국문초록

초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 학생의 인식

고 진 아

제주대학교 교육대학 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 최 근 배

초등학교에서 학생들은 도형영역을 학습할 때, 교과서에 제시되고 교사에 의해 지도되는 약속하기에 기초하여 수학적 정의에 대한 개념을 획득하며 이렇게 획득한 개념을 통해 다른 개념을 학습하기도 하고 이 개념을 이용하여 다양한 문제들을 해결하고 도형의 성질들을 증명하는 등의 활동들로 그 학습의 범위를 넓혀가기도 한다. 따라서 기본적으로 학습해야 하는 정의에 대해 올바른 인식을 정립하지 못한다면, 이에 기초하여 확장된 다른 개념에서도 올바른 인식을 정립하기 힘들며 이를 활용하여 이루어지는 다른 수학 활동에서도 오류가 야기될 가능성이 있다. 따라서 본 연구에서는 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 대한 학생들의 인식에 대해 연구해 보았다.

우선 인식도 조사에 선행하여 초등수학 도형영역에 제시된 정의와 관련된 이론에 대한 고찰을 하였으며 이를 바탕으로 제 7차 초등수학교과서에 제시된 도형영역의 정의에 대한 문제점을 엄밀하지 않은 정의 사용에 따른 문제, 약속하기와 관련 활동에서 의미의 일관성을 유지하지 않는 정의 사용에 따른 문제, 정의에 따른 예와 반례를 다양하게 제시하지 않는 것에 따른 문제, 방향성이

가미된 용어를 사용하는 것에 따른 문제 이렇게 4가지로 분석하여 보았다.

분석한 문제점을 토대로 사각형, 원, 도형, 각, 평행, 밑면과 옆면, 전개도, 평행사변형에서의 높이의 정의와 관련된 문항으로 설문지를 작성하였다. 이 설문조사는 2학년부터 6학년 학생을 대상으로 하여 실시하였으며, 각 학년에서 배운 범위를 고려하여 문제를 학년에 따라 다르게 제공하였다. 설문조사를 이용하여 학생들이 도형영역의 정의에 대해 어떻게 인식하고 있는지 분석하였으며, 이에 대한 원인과 개선방안에 대해서도 연구하였다.

인식도를 분석한 결과, 다음과 같은 개선방안을 추출할 수 있었다. 첫째, 초등수학에서의 도형 영역의 정의를 좀더 엄밀한 의미의 정의로 수정할 필요성이 제기된다. 둘째, 교과서에 제시되어 있는 정의가 활동에서 사용될 때에도 그 의미의 일관성을 유지하도록 수정되어야 한다. 셋째, 도형의 정의와 활동을 지도할 때 가능한 한 다양한 예를 활용하여 지도할 것을 강조한다. 넷째, 올바른 개념 정립에 도움이 되는 방향으로 초등수학 교과서의 도형 영역에서 제시되는 용어들을 바꿀 필요가 있다.

이상을 종합해 볼 때, 학생들의 정의에 대한 올바른 인식 정립에 도움이 되는 방향으로 교과서의 내용을 꾸준히 수정하고 교사의 지도방법을 개선해 가는 노력이 필수적이라고 생각한다. 현재의 초등수학 교과서에 제시되어 있는 정의들은 초등학생의 인지적인 능력 수준을 고려하여 순수수학적인 의미의 정의를 학교 현장에 맞게 재구성하는 과정을 통해 제시된 것들이다. 따라서 계속적인 조사와 연구를 통해 좀더 올바른 인식 정립에 도움이 되도록 꾸준히 교과서를 수정하고 개선해 가는 과정이 필요하다. 또한 교사들은 항상 상위 수준의 개념 정의를 염두에 두고 학생들을 지도해야 하며, 학생들이 정의에 대해 어떻게 인식하고 있는지 항상 주의하며 잘못된 인식을 수정하는 지도방법에 대한 연구도 함께 이루어져야 할 것이다.

목 차

그림 목차

Ⅰ. 서 론

학생들은 도형 영역을 학습할 때 배우게 되는 다양한 정의를 기초로 하여 다른 용어에 대한 정의를 배우기도 하고 그 정의를 이용하여 다양한 문제를 해결하기도 하는 등 정의에 기초하여 그 학습의 범위를 넓혀가기 때문에 도형 영역의 정의에 대한 올바른 인식은 매우 중요한 역할을 한다.

Vinner(1991)는 수학에서의 정의의 역할과 가정을 다음과 같이 제시하고 있다. (최근배·오숙경, 2008에서 재인용)

첫째, 수학적 개념은 주로 정의에 의하여 획득된다.

둘째, 학생들은 정의를 이용해서 문제를 해결하고 정리를 증명한다.

셋째, 정의는 최소한으로 서술되어야 한다. 즉, 정의는 그 정의의 일부분으로부터 수학적으로 추론 가능해서는 안 된다. 예를 들어, 직사각형을 정의할 때, '네 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의 보다는 '세 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의가 바람직하다.

넷째, 세련된 정의가 바람직하다. 이를테면, 소수(prime number)를 정의할 때, '1보다 큰 수로 1과 그 자신에 의해서만 나누어지는 수'보다는 '두 개의 서로 다른 약수만을 갖는 수'로 정의하는 것이 더 우아한 것이라고 여긴다.

다섯째, 정의의 임의적이다. 즉, 정의는 '사람이 만든 것'으로 수학적 개념들은 정의에 따라 개념들 사이의 관계 또는 구조가 형성된다.

이러한 입장들은 순수 수학적인 상황에서의 정의의 역할과 가정을 제시하고 있다. 그러나 초등학교에서 학습하게 되는 대부분의 정의는 학생들의 인지적인 능력으로 인해 이 다섯 가지 입장을 모두 만족시키기 어렵다. 즉, 최소한으로 서술되어야 한다거나 세련된 정의를 사용해야 한다는 입장은 초등학생의 수준에서는 만족시키기 어려운 조건들이다. 따라서 학교수학에서는 순수수학에서 사용하는 정의의 방법을 그대로 사용하기 보다는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 교과서에 제시되며 또한 교사에 의한 변환과정이 있을 수 있다.(최근배·오숙경, 2008) 그러나 초등학생들의 인지적인 능력의 부족함을 이유로 도형 영역의 정의에 있어 수학적인 엄밀한 수준의 정의를 사용하지 않고 그 정의를 학생 수준에 맞춰 바꾸어 정의하는 것은

경우에 따라 초등학생들로 하여금 정의에 대한 잘못된 인식을 갖게 하기도 한다. 이 경우 약속하기에 제시된 정의를 활용하여 문제를 해결하거나 도형의 성질을 증명하는 등의 수학적 활동들을 할 때 그 영향이 더욱 확실히 드러난다.

본 연구에서는 이렇게 도형 영역에서의 용어의 정의가 초등학생의 수준에 맞게 덜 엄밀하게 제시되고 이러한 교과서의 내용을 교사가 그대로 지도함으로 인해 생길 수 있는 학생들의 오개념에 대한 가능성을 염두에 두고 연구를 진행하였으며 그 오류에 대한 원인과 개선 방안에 대해서도 고찰해 보았다.

Ⅱ. 이론적 배경

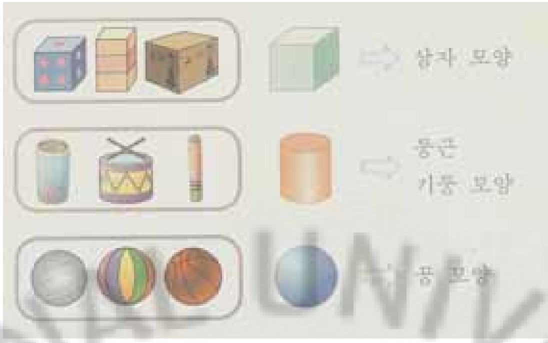
1. 초등수학에서 용어의 정의 수준

학교수학에 제시된 정의와 관련된 우정호· 조영미(2001) 및 조영미(2001, 2002) 연구를 보면 Van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어수준 이론을 바탕으로 정의의 수준을 전(前)수학적 수준, 기술적 수준, 대상 기호를 사용하는 수준, 관계 기호를 사용하는 수준, 함수적 언어를 사용하는 수준의 5수준으로 설정하고 있다. 이 중에서 초등학교 수학에 제시된 정의의 수준은 제 0수준인 전(前)수학적 수준과 제 1수준인 기술적 수준에 해당한다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 제 0수준부터 제 4수준에 해당하는 내용을 살펴보고 초등학교 교과서에 제시된 정의들을 제 0수준과 제 1수준에 따라 분류하여 <부록2>와 같이 정리하여 보았다.(최근배·오숙경, 2008)

가. 제 0수준 : 전(前) 수학적 수준

전(前) 수학적 수준은 수학적인 의미와 설명을 사용하지 않고 시각적인 외형의 모습을 중심으로 그 용어를 정의하는 수준에 해당하며 보통 초등학교 1학년 교과서에 제시되는 정의들이 제 0수준에 해당한다.

이 수준에서는 용어를 정의함에 있어 어떠한 수학적인 설명이나 분석이 제시되지 않는다. 다만 우리 주변에서 그 용어에 해당하는 물건들의 예를 찾아 그 외형을 관찰하여 공통점을 찾아내고 이렇게 찾아낸 공통점을 시각적인 이미지로 제시함으로써 용어를 정의한다.(최근배·오숙경, 2008) (<그림 Ⅱ-1>, <그림 Ⅱ-2> 참조)



［그림Ⅱ-1］ 입체모양(교육부, 2006, <1-가>, p.37)

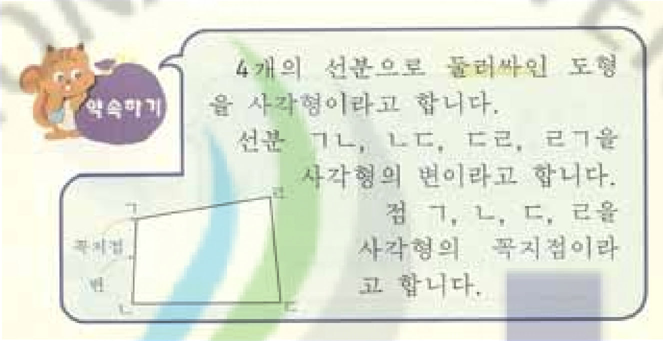
［그림Ⅱ-2］ 평면모양(교육부, 2006, <1-나>, p.23)

나. 제 1수준 : 기술적 수준

기술적 수준은 수학적인 설명과 분석을 사용함으로써 용어를 정의하는 수준에 해당하며 보통 초등학교 2학년 이상의 교과서에서 이 수준에 해당하는 정의들이 등장하기 시작한다.

이 수준에서는 그 용어를 정의하는데 있어 그 용어의 분석적인 성질이나 구성요소들을 가지고 용어를 정의한다. 예를 들면 제 0수준에서는 사각형을 '□' 또는 '네모'라고 정의하는 반면 제 1수준에서는 사각형을 <그림 Ⅱ-3>과 같이 '4개의 선분으로 둘러싸인 도형'이라고 정의한다. 이렇게 제 1수준에서는 그 용어의 구성 요소와 성질을 가지고 그 용어를 정의하며, 용어의 명칭도 수학적인 용어를 사용하여 '~모양'에서 '~형'으로 바뀌게 된다.(최근배·오숙경, 2008)

제 1수준에서는 제 0수준에 해당하는 시각적인 이미지를 그 용어의 분석적인 성질, 구성요소와 함께 제시할 수 있으며, 순수하게 그 용어를 분석한 성질과 구성요소만으로 정의할 수도 있다.(조영미, 2001) 보통 초등학교 교과서에서는 그 성질과 관계만으로 그 용어의 정의를 이해하기 어려운 경우에 그 시각적인 외형을 함께 제시하게 된다. 초등학교 교과서에 제시되는 정의를 제 0수준, 제 1수준으로 나누어 분류하였는데 이것은 <부록2>와 같다.



［그림Ⅱ-3］사각형(교육부, 2006, <2-가>, p.38)

이렇게 초등학교 교과서에서는 학생들의 인지적인 능력 수준을 반영하여 제 0수준과 제 1수준에 해당하는 정의의 수준을 많이 따르게 된다. 즉 수학적인 설명과 분석 없이 시각적인 외형만을 가지고 정의하기도 하며, 또는 그 용어의 성질과 구성요소를 사용하여 그 용어를 정의하기도 한다. 그러나 이는 그 용어를 엄밀하고 정확하게 정의하는 수준에는 이르지 못하며 따라서 학생들로 하여금 정의에 대한 각종 오개념을 형성시킬 수 있다. 즉 그 정의에 해당하는 예와 반례를 확실히 구분하지 못한다거나 그 용어가 가지고 있는 의미 자체를 상황에 따라 다르게 적용하기도 한다. 물론 초등수학에서는 초등학생들이 이해하기 쉽도록 수학적인 엄밀한 의미의 정의를 변형하여 제시하는 것이기는 하나 이는 오히려 학생들이 정의에 대한 혼란과 오개념을 일으키는 원인이 되기도 한다. 따라서 교사는 그 용어에 해당하는 상위 수준의 정의, 즉 수학적으로 엄밀한 의미의 정의를 항상 염두에 두며 정의들을 지도할 필요가 있으며, 교과서에 제

시되어 있는 정의들은 좀더 엄밀한 수준으로 재정의 되어져야 한다.

다. 제 2수준 : 대상 기호를 사용하는 수준

이 단계는 용어를 정의하는 데 있어 대상을 나타내는 기호를 사용하는 수준이다. (조영미, 2001) 이 수준은 초등학교의 경우에는 적용되지 않고 중학교 이상의 수학에 적용되는 수준이다.

각을 정의함에 있어 제 1수준에서는 각을 '한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형'이라고 정의하였다면 제 2수준에서는 기호를 사용하여 '한 점 O에서 시작한 두 반직선 OA, OB로 이루어지는 도형'이라고 정의한다. 두 직선의 평행을 정의함에 있어서도 제 1수준에서는 평행을 '한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않는다. 이와 같이, 서로 만나지 않는 두 직선을 평행이라고 한다.'라고 정의하고 있다. 이와 같은 평행의 정의는 제 2수준에서는 직선을 나타내는 기호를 사용하여 '두 직선 m, n이 서로 만나지 않을 때, m, n은 서로 평행하다고 한다.' 라고 정의하고 있다.

라. 제 3수준 : 관계 기호를 사용하는 수준

이 단계는 기호화한 관계적 표현을 사용하여 정의하는 단계이다.(조영미, 2001) 대상을 나타내는 기호 사이의 관계를 다시 기호를 사용하여 정의하는 단계라고 할 수 있다.

제 2수준에서 '선분 AB와 선분 CD의 길이가 같다.' 라는 표현을 사용하였다면 제 3수준에서는 길이가 같다는 두 선분 사이의 관계 역시 기호를 사용하여 '$\overline{AB}=\overline{CD}$'와 같은 기호화된 관계적 표현을 사용하여 정의하게 된다. 수직을 정의함에 있어서도 초등 수학 교과서에서는 제 1수준의 정의를 사용하여 '두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직이라고 한다.'라고 정의하고 있다. 이러한 두 직선의 수직 관계를 제 3수준에서는 기호화된 관계적 표현을 사용하여 '교각이 직각인 경우에 두 직선은 직교한다고 하며, 이것을 기호로 $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{CD}$ 와 같이 나타낸다.'라고 정의하고 있다. 원을 정의하는 경우를 살펴보면 초등 수학 교과서에서는 제 0수준의 정의를 사용하여 '본을 떠 그린 동그란 모양의 도형'이라고 정의하는데 반해 제 3수준에서는 '평면 위의 한 정점

O로부터 일정한 거리 r에 있는 점 P들의 집합 $\{ P \mid \overline{OP} = r \}$를 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이라고 한다.'라고 정의하고 있다.

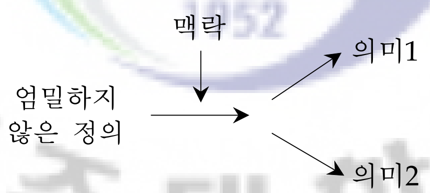
마. 제 4수준 : 함수적 언어를 사용하는 수준

이 수준에서는 함수적 언어를 사용하여 정의한다. 함수적 언어는 Freudenthal이 수학의 언어 중에서 가장 높은 언어로 상정한 것이기도 하다.(우정호, 수학교육의 지평, 2004, p.414)

이 수준에서는 함수적 언어를 사용하여 평행이동을 '좌표평면 위의 점 P(x, y)를, 점 p'(x+a, y+b)로 대응시키는 함수 T:(x, y)→(x+a, y+b)를 평행이동이라고 한다.' 라고 정의하고 있다.(조영미, 2001)

2. 맥락 의존적 정의

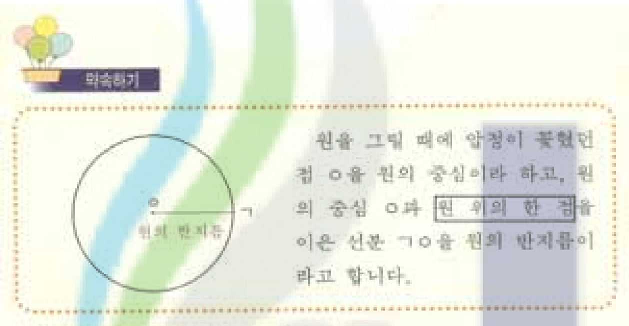
학교 수학에서는 도형 영역의 정의에서 순수 수학적인 엄밀한 의미의 정의를 사용하는 것이 아니라 학교현장에 맞게 순수 수학적인 정의를 재정의 하여 제시하는 것을 허용하고 있다. 이런 정의들은 상황에 따라서 서로 다른 의미로 해석될 수 있는데 박교식· 임재훈(2004)은 이러한 학교수학에서의 정의의 고유한 특성은 '중의적인 정의' 또는 '맥락 의존적 정의' 라고 부르고 있다.(최근배· 오숙경, 2008에서 재인용) (<그림Ⅱ-4> 참조>



〔그림 Ⅱ-4〕 맥락 의존적 정의(박교식, 임재훈, 2004, p.24)

초등학교 교과서에 제시되는 정의 중 상황에 따라서 서로 다른 의미로 해석될 수 있는 경우의 예를 들어 보자. <2-가> 단계에 있는 원의 정의 '본을 떠 그린 동그란 모양'과 <3-가> 단계에 있는 원과 관련된 활동 <그림 Ⅱ-5>을 보

면, 원은 그 내부를 포함하고 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 ‘원의 넓이를 구하여라.’ 라는 문제의 경우에서 대부분의 학생들과 교사들은 ‘0’이 아니라 그 내부의 넓이를 계산하여 ‘반지름 × 반지름 × 원주율’에 해당하는 값을 답으로 제시할 것이다. 학교 현장에서 원의 넓이를 구하라는 문제에 있어서 대부분의 학생은 문제를 그렇게 해결할 것이고 거의 모든 교사 역시 그것을 답으로 처리한다. 이는 원과 관련된 엄밀한 의미의 정의에서 원은 내부를 포함하지 않는 것과는 다르게 해석되는 경우이다. 이 상황에서 대부분의 교사와 학생들은 원을 원이 아닌 ‘원판’의 의미로 해석하여 문제를 해결한 것이라고 볼 수 있다. 이는 원에 대한 정의가 상황에 따라 다른 의미로 해석된 ‘맥락 의존적 정의’라고 볼 수 있다.(최근배·오숙경, 2008)



[그림 Ⅱ-5] 원(교육부, 2006, <3-나>, p. 35)

초등학교에서는 원을 2-가 단계에서 여러 가지 동그란 모양의 물건을 찾아 본을 뜨는 활동을 한 후 ‘본을 떠 그린 동그란 모양의 도형’이라고 정의하고 있으며, 이러한 정의는 제 0수준에 해당하는 정의이다. 이렇게 엄밀한 의미의 수학적 정의를 사용하지 않고 시각적인 이미지를 강조하는 제 0수준의 정의를 사용함으로써 원에 대한 의미가 상황에 따라 다르게 해석되는 경우가 발생하는 것이다.

원의 반지름에 대한 정의의 경우도 상황에 따라 그 의미가 다르게 해석되어지는 경우이다. 원의 반지름에 대한 정의는 3-나 단계에서 '원의 중심 ㅇ와 원 위의 한 점을 이은 선분 ㄱㅇ' 이라고 제시되어 있다. 즉, 반지름은 길이가 아닌 선분에 해당한다고 볼 수 있다. 그러나 원의 반지름과 관련된 활동들을 보면 이 의미가 다르게 해석되는 경우를 볼 수 있다. 예를 들면, ‘반지름이 3cm

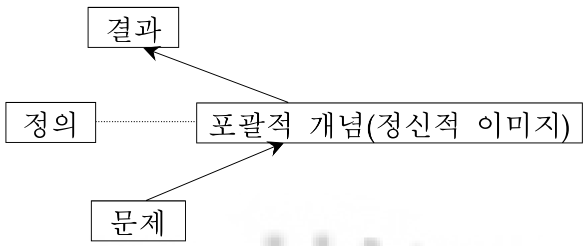
인 원을 그려라', '다음 원에서 반지름을 구하여라.' 라는 문제 상황에서 대부분의 교사와 학생들은 아무런 문제 의식 없이 반지름을 선분이 아닌 길이의 의미로 재해석하여 문제를 해결한다. 이는 원의 반지름에 대한 정의가 상황에 따라 다르게 해석되어지는 '맥락 의존적 정의' 임을 보여주는 현상이라고 할 수 있다.(최근배·오숙경, 2008)

3. 포괄적 확장의 원리

초등수학에서 수학적 개념의 형성은 주로 활동을 통해서 이루어지며 또한 활동에 사용된 대상(구체물 또는 반구체물)들은 학생들의 개념 이미지 형성에 많은 영향을 준다. 여기서 소위 '포괄적 확장의 원리'가 생성될 수 있다.(최근배·오숙경, 2008)

특수한 상황에서 자신이 생각했던 모든 예들이 갖는 어떤 성질이 다른 상황에서도 의미 있을 것이라고 가정한다. (Tall, 1986, 1991)

학생들은 교과서에서 제시되는 약속하기와 교사의 설명을 통해 수학적 용어에 대한 정의를 획득하기도 하지만, 그보다는 그 정의와 관련된 다양한 활동을 통해서 자기 나름대로 자신의 머릿 속에 그 정의와 관련된 이미지를 형성하게 된다. 또한 이렇게 형성된 이미지를 그 도형에 해당하는 정의와 동일시하는 경향이 있으며 활동을 통해 자기 스스로 형성하게 된 이미지가 다른 도형에서도 적용될 것이라고 생각하는 경향이 있다. 일반적으로 교사는 학생들이 정의를 통하여 어떤 문제를 해결할 것이라 기대하지만 학생들 대부분은 <그림 Ⅱ-6> 처럼 지금까지 해 왔던 수많은 활동들로부터 스스로 머릿 속에 이미지를 구성하며 이 이미지에 기초하여 문제를 해결한다.



[그림 Ⅱ-6] 학생의 직관적 문제해결 과정(최근배·오숙경, 2008)

'포괄적 확장의 원리'에 기초하여 초등학생들의 문제해결과정을 살펴보면, 약속하기와 관련된 활동들이 어떻게 주어지느냐에 따라 학생들이 어떤 이미지를 형성하고 이 이미지에 따라서 다음에 주어지는 문제를 어떻게 해결하는지 결정된다고 볼 수 있다. 그러나 우리 교과서에서는 너무 정형화된 예 위주로 활동들을 구성하고 있으며 그 정의에 해당하는 반례를 거의 활용하지 않고 그 정의에 해당하는 예만을 제시함으로써 학생들의 머릿 속에 어떤 정형화된 일반적인 이미지만을 형성하게 될 가능성이 있다. 이러한 가능성이 도형 영역의 정의에 대한 오개념으로 이어지게 된다.

사각형, 삼각형 등의 다각형을 제시할 때에도 우리 교과서에서는 볼록다각형 모양의 도형만을 이용한 활동들을 제시하고 있다. 이것은 오목사각형 모양의 도형을 제시했을 때, 이것은 사각형이 아니라고 생각하는 오류를 일으킨다. 학생들은 약속하기에서는 '4개의 선분으로 둘러싸인 도형'을 사각형이라고 배웠지만 사각형에 대한 수많은 활동들을 통해 자신의 머릿 속에 볼록사각형 모양의 이미지를 구성하게 된 것이고, 이러한 잘못된 이미지는 사각형에 대한 오개념을 형성하게 하는 것이다. 그리고 이렇게 형성된 이미지는 다른 도형에도 적용되어 볼록다각형만이 다각형이라고 생각하게 할 수 있다. 각과 관련된 활동에서도 대부분의 활동들은 각이라면 뾰족한 것, 꺾어진 것으로 오해하게 할 가능성이 있는 활동들로 구성되어 있다. 그리하여 180° 모양의 각을 제시했을 때, 이것은 각이 아니라고 대답할 가능성이 있다. 직육면체에서도 밑면이라면 위와 아래에 있는 면, 옆면은 옆에 있는 면, 삼각형에서도 밑변은 밑에 있는 변, 높이는 위에서 아래로 내린 선분의 길이라고 오해하게 할 가능성이 있는 예들과

활동들이 많이 제시되고 있다. 이러한 예들과 활동들은 학생들로 하여금 머릿속에 잘못된 이미지를 형성하게 할 가능성이 있다.

학생들은 자신들이 했던 수많은 문제해결과정, 활동들로부터 정의에 대한 이미지를 나름대로 구성한다고 할 수 있다. 따라서 학생들이 정의에 대한 정확한 이미지를 머릿 속에 형성하도록 하기 위해서는 교과서에 제시되는 활동 하나하나에 정성을 기울여야 한다. 다양한 예와 반례를 함께 제시하고 정형화된 예만을 강조하지 않는 것이 필요하다고 하겠다.

Ⅲ. 연구 절차 및 연구 내용과 방법

1. 연구 절차

(1) 제 7차 교육과정 도형 영역의 정의에 대한 분석

(2) 제 7차 교육과정 도형 영역의 정의에 대한 학생들의 인식도 조사

(3) 도형 영역의 정의에 대한 학생들의 오류에 대한 원인 분석 및 개선 방안 연구

2. 연구 내용 및 방법

(1) 제 7차 교육과정 도형 영역의 정의에 대한 분석

Van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudental의 수학적 언어 수준 이론을 바탕으로 한 정의의 수준으로 제 7차 교육과정 초등 수학 교과서의 정의의 수준을 조사하고 도형 영역의 정의에 대한 이론적 배경을 조사한 후 이를 바탕으로 제 7차 교육과정 초등 수학 교과서에 제시된 도형 영역의 정의에 대하여 문제점을 조사, 분석한다.

(2) 제 7차 교육과정 도형 영역의 정의에 대한 학생들의 인식과 오류 조사

현재 교과서에서 다루고 있는 도형 영역의 정의 중 학생들의 오개념 가능성이 있는 문항을 추출하여 학생들의 인식과 오류에 대해 조사한다.

설문은 ○○초등학교 2학년 31명, 3학년 27명, 4학년 28명, 5학년 34명, 6학년 23명을 대상으로 각 학년에서 배운 약속하기에 기초하여 문항을 출제하여 설문조사를 실시하고 그 결과를 학년에 따라 비교 분석한다.

(3) 도형 영역의 정의에 대한 학생들의 오개념에 대한 원인 및 개선 방안 연구

교과서에 제시된 도형 영역의 정의에 대한 연구 및 설문조사 분석 결과를 토대로 학생들이 가지고 있는 오개념에 대한 원인 및 개선 방안에 대해 연구한다.

Ⅳ. 초등수학에서의 도형 영역의 정의에 대한 문제점 분석

제 7차 교육과정에 따른 초등 수학 교과서에서 제시되고 있는 도형 영역의 정의들은 순수 수학적 입장에 기초한 정의를 학교현장에 맞게 변화시키는 과정을 통해 정의된 것들이다. 이러한 과정에서 초등수학에서의 도형 영역의 정의들은 몇 가지 문제점을 갖게 되었으며, 이러한 문제점으로 인해 학생들은 도형 영역의 정의에 대해 오개념을 가질 가능성이 있다. 현재 교과서에서 제시되고 있는 정의 중 오개념의 가능성이 있는 정의를 중심으로 문제점을 추출하여 네 가지로 나누어 분석해 보았다.

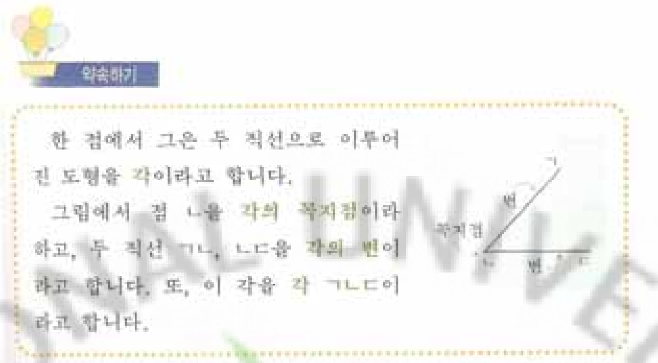
1. 엄밀하지 않은 정의 사용에 따른 문제

초등수학현장에서는 학생들의 인지적인 능력 수준 때문에 도형 영역에서 순수 수학적인 입장의 정의들을 그대로 사용하기 힘들다. 따라서 엄밀하지 않은 수준의 정의들을 많이 사용하게 된다. 그러나 이렇게 엄밀하지 않은 정의를 사용하는 것은 학생들의 이해를 도울 수도 있으나 상황에 따라 오히려 정의에 대한 오개념을 갖게 할 수도 있다.

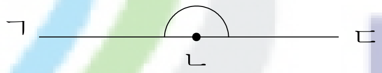
가. 각의 정의

현재 교과서에서는 각을 3-가 단계에서 <그림 Ⅳ-1>와 같이 정의하고 있다. 그렇다면 학생들에게 <그림 Ⅳ-2>와 같이 180°에 해당하는 도형을 제시했을 때, 이것을 각이라고 하지 않는 학생이 있을 가능성이 있다. 약속하기에 제시된 내용을 기초로 하면 이 도형은 한 직선으로 이루어진 도형이므로 각이라고 생각하지 않을 가능성이 있는 것이다. 따라서 좀 더 엄밀한 정의를 사용하여 각은 ‘한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형’이라고 정의해야 학생들의 각의 정의에 대한 오류를 줄일 수 있을 것이다. 이와 더불어 현재 초등 수학 교과서에서는 반직선에 대한 정의는 나와 있지 않기 때문에 선분, 직선에 대한

정의 뿐만 아니라 반직선에 대한 정의를 추가로 제시할 필요가 제기된다.



［그림 Ⅳ-1］ 각(교육부, 2006, <3-가>, p.37)

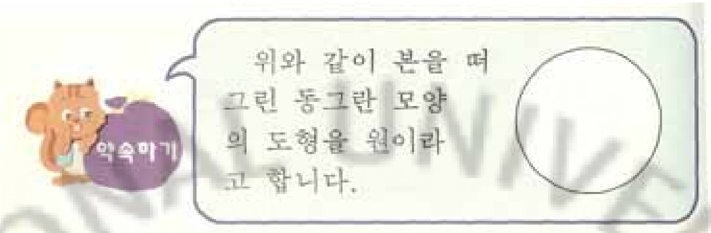


［그림 Ⅳ-2］ 180°의 각

나. 원의 정의

현재 교과서에서는 원을 2-가 단계에서 동그란 모양으로 된 여러 가지 물건을 찾아 본을 떠 보는 활동을 한 후 <그림 Ⅳ-3>와 같이 약속하고 있다. 그러나 위와 같은 엄밀하지 않은 정의는 찌그러진 휴지를 가지고 본을 뜬 타원 모양의 원을 제시했을 때 이것을 원이라고 생각하는 오류를 일으킬 수 있다. 이렇게 저학년 단계에서 제 0수준의 정의를 사용하였을 경우에는 다음 학년에서 좀 더 엄밀한 의미의 용어를 사용하여 도형을 재정의 할 필요가 있다. 물론 3-나 단계에서 팔을 앞뒤로 크게 한 바퀴 돌린다던지 두꺼운 종이에 구멍을 뚫어 못을 꽂고 연필로 한 바퀴 돌리는 등의 원을 그리는 활동을 통해 원이 무엇인지 학습하고 있지만 이 활동을 통해 원의 중심과 원의 반지름만을 정의할 뿐 원에 대한 약속하기는 다시 이루어지지 않는다. 학생들이 여러 가지 용어의 정의를 활동만을 통해 유추할 뿐 이것을 정의하는 과정을 거치지 않는다면 학생

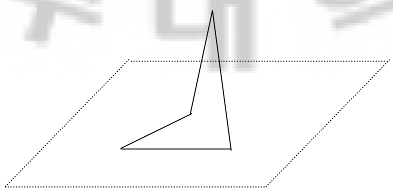
들의 정의에 대한 오개념을 수정할 수 없을 것이다. 따라서 같은 용어라 할지라도 학년 수준에 따라 그 용어를 좀더 엄밀한 수준으로 다시 정의할 필요가 있다.



［그림 Ⅳ-3］ 원(교육부, 2006, <2-가>, p.40)

다. 사각형(다각형)에 대한 정의

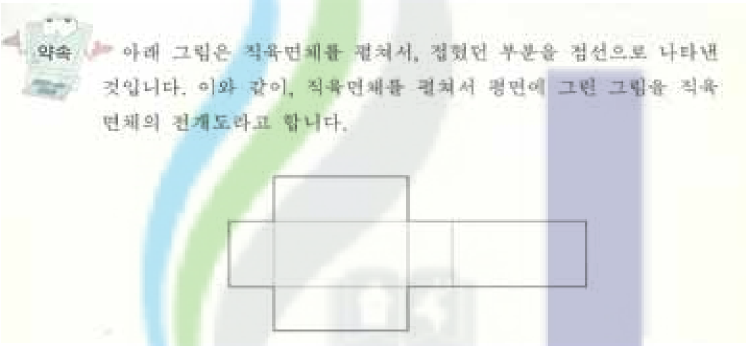
<그림 Ⅳ-4>의 입체적으로 꺽인 모양의 도형을 보고 사각형인지 아닌지 질문을 했을 경우 학생들은 어떤 반응을 보일지 생각해보자. 지금 현재 교과서에서는 사각형을 <그림 Ⅱ-3>처럼 2-가 단계에서 ‘4개의 선분으로 둘러싸인 도형’이라고 정의하고 있다. 약속하기에 나온 내용을 기초로 하여 이 도형을 살펴보면 약속하기에 나온 기준을 만족시킴을 알 수 있다. 그렇다면 얼마든지 학생들이 이 도형을 사각형이라고 생각하는 오개념을 가질 가능성이 있는 것이다. 이렇게 교과서에서 제시되는 약속하기들은 엄밀하지 않은 정의를 사용함으로써 학생들로 하여금 혼란을 야기시킨다. 위의 경우에서도 단지 ‘4개의 선분으로 둘러싸인 도형’이 아닌 ‘4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형’이라고 정의하는 것이 맞을 것이다. 단지 인지적인 능력이 낮다는 이유만으로 엄밀하지 않은 정의를 사용하는 것은 오히려 오류 가능성을 높일 수 있으므로 엄밀한 정의를 초등학생이 이해할 수 있는 수준으로 풀어서 제시하는 것이 낫다고 생각한다.



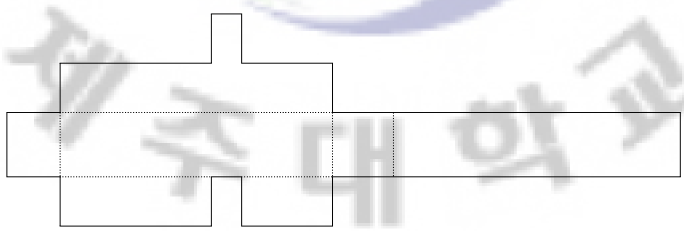
［그림 Ⅳ-4］ 4개의 변을 가지는 도형

라. 직육면체의 전개도의 정의

현재 교과서에서 직육면체의 전개도에 대한 정의는 5-가 단계에서 <그림 Ⅳ-5>와 같이 이루어지고 있다. 그러면 <그림 Ⅳ-6>와 같은 도형의 경우 학생들이 직육면체의 전개도라고 인식하는지 의심을 가질 수 있다. <그림 Ⅳ-5>의 약속하기에서는 단지 직육면체를 펼쳐서 평면에 그린 그림이라고만 하고 있기 때문에 위의 도형을 전개도라고 생각하는 학생이 있을 가능성이 있다. 따라서 이런 오개념이 형성되지 않도록 하기 위해서는 위의 약속하기에 '모서리를 펼쳐서' 라는 말을 추가로 제시할 필요가 있다. 6-나 단계에서는 각기둥의 전개도를 '그림과 같이 각기둥의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림'이라고 약속하고 있다. 이러한 각기둥의 전개도 정의처럼 '모서리를 펼쳐서'라는 말을 추가로 제시해야 학생들의 오개념을 줄일 수 있을 것이다.

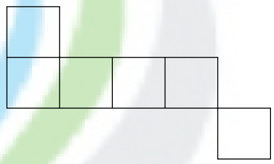


〔그림 Ⅳ-5〕 직육면체의 전개도 (교육부, 2006, <5-가>, p.62)

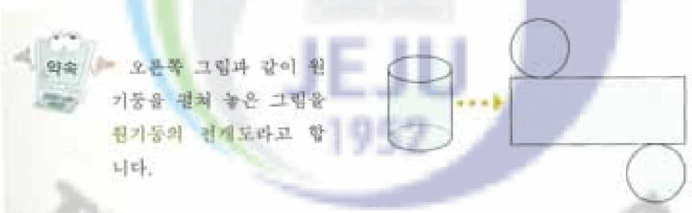


〔그림 Ⅳ-6〕 직육면체의 전개도가 아닌 예 ①

그러면 <그림 Ⅳ-7>와 같은 도형을 제시했을 경우는 어떠할지 생각해보자. 이는 직육면체의 모서리를 펼쳐서 그린 그림이기는 하나, 점으로 접해있는 도형이기 때문에 학생뿐만 아니라 교사에게도 혼란을 야기할 수 있는 도형이다. 현재 초등 수학 교과서에 제시되어 있는 약속하기로는 이 도형을 직육면체의 전개도로 볼 것인지 아닌 것으로 볼 것인지 명확히 규정하기가 어려운 입장이다. 이러한 문제는 원기둥의 경우에서는 한 점에서 접해있는 <그림 Ⅳ-8>와 같은 경우를 원기둥의 전개도로 보기 때문에 더욱 명확히 규정하기가 힘들어진다. 직육면체의 전개도 뿐만 아니라 각기둥, 각뿔 등 다른 입체도형의 경우에도 이러한 전개도에 대한 정의에 혼란이 있을 수 있기 때문에 전개도에 대해 명확히 규정할 수 있도록 약속하기에 대한 논의가 좀더 필요하다.



〔그림 Ⅳ-7〕 직육면체의 전개도가 아닌 예 ②



〔그림 Ⅳ-8〕 원기둥의 전개도(교육부, 2006, <6-나>, p.26)

2. 약속하기와 관련 활동에서 일관성을 유지하지 않는 정의 사용에 따른 문제

초등수학에서 수학적 개념의 형성은 주로 활동을 통해서 형성되며 또한 활동

에서 사용된 대상(구체물 또는 반구체물)들은 학생들의 개념 이미지 형성에 많은 영향을 준다. 그러나 약속하기에 제시된 정의가 활동 속에서 그 개념의 일관성을 유지하지 않음으로 인해 학생들에게 오개념을 갖게 할 가능성이 있다.

가. 원의 정의

현재 교과서에 제시되어 있는 원과 관련된 정의 <그림 Ⅳ-3>을 살펴보면 원은 내부를 포함하고 있지 않음을 유추할 수 있다. 따라서 이러한 정의는 '원의 넓이를 구하여라.'라는 문제에서 답을 '0'이라고 답하는 학생이 존재할 가능성을 만든다. 그러나 이러한 문제 상황에서 대부분의 교사는 원을 상황에 따라 원판의 의미로 해석하여 지도한다고 조사되었으며, 학생들도 원을 원판의 의미로 해석하여 문제를 해결할 가능성이 훨씬 많다.(오숙경, 2007) 이것은 대부분의 교사와 학생들이 수학활동의 다양한 소재들로부터 실제적으로는 원을 '원판'의 이미지로 형성하였기 때문이다.

학생들은 교과서에 제시된 약속하기로부터 도형에 대한 정의를 학습하기도 하지만 이 정의와 관련된 다양한 활동과 문제해결과정을 통해 정의를 자기 나름대로 이미지로 정립해나간다. 이렇게 학생이 나름대로 정립한 정의는 그 정의와 서로 상충되면서 오개념을 일으킬 가능성이 충분히 있다. 따라서 약속하기에 제시된 정의가 활동 속에서 상충되지 않도록 지금 현재 활동 속에서 쓰이고 있는 표현들을 수정하는 일이 불가피하다고 여겨진다.

나. 원의 반지름에 대한 정의

원의 반지름에 대한 정의는 3-나 단계에서 <그림 Ⅱ-5>와 같이 제시되어 있다. 즉, 반지름은 길이가 아닌 선분에 해당한다고 볼 수 있다. 그러나 이 정의는 반지름과 관련된 다양한 활동에서 서로 상충되는 과정을 겪는다. 예를 들면, 현재 교과서에는 '반지름이 2cm인 원을 그리시오.', '다음 원에서 반지름은 얼마입니까?' 등의 문제들이 제시된다. 이러한 문제의 경우에 반지름의 정의는 선분이 아닌 그 길이를 뜻하고 있음을 유추할 수 있다. 이것은 앞서 정의된 약속하기와 상충되는 것으로서 학생들은 반지름이 선분을 뜻하는 것인지 그 길이를 뜻하는 것인지 혼란을 겪을 수 있다. 초등학생의 경우 실제적인 활동을 통해

획득한 개념 이미지가 개념 정의보다 앞설 수 있고 잘못 형성된 개념이 고착화 될 수 있으므로 그 약속하기와 활동에서 사용하는 용어의 정의가 일관성을 가질 수 있도록 이러한 표현들을 수정할 필요가 있다.

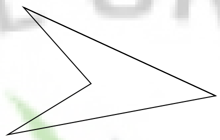
3. 정의에 따른 예와 반례를 다양하게 제시하지 않는 것에 따른 문제

초등학생들은 도형 영역에서 학습한 어떠한 정의를 떠올릴 때, 그 정의에 해당하는 설명을 떠올리기 보다는 그 정의에 해당하는 정신적 이미지를 떠올림으로써 그 도형을 인식하는 경우가 대부분이다. 즉, 주어진 정의에 관해 교과서에서 그리고 교사가 제시하는 다양한 예들을 통해 각자의 마음 속에서 정신적인 이미지를 형성하게 되고, 이 이미지를 통해 정의를 이해하고 기억하게 된다. 따라서 학생들 각자의 마음 속에 어떤 정형화된 이미지만을 형성하게 된다면 그 이미지를 그 정의와 동일시하여 자신이 마음 속에 그리고 있지 않던 생소한 모양의 도형이 제시되었을 때에는 오개념을 가질 가능성이 많아진다. 정형화된 시각적 이미지만을 학습함으로써 생기는 학생들의 오류에 대해 분석해보았다.

가. 사각형의 정의

<그림 Ⅳ-10>의 도형을 보고 사각형인지 아닌지 질문을 했을 경우, 사각형이 아닐 것이라고 답하는 학생들이 있을 가능성이 존재한다. 이는 현재 교과서에서 사각형을 ‘4개의 선분으로 둘러싸인 도형’이라고 정의하고 있지만, 약속하기에서 예로 제시하고 있는 사각형과 그와 관련된 활동을 보면, 대부분 사각형의 예로 네모 모양(직각이 있는 사각형)이거나 볼록사각형 모양의 도형을 사각형으로 제시함으로 인해 나타나는 현상이다. 이는 정형화된 사각형의 모습만을 접하게 함으로써 학생들이 자주 접하지 못했던 오목사각형 모양의 도형을 제시했을 때는 사각형이 아니라고 답하는 오개념을 형성할 가능성이 있다. 이는 지금 제 7차 교육과정이에 제시된 용어의 정의가 설명보다는 구체적인 예시를 통한 지시적 성격이 강하기 때문에 일어나는 현상이기도 하다. 이렇게 지시적인 성격의 정의는 그 예시를 통해 정의를 이해하고 기억하려는 경향이 생기게 한

다. 브루너(Bruner)는 어떠한 것을 정의한다는 것은 그 정의에 부합하지 않는 예가 있다는 사실을 반증하고 있으며 주어진 정의에 부합하지 않은 예를 많이 다룸으로써, 원래 알고자 하는 개념에 좀 더 충실할 수 있다고 하였다. 따라서 교사는 이 예시만이 아닌 다양한 예시를 함께 제공하여 오개념을 줄이도록 해야 한다.

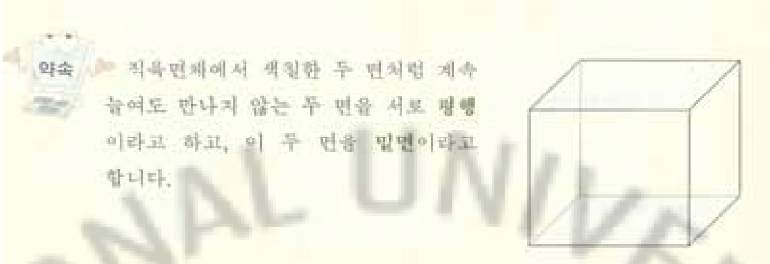


[그림 Ⅳ-9] 오목사각형

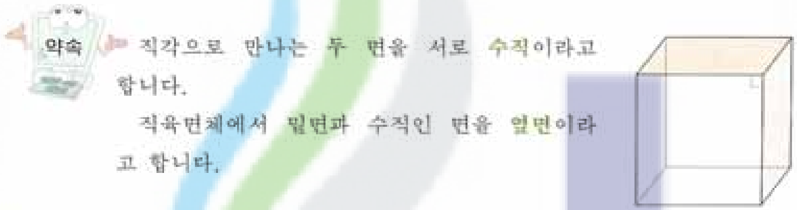
나. 밑면과 옆면, 밑변과 높이의 정의

현재 교과서에서는 직육면체의 밑면과 옆면, 평행사변형의 밑변과 높이를 5-가 단계에서 <그림 Ⅳ-11>, <그림 Ⅳ-12>, <그림 Ⅳ-13>과 같이 정의하고 있다. 그리고 이 정의에 해당하는 예를 함께 제시함으로써 학생들의 이해를 돕고 있다. 이렇게 교과서에서는 학생들의 이해를 돕기 위해 약속하기에 그 용어의 정의와 함께 그 정의에 해당하는 외형의 전형적인 예를 함께 제공하고 있는 경우가 많다. 그러나 이렇게 제시되는 예는 이 정의와 관련된 다른 부가적인 활동에서도 이와 비슷한 경우의 예만 제시되는 경우가 많다. 즉, 학생들이 혼란을 가질만한 예나 아니면 그 정의에서 벗어나는 반례를 제시하는 경우는 그다지 많지 않다. 위의 경우에서 밑면, 옆면의 정의에서도 밑면을 서로 평행한 두 면이라고 정의하고는 있지만 예로 제시된 도형에서 밑면은 위와 밑에 위치하고 있으며, 이와 관련된 다른 활동들에서도 보통 밑면이 위와 아래에 위치하고 있어 학생들로 하여금 밑면이 그 성질에 의한 것이 아닌 위치 관계에 의한 정의라고 오해할 가능성이 생긴다. 또한 평행사변형의 밑변과 높이에 대한 정의도 '평행사변형에서 평행한 두 변을 밑변이라 하고, 두 밑변 사이의 거리를 높이라고 한다.'라고 정의하고 있지만 학생들에게 예로 제시하는 도형에서 밑변이 대부분의 경우에서 위와 아래에 위치한 경우가 많아 높이도 위와 아래에 위치한

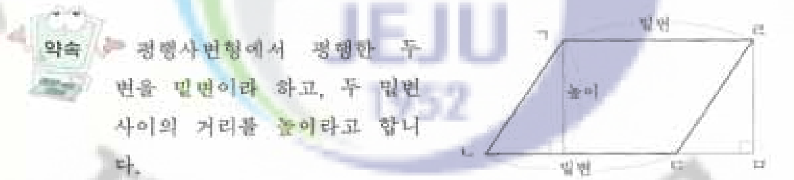
변 사이의 거리로 오해할 가능성을 높이고 있다.



[그림 Ⅳ-10] 밑면(교육부, 2006, <5-가>, p. 56)



[그림 Ⅳ-11] 옆면(교육부, 2006, <5-가>, p. 57)



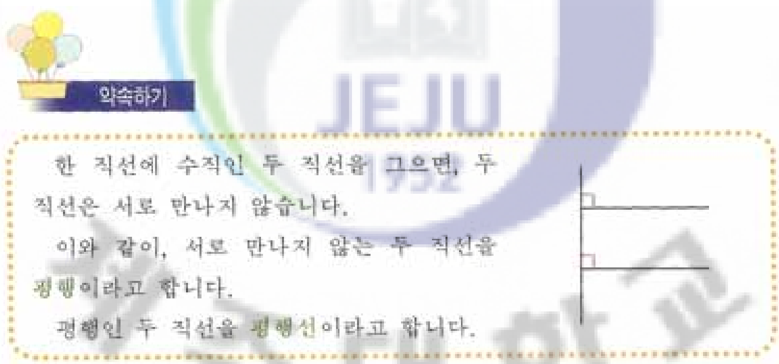
[그림 Ⅳ-12] 평행사변형의 밑변과 높이(교육부, 2006, <5-가>, p. 97)

위의 경우에서 생길 수 있는 학생들의 오개념은 직육면체의 옆면과 밑면, 평행사변형의 밑변과 높이에 국한되어 있는 것이 아니다. 이는 여기에 제시된 직육면체의 경우 뿐만 아니라 삼각형 등 다른 도형들에서도 생길 수 있는 오개념이다. 따라서 교과서에서는 그 약속하기에 해당하는 전형적인 예 뿐만 아니라

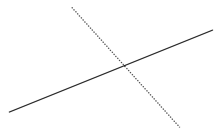
학생들이 오해할만한 가능성이 있는 예, 그 약속하기에 해당하지 않는 다양한 반례들을 함께 제시함으로써 학생들의 올바른 개념 정립에 힘써야 할 것이다.

다. 평행과 평행선의 정의

현재 교과서에서는 평행과 평행선을 4-나 단계에서 <그림 Ⅳ-14>과 같이 정의하고 있다. 이와 같은 정의에 기초하여 학생들에게 <그림 Ⅳ-15>과 같은 두 직선을 제시한다면 학생들은 또 다시 혼란을 겪게 될 것이다. 이 두 직선은 서로 만나지 않지만 교과서에서 예시를 통해 접하던 평행선의 모양과도 차이가 있기 때문이다. 이런 경우에 두 직선이 만나지 않기 때문에 평행이라고 답하는 학생이 없도록 하기 위해서 교사는 평행을 정의함에 있어서도 예와 반례를 적절히 사용하도록 해야 한다. 더 나아가 교과서의 활동에서도 한 직선에 두 점을 찍고, 각 점에서 직선에 대한 수선을 각각 그어 보는 활동을 통해 평행과 평행선의 정의를 유도할 것이 아니라, 도형의 분류 측면에서 만나는 두 직선과 만나지 않는 두 직선으로 직선을 분류하고 만나는 두 직선의 특수한 예로 수직 관계를 도입하고 만나지 않는 두 직선의 특수한 예로 평행 관계를 도입한다면 만나지 않는 두 직선이 모두 평행이라고 생각하는 오류는 줄어들 것이라 여겨진다.



[그림 Ⅳ-13] 평행과 평행선(교육부, 2006, <4-나>, p. 54)



[그림 Ⅳ-14] 공간 상에서 어긋난 위치에 있는 두 직선

4. 방향성이 가미된 용어를 사용하는 것에 따른 문제

지금 현행 교과서에서는 밑면, 옆면, 밑변과 같은 용어들을 많이 사용하고 있다. 이처럼 방향성이 가미된 용어는 학생들로 하여금 그 용어를 떠올릴 때, 약속하기에 제시된 정의를 떠올리는 것이 아니라 그 용어의 방향으로부터 그 용어의 정의를 유추하게 하는 오류를 야기할 가능성이 있다. 방향의 의미가 그 정의에 있어 중요한 경우는 그 방향성이 가미된 용어를 사용하는 것이 문제가 없겠지만 오히려 혼란을 야기할 가능성이 있는 경우에는 그 용어를 바꾸는 것이 좋을 것이라 여겨진다. 예를 들면, 밑면의 경우 이와 관련된 영문용어는 base이다. 즉, 입체도형의 토대가 되는 면이라는 뜻이기 때문에 기초면, 기준면, 바탕면으로 그 용어를 바꾸어 사용하고 옆면의 경우도 옆에 있는 면으로 오인할 가능성이 있으므로 '밑면이 아닌 면'으로 이름을 짓는 것도 좋을 것이다. 또한 밑변의 경우에도 그 의미에 기초하여 기초변, 기준변 등으로 바꾸는 것이 오히려 그 정의에 대한 이해도 높일 수 있을 뿐만 아니라 오개념을 줄일 수도 있을 것이라 여겨진다.

V. 도형영역의 정의에 대한 학생 인식도 분석

본 연구를 수행하면서 ○○초등학교 2학년 학생 31명, 3학년 학생 27명, 4학년 학생 28명, 5학년 학생 34명, 6학년 학생 23명을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 학생들에게 개념정의에 대한 오류 가능성이 있다고 생각되는 다각형의 정의, 원과 원의 반지름에 대한 정의, 도형의 정의, 각과 평행의 정의, 각기둥에서의 밑면과 옆면의 정의, 전개도에 대한 정의를 중심으로 질문을 하였으며, 설문의 구체적인 내용은 부록을 참조한다. 설문 조사 시 학년별로 인식도에서 차이가 있는지를 살펴보았으며, 이를 분석하여 정리하였다.

총 143명의 학생에 대한 설문을 분석하여 다각형, 원, 도형, 각, 평행, 밑면과 옆면, 전개도, 높이에 대한 영역으로 나누어 학년별로 정리한 내용은 다음과 같다.

1. 사각형의 정의에 대한 학생 인식도 분석(1-2번 문제, 2-6학년)

질문내용	문항	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
1. 다음 도형을 사각형이라고 할 수 있나요?	예	32.3	18.5	53.6	20.6	30.4	30.8
	아니오	41.9	51.9	35.7	55.9	56.5	48.3
	모르겠다	0.0	11.1	0.0	17.6	8.7	7.7
	기타	25.8	18.5	10.7	5.9	4.3	13.3
	합계	100	100	100	100	100	100

설문을 분석한 결과, 이 도형을 보고 사각형이라고 대답한 학생은 전체적으로 30.8% 지나지 않는 것으로 나타났다. 이에 반해, 사각형이 아니라고 대답한 어린이는 48.3%로 나타났으며, 질문에 대해 논리적인 답변을 하지 못한 기타 의견도 13.3%나 되는 것으로 나타났다. 학년별로 어떠한 경향은 나타나지 않았으며, 다만 학년이 올라감에 따라 기타 의견(논리적인 이유를 제시하지 못한 학생)이 점차 줄어드는 경향을 볼 수 있었다.

이 도형을 보고 사각형이라고 대답한 학생들은 대부분 4개의 각을 가지고 있어서, 4개의 선분으로 둘러싸여 있기 때문에, 4개의 꼭지점을 가지고 있어서 사각형이라고 생각한다는 의견이 많았으며, 학년이 올라갈수록 각과 선분, 꼭지점

등 다양한 구성요소의 개수를 토대로 사각형이라고 생각하는 학생들이 많아지고 있었다.

반면 사각형이 아니라고 대답한 학생들은 고학년의 경우에는 꼭지점이 3개 밖에 없어서, 변이 3개 밖에 없어서, 직각이 없어서, 네모 모양이 아니라서 라는 의견이 많았으며, 저학년의 경우에는 모양이 세모 같아서, 네모처럼 생기지 않아서 라는 의견이 많았다. 전반적으로 사각형이 아니라고 대답한 학생들은 선분과 각에 대한 개념정의가 바르게 되어 있지 않아 이 도형에서 선분과 각의 개수를 제대로 파악하지 못하는 오류를 범하고 있었다. 또한 사각형이라면 직각이 있어야 한다거나 네모 모양이어야 한다는 오개념을 가지고 있다는 사실을 알 수 있었다. 저학년의 경우는 도형을 구성요소보다는 모양이라는 시각적인 측면에 의존하여 생각함으로써 세모처럼 생겨서, 악어모양이라서, 제트기 같아서 라는 이유로 사각형이 아니라고 생각하는 오류를 범하고 있었다.

그리고 기타 의견이 13.3%나 되는 것으로 나타났는데, 이 기타 의견에 속한 대부분의 어린이는 질문에 대해 논리적인 답변을 하지 못하는 학생들이었다. 저학년의 경우 논리적인 생각이 더욱 부족하였으며, 고학년의 경우도 수학 수업시간에 논리적으로 그 이유를 설명하는 학습이 부족한 현상에 기인한 것으로 생각된다.

전반적으로 사각형에 대한 학생들의 인식도를 분석한 결과, 교과서에 제시되는 도형들과 교사가 수업시간에 예로 제시하는 도형들이 대부분 볼록다각형에 치우쳐있어 오목다각형에 대한 인식자체가 부족하다는 사실을 알 수 있었다. 학생들은 대부분 처음 접하는 오목다각형을 보고 그 구성요소에 대해 바르게 파악하지 못하거나, 자주 접하는 네모 모양이며 직각이 있는 사각형의 모습에 국한하여 이 도형을 바라보고 있었다. 교과서에서나 교사의 예시 제공에 있어 다양한 모양의 사각형을 제시하여 사각형에 대한 올바른 개념 정립을 할 수 있도록 해야 할 것이다.

질문내용	문항	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
2. 다음 도형을 사각형이라고 할 수 있나요?	예	29.0	11.1	3.6	11.8	13.0	14.0
	아니오	35.5	59.3	78.6	67.6	65.2	60.8
	모르겠다	0.0	11.1	10.7	17.6	17.4	11.2
	기타	35.5	18.5	7.1	2.9	4.3	14.0
	합계	100	100	100	100	100	100

이 설문은 약속하기의 조건(4개의 선분으로 둘러싸인 도형을 사각형이라고 한다.)은 만족하지만 입체적인 모습의 도형을 보고 사각형이라고 생각하는 오류를 범하지는 않는지 알아보기 위해 제시되었다. 설문 결과를 분석한 결과, 이 도형을 사각형이라고 생각하는 학생은 14.0%로 나타났으며, 사각형이 아니라고 생각하는 학생은 60.8%로 나타났다. 그리고 학년에 따른 유의미한 경향은 나타나지 않았다.

이 도형을 사각형이라고 생각하는 학생들은 사각형의 약속하기에 충실하여 4개의 선분으로 둘러싸여서 라고 답한 학생이 가장 많았으며, 그 다음으로 꼭지점이 4개라서, 각이 4개라서, 삼각형이 2개 붙어있어서 라는 이유를 제시하였다. 반면, 사각형이 아니라고 생각하는 학생들은 정답을 선택하긴 하였으나 바르지 않은 이유를 제시하는 학생이 대부분이었다. 입체도형 또는 접힌 도형이라는 측면에 착안하여 사각형이 아니라고 답한 학생은 6학년 학생 2명, 5학년 학생 5명, 4학년 학생 5명에 지나지 않았으며, 나머지 대부분의 어린이들은 올바르지 않은 이유로 사각형이 아니라고 생각하고 있었다. 그 이유로는 각이 3개라서, 꼭지점이 3개라서, 변이 4개가 아니라서 라는 의견을 가장 많이 제시하였으며, 그 다음으로 삼각형이 2개라서, 세모 모양이라서, 직각이 없어서 라는 의견을 많이 제시하였다. 1번 질문에서의 경우와 마찬가지로 많은 수의 어린이들이 사각형의 구성요소인 각과 변, 꼭지점에 대한 개념 정의가 잘못되어 있음을 알 수 있었으며, 사각형이라면 네모 모양이어야 한다거나 직각이 있어야 한다는 오개념을 가지고 있음을 다시 한 번 확인할 수 있었다.

교사는 수업시간에 사각형에 대한 개념 정의 뿐만 아니라 그 구성요소에 대한 개념 정의를 확실하게 해야 할 필요성이 제기되며 다양한 형태의 사각형을 보고 그 구성요소를 파악하는 학습을 해야 할 것이다. 또한 평면도형과 입체도형에 대한 정의를 확실히 인식시켜야 할 필요성이 제기된다고 할 수 있다. 평

면도형과 입체도형의 개념을 확실히 인식시키고, 종류를 다양하게 제시하여 줄 필요가 있다. 제 7차 초등 수학 교과서에서는 평면의 용어를 약속하지 않고 사용하고 있다. 도형의 도입시기인 1단계에서 보다 다양한 형태의 입체도형을 경험하게 한다면, 입체도형의 평평한 표면이라는 의미에서 면(face)에 대한 개념이 보다 일찍 형성될 수 있을 것이다. 또, 선분으로부터 직선을 도입하듯이, 면(face)의 확장된 개념으로서 평면(plane)을 도입하는 방법도 고려할 수 있다.(오숙경, 2007) 이렇게 평면에 대한 약속하기를 도입한 후 사각형에 대한 기존의 약속하기를 좀더 엄밀하게 '4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형'이라고 수정하는 것이 좋을 것이라 여겨진다. 그리고 사각형인 예와 사각형이 아닌 예를 다양하게 제시하여 학생들이 정확한 이미지를 형성할 수 있도록 해야 한다.

2. 원의 정의에 대한 학생 인식도 분석(3-4번 문제: 2-6학년, 7번 문제: 4-6학년)

질문내용	문항	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
3. 다음 도형을 원이라고 할 수 있나요?	예	45.2	40.7	75.0	64.7	78.3	60.1
	아니오	29.0	40.7	17.9	26.5	8.7	25.2
	모르겠다	0.0	3.7	0.0	5.9	8.7	3.5
	기타	25.8	14.8	7.1	2.9	4.3	11.2
	합계	100	100	100	100	100	100

이 질문은 원의 정의에 대한 인식도를 파악하기 위해 타원형 모양의 도형을 제시하고 원이라고 생각하는지의 여부를 조사하여 보았다. 그 결과, 타원을 보고 원이라고 답한 학생이 60.1%나 되는 것으로 나타났으며, 원이 아니라고 답한 학생은 25.2%에 지나지 않는 것으로 나타났다. 그리고 학년이 올라감에 따라 원이라고 생각하는 학생의 비율이 오히려 다소 많아지는 경향이 나타났다. 고학년이 경우 원에 대한 개념이 저학년에 비해 정확해질 것이라는 예상을 오히려 빗나가게 하는 결과였다.

원이라고 답한 학생들의 이유를 분석한 결과, 동그랗게 생겨서 라는 응답이 가장 많았으며, 그 다음으로 곡선으로 둘러싸여 있어서, 각이 없어서, 꼭지점이

없어서 라는 이유를 제시하는 학생이 많았다. 원을 정확한 정의에 의해서가 아닌 동그란 형태의 도형이라고 생각하는 학생들이 많음을 알 수 있으며, 다른 다각형이 가지고 있는 각과 꼭지점이 없는 경우 이를 원이라고 생각하는 오류를 가지고 있었다. 반면 원이 아니라고 답한 학생들은 고학년의 경우 반지름의 길이가 일정하지 않아서, 타원형이라서, 정확한 모양이 아니라서 라는 대답이 많았으며, 저학년의 경우는 길쭉해서, 납작한 동그라미라서, 옆으로 퍼져서 라고 대답한 학생들이 많았다. 저학년의 경우는 원의 모양에 집중하고 고학년의 경우는 원의 구성요소에 대한 분석에 기인하여 원이 아니라는 의견을 제시함을 알 수 있었다.

지금 현재의 교과서에서는 2-가 단계에서 동그란 모양으로 된 여러 가지 물건을 찾아 본을 떠 보는 활동을 한 후 위와 같이 본을 떠 그린 동그란 모양의 도형을 원이라고 약속하고 있다. 그리고 3-나 단계에서 팔을 앞뒤로 크게 한 바퀴 돌린다던지 두꺼운 종이에 구멍을 뚫어 못을 꽂고 연필로 한 바퀴 돌리는 등의 원을 그리는 활동을 하고 있지만 원의 중심과 원의 반지름만을 정의할 뿐 원에 대한 약속하기는 다시 이루어지지 않는다. 이렇게 저학년 단계에서 이루어진 덜 엄밀한 수준의 정의는 학생들에게 오개념을 불러일으킬 수 있다. 저학년에서 모양과 시각적인 측면에 의존하여 원을 위와 같이 정의한 경우에도 학년이 올라감에 따라 원을 학년의 수준에 맞게 재정의할 필요성이 제기된다. 학년이 올라감에 따라 학생들이 저절로 저학년에서 배운 개념을 수정할 것이라는 생각은 오해일 뿐이다.

질문내용	문항	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
4. 다음 원 위에 점을 찍어보세요.	내부	32.3	55.6	75.0	88.2	95.7	68.5
	원 위	9.7	18.5	10.7	5.9	0.0	9.1
	외부	22.6	18.5	10.7	5.9	4.3	12.6
	기타	35.5	3.7	3.6	0.0	0.0	9.1
	합계	100	100	100	100	100	100

이 설문은 원이 내부를 포함하고 있다고 생각하는 오류를 갖고 있는지 알아보기 위해 원 위에 점을 찍으라는 문제를 제시한 후 학생들이 어느 위치에 점을 찍는지 알아보았다. 설문을 분석한 결과 전체 학생 중 68.5%의 학생이 원의

내부에 점을 찍은 것으로 나타났으며, 원을 구성하는 곡선 위에 바르게 점을 찍은 학생은 9.1%인 것으로 나타났다. 그리고 원의 내부와 원을 구성하는 선 위가 아닌 원 외부에 점을 찍은 학생들도 12.6%나 되는 것으로 나타났다.

학년별로는 원의 정의에 대한 인식이 학년이 올라감에 따라 오히려 다소 낮아지는 경향을 보였던 것과 같이 이 경우에도 원의 내부에 점을 찍는 어린이들은 학년이 올라갈수록 오히려 더욱 많아지고, 원을 구성하는 곡선 바로 위에 점을 찍은 어린이들은 2학년을 제외하고는 학년이 올라갈수록 오히려 줄어드는 현상이 나타났다. 정의에 대한 오개념이 학년이 올라감에 따라 전혀 개선이 되고 있지 않음을 알 수 있다. 또한 저학년의 경우는 말 그대로 원 바로 위(외부)에 점을 찍은 학생들도 상당수 있었으며, 2학년의 경우는 원 주위에 많은 수의 점을 마구 찍는 어린이들도 많이 나타났다.

오숙경(2007) 선생님의 '초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 교사의 인식과 오류' 210쪽을 보면 초등교사 80명 중 44명의 교사가 원이 내부를 포함하고 있다고 답하였다. 이를 보면 교사가 원을 원판과 동일시하여 원이 맥락에 따라 내부를 포함한다고 생각하는 오류를 범하고 있음을 알 수 있다.(최근배·오숙경, 2008) 원에 대한 교사의 인식에 오류가 있다는 점을 생각한다면 학생들이 원에 대한 오류를 가지고 있다고 나타나는 것은 오히려 당연한 것인지도 모른다. 교사의 원에 대한 인식의 오류를 바로 잡는 일이 선행되어야 할 것이며, 교과서에도 원에 대한 엄밀한 의미의 정의가 제시되어야 할 것이다. 그리고 원의 정의에 대한 개념이 원과 관련된 다양한 활동에서 그 의미의 일관성을 유지하지 않음으로 인해 학생들이 자신의 머릿 속에 잘못된 이미지를 형성하였다고 볼 수도 있다. 따라서 원에 대한 정의와 일치하지 않는 '원의 넓이를 구하여라'와 같은 용어는 '원으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라' 라는 용어로 교과서의 활동 내용을 수정할 필요성이 제기된다.

질문내용	문항	4학년	5학년	6학년	합계
7. 다음 중 원의 반지름을 찾아보세요.	3cm	57.1	32.4	26.1	39.3
	선분 ㄱㅇ	42.9	64.7	65.2	58.3
	기타	0.0	0.0	8.7	2.4
	합계	100	100	100	100

이 설문은 원의 반지름의 정의에 대한 학생들의 인식을 조사하기 위해 원의 반지름의 길이와 선분 중 어느 것을 원의 반지름이라고 생각하는지를 물어보았다. 원의 반지름에 대한 인식도를 분석한 결과, 반지름이 길이를 뜻한다고 답한 학생은 39.3%로 나타났으며, 반지름을 원의 중심과 원 위의 한 점을 이은 선분을 뜻한다고 바르게 답한 학생은 58.3%로 나타났다. 그리고 학년이 올라감에 따라 원의 반지름에 대한 인식이 개선되는 것으로 나타났다. 학년이 올라감에 따라 반지름과 관련된 계속된 학습이 인식에 대한 오류를 개선한 것으로 보인다.

지금 현재 교과서에서는 원의 반지름에 대한 정의가 3-나 단계에서 '원을 그릴 때에 누름 못이 꽂혔던 점 ㅇ을 원의 중심이라 하고, 원의 중심 ㅇ과 원 위의 한 점을 이은 선분 ㄱㅇ을 원의 반지름이라고 한다.' 라고 약속되어 있다. 하지만 이런 약속하기에도 불구하고 교과서의 많은 활동과 문제들에서는 '반지름이 2cm인 원을 그려 보시오.', '다음 원에서 반지름은 얼마입니까?' 등의 용어를 사용하고 있다. 이는 약속하기에서 정의된 반지름은 선분을 뜻하지만 다양한 활동 속에서 학생들로 하여금 반지름은 길이를 뜻한다는 오개념을 갖게 만든다. 학생들이 교과서에 제시된 약속하기 보다는 다양한 활동들을 통해 시각적인 이미지를 형성하고 이를 통해 그 정의에 대한 개념을 학습하게 된다는 점을 생각한다면 이러한 용어들을 '반지름의 길이가 2cm인 원을 그려 보시오.', '다음 원에서 반지름의 길이는 얼마입니까?' 등의 문장들로 바꾸어 그 개념의 일관성을 유지하는 일이 필요하다.

3. 도형의 정의에 대한 학생 인식도 분석(5번 문제, 2-6학년)

질문내용	문항	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
5. 다음중 도형을 모두 찾아보세요	1	16.1	18.5	28.6	17.6	26.1	21.0
	2	0.0	7.4	0.0	8.8	8.7	4.9
	3	0.0	11.1	7.1	14.7	8.7	8.4
	4	6.5	0.0	0.0	2.9	13.0	4.2
	5	9.7	14.8	10.7	11.8	8.7	11.2
	6	35.5	85.2	78.6	91.2	87.0	74.8
	7	48.4	85.2	85.7	91.2	87.0	79.0
	8	32.3	63.0	71.4	67.6	56.5	58.0
	9	19.4	29.6	39.3	50.0	65.2	39.9
	10	32.3	55.6	67.9	73.5	82.6	61.5

이 설문은 도형의 정의에 대한 학생들의 인식도를 조사하기 위해 실시되었다. 설문 분석 결과 점을 도형으로 생각한다는 학생은 전체의 21.0%, 선분을 도형으로 생각한다는 학생은 4.9%, 꺽인 선분을 도형으로 생각한다는 학생은 8.4%, 곡선을 도형으로 생각한다는 학생은 4.2%, 원과 선분이 연결된 모양을 도형으로 생각한다는 학생은 11.2%, 사각형을 도형으로 생각한다는 학생은 74.8%, 원을 도형으로 생각한다는 학생은 79.0%, 삼각형 2개가 점으로 연결된 모양을 도형으로 생각한다는 학생은 58.0%, 원뿔 2개가 점으로 연결된 모양을 도형으로 생각한다는 학생은 39.9%, 구를 도형으로 생각한다는 학생은 61.5%인 것으로 나타났다. 전반적으로 학생들의 도형의 정의에 대한 인식도가 매우 낮다는 사실을 알 수 있었으며, 2학년을 제외하고 3-6학년의 경우에는 도형의 정의에 대한 인식도에서 큰 차이를 보이지 않았다. 다만, 입체도형을 도형이라고 생각하는 문항의 경우는 5, 6학년의 경우 3, 4학년과 비교했을 때 도형이라고 생각하는 학생의 비율이 늘어나는 경향을 확인할 수 있었다. 이는 입체도형에 대한 정의가 5, 6학년에서 제시되는 현상에 기인한 것으로 보인다.

문항별로 분석해보면, 선분, 곡선의 경우 도형이라고 생각하는 학생이 다른 도형에 비해 월등히 적었으며, 점을 도형이라고 생각하는 학생도 적은 비율을 차지하였다. 또한 사각형, 원을 도형이라고 생각하는 학생들이 가장 많음을 알 수 있었고, 같은 삼각형이라도 점으로 연결되어 있는 도형의 경우는 도형이라고 생각하는 학생이 비율이 적었으며, 입체도형의 경우는 평면도형의 경우보다 도형이라고 생각하는 학생들이 더욱 줄어들었다.

도형이 아니라고 생각하는 이유를 분석해본 결과, 점과 선은 그냥 점과 선분일 뿐이고 도형이라고 생각하지는 않는다는 의견이 많았으며, 선분으로 둘러싸여 완전히 막힌 모양의 도형을 만들었을 때에만 도형이라고 생각하는 학생들이 대부분임을 알 수 있었다. 그리고 특이한 모양의 도형인 경우 이런 모양의 도형은 없다든지 특이한 모양이라는 이유로 도형이라고 생각하지 않았다. 저학년의 경우는 산 모양이라서, 허수아비 같아서, 리본같이 생겨서 등 모양의 측면에 의존하여 도형이라고 생각하지 않음을 알 수 있었다.

이 설문 분석 결과 대부분의 학생들은 우리가 알고 있는 도형들 중에서 이를 지칭하는 이름이 지어져 있는 즉, 사각형, 삼각형, 원, 원뿔, 원기둥, 각기둥, 구와 같은 경우만 도형이라고 생각하는 경향이 많음을 알 수 있었으며, 점과 선분은 그냥 점과 선분일 뿐이라고 생각하는 학생이 많다는 사실을 알 수 있었다. 그리고 이름이 지어져 있는 도형의 경우라도 여러 개가 점으로 이어져서 특이한 모양을 만들어 낼 경우에도 도형이 아니라고 생각하고 있었다.

우리 교과서에는 도형에 대해 어떤 특별한 약속하기를 하지 않고 상황에 따라 도형이라는 용어를 그냥 사용하고 있다. 학생들은 수학 교과서에서 그리고 수업 시간에 수도 없이 도형이라는 용어를 듣고 사용하지만 정작 그 의미에 대해서는 제대로 인식하고 있지 않은 것이다. 학생들이 정확히 배우지 않은 용어를 자주 사용한다는 사실만으로 그 의미에 대해 어느 정도 인식할 것이라는 생각은 교사와 어른들의 오해일 뿐이다. 당연히 알 것이라고 여겨지는 용어들도 학생들에게 그 의미를 이해시키고 함께 약속하는 과정이 있어야 한다고 여겨진다.

4. 각의 정의에 대한 학생 인식도 분석(6번 문제, 3-6학년)

질문내용	문항	3학년	4학년	5학년	6학년	합계
6. 다음 도형을 각이라고 할 수 있나요?	예	25.9	57.1	44.1	39.1	42.0
	아니오	33.3	32.1	35.3	17.4	30.4
	모르겠다	22.2	3.6	8.8	34.8	16.1
	기타	18.5	7.1	11.8	8.7	11.6
	합계	100	100	100	100	100

이 설문은 학생들의 각의 정의에 대한 인식도를 조사하기 위해, 각의 약속하

기(한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 한다)를 제시하고, 이 상황에서 180°를 나타내는 도형을 보고 이 도형을 각이라고 생각하는지 질문하였다. 설문을 분석한 결과 각이라고 답한 학생은 42.0%로 나타났으며, 각이 아니라고 답한 학생이 30.4%나 되는 것으로 나타났다. 그리고 학년에 따른 유의미한 경향은 나타나지 않았다.

각이라고 답한 학생들은 그 이유로 점 ㄴ에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형이기 때문에, 180°의 각이 있기 때문에, 점을 기준으로 두 선분이 만났기 때문에, 각도기로 잴 수 있어서 등의 이유를 많이 제시하였고, 각이 아니라고 답한 학생들은 두 직선으로 이루어지지 않았기 때문에 라고 답한 학생이 가장 많았으며 그 다음으로 각은 꺽여야 되는데 그렇지 않아서, 뾰족하지 않아서 라는 응답이 많았다.

학생들이 이러한 인식 경향을 보이는 이유를 분석한 결과 교과서의 약속하기가 학생들에게 덜 엄밀한 수준으로 제공되고 있다고 생각되었다. 교과서에서는 3-가 단계에서 한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 한다고 약속하고 있다. 그러나 이 설문에서 제시된 각은 한 직선으로 이루어진 도형으로서 각이 아니라고 생각하는 오개념을 가질 수 있다. 따라서 교과서에 제시된 약속하기를 '한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 한다.' 라고 좀더 엄밀한 수준으로 수정할 필요성이 제기된다. 이와 더불어 교과서에 선분과 직선의 정의만 제시할 것이 아니라 반직선에 대한 개념 정의도 함께 다루어져야 할 것이다. 또한 오개념을 가진 학생들 중 많은 수가 각을 꺽어진 것, 뾰족한 것이라고 인식하는 경향이 있었다. 이는 교과서와 교사가 예로 제시하는 각들의 대부분 꺽어진 것, 뾰족한 것이었다는 것을 보여주는 결과라 할 수 있다. 교과서에서는 각의 예로서 대표적인 각의 예만을 보여주지 말고 그 개념 이해를 확실히 할 수 있는 다양한 예와 반례를 제시해야 할 것이다.

5. 평행의 정의에 대한 학생 인식도 분석(8번 문제, 5-6학년)

질문내용	문항	5학년	6학년	합계
8. 다음 두 직선을 평행이라고 할 수 있나요?	예	17.6	17.4	17.5
	아니오	44.1	65.2	52.6
	모르겠다	8.8	4.3	7.0
	기타	29.4	13.0	22.8
	합계	100	100	100

이 설문은 공간 상에서 서로 만나지 않으면서 평행하지도 않은 두 직선을 제시하여 평행의 정의에 대해 바르게 인식하고 있는지 조사하였다. 설문을 분석한 결과 두 직선이 평행이라고 답한 학생은 17.5%로 나타났으며, 평행이 아니라고 답한 학생은 52.6%로 나타났다. 그리고 문제의 의미 즉, 두 직선이 공간상의 어떤 위치인지 제대로 파악하지 못해 논리적이지 못한 답변을 한 기타 의견도 21.2%에 달하였다.

평행이라고 답한 학생들의 이유를 분석해보면 모든 학생들이 한결같이 서로 만나지 않는 두 직선이기 때문에 평행이라고 답하고 있다. 반면 평행이 아니라고 답한 학생들의 이유로는 두 직선이 만나고 있어서 라고 답한 학생이 대부분을 차지했으며, 그 다음으로 겹쳐 있어서, 서로 만나지는 않지만 곧게 있어야 평행이기 때문에, 두 선분이 마주보지 않아서 등의 이유를 제시하였다. 즉 평행이 아닌 것은 맞으나 대부분의 학생이 그 이유를 바르게 제시하지 않았음을 알 수 있다. 학생들은 공간상에서 만나지 않으면서 평행도 아닌 두 직선이 어떤 위치 관계인지 제대로 파악하지 못하고 있으며 오히려 두 직선이 그림 상에서 봤을 때 만나고 있다고 파악하는 오류를 범하고 있는 것이다. 다시 말하면 두 직선이 평행이라는 것은 두 직선이 같은 평면상에 있을 경우에 한해서 생각할 수 있는 것이라는 것을 놓치고 있다. 반면, 몇몇 학생들은 평행의 위치 관계에 있는 도형들의 성질을 유추하여 서로 곧게 있어야 하기 때문에, 마주봐야 하기 때문에 등의 바른 이유를 제시하기도 하였다.

지금 현재 교과서에서 평행은 4-나 단계에서 '한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않는다. 이와 같이, 서로 만나지 않는 두 직선을 평행이라고 한다. 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.' 라고 약속하고 있다. 이와 같은 약속하기는 공간 상에서 제시되는 이와 같은 직선의 경우에는 잘못된 방향으로 인식할 수 있는 여지가 있다. 따라서 학생들에게 평행에 대한

올바른 인식을 심어주기 위해서는 교과서의 약속하기에 '같은 평면상에 존재하는 두 직선의 경우' 라는 말을 추가로 제시할 필요가 있다. 그리고 교사는 수업시간에 약속하기의 조건에 해당하면서 학생들이 오개념을 가질 수 있는 평행에 대한 다양한 예를 제시해야 할 필요가 있다. 약속하기의 조건에 해당하는 예만을 제시하는 것은 이와 같이 학생들이 그 약속하기에 대한 어떤 오개념을 가지고 있는지 알 수 없게 한다. 그 약속하기에 해당하는 예와 해당하지 않는 반례를 다양하게 제공하고, 또 함께 찾아보기도 하는 것이 도형에 대한 정확한 개념 정립에 필수적일 것이라 여겨진다.

6. 각기둥에서 밑면, 옆면의 정의에 대한 학생 인식도 분석(9번 문제, 5-6학년)

질문내용	문항	5학년	6학년	합계
9. 다음 빈칸에 들어갈 말은 무엇인가요?	밑면	8.8	87.0	40.4
	옆면	2.9	0.0	1.8
	윗면	73.5	13.0	50.5
	기타	14.8	0.0	7.4
	합계	100	100	100

이 설문은 학생들이 각기둥에서의 밑면, 옆면의 정의에 대해 바르게 인식하고 있는지 조사하기 위해 제시되었다. 설문을 분석한 결과, 빈칸에 들어갈 말을 밑면이라고 답한 학생은 전체의 40.4%로 나타났으며, 옆면이라고 답한 학생은 1.8%, 윗면이라고 답한 학생은 50.5%로 나타났다. 그리고 특이한 것은 5학년의 경우 73.5%의 학생이 윗면이라고 답한 반면, 6학년의 경우 87.0%의 학생이 밑면이라고 답하였다. 이는 학년에 따른 현상이라기보다는 각 학년의 담임교사가 어떻게 가르쳤는지에 따라 답이 다르게 나온 것이라 생각된다.

밑면이라고 답한 학생들의 이유를 분석해보면, 위와 아래에 있는 면은 밑면이라고 하니까 라고 답한 학생이 가장 많았으며, 그 밖에 밑으로 돌리면 밑면이기 때문에, 옆면과 수직이기 때문에 라고 답하는 학생도 다수 있었다. 옆면이라고 답한 학생은 5학년에 1명 존재하는데, 이 학생은 옆면과 똑같은 면이기 때문이라고 답하고 있다. 또한 윗면이라고 답한 학생들은 그 이유로 모든 학생

들이 위에 있는 면이기 때문이라고 답하였다.

지금 현재 교과서에서는 5-가 단계에서 밑면을 '직육면체에서 색칠한 두 면처럼 계속 늘여도 만나지 않는 두 면을 서로 평행이라고 하고, 이 두 면을 밑면이라고 한다.'라고 약속하고 있으며, 옆면은 '직각으로 만나는 두 면을 서로 수직이라고 한다. 직육면체에서 밑면과 수직인 면을 옆면이라고 한다.' 라고 약속하고 있다. 그러나 이와 같은 약속하기에도 불구하고 학생들은 거의 대부분이 위와 아래에 있는 면을 밑면이라고 하거나 위에 있는 면은 윗면, 아래에 있는 면은 밑면이라고 생각하고 있음을 알 수 있었다. 이는 교과서에서 그 예로 제시되는 밑면의 예가 학생들의 머릿속에 정형화되어 약속하기에 제시된 밑면, 옆면의 정의를 보고 문제를 해결하기 보다는 약속하기와 다양한 활동에 제시되는 밑면, 옆면의 모습을 자신의 머릿속에 이미지로 구성하고 이 이미지를 이용하여 문제를 해결하기 때문인 것으로 생각된다. 그리고 일반적으로 각기둥의 겉넓이와 부피를 구할 때에도 위와 아래에 있는 면을 밑면이라고 가정하여 문제를 해결하기 때문에 학생들이 잘못된 오개념을 형성하였을 가능성도 있다. 따라서 교과서의 약속하기에 정형화된 도형을 제시하기 보다는 오개념을 가질 수 있는 다양한 모양의 도형을 제시하여야 한다고 생각한다. 교과서의 약속하기에 제시된 도형은 경우에 따라 학생들의 이해를 돕기도 하지만 그와 더불어 학생들의 오개념 형성에도 영향을 끼친다는 점을 염두에 두어야 할 것이다. 그리고 겉넓이와 부피를 구하는 문제에서는 당연히 위와 아래에 있는 면은 밑면이고 옆에 있는 면은 옆면이라고 가정하여 문제를 풀지 않고 상황에 따라 밑면과 옆면은 달라질 수 있음을 교사는 항상 염두에 두고 지도할 필요가 있다.

지금 우리의 교과서는 도형 영역의 정의에서 너무 방향성이 가미된 용어를 사용하는 경향이 있다. 밑면, 윗변, 아랫변 등 방향성이 가미된 용어는 학생들로 하여금 밑에 있는 면, 위에 있는 변으로 오해하게 할 가능성이 있는 것이다. 오히려 밑면이라는 용어 대신 기준면, 기초면 등 그 의미에 기초한 용어를 사용하도록 하는 것이 오개념을 줄일 수 있을 것이라 생각된다. 항상 기존에 사용해 온 용어를 고수하는 것은 학생들이 기존에 가지고 있는 용어에 대한 혼란은 줄일 수 있을지 모르지만 이 문제에서 나타난 학생들의 개념 정의에 대한 오류와 혼란은 줄일 수 없을 것이다.

7. 전개도의 정의에 대한 학생 인식도 분석(10번 문제: 5-6학년, 12번 문제: 6학년)

질문내용	문항	5학년	6학년	합계
10. 다음 전개도를 직육면체의 전개도라고 할 수 있나요?	예	11.8	8.7	10.5
	아니오	58.8	73.9	64.9
	모르겠다	14.7	13.0	14.0
	기타	14.7	4.3	10.5
	합계	100	100	100

이 설문은 학생들이 직육면체의 전개도에 대해 바르게 인식하고 있는지 알아보기 위해 접어서 맞추었을 경우 직육면체가 되기는 하나 그 모서리 부분을 잘라 펼친 모양이 아닌 특이한 모양의 도형을 제시하여 이것이 직육면체의 전개도가 될 수 있는지 질문하였다. 설문 분석 결과, 직육면체의 전개도가 맞다고 답한 학생은 전체의 10.5%에 해당하는 것으로 나타났으며, 직육면체의 전개도가 아니라고 답한 학생은 64.9%로 나타났다. 그리고 생소한 전개도의 모양으로 인해 잘 모르겠다고 대답한 학생도 13.9%나 되는 것으로 나타났다. 학년별로 분석해보면, 6학년에서 직육면체의 전개도라고 답한 학생은 줄어들었으며, 직육면체의 전개도가 아니라고 답한 학생은 늘어났다.

각 대답의 이유를 분석해보면, 직육면체의 전개도가 맞다고 답한 학생들은 모두 직육면체가 만들어져서, 접어서 해보면 될 수 있다고 답하였다. 이 학생들은 전개도에 대한 기본적인 개념을 가지고 있으며 머릿 속에서 전개도를 접어 도형을 만드는 공간지각능력도 어느 정도 가지고 있는 편이나 교과서의 약속하기에 제시된 정의가 덜 엄밀하게 제시됨으로 인해 직육면체의 전개도에 대해 잘못된 인식을 가지고 있는 것으로 보인다. 한편, 직육면체의 전개도가 아니라고 답한 학생들은 그 이유로 면이 6개여야 하는데 그렇지 않아서, 합동인 면이 있기는 하지만 3쌍이 아니어서 라는 바른 이유를 제시한 학생들도 있었지만 접어보면 구멍이 뚫려 있어서, 전개도 중 짤린 부분이 있어서, 모양이 이상해서, 겹치는 부분이 있어서, 패인 곳이 있어서, 접어보면 아니다, 이런 전개도는 없다 등 바르지 않은 이유를 들어 직육면체의 전개도가 아니라고 답한 학생이 더

욱 많았다. 이 사실을 통해 2번을 택한 학생 중 대부분이 이 전개도를 접어서 직육면체가 된다는 사실을 모르고 있음을 알 수 있으며 오히려 생소한 모양의 전개도라고 하여 직육면체의 전개도가 아닐 것이라고 생각하고 있음을 알 수 있었다. 하지만 2번을 택한 학생 중 몇몇의 학생은 직육면체의 전개도의 성질(면이 6개이다, 합동인 면이 3쌍이 있다.)에 착안하여 직육면체의 전개도가 아니라는 사실을 바르게 이끌어내기도 하였다.

현재 교과서에서는 직육면체의 전개도를 5-가 단계에서 '아래 그림은 직육면체를 펼쳐서, 접혔던 부분을 점선으로 나타낸 것이다. 이와 같이, 직육면체를 펼펴서 평면에 그린 그림을 직육면체의 전개도라고 한다.' 라고 약속하고 있다. 그러나 이 약속하기는 이 질문에 제시된 도형을 직육면체의 전개도라고 오해할 수 있는 여지를 가지고 있다. 따라서 6-가 단계에 제시된 각기둥의 정의 '그림과 같이 각기둥의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림을 각기둥의 전개도라고 한다.' 를 참고하여 직육면체의 전개도의 약속하기에 '모서리를 펼쳐서' 라는 말을 추가로 제시해야 학생들의 오개념을 줄일 수 있을 것이다. 그리고 교사는 수업 시간에 이 문제에서 제시된 그림과 같이 학생들에게 개념에 대한 혼란을 야기할 수 있는 예들을 많이 제시하고 그 과정에서 함께 직육면체의 전개도가 아닌 이유를 찾아보는 활동을 함께 함으로써 학생들이 오개념을 갖지 않도록 지도해야 한다. 즉, 정의에 대해 모호하면서도 반례가 될 수 있는 예들을 가능한 한 많이 제시하며 지도해야 그 정의에 대해 학생들이 확실한 개념을 형성할 수 있을 것이다.

질문내용	문항	6학년
12. 다음 전개도를 사각뿔의 전개도라고 할 수 있나요?	예	73.9
	아니오	17.4
	모르겠다	0.0
	기타	8.7
	합계	100

이 설문은 사각뿔의 전개도에 대한 학생들의 인식도를 조사하기 위해 일반적으로 변이 붙어있는 형태의 전개도가 아닌 점으로 연결되어 있는 형태의 전개도를 제시하여 이것을 사각뿔의 전개도라고 할 수 있을지 물어보았다. 설문 분

석 결과, 사각뿔의 전개도가 맞다고 답한 학생은 73.9%로 나타났으며, 사각뿔의 전개도가 아니라고 답한 학생은 17.4%로 나타났다.

사각뿔의 전개도가 맞다고 답한 학생들은 그 이유로 만들어보면 사각뿔이 되기 때문에 라고 답한 학생이 가장 많았으며, 밑면이 1개이고 옆면이 4개여서, 옆면과 밑면이 있어서 라고 답한 학생들도 있었다. 사각뿔의 전개도가 아니라고 답한 학생들은 옆면이 붙어있지 않아서, 밑면에 붙어있어야 되기 때문에 등의 이유를 제시하였다. 많은 수의 학생들이 사각뿔의 전개도가 된다고 생각하고 있으나, 몇몇의 학생들은 기존에 자주 제시되어왔던 전개도의 모양에 의존하여 사각뿔의 전개도가 될 수 없다고 생각하는 것으로 보인다.

이러한 사각뿔의 전개도는 한 점에서 접한 모양의 도형으로 점에서 접해 있는 모양도 전개도로 볼 수 있는지 의문을 제기하게 한다. 현재 초등 수학 교과서에는 각뿔의 전개도를 '그림과 같이 각뿔의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림'이라고 약속하고 있다. 이러한 약속하기의 기준에 맞추어 봤을 때는 이 전개도를 사각뿔의 전개도로 볼 수 있는지 확실히 규정하기 힘들다. 제 7차 교육과정에서는 <그림 Ⅳ-12>처럼 한 점에서 접해 있는 직육면체의 전개도는 전개도로 인정하지 않지만 <그림 Ⅳ-13>와 같은 도형은 한 점에서 접해 있지만 원기둥의 전개도라고 약속하고 있자. 따라서 이 문제의 경우처럼 한 점에서 접하는 사각뿔의 전개도를 사각뿔의 전개도라고 규정할 수 있는지에 대해서는 오류와 혼란이 있을 수 있는 만큼 어느 범위까지를 전개도로 인정할 수 있는지에 대한 논의와 연구가 더 필요하다고 하겠다.

8. 높이의 정의에 대한 학생 인식도 분석(11번 문제, 5-6학년)

질문내용	문항	5학년	6학년	합계
11. 선분ㄱㄴ을 평행사변형의 높이라고 할 수 있나요?	예	20.6	17.4	19.3
	아니오	47.1	52.2	49.1
	모르겠다	11.8	21.7	15.8
	기타	20.6	8.7	15.8
	합계	100	100	100

이 설문은 평행사변형의 높이의 정의에 대한 학생들의 인식도를 조사하기 위해 일반적으로 높이라고 제시되는 위치가 아닌 이 문제에 제시된 위치의 높이

를 제시하여 이것도 평행사변형의 높이가 될 수 있는지를 질문하였다. 설문 분석 결과, 높이가 될 수 있다고 답한 학생은 전체의 19.3%에 지나지 않는 것으로 조사되었으며, 높이가 될 수 없다고 답한 학생은 전체의 49.1%나 되는 것으로 나타났다. 그리고 오히려 6학년에서 높이라고 답한 학생의 비율은 줄어들고, 높이가 아니라고 답한 학생의 비율은 늘어났으며, 잘 모르겠다고 답한 학생의 비율은 5학년과 비교했을 때, 거의 2배에 달하는 것으로 나타났다.

평행사변형의 높이가 될 수 있다고 답한 학생들은 그 이유로 선분에서 수직으로 이어졌기 때문에, 옆으로 뒤집었을 때 수직이니까 라는 응답이 대부분을 차지하였다. 반면 평행사변형의 높이가 될 수 없다고 답한 학생들은 높이는 가로로 하지 않고 세로로 하기 때문에, 방향이 잘못 되어서 라는 이유를 제시한 학생이 가장 많았으며 꼭지점이 있는 곳에 꽂혀야 되기 때문에, 대각선이니까 라는 답을 제시한 학생들도 상당수 있었다. 이 조사로부터 학생들은 높이는 위에 위치한 변에서 밑에 위치한 변에 수직으로 그은 선분의 길이라고 오해하는 경향이 있음을 알 수 있었다. 또한 높이라면 꼭지점이 있는 부분에 닿아야 한다든지 방향이 문제에서 제시된 것처럼 되어 있는 경우에는 대각선이라고 생각하는 오개념을 가지고 있음을 알 수 있었다.

현재 교과서에서는 평행사변형의 높이를 5-가 단계에서 ‘평행사변형에서 평행한 두 변을 밑변이라 하고, 두 밑변 사이의 거리를 높이라고 한다.’ 라고 약속하고 있다. 하지만 이 약속하기에서 제시된 도형을 비롯하여 활동과 익히기에서 제시되는 도형들이 모두 위에서 아래로 수직으로 그은 선분이 길이가 높이가 되는 형태의 도형들을 자주 제시하는 것에 기인하여 학생들이 높이에 대한 잘못된 이미지를 형성하게 된 것으로 추측된다. 학생들에게 다양한 모양의 도형을 제시하고 이 과정에서 높이는 위에서 아래로 내리는 것이 아닌 밑변의 위치에 따라 높이의 위치가 달라질 수 있음을 주의시켜야 한다. 그리고 문제 9번에서 논의된 내용과 마찬가지로 방향성이 가미된 밑면과 같은 용어를 사용하기 보다는 기준변, 기초변 등의 개념이 가미된 용어를 사용하여 학생들의 혼란을 줄이는 방향을 생각해 보아야 할 것이다.

VI. 결론 및 제언

초등학교 수학 도형 영역에서의 정의는 다른 도형 영역의 수많은 활동을 하기 위한 기본이 된다. 이 점에서 도형 영역에서의 정의를 확실히 인식하는 일은 도형 학습의 기초가 된다고 할 수 있다. 그러나 학교수학에서의 정의는 순수 수학적인 정의와는 달리 덜 엄밀한 방법으로 제시되기 때문에 학생들에게 오개념을 형성하게 할 가능성이 있다. 이에 따라 교사는 항상 교과서의 내용을 지도함에 있어 순수 수학적인 의미의 정의를 알고 이에 따라 교과서에 제시된 정의의 학습에서 생길 수 있는 학생들의 다양한 오개념의 가능성을 염두에 두고 지도를 해야 한다.

지금까지 앞선 분석을 통해 초등 수학 도형 영역의 정의에 관한 학생들의 인식도를 조사하여 분석하였고, 이를 바탕으로 개선방향에 대해서도 알아보았다. 이를 바탕으로 도형 영역의 정의에 대한 학습과 지도에서의 유의점에 대해 요약한 내용은 다음과 같다.

첫째, 초등수학에서의 도형 영역의 정의를 좀더 엄밀한 의미의 정의로 수정할 필요가 있다. 현재 학교수학에서의 정의는 순수 수학적인 정의와는 달리 덜 엄밀한 방식으로 정의하는 것을 허용하고 있다. 이는 초등학생의 인지능력을 고려한 것으로 학생들이 정의에 대해 더 이해하기 쉽도록 한 것이다. 그러나 이러한 이유로 인해 덜 엄밀하게 약속된 정의들은 상황에 따라 학생들의 오개념을 일으키는 주된 이유가 되기도 한다. 앞선 설문에서 각에 대한 정의, 원에 대한 정의, 사각형에 대한 정의, 전개도에 대한 정의 들을 살펴보면 덜 엄밀한 방식의 정의들이 어떻게 오개념을 형성하는지 알 수 있었다. 따라서 학교수학의 상황을 고려하면서 오개념 형성의 가능성이 있는 정의들은 좀더 엄밀한 방법으로 수정할 필요가 제기된다. 또한 저학년 단계에서 낮은 수준의 언어로 약속된 정의는 학년이 올라감에 따라 필요한 경우 같은 용어라 할지라도 다시 재정의 할 필요가 있다. 한번 약속된 정의는 학생들의 머릿 속에 이미지로 굳혀져 다시 학습하지 않는 한 오개념이 개선되지 않음을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 따라서 학년이 올라감에 따라 높은 수준의 정의로 다시 약속해줄 필요가 있다. 그리고 교사는 도형 영역의 정의를 지도할 때 항상 상위 수준의 순수 수

학적인 정의를 염두에 두면서 학생들의 오개념이 형성되지 않도록 주의하며 지도하여야 한다.

둘째, 교과서에 제시되어 있는 정의가 활동에서 사용될 때에도 그 의미의 일관성을 유지하도록 수정되어야 한다. 학교수학에서의 정의는 상황에 따라서 그 의미의 해석이 달라지기도 하기 때문에 '맥락 의존적 정의'라고 불린다. 하지만 이렇게 상황에 따라 해석이 달라지는 정의는 학생들의 오류와 혼란의 원인이 되기도 한다. 따라서 활동에서 제시되는 용어의 개념이 약속하기에 제시된 정의의 내용과 그 의미의 일관성을 유지하도록 교과서의 활동에서 제시되는 용어를 수정하고 교사도 항상 주의하여 지도하는 일이 필수적이다.

셋째, 도형의 정의와 활동을 지도할 때 가능한 한 다양한 예를 활용하여 지도할 것을 강조한다. 초등수학에서 수학적 개념의 형성은 주로 활동을 통해서 형성되며 또한 활동에 사용된 대상들은 학생들의 개념 이미지 형성에 많은 영향을 준다. 따라서 교과서에서 그리고 교사가 어떤 활동을 구성하고 어떤 예를 제시하느냐에 따라 학생들이 구성하는 이미지는 큰 영향을 받게 되어 있다. 그러나 현재 교과서와 교사가 제시하는 예는 너무 정형화되어 있어 학생이 그 활동과 예로부터 정의에 대한 올바른 인식을 갖기는 힘들다. 다양한 예를 제공하고, 반례들을 다양하게 제시하며, 학생들에게 오개념의 가능성이 있는 예들을 제시하여 정의에 대한 정확한 인식을 이끌어내야 한다.

넷째, 올바른 개념 정립에 도움이 되는 방향으로 수학 교과서의 도형 영역에서 제시되는 용어들을 바꿀 필요가 있다. 현재 교과서에서 사용되는 밑면, 옆면, 밑변, 높이 등의 용어들은 방향성을 가진 용어로서 그 실제 의미와는 차이가 있다. 따라서 학생들은 그 용어 자체가 지닌 방향성의 의미로 인해 그 실제 정의에 대한 오개념을 형성하고 있음을 본 연구를 통해 알 수 있다. 따라서 그 의미에 해당하는 내용을 담을 수 있는 용어로 교체하는 일이 필요하다.

학교수학에서의 정의는 그 특수한 상황으로 인해 여러 가지 특징을 가진다. 하지만 이러한 특징들이 학생들의 정의에 대한 올바른 인식 정립에 방해가 된다면 교과서의 내용을 재구성하고 교사의 지도방법을 수정해 가는 노력이 필수적이라고 생각한다. 앞으로 초등 수학 교과서의 도형 영역 지도 내용에 대한 재구성과 교사의 올바른 지도방법에 대한 연구가 계속되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부(2004). **수학 <1-가> 단계 ~ <6-나> 단계 교과서**. (주)대한교과서 주식회사.

최근배·오숙경(2008). **초등수학 도형영역에 제시된 정의에 대한 고찰**, 제주교육대학교 석사과정 논문

우정호(2000). **수학교육학의 지평**. 413-414

박교식·임재훈(2004). **다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석**. 수학교육학연구, 14(1), 19-37.

우정호·조영미(2001). **학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구**. 수학교육학연구, 11(2), 363-384.

강홍규·조영미(2002). **학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의**. 수학교육학연구, 12(1), 95-107

조영미(2001). **학교수학에 제시된 정의에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

조영미(2002). **수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성분석과 수준탐구**. 학교수학, 4(1), 15-27.

Beth, E. & Piaget, J. (1961), W. Mays(trans.) (1966), *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht: D. Reidel.

Evan M. Maletsky et al. (2002). *Harcourt Math* (Math-Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6), Harcourt, Inc.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dortrecht: Reidel.

Rich, B. (1963) (revised by Philip A. Schmidt) (2000). Schaum's outlines *Geometry* (3rd Edition), McGraw-Hill Companies, Inc.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Computer Graphics*, Ph.D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Tall, D. (1991). **고등수학적사고**. (류희찬·조완영·김인수 역). 서울: 경문사

A B S T R A C T

Students' conceptual cognition related to the definitions in the area of geometry of elementary school mathematics

Ko, Jin A

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Cheju National University

Supervised by Professor KeunBae Choi, Ph. D

Elementary school students acquired the concepts of mathematical definition by the promising which is mathematics textbook and is learned by teachers. Elementary school students learned other concepts by using the concepts which have been acquired former days. And students solve questions and prove the qualities of a geometry by using the concepts. Therefore, students have difficulty in learning correct conceptual cognition about the other concepts if they don't acquired correct conceptual cognition related to the basic definitions in the area of geometry. And it make possibilities of creating errors in other mathematical activities about the area of geometry. This research discusses students' conceptual cognition related to the definitions in the area of geometry of elementary school mathematics

Prior to the research of the Students' conceptual cognition, I studies the theories related to the definitions in the area of geometry of elementary school mathematics. I analyzed the problem about definitions in the area of geometry in mathematics textbooks in primary school from the seventh educational curriculum.

and the problem is proposed as the problem by using less strict definition, the problem about the consistency of meaning in promising and related activities, the problem by not proposing variously the example about the definition in the area of geometry and the problem by using vocabulary with directions.

On the basic of the problems, a survey consisted of problem related to definition about square, circle, figure, angle, parallel, the basic side of a figure, development figure and the height of parallelogram. The survey was conducted on primary school students from second to sixth grade in Jeju and it presented differently by a grade. I analyzed students' conceptual cognition related to the definitions in the area of geometry by using the survey and researched on the reason and improvements.

Here, several improvements is proposed as follows analyzing students' conceptual cognitions. First, the definitions in the area of geometry of elementary school mathematics is modified to definitions of more strict meaning. Second, vocabulary is modified for keeping the consistency of meaning when the definition is used in activities. Third, teacher must teach by various example so far as possible when they teach the definition and activities. Fourth, the vocabulary with directions is changed for acquiring correct conceptual cognition.

Given synthesizing the above, modifying the definition of textbook and the teaching method is material to acquiring correct conceptual cognition. Mathematical education in schools has employed mathematical concepts and definitions with less strict forms than those in mathematical science for suitable in school ground. Therefore, that's why modifying the definition of textbook is material by continual research. And teachers must teach students with something in mind clear and accurate meanings of concepts and research about teaching methods with something in mind students' conceptual cognition related to the definitions

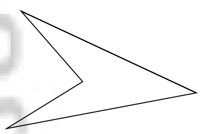
<부록 1> 학생용 설문지

안녕하십니까? 이 설문지는 교과서에 제시된 약속하기에 대해 여러분들이 잘 알고 있는지 조사하고 분석하여 더 나은 지도방향을 연구하기 위한 설문지입니다. 여러분의 답변은 본 연구에 많은 도움을 줄 것이며 본 연구 이외에는 다른 목적에 사용하지 않을 것을 약속드립니다. 2008. 9 제주대학교 교육대학 교육대학원 고 진 아 드림

< 6학년용 >

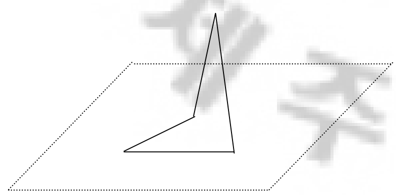
<약속하기> 4개의 선분으로 둘러싸인 도형을 사각형이라고 합니다.

1. 다음 도형을 사각형이라고 할 수 있나요? (약속하기 참고!)



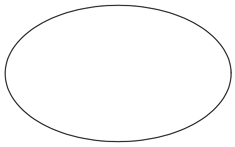
① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

2. 다음 도형을 사각형이라고 할 수 있나요? (약속하기 참고!)



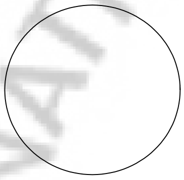
① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

3. 다음 도형을 원이라고 할 수 있나요?

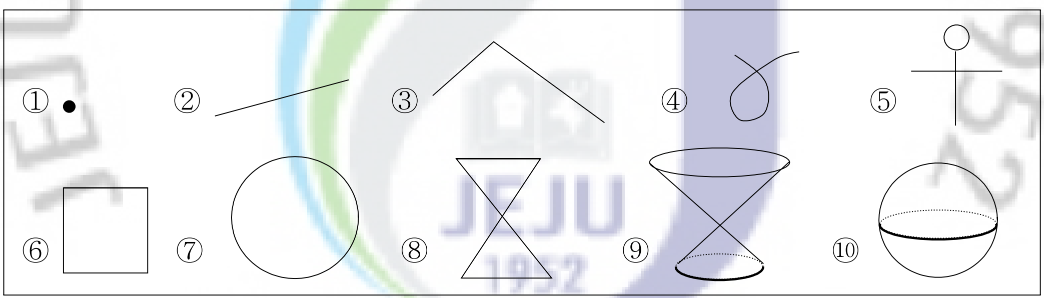


① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

4. 다음 원 위에 점을 찍어 보세요.



5. 다음 중 도형을 모두 찾아보세요.

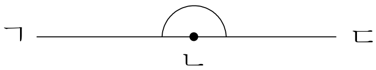


( )

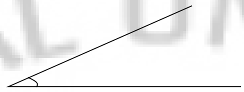
※ 도형이 아닌 것이 있다면, 그 기호와 이유를 적어보세요.

기호	이 유	기호	이유

6. 다음 도형을 각이라고 할 수 있나요? (약속하기 참고!)



<약속하기> 한 점에서 그른 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다.

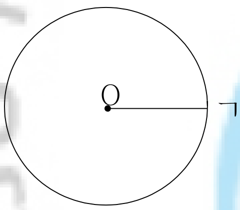


① 예(이유:)

② 아니요(이유:)

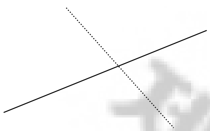
③ 모르겠다.(이유:)

7. 다음 중 원의 반지름을 찾아보세요.

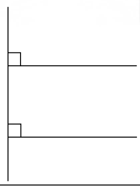


① 3㎝ ② 선분 ㄱㅇ

8. 다음 두 직선을 평행이라고 할 수 있나요? (약속하기 참고!)

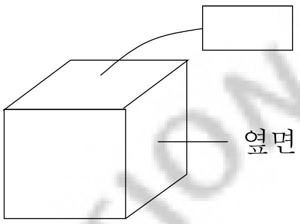


<약속하기> 한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않습니다. 이와 같이, 서로 만나지 않는 두 직선을 평행이라고 합니다.



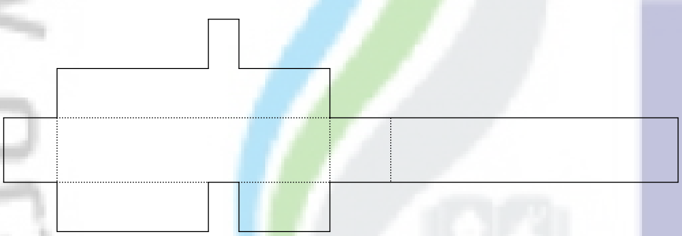
① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

9. 다음 빈칸에 들어갈 말은 무엇인가요?



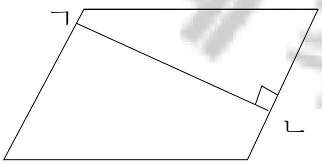
답: (이유:)

10. 다음 전개도를 직육면체의 전개도라고 할 수 있나요?



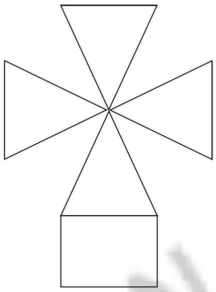
① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

11. 선분 ㄱㄴ을 평행사변형의 높이라고 할 수 있나요?



① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

12. 다음 전개도를 사각뿔의 전개도라고 할 수 있나요?



① 예(이유:)
② 아니요(이유:)
③ 모르겠다.(이유:)

※다른 학년 설문지는 각 학년에서 배운 내용을 고려하여 2학년은 1~5번, 3학년은 1~6번, 4학년은 1~7번, 5학년은 1~11번, 6학년은 1~12번의 내용으로 구성하였다.

<부록 2> 제 7차 교육과정 초등 수학교과서의 도형영역에 제시된 약속하기의 도입순서 및 수준

단계	용어	약속하기	수준
1-가	상자 모양	시각적 외형을 지시 (그림으로 제시)	제 0수준
	둥근기둥 모양		
	공 모양		
1-나	네모	시각적 외형을 지시 (그림으로 제시)	제 0수준
	세모		
	동그라미		
2-가	선분	두 점을 곧게 이은 선	제 0수준
	직선	선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선	제 0수준
	사각형	4개의 선분으로 둘러싸인 도형	제 1수준
	삼각형	3개의 선분으로 둘러싸인 도형	제 1수준
	(사각형, 삼각형에서)변, 꼭지점	(그림제시)	제 0수준
	원	본을 떠 그린 동그란 모양의 도형	제 0수준
3-가	각	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형	제 1수준
	(각에서) 꼭지점, 변	(그림제시)	제 0수준
	직각	삼각자의 코너부분을 본 떠 그린 그림을 제시	제 0수준
	직각삼각형	한 각이 직각인 삼각형	제 1수준
	직사각형	네 각이 모두 직각인 사각형	제 1수준
	정사각형	네 각이 모두 직각이고, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형	제 1수준
3-나	원의 중심	원을 그릴 때에 누름 못이 꽂혔던 점	제 0수준
	원의 반지름	원의 중심 ㅇ와 원 위의 한 점을 이은 선분 ㄱㅇ(그림에서)	제 1수준
	원의 지름	원의 중심을 지나는 선분 ㄱㄴ(그림에서)	제 1수준
4-가	이등변 삼각형	두 변의 길이가 같은 삼각형	제 1수준
	정삼각형	세 변의 길이가 같은 삼각형	제 1수준
	예각	직각보다 작은 각	제 1수준
	둔각	직각보다 크고, 180°보다 작은 각	제 1수준
	예각삼각형	세 각이 모두 예각인 삼각형	제 1수준

단계	용어	약속하기	수준
	둔각삼각형	한 각이 둔각인 삼각형	제 1수준
4-나	수직	두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직	제 1수준
	수선	두 직선이 수직일 때, 한 직선을 다른 직선에 대한 수선	제 1수준
	평행	한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않습니다. 이와 같이, 서로 만나지 않는 두 직선	제 1수준
	평행선	평행인 두 직선	제 1수준
	평행선 사이의 거리	평행선 사이의 수직인 선분의 길이	제 1수준
	사다리꼴	마주 보는 한 쌍의 변이 서로 평행인 사각형	제 1수준
	평행사변형	마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형	제 1수준
	마름모	네 변의 길이가 모두 같은 사각형	제 1수준
	다각형	선분으로만 둘러싸인 도형	제 1수준
	정다각형	변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형	제 1수준
	대각선	다각형에서 선분 ㄱㄷ(그림에서)과 같이 이웃하지 않은 두 꼭지점을 이은 선분	제 1수준
5-가	직육면체	그림과 같이 직사각형 6개로 둘러싸인 도형	제 1수준
	(직육면체에서)면	직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형	제 1수준
	(직육면체에서)모서리	직육면체의 면과 면이 만나는 선분	제 1수준
	(직육면체에서)꼭지점	직육면체의 세 모서리가 만나는 점	제 1수준
	정육면체	크기가 같은 정사각형 6개로 둘러싸인 도형	제 1수준
	(직육면체에서) 두 면의 평행	직육면체에서 색칠한 두 면처럼(그림제시) 계속 늘여도 만나지 않는 두 면을 서로 평행	제 1수준
	(직육면체에서)밑면	직육면체에서 서로 평행인 두 면	제 1수준
	(직육면체에서)두	직각으로 만나는 두 면	제 1수준

단계	용어	약속하기	수준
	면의 수직		
	(직육면체에서) 옆면	밑면과 수직인 면	제 1수준
	직육면체의 겨냥도	오른쪽 그림은 직육면체의 모양을 잘 알 수 있도록 하기 위해 평행인 모서리는 평행이 되게 그리고, 보이는 모서리는 실선으로, 보이지 않는 모서리는 점선으로 그린 것입니다. 이러한 그림	제 0수준
	직육면체의 전개도	아래 그림은 직육면체를 펼쳐서, 접혔던 부분을 점선으로 나타낸 것입니다. 이와 같이 직육면체를 펼쳐서 평면에 그린 그림	제 0수준
	(평행사변형에서)밑변	평행사변형에서 평행한 두 변	제 0수준
	(평행사변형에서)높이	두 밑변 사이의 거리	제 1수준
	(삼각형에서)밑변	삼각형 ㄱㄴㄷ에서 변ㄴㄷ(그림에서)	제 0수준
	(삼각형에서)높이	꼭지점 ㄱ에서 밑변에 수직으로 그은 선분 ㄱㄹ(그림에서)	제 1수준
	합동	모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 두 도형	제 0수준
	대응점	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 꼭지점	제 0수준
	대응변	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 변	제 0수준
	대응각	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 각	제 0수준
5-나	선대칭도형	오른쪽과 같이 어떤 직선으로 접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭도형	제 0수준
	선대칭의 위치에 있다, 선대칭의 위치에 있는 도형	삼각형 ㄱㄴㄷ과 삼각형 ㄹㅁㅂ이 직선 ㅅㅇ을 따라 접어서 완전히 포개어질 때, 두 도형은 직선 ㅅㅇ 에 대하여 선대칭의 위치에 있다, 두 도형은 선대칭의 위치에 있는 도형	제 1수준

단계	용어	약속하기	수준
	대칭축	위의 정의에서 직선 ㅅㅇ	제 0수준
	점대칭도형	한 점을 중심으로 180° 돌렸을 때, 처음 도형과 완전히 겹쳐지는 도형	제 0수준
	점대칭의 위치에 있다, 점대칭의 위치에 있는 도형	위와 같이(활동-그림제시) 점 ㅇ을 중심으로 180° 돌렸을 때, 완전히 포개어지는 두 도형	제 1수준
	대칭의 중심	위의 정의에서 점 ㅇ	제 0수준
6-가	입체도형	(그림으로 제시)	제 0수준
	각기둥	입체도형 가,나,아,자(활동-그림제시)와 같이 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형	제 1수준
	(각기둥에서)밑면	오른쪽 그림의 면 ㄱㄴㄷ과 면ㄹㅁㅂ과 같이 서로 평행인 두 면	제 1수준
	(각기둥에서)옆면	오른쪽 그림과 같이 밑면에 수직인 면	제 1수준
	(각기둥에서)모서리	각기둥에서 면과 면이 만나는 선	제 1수준
	(각기둥에서)꼭지점	각기둥에서 모서리와 모서리가 만나는 점	제 1수준
	(각기둥에서)높이	각기둥에서 두 밑면 사이의 거리	제 1수준
	삼각기둥, 사각기둥, 오각기둥 등	각기둥은 밑면의 모양에 따라	제 0수준
	각뿔	(그림으로 제시)	제 0수준
	(각뿔에서)밑면	오른쪽 그림의 사각뿔에서 면 ㄴㄷㄹㅁ	제 0수준
	(각뿔에서)옆면	오른쪽 그림과 같이 옆으로 둘러싸인 면	제 0수준
	(각뿔에서)모서리	오른쪽 그림과 같이 면과 면이 만나는 선	제 1수준
	(각뿔에서)꼭지점	오른쪽 그림과 모서리와 모서리가 만나는 점	제 1수준
	각뿔의 꼭지점	옆면을 이루는 모든 삼각형의 공통인 꼭지점	제 1수준
	(각뿔에서)높이	각뿔의 꼭지점에서 밑면에 수직인 선분의 길이	제 1수준
	삼각뿔,사각뿔,오각뿔	위의 그림과 같이 각뿔의 이름은 밑면의 모양에 따라	제 0수준
	각기둥의 전개도	그림과 같이 각기둥의 모서리를 잘라서 펼	제 0수준

단계	용어	약속하기	수준
		쳐 놓은 그림	
	각뿔의 전개도	그림과 같이 각뿔의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림	제 0수준
6-나	원기둥	그림과 같이 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 원으로 되어 있는 입체도형	제 1수준
	(원기둥에서)밑면 (원기둥에서)옆면	원기둥에서 위와 아래에 있는 면 원기둥에서 옆으로 둘러싸인 곡면	제 0수준 제 0수준
	(원기둥에서)높이	원기둥에서 두 밑면에 수직인 선분의 길이	제 1수준
	원기둥의 전개도	오른쪽 그림과 같이 원기둥을 펼쳐 놓은 그림	제 0수준
	원뿔	그림과 같이 밑면이 원이고 옆면이 곡면인 뿔 모양의 입체도형	제 1수준
	원뿔의 꼭지점	원뿔의 뾰족한 점	제 0수준
	모선	(그림제시)	제 0수준
	구	반원의 지름을 회전축으로 하여 1회전 한 회전체를 구, 이때 반원의 중심은 구의 중심, 반원의 반지름은 구의 반지름	제 1수준
	구의 중심		
	구의 반지름		
	단면	입체도형을 평면으로 잘랐을 때에 생기는 도형의 면	제 0수준
	원주	원의 둘레의 길이	제 0수준
	원주율	원에서 원주와 지름의 길이의 비는 일정합니다. 이 비율을	제 1수준