.2%), ‘선생님이 설명을 잘 해 주셔서’(25.9%)라고 응답하고 있다.

(5) 질문지의 5번 문항은 ‘도형의 증명이 중요하다고 생각되는가’를 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-6>과 같다.

<표IV-6> 도형의 증명에 대한 중요도

	① 매우 중요하다	② 조금 중요하다	③ 보통이다	④ 별로 중요하지 않다	⑤ 전혀 중요하지 않다	합계
응답자수 (응답율)	19 (6.0)	70 (22.3)	97 (30.9)	71 (22.6)	57 (18.2)	314 (100.0)

도형의 증명의 중요도를 묻는 문항에는 28.3%의 학생만이 ‘중요하다’라고 응답하고 있으며, 40.8%의 학생이 ‘중요하지 않다’고 응답하고 있어 도형 단원의 중요성에 대한 지도가 필요하다고 볼 수 있다.

도형의 증명의 중요도에 대한 원인은 <표IV-7>과 같다.

<표IV-7> 도형의 증명에 대한 중요도의 원인

	원 인	응답자수(응답율)
중요하다고 생각되는 이유	① 시험에 나오기 때문에	67 (47.5)
	② 여러 학문의 기본이 되기 때문에	17 (12.0)
	③ 일상 생활에 이용되기 때문에	19 (13.5)
	④ 다른 과목을 공부하는데 필요하기 때문에	7 (5.0)
	⑤ 수학의 다른 단원을 공부하는데 필요하기 때문에	8 (5.7)
	⑥ 합리적이고 논리적인 사고 방법을 배울 수 있기 때문에	23 (16.3)
	⑦ 기타	0 (0.0)
	합 계	141 (100.0)
중요하지 않다고 생각되는 이유	① 시험에 잘 나오지 않기 때문에	5 (2.9)
	② 일상 생활에 전혀 이용되지 않기 때문에	97 (56.1)
	③ 다른 과목을 공부하는데 필요하지 않기 때문에	13 (7.5)
	④ 수학의 다른 단원을 공부하는데 필요 없기 때문	8 (4.6)
	⑤ 복잡하고 따분해서 머리만 아프기 때문에	46 (26.6)
	⑥ 다른 사람들이 중요하지 않다고 하기 때문에	3 (1.7)
	⑦ 기타	1 (0.6)
	합 계	173 (100.0)

도형의 증명이 중요하다고 생각되는 이유로는 ‘시험에 나오기 때문에’(47.5%)라

고 응답한 학생이 가장 많았으며, 중요하지 않다고 생각되는 이유로는 56.1%의 학생이 '일상 생활에 전혀 이용되지 않기 때문'이라고 응답하고 있다.

(6) 질문지의 6번 문항은 '도형의 증명이 다른 단원에 비해 재미가 있는가'를 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-8>과 같다.

<표IV-8> 도형의 증명에 대한 선호도

	① 매우 재미있다	② 조금 재미있다	③ 보통이다	④ 별로 재미없다	⑤ 매우 재미없다	합계
응답자수 (응답율)	9 (2.9)	39 (12.4)	64 (20.4)	83 (26.4)	119 (37.9)	314 (100.0)

도형의 증명의 선호도를 묻는 문항에는 15.3%의 학생만이 긍정적인 반응을 보이고 있고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보이고 있다.

도형의 증명의 선호도에 대한 원인은 <표IV-9>와 같다.

<표IV-9> 도형의 증명에 대한 선호도의 원인

	원 인	응답자수(응답율)
재미 있다고 생각되는 이유	① 증명 자체가 신기하기 때문에	21 (24.4)
	② 도형에 관한 문제는 자신이 있어서	4 (4.7)
	③ 생각하는 과정이 재미있어서	18 (20.9)
	④ 선생님이 쉽고 재미있게 가르쳐 주셔서	14 (16.3)
	⑤ 증명을 해결하고 난 후에 기쁨을 느끼기 때문에	27 (31.4)
	⑥ 기타	2 (2.3)
	합 계	86 (100.0)
재미 없다고 생각되는 이유	① 과정이 복잡하기 때문에	118 (51.8)
	② 도형에 관한 문제는 자신이 없어서	49 (21.5)
	③ 생각을 많이 해야 하기 때문에	35 (15.4)
	④ 선생님이 잘 설명해 주시지 않아서	15 (6.6)
	⑤ 아이디어가 떠오르지 않기 때문에	5 (2.2)
	⑥ 기타	6 (3.5)
	합 계	228 (100.0)

도형의 증명이 재미있는 이유로는 ‘증명을 해결하고 난 후에 기쁨을 느끼기 때문에’(31.4%), ‘증명 자체가 신기하기 때문에’(24.4%), ‘생각하는 과정이 재미있어서’(20.9%)라고 응답하고 있고, 재미없는 이유로는 51.8%의 학생이 ‘과정이 복잡하기 때문’이라고 응답하고 있다.

(7) 질문지의 7번 문항은 ‘도형의 증명을 어느 정도 이해했다고 생각하는가’를 묻는 문항으로 그 결과는 <표IV-10>과 같다.

<표IV-10> 도형의 증명에 대한 이해도

	① 완전히 이해하였다	② 거의 이해하였다	③ 반정도 이해하였다	④ 거의 이해하지 못했다	⑤ 전혀 이해하지 못했다	합계
응답자수 (응답율)	6 (1.9)	34 (10.8)	119 (37.9)	100 (31.9)	55 (17.5)	314 (100.0)

도형의 증명의 이해도를 묻는 문항에는 12.7%의 학생만이 ‘이해하였다’고 응답하고 있으며, 37.9%의 학생이 ‘반정도 이해하였다’고 응답하고 있으며, 49.4%의 학생이 ‘거의 또는 전혀 이해하지 못하였다’고 응답하고 있다.

도형의 증명의 이해도에 대한 원인은 <표IV-11>과 같다.

<표IV-11> 도형의 증명에 대한 이해도의 원인

	원 인	응답자수(응답율)
이해했다고 생각되는 이유	① 내용 자체가 쉬워서	6 (1.9)
	② 선생님이 설명을 잘 해 주셔서	28 (28.6)
	③ 열심히 노력하였기 때문에	41 (41.8)
	④ 원래 수학을 잘 하기 때문에	15 (15.3)
	⑤ 기타	8 (8.2)
	합 계	98 (100.0)
이해하지 못했다고 생각되는 이유	① 내용 자체가 너무 어려워서	79 (36.6)
	② 선생님이 설명을 잘 해 주시지 않아서	17 (7.9)
	③ 열심히 노력하지 않아서	75 (34.7)
	④ 원래 수학을 잘 못 하기 때문에	42 (19.4)
	⑤ 기타	3 (1.4)
	합 계	216 (100.0)

도형의 증명을 이해했다고 생각되는 이유로 ‘열심히 노력하였기 때문’이라고 응답한 학생(41.8%)이 가장 많았으며, ‘내용 자체가 너무 어려워서’(36.6%), ‘열심히 노력하지 않아서’(34.7%) 이해하지 못하였다고 응답하고 있다.

2) 기하 증명 능력 검사 결과

기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력 결과는 다음과 같다.

<표Ⅳ-12> 기하 증명 능력 검사 결과 PT와 PC

	P T			P C		
	평균	%	SD	평균	%	SD
시 지역 중학교	10.6	21.2	5.6	0.80	8.9	1.59
읍·면 지역 중학교	8.5	17	5.0	0.78	8.7	1.55
전 체	9.8	19.6	5.3	0.79	8.8	1.57

시 지역 중학교의 PT 평균은 10.6점(21.2%), 읍·면 지역 중학교의 PT 평균은 8.5점(17%)으로 전체적으로 9.8점(19.6%)의 평균을 보여 학생들이 도형의 증명에 대해 어려움을 느끼는 만큼 성적도 부진함을 알 수 있다.

특히 완전한 증명을 요구한 PC 점수에 대한 평균이 8.8%로 PT 점수에 비해 현저히 떨어지고 있음은 가정과 결론을 구별하는 능력은 어느 정도 있으나 논리적이고 체계적으로 증명을 직접 기술해 나가는 능력이 부족하다는 것을 보여주고 있다.

<표Ⅳ-13> PC의 각 점수에 대한 학생수와 백분율

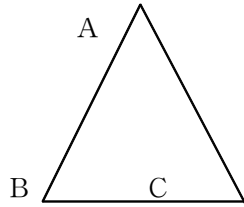
PC점수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
시지역	145	20	14	9	8	5	2	1	2	0	206
(%)	(70.4)	(9.7)	(6.8)	(4.3)	(3.9)	(2.4)	(1.0)	(0.5)	(1.0)	(0)	(100)
읍·면지역	78	9	6	5	5	4	0	0	1	0	108
(%)	(72.3)	(8.3)	(5.6)	(4.6)	(4.6)	(3.7)	(0)	(0)	(0.9)	(0)	(100)
전체	223	29	20	14	13	9	2	1	3	0	314
(%)	(71.0)	(9.2)	(6.4)	(4.5)	(4.1)	(2.9)	(0.6)	(0.3)	(1.0)	(0)	(100)

PC 점수가 0 또는 1인 학생이 252명으로 완전하게 증명을 해 낼 수 있는 능력이 거의 없는 학생이 전체의 80.2%를 차지하고 있음을 알 수 있다. 또 약간의 증명 능력이 있다고 생각되는 학생(PC 점수 2, 3, 4, 5)은 17.9%이며, 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났다.

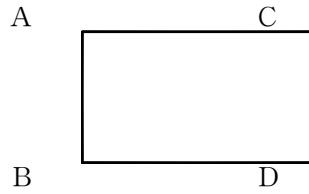
<표Ⅳ-14> 그림, 가정, 결론을 옳게 표현한 학생수

구분 문항	시지역			읍·면지역		합계(%)	
	A중	B중	C중	D중	E중		
1	(1) 그림	72	63	62	49	47	293 (93.3)
	(2) 가정	66	57	45	47	18	233 (74.2)
	(3) 결론	64	57	40	47	18	226 (72.0)
2	(1) 그림	54	53	54	34	29	224 (71.3)
	(2) 가정	3	4	2	8	1	18 (5.7)
	(3) 결론	34	26	23	22	9	114 (36.3)
3	(1) 그림	58	41	61	37	23	220 (70.1)
	(2) 가정	0	5	0	0	0	5 (1.6)
	(3) 결론	37	26	20	19	3	105 (33.4)
4	(1) 그림	49	46	52	28	25	200 (63.7)
	(2) 가정	57	34	35	31	12	169 (53.8)
	(3) 결론	4	3	1	11	4	23 (7.3)
5	(1) 가정	8	7	4	9	1	29 (9.2)
	(2) 결론	26	17	16	15	4	78 (24.8)

명제의 증명에서 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호를 사용하여 나타내는 부분에서는 삼각형인 경우(문항1, 3)에는 93.3%, 70.1%의 학생이 바르게 나타냈고, 사각형인 경우(문항2, 4)에는 71.3%, 63.7%의 학생만이 바르게 나타냈다. 삼각형인 경우에 있어서 기호를 도형 안에 붙이는 경우(그림1)가 있었고, 사각형인 경우에 있어서는 기호를 위, 아래 순서로 붙이는 경우(그림2)가 많았다.



<그림1>



<그림2>

가정과 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내는 부분에서는 문항2의 가정(직사각형ABCD에서)을 기호로 바르게 나타낸 경우가 5.7%, 문항3의 가정(삼각형의 세 내각)을 바르게 나타낸 경우가 1.6%로 나타났고, 문항4의 결론(사각형은 평행사변형이다)을 기호로 바르게 나타낸 경우가 7.3%로 나타났다.

특히, 명제가 문장제로 주어진 문항5(평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다)의 경우 가정과 결론을 기호로 바르게 나타낸 경우가 각각 9.2%, 24.8%로 나타나 문장으로 주어진 가정과 결론을 기호를 사용하여 나타내는 능력이 부족함을 보여주고 있다.



<표IV-15> 각 문항별 배점에 따른 학생수

문항	구분	시지역			읍·면지역		합계 (%)
		A중	B중	C중	D중	E중	
1(4)	4점	0	2	0	0	0	2 (0.6)
	3점	2	4	1	4	1	12 (3.8)
	2점	3	3	2	7	0	15 (4.8)
	1점	0	4	0	2	0	6 (1.9)
	0점	68	52	65	40	54	279 (88.9)
2(4)	4점	2	2	0	2	0	6 (1.9)
	3점	3	6	3	3	2	17 (5.4)
	2점	1	3	0	0	0	4 (1.3)
	1점	1	4	1	2	0	8 (2.5)
	0점	66	50	64	46	53	279 (88.9)
3(4)	4점	0	1	1	2	1	5 (1.6)
	3점	1	2	3	3	0	9 (2.9)
	2점	0	2	0	2	0	4 (1.3)
	1점	0	0	1	1	0	2 (0.6)
	0점	72	60	63	45	54	294 (93.6)

구분 문항	시지역			읍·면지역		합계 (%)	
	A중	B중	C중	D중	E중		
4(4)	4점	1	1	1	1	0	4 (1.3)
	3점	1	0	3	0	0	4 (1.3)
	2점	0	1	0	2	0	3 (0.9)
	1점	0	2	0	3	0	5 (1.6)
	0점	71	61	64	47	55	298 (94.9)
5(3)	4점	0	0	1	2	0	3 (0.9)
	3점	3	5	3	5	0	16 (5.1)
	2점	1	1	1	2	0	5 (1.6)
	1점	0	1	1	1	0	3 (0.9)
	0점	69	58	62	43	55	287 (91.5)
6	4점	3	6	4	11	0	24 (7.6)
	3점	7	8	13	11	3	42 (13.4)
	2점	7	3	10	6	0	26 (8.3)
	1점	12	4	5	3	4	28 (8.9)
	0점	44	44	36	22	48	194 (61.8)
7	4점	4	7	6	6	1	24 (7.6)
	3점	4	4	4	2	2	16 (5.1)
	2점	5	7	6	1	0	19 (6.1)
	1점	2	1	9	1	0	13 (4.1)
	0점	58	46	43	43	52	242 (77.1)
8	4점	0	0	0	0	0	0 (0)
	3점	1	0	0	1	0	2 (0.6)
	2점	0	0	0	0	1	1 (0.3)
	1점	5	5	1	1	1	13 (4.1)
	0점	67	60	67	51	53	298 (94.9)
9	4점	2	6	3	4	0	15 (4.8)
	3점	8	12	14	11	6	51 (16.2)
	2점	10	3	12	6	1	32 (10.2)
	1점	8	8	5	5	1	27 (8.6)
	0점	45	36	34	27	47	189 (60.2)
10	5~6	22	19	10	21	2	74 (23.6)
	3~4	16	16	17	22	6	77 (24.5)
	0~2	35	30	41	10	47	163 (51.9)

완전한 증명을 요구한 9개의 문항 중 6번, 9번 문항에 3, 4점을 받은 학생수가 66명(21.0%)으로 가장 많았고, 8번 문항의 정답율이 가장 낮았는데, 이는 삼각형의 중점연결정리를 기억하지 못하고, 도형의 직관적인 면에 치중하여 정리의 내용을 평행사변형의 성질과 관련짓지 못하는 데서 오는 결과인 것 같다.

용어의 정의를 쓰도록 한 문항10의 경우 6개의 정의 중 5개 이상을 바르게 쓴

경우가 23.6%, 2개 이하를 바르게 쓴 경우가 51.9%를 차지하여 도형의 정의를 바르게 쓰지 못하는 경우가 많았고, 특히 도형의 성질을 정의로 받아들여 정의와 성질을 구별하지 못하는 경우가 많았다.

3) 오류 분석

오류 분석은 완전한 증명을 요구한 9개의 문항에서 무응답을 한 문항과 4점을 받은 문항을 제외하고 총 888개의 오류를 찾아내어 분석을 하였다.

<표IV-16> 오류 발생 빈도표

문항	1(4)	2(4)	3(4)	4(4)	5(3)	6	7	8	9	계
오류발생 (%)	158 (50.3)	101 (32.2)	88 (28.0)	78 (24.8)	73 (23.2)	110 (35.1)	80 (25.5)	66 (21.0)	134 (42.7)	888 (31.4)
4점 (%)	2 (0.6)	6 (1.9)	5 (1.6)	4 (1.3)	3 (1.0)	24 (7.6)	24 (7.6)	0 (0)	15 (4.8)	83 (2.9)
무응답 (%)	154 (49.1)	207 (65.9)	221 (70.4)	232 (73.9)	238 (75.8)	180 (57.3)	210 (66.9)	248 (79.0)	165 (52.5)	1855 (65.7)
계	314	314	314	314	314	314	314	314	314	2826

<표IV-16>은 각 문항별로 오류가 발생한 학생, 4점 받은 학생, 무응답한 학생 수와 그 비율을 나타낸 것이다. 오류가 가장 많이 발생한 문항은 1번 문항으로 50.3%의 비율을 차지하였고, 6번, 7번 문항이 4점을 받은 학생수가 가장 많았으며, 전체적으로 무응답한 비율이 높아 도형의 증명에 대해 학생들이 정리를 이해하고 기억하여 증명에 적용하고 실행하는 데 많은 어려움이 있다는 것을 알 수 있다.

<표IV-17> 오류 유형별 빈도표

문항 오류유형	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
(1) A	119	51	45	55	39	31	26	4	42	412 (46.4)
(2) B	0	1	1	1	1	0	2	52	0	58 (6.5)
(3) C	8	16	1	4	12	23	27	1	51	143 (16.1)
(4) D	14	16	5	7	5	2	6	1	1	57 (6.4)
(5) E	4	3	10	3	3	25	16	2	16	82 (9.2)
(6) F	2	5	0	0	4	13	0	0	5	29 (3.3)
(7) G	4	6	0	4	6	15	1	0	17	53 (6.0)
(8) H	6	1	23	4	2	0	0	6	1	43 (4.9)
(9) I	1	2	3	0	1	2	0	1	1	11 (1.2)
계	158	101	88	78	73	110	80	66	134	888 (100.0)

<표IV-17> 오류 유형별 빈도표에서 살펴보면, (1) 가정을 잘 이용하지 못하는 오류(A)가 46.4%로서 가장 많은데, 이는 가정하지 않은 것을 가정으로 이용하는 경우, 결론을 가정으로 이용하는 경우, 가정 이외에는 더 이상 진술하지 못한 경우에 해당된다. 특히, ‘ $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이면 $\angle B=\angle C$ 이다.’를 증명하는 1번 문항에서 37.9%의 학생이 ‘ $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이면 이등변삼각형이기 때문에 이등변삼각형의 성질에 의해 $\angle B=\angle C$ 이다.’라고 기술해 수업 시간 중에 정리로 사용되고 있는 사실은 당연히 참이라고 생각하며 그 정리를 증명해야 한다는 것을 이해하지 못하는 경향이 있어 아직 증명이나 정리의 개념에 대한 이해가 부족하기 때문인 것으로 여겨진다. (3) 연산자의 잘못된 적용(C)으로 인한 오류가 두 번 째로 많이 나

타나는데, 이는 증명에 필요한 정리나 정의의 잘못된 선택과 연역에 대한 이유로서 정리나 정의의 성질을 밝히지 않은 것, 정리나 정의의 이름 또는 성질을 잘못 말한 경우에 해당된다. (5) 증명 과정의 일부 생략(E) 오류는 9.2%로서 전체적으로 보아 증명이 논리적으로 유효하게 이루어지고 있으나 증명을 기술하는 과정 중에 필요한 단계가 생략되어 있는 경우이다. (2) 도형에 집착하여 생기는 오류(B)는 8번 문항에서 주로 나타났는데, 삼각형의 중점연결정리를 이용하여 평행사변형임을 증명해야 하는데 그림에서 직관적으로 판단하여 기술한 경우가 대부분이었다. (7) 기술적인 오류(G)도 6.0%로 나타나는 데 학생들의 부주의 또는 실수로 잘못 표기하는 경우로 특히, 합동기호(\equiv)를 넓이 기호(=)로 잘못 사용하는 경우가 많아 기호 사용에 대한 지도에 특별한 주의를 기울일 필요성이 제기된다.

4번 문항에서는 증명을 통해서 밝히고 난 뒤 사용할 수 있는 평행사변형의 성질을 증명 과정 중에 사용하는 오류를 보이고 있는데, 이러한 오류는 가정과 결론에 대한 개념이 명확하지 않고, 평행사변형이 되는 조건과 평행사변형의 성질을 구분하지 못하는 데서 오는 것 같다.

2. 논의



본 연구의 연구 문제를 바탕으로 연구 결과를 논의하면 다음과 같다.

첫째, 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식 조사를 해 보았다. 도형의 증명의 난이도를 묻는 문항에 74.9%의 학생이 어렵다라고 응답하고 있으며, 7.3%의 학생만이 쉽다고 응답하였다.

도형의 증명의 중요도를 묻는 문항에는 28.3%의 학생이 중요하다, 40.8%의 학생이 중요하지 않다고 응답하고 있다. 도형의 증명의 선호도를 묻는 문항에는 15.3%의 학생이 긍정적인 반응을 보였고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보였다.

도형의 증명의 이해도를 묻는 문항에는 12.7%의 학생이 이해하였다고 응답을, 49.4%의 학생이 이해하지 못하였다고 응답하였다. 전체적으로 도형의 증명에 대해 부정적 의식을 갖고 있는 것으로 나타나 증명의 필요성과 의의에 대한 지도가 이

루어져야 하겠다.

둘째, 기하 증명 능력 검사에서는 도형 그리기, 가정과 결론을 진술하는 데 있어서는 약간의 능력이 있었으나 완전한 증명을 연역해 내는 문제에서는 능력이 부족하였다. 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났고, 80.2%의 학생이 연역적인 증명을 하는데 있어서 많은 어려움을 겪고 있는 것으로 나타났다.

이러한 결과는 중2 학생의 60% 정도가 Van Hiele 수준 0과 1(연역적인 증명이 불가능한 수준)에, 25%의 학생만이 수준 3과 4(연역적인 증명이 어느 정도 가능한 수준)에 이르고 있다는 최현호와 한태식(1990)의 연구 결과와 류성림(1993)의 연구 결과와도 많은 차이를 보이고 있어 중학교 2학년 학생에게 형식적인 증명을 하도록 하는 것은 무리라는 점을 시사한다고 할 수 있다.

셋째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 유형을 살펴보았다. 가정을 잘 이용하지 못하는 오류가 가장 많았는데, 이는 가정에서 더 이상 진전을 하지 못하는 즉, 가정에 있는 조건만 나열하는 경우, 결론을 가정으로 이용하는 경우가 많아 증명이나 정리의 개념에 대한 이해가 부족하고, 정리나 정의를 기억하여 증명에 적용하는 데는 많은 어려움이 있음을 나타내고 있다. 도형의 정의를 쓰는 부분에서 많은 학생들이 도형의 성질을 정의로 받아들여 기술하고 있어 정의와 정리에 대한 명확한 구분 지도가 필요함을 보여 주고 있다. 또한 기호 사용이 미흡해 정확한 기호 사용에 대한 지도가 이루어져야 하겠다.

V. 요약 및 결론

1. 요약

본 연구의 목적은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 중학교 2학년 과정에서 배우는 기하 증명에 대한 의식과 기하 증명 능력, 증명 과정의 오류 경향에 대하여 알아보는 것이다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

- 1) 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식은 어떠한가?
- 2) 기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인가?
- 3) 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떠한 것이 있는가?

연구 문제의 분석을 위해 제주도내의 사 지역 남자 중학교 2학년, 여자 중학교 2학년, 남녀공학 2학년, 읍·면 지역 남녀공학 4학급을 대상으로 의식 조사 질문지 검사와 기하 증명 능력 검사를 담당 수학 교사의 협조를 얻어 실시하였다.

연구에 사용된 의식 조사 질문지는 기하 증명에 대한 난이도, 중요도, 선호도, 이해도를 묻는 문항으로 연구자가 자체 제작하였다. 기하 증명 능력 검사지의 경우 연구 대상 학생들이 사용하였던 8종 교과서를 분석하여 기본적인 공통된 내용을 추출해서 주어진 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호로 나타내기, 가정, 결론 부분을 기호로 나타내기, 명제가 참임을 직접 증명하기와 같은 형식으로 제작하였다. 검사 도구는 표집된 학생 모두에게 실시하여 자료는 100% 수집했으며, 의식 조사 질문지의 경우 각 문항에 따라 빈도와 백분율을 구하고, 증명 능력 검사의 경우 수집된 자료를 설정한 채점 기준에 따라 증명 능력 전체 점수인 PT(Proof Total)와 증명의 완성도에 있어 유효한 증명이 이루어졌을 경우 주어지는 PC(Proof Correct)의 두 가지 방식으로 점수를 산출하였다. 증명 과정의 오류 분

석은 류성림(1993)의 연구에서 제시한 9가지 유형에 따라 분류하여 실시하였다.

통계 처리는 개인용 컴퓨터의 Microsoft Excel 프로그램과 계산기를 이용하여 처리하였다.

결과 분석에 의해 얻어진 내용은 다음의 결론 부분에서 요약한다.

2. 결론

논리적으로 사고하는 능력과 태도의 육성을 수학 교육의 가장 중요한 목표 중의 하나라고 볼 때, 이러한 목표를 달성하는데 연역적 추론으로서의 증명은 수학 교육에서 더욱 중요한 학습 주제가 된다고 할 수 있다.

그러나 그 중요성과 학교에서 많은 시간을 투자하여 지도하고 있음에도 불구하고 학생들은 증명을 별로 선호하지 않고, 많은 어려움을 겪고 있음을 여러 연구 결과에서 알 수 있다.

우리 나라를 비롯한 대부분의 나라에서 증명을 학습한 학생들을 대상으로 연구한 결과에 의하면 다른 영역에 비해 성취도 면에서 기대할 만한 것이 못되고 있다. 일부 수학교육자들은 이러한 현상의 원인으로 학생들의 증명의 필요성 인식의 부족과 불충분한 논리적 성숙 등을 언급하고 있다. 증명은 수학적 추론 능력을 개발하고 수학적 이해를 증진시키며, 수학적으로 이해한 것을 의사 소통할 수 있는 필수적인 도구이지만, 증명을 처음으로 접하는 학생들에게는 인위적이고 부자연스럽게 이용되는 것으로 간주될 수도 있다. 초보자에게 수학적인 증명은 명제의 타당성에 대한 의심을 제거하기 위한 자연스러운 목적을 가지도록 해야 한다.

중학교 2학년에서 처음으로 나오는 도형의 증명 문제는 삼각형, 사각형의 성질에 관한 문제이다. 이들 도형의 성질을 평행선의 성질이나 삼각형의 합동조건을 이용하여 학습하고 있는데, 만일 형식적인 증명은 할 수 있지만 왜 증명을 하게 되는가의 필요성과 의의를 이해하지 못한다면 동기유발이 결여되어 증명 학습의 본래 목적인 논리적, 비판적 사고력은 제대로 육성되지 못할 것이다.

본 연구는 중학교 2학년에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에

대한 의식과 증명 능력, 증명 과정에서의 오류 경향을 분석한 것이다. 본 연구의 결과 분석에 의하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, 증명에 대한 의식 조사 질문의 경우 74.9%의 학생이 증명 단원이 어렵다고 응답하고 있고, 7.3%의 학생만이 쉽다는 반응을 보였다. 어렵게 느껴지는 이유로는 타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문에(47.7%), 외워야 할 정의와 정리, 성질들이 많아서(16.1%), 증명 절차가 복잡해서(11.9%)라고 응답하고 있다. 도형의 증명이 중요하다라고 응답한 학생은 28.3%, 40.8%의 학생이 중요하지 않다고 응답하고 있고, 그 이유로는 일상생활에 전혀 이용되지 않기 때문(56.1%)이라고 답하고 있다. 도형의 증명의 선호도에서는 15.3%의 학생만이 긍정적인 반응을 보였고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보이고 있는데, 과정이 복잡하기 때문(51.8%)이라고 응답하고 있다. 이해도를 묻는 문항에서는 12.7%의 학생만이 도형의 증명을 이해하였다고 응답하고 있으며, 49.4%의 학생은 거의 이해하지 못하였다고 응답하고 있다. 그 이유로는 내용 자체가 어려워서(36.6%), 열심히 노력하지 않아서(34.7%) 이해하지 못하였다고 응답하고 있다. 전체적으로 도형의 증명에 대해 부정적 의식을 갖고 있는 것으로 나타났다.

둘째, 기하 증명 능력 검사 결과 전체 평균 점수는 PT 평균이 19.6%, PC 평균이 8.8%로 나타났으며, 도형을 그리고 가정과 결론을 구분하는 능력은 어느 정도 있으나 완전한 증명을 기술하는 능력은 매우 부진한 것으로 나타났다. 증명 능력이 거의 없다고 여겨지는 학생이 전체의 80.2%를 차지하고, 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났다.

셋째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 경향을 분석해 요약해 보면 다음과 같다.

- 증명의 의미를 제대로 이해하지 못하여 논리적 추론이 결여된 직관적인 사고의 결과를 이용하려는 경향이 많이 나타났다.
- 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하는 경우가 많았고, 그 정리나 정의를 증명 과정에 활용하는데 어려움을 많이 겪고 있는 것으로 나타났다.
- 언어로 표현된 문장을 수식으로 기호화하는 능력이 부족하고, 용어나 기호의 잘못된 사용에 의한 오류가 많이 나타났다.

- 증명하는 방법이 미숙하여 증명의 중요한 과정이 일부 생략되는 오류가 있었다.
- 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호를 사용하여 나타내는 과정의 오류가 있었다.
- 가정과 결론을 구분하지 못하고, 특히 정의와 성질을 혼동하여 구분하지 못하는 오류가 많이 나타났다.

3. 제언

본 연구에서 얻은 연구 결과를 토대로 하여 다음과 같은 점을 제언하고자 한다. 첫째, 도형의 증명에 대한 학생들의 부정적인 의식을 변화시키기 위하여 연역적 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 지도가 이루어져야 하겠다.

둘째, 아직 학생들의 사고가 직관적인 수준에 머물러 있는 경향이 크므로 너무 형식적이고 논리적인 추론을 강조할 것이 아니라 학생들의 수준에 맞는 정도의 엄밀성으로 증명이 지도되어야 할 것이다.

셋째, 학생들에게 도형의 정의와 성질을 보다 명확히 구분하여 지도할 필요가 있으며, 이는 기호화나 문장화, 도형의 그림 표시, 가정과 결론의 구분 등과 연결하여 지도가 이루어져야 하겠다.

◀ 참고 문헌 ▶

- 강행고 외(2001), “중학교 수학8-나”, (주)중앙교육.
- 교육부(1997), “수학과 교육과정”, 교육부.
- 교육부(1999), “중학교 교육과정 해설(Ⅲ)”, 교육부.
- 김연식·김흥기(1996), “중학교 수학2”, (주)두산.
- 김응태외(1985), “수학교육학개론”, 서울대학교 출판부.
- 박배훈·정창현(1996), “중학교 수학2”, (주)교학사.
- 박한식외(1993), “수학대사전”, 한국사전연구사.
- 윤영주(1993), “수리논리학”, 형설출판사.
- 강상진(2000), “수준별 수업에서 선수학습이 학업성취도에 미치는 영향에 관한 연구-중학교 2학년 도형의 성질을 중심으로-”, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김미정·이종희(1994), “Van-Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구”, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제33권 제2호.
- 김흥기(1998), “중학교 수학에서 증명 지도에 관한 연구”, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제37권 제1호.
- 류성립(1998), “수학교육에서 증명의 의의에 관한 연구”, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제37권 제1호.
- 류성립(1993), “중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구”, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 서동엽(1992), “증명 지도에 관한 연구”, 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 신주식(1997), “기하 증명에 대한 정의적 영역과 오류 유형에 있어서 남녀차에 관한 연구”, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 이재원(1994), “중학교 수학에서 증명 방법의 지도에 관한 연구”, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

- 전현미(1996), “기하 증명 과정의 오류 경향 연구-중2 수학을 중심으로-”, 경북대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 최현호·한태식(1990), “기하 영역의 Van-Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구”, 수학교육논총, 제8집, 대한수학회.
- 한태식(1991), “기하 교육과 Van-Hiele 이론”, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제30권 제3호.
- 山本泰二(1977), 中學 2年の 論證指導, 數學教育.
- 富谷行雄(1989), 圖形領域 論證指導, 數學教育.
- 鳥田 茂(1990), 證明導入, 教師問題集, 教職數學시리즈 實踐扁10, 東京:公立出版株式會社.
- Becker, G.(1982), Difficulties and Errors Geometry Proofs by Grade 7 Pupils. In A. Vermandel(Ed), Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education. Antwerp:PME.



<ABSTRACT>

A Study on the Attitude about the Proof-writing and Error patterns of Middle school students in Geometry

- around the 3rd year students of Middle School in Jeju -

Hong, In-Sun

Major in Mathematics Education
Graduate School of Jeju National University of Education
Jeju, Korea

Supervised by professor Hyun, Jin-O

The main purpose of this study is to appreciate the attitude and proof-writing ability and to analyze the error patterns in proof-writing processes of the middle school students(3rd year) in Geometry that is learned in second year.

For this purpose, three research questions were attempted;

- (1) What are the attitude about the proof-writing of the students that is learned the formal proof-writing in Geometry in second year for the first time?
- (2) How well do they perform on the Proof-Writing Ability Test?
- (3) What are the types of errors in the proof-writing processes?

For the analysis of this study, I selected two classes from boys' middle school, two classes from girls' middle school, two classes from co-ed middle school in the Cities of Jeju-do, and four classes from co-ed middle school in the town areas. The questionnaire for attitude survey and Proof-Writing Ability Test were carried out to them with the help of their math teachers.

For this study I myself made up the questionnaire for attitude survey of learning the degree of difficulty, importance, preference, understanding about proof-writing in

Geometry. And I made the questions of the Proof-Writing Ability Test by analyzing the 8 kinds text books and selecting the basic, common contents. For the procedure of questionnaire I investigated the frequency of data and percentage in each question. The Scores were obtained by using both the types of PC(proof correct) and PT(proof total) for the procedure of Proof-Writing Ability Test. The types of errors in proof-writing processes was analyzed into nine types following the study of Ryu, Sung Rim(1993).

The results of this study are as follows;

1. The result of the analysis of the questionnaire for attitude survey shows generally negative response about the proof in Geometry.
2. The result of the Proof-Writing Ability Test shows that students have some ability to draw figures and distinguish hypothesis and conclusion, but their proof-writing ability is very poor.
3. The result of the analysis of the errors patterns in proof-writing processes shows that many students can't understand the meaning of the proof-writing properly, they don't understand definition and theorem completely what they learned, they lack of linguistic ability to symbolize into an expression, they make many errors in using terms and symbols. They also made errors of partial omission of proof procedure, and errors of distinguishing hypothesis and conclusion, definition and property.

The suggestions of the result of this study are as follows;

First, the guidance to realize the necessity of deductive proof must be performed to change their negative attitude about the proof in Geometry.

Second, because their thoughts are still remained in the direct observation level, teachers must teach them in proper level of exactness not emphasis the formal and logical reasoning.

Third, it is necessary for them to teach the definition and property of figures exactly in realization to symbolization, composition, picture expression of figures, distinguishing between hypothesis and conclusion.

* This thesis is submitted to the committee of the Graduate school of Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2002.

부 록

1. 의식 조사 질문지
2. 기하 증명 능력 검사지



의식 조사 질문지

이 질문지는 학생 여러분들이 수학 교과서의 단원 내용중 도형의 증명에 대해 어떤 생각을 가지고 있는지를 조사하여 보다 바람직하고 효과적인 수학 학습에 도움을 주기 위한 자료들을 얻기 위해 만들어진 것입니다. 조사의 결과는 연구 이외의 목적으로 공개되지 않으니 각 문항에 대하여 솔직한 생각이나 느낌을 써 주십시오. 감사합니다.

()중학교 남, 여

1. 중2 수학 단원 중 가장 재미있는 단원은? ()

- ① 유리수와 근사값 ② 식의 계산 ③ 방정식, 부등식 ④ 함수
⑤ 확률 ⑥ 도형의 성질, 닮음

2. 중2 수학 단원 중 가장 좋아하는 단원은? ()

- ① 유리수와 근사값 ② 식의 계산 ③ 방정식, 부등식 ④ 함수
⑤ 확률 ⑥ 도형의 성질, 닮음

3. 중2 수학 단원 중 가장 어렵게 생각되는 단원은? ()

- ① 유리수와 근사값 ② 식의 계산 ③ 방정식, 부등식 ④ 함수
⑤ 확률 ⑥ 도형의 성질, 닮음

4. 중2 수학 단원 중 도형의 증명은 다른 단원에 비해 어떻게 생각되는가? ()

- ① 매우 어렵다. ② 조금 어렵다. ③ 보통이다.
④ 조금 쉽다. ⑤ 매우 쉽다.

4-(1) 도형의 증명이 어렵게 느껴진다면 그 이유는? ()

- ① 내용 자체가 어려워서 ② 외워야할 정의와 정리, 성질들이 많아서
③ 타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문에
④ 증명 절차가 복잡해서 ⑤ 생각을 많이 해야 하므로
⑥ 기초 지식이 부족해서 ⑦ 기타 ()

4-(2) 도형의 증명이 쉽게 느껴진다면 그 이유는? ()

- ① 내용 자체가 쉬워서
- ② 외워야 할 용어나 내용이 많지 않아서
- ③ 열심히 공부를 하였기 때문에
- ④ 선생님이 설명을 잘 해주셔서
- ⑤ 그림을 그려서 생각하면 쉽게 이해되기 때문에
- ⑥ 기초 지식이 충분히 있으므로
- ⑦ 기타 ()

5. 도형의 증명이 중요하다고 생각되는가? ()

- ① 매우 중요하다.
- ② 조금 중요하다.
- ③ 보통이다.
- ④ 별로 중요하지 않다.
- ⑤ 전혀 중요하지 않다.

5-(1) 도형의 증명이 중요하다고 생각된다면 그 이유는? ()

- ① 시험에 나오기 때문에
- ② 여러 학문의 기본이 되기 때문에
- ③ 일상생활에 이용되기 때문에
- ④ 다른 과목을 공부하는데 필요하기 때문에
- ⑤ 수학의 다른 단원을 공부하는데 필요하기 때문에
- ⑥ 합리적이고 논리적인 사고 방법을 배울 수 있기 때문에
- ⑦ 기타 ()

5-(2) 도형의 증명이 중요하지 않다고 생각된다면 그 이유는? ()

- ① 시험에 잘 나오지 않기 때문에
- ② 일상생활에 전혀 이용되지 않기 때문에
- ③ 다른 과목을 공부하는데 필요하지 않기 때문에
- ④ 수학의 다른 단원을 공부하는데 필요 없기 때문에
- ⑤ 복잡하고 따분해서 머릿만 아프기 때문에
- ⑥ 다른 사람들이 중요하지 않다고 하기 때문에
- ⑦ 기타 ()

6. 도형의 증명은 다른 단원에 비해 재미가 있는가? ()

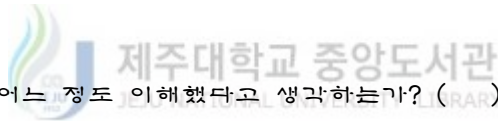
- ① 매우 재미있다. ② 조금 재미있다. ③ 보통이다.
- ④ 별로 재미없다. ⑤ 매우 재미없다.

6-(1) 도형의 증명이 재미있다면 그 이유는? ()

- ① 증명 자체가 신기하기 때문에 ② 도형에 관한 문제는 자신이 있어서
- ③ 생각하는 과정이 재미있어서 ④ 선생님이 쉽고 재미있게 가르쳐주셔서
- ⑤ 증명을 해결하고 난 후에 기쁨을 느끼기 때문에
- ⑥ 기타 ()

6-(2) 도형의 증명이 재미없다면 그 이유는? ()

- ① 과정이 복잡하기 때문에 ② 도형에 관한 문제는 자신이 없어서
- ③ 생각을 많이 해야 하기 때문에 ④ 선생님이 잘 설명해주시지 않아서
- ⑤ 아이디어가 떠오르지 않기 때문에
- ⑥ 기타 ()



7. 도형의 증명을 어느 정도 이해했다고 생각하는가? ()

- ① 완전히 이해하였다. ② 거의 이해하였다. ③ 반정도 이해하였다.
- ④ 거의 이해하지 못하였다. ⑤ 전혀 이해하지 못하였다.

7-(1) 도형의 증명을 잘 이해하였다면 그 이유는? ()

- ① 내용 자체가 쉬워서 ② 선생님이 설명을 잘 해주셔서
- ③ 열심히 노력하였기 때문에 ④ 원래 수학을 잘 하기 때문에
- ⑤ 기타 ()

7-(2) 도형의 증명을 잘 이해하지 못 하였다면 그 이유는? ()

- ① 내용 자체가 너무 어려워서 ② 선생님이 설명을 잘 해주시지 않아서
- ③ 열심히 노력하지 않아서 ④ 원래 수학을 잘 못 하기 때문에
- ⑤ 기타 ()

8. 도형의 증명 부분을 공부하면서 느낀 점이 있다면 간단히 써 주세요.

기하 증명 능력 검사

이 검사지는 학생 여러분들이 **도형의 증명**에 대해서 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사의 결과는 공개되지 않으며, 단지 수학교육 개선을 위한 연구의 목적에 사용할 뿐입니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다해서 풀어주시기 바랍니다. 본 검사의 문항수는 10문항이고, 답은 직접 문제지에 적어 주시기 바랍니다. 감사합니다.

()중학교 3학년 ()반 ()번 이름 ()

1. 다음 명제를 증명하려고 한다. 물음에 순서대로 답하여라.

【 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\angle B = \angle C$ 이다. 】

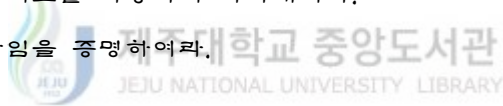
(1) 문제에 알맞은 도형을 그리고

기호를 사용하여 나타내어라.

(2) 가정 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.

(3) 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.

(4) 이 명제가 참임을 증명하여라.



2. 명제 【 직사각형 ABCD에서 두 대각선 \overline{AC} , \overline{BD} 의 길이는 같다. 】를

증명하려고 한다. 다음을 순서대로 완성하여라.

(1) 문제에 알맞은 도형을 그리고

기호를 사용하여 나타내어라.

(2) 가정 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.

(3) 증명해야 할 것을 기호를 사용하여 나타내어라.

(증명은 하지 말 것)

(4) 이 명제가 참임을 증명하여라.

3. 명제 【 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다. 】 를 다음 순서에 따라 증명하여라.

- (1) 문제에 알맞은 도형을 그리고
기호를 사용하여 나타내어라.
- (2) 가정 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (3) 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (4) 이 명제가 참임을 증명하여라.

4. 명제 【 $\square ABCD$ 에서 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$ 이면 이 사각형은 평행사변형이다. 】
를 다음 순서에 따라 증명하여라.

- (1) 문제에 알맞은 도형을 그리고
기호를 사용하여 나타내어라.
- (2) 가정 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (3) 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (4) 이 명제가 참임을 증명하여라.

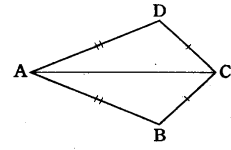
5. 명제 【 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다. 】 를 다음 순서에 따라 증명하여라.

- (1) 가정 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (2) 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내어라.
- (3) 이 명제가 참임을 증명하여라.

6. 오른쪽 사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{DC}$ 이면

$\angle ABC = \angle ADC$ 임을 증명하여라.

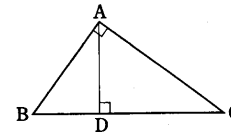
[증명]



7. $\angle A = 90^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 의 꼭지점 A에서 빗변에 내린 수선의

발을 D라고 할 때, $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ 임을 증명하여라.

[증명]

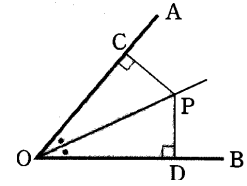


8. 사각형 ABCD의 네 변 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 P, Q, R, S라고 할 때,

사각형 PQRS는 평행사변형임을 증명하여라.

[증명]

9. $\angle AOB$ 의 이등분선 위의 한 점 P 에서 두 변 OA , OB 에 내린 수선의 발을 각각 C , D 라고 할 때, $\overline{PC} = \overline{PD}$ 임을 증명하여라.
[증명]



10. 다음 용어의 정의를 써라.

* 이등변삼각형:

* 직각삼각형:

* 평행사변형:

* 직사각형:

* 마름모:

* 정사각형:

