creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

초등수학 도형영역에 제시된 정의에 대한 고찰

A Study on the Definitions in the Area of Geometry of Elementary School Mathematics

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주교육대학교 교육대학원

초등수학교육전공

오 숙 경

2008 년 1 월

오숙경의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 인

심사위원 인

심사위원 인

제주교육대학교 교육대학원

2008년 1월

dCollection @ jeju

국 문 초 록

초등수학 도형영역에 제시된 정의에 대한 고찰

오 숙 경

제주교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 최 근 배

학교수학에서의 상황은 일상의 상황과는 달리 정의가 매우 중요한 역할을 하며, 수학적 개념은 주로 주어진 정의에 의해 획득된다. 그러나 학교수학에서는 수학에서의 정의의 방법을 그대로 사용하기 보다는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 수학 개념 및 정의가 제시되고 있다. 본 연구는 이러한 교수학적 변환과정으로 인한 오개념을 형성할 가능성의 문제에 대하여 초등수학 도형영역의 정의(약속하기)를 중심으로 논의하였다.

오개념의 가능성이 있는 문제에 대한 분석 후 제주도내 재직 중인 초등학교 교사 80명에게 도형영역의 수학적 개념의 의미 및 교수학점 관점에 대한 인식을 알아보는 설문을 실시하였다. 설문의 결과 대부분의 교사들의 도형영역 지도시 수학정의에 대해 숙고하여 지도하고 있다고 답하였으나 다각형과 원의 수학적 개념에 대해 혼동하는 경우가 있었다. 또한, 현행 교과서의 도형영역의 기술방식인 소주제별(차시별)로 도형을 다루고 있는 부분에 대해 많은 교사들이

dCollection @ jeju

문제인식을 하고 있었다.

교사인식도 분석 및 제 7차 초등수학교과서의 도형영역에 제시된 정의(약속하기)에 대하여 현행 초등수학교과서가 채택하고 있는 수학적 관점에 대한 연구 결과 나타난 문제의 개선점을 다음과 같이 제시한다.

첫째, 도형영역의 학습시 구체적 조작기 범주에 속한 초등학생들은 약속하기를 추출하기 위한 활동으로부터 획득된 이미지와 약속하기를 통해 형성된 이미지 사이의 충돌이 생길 수 있으므로 오개념의 가능성을 줄이는 교수방법이 요구된다. 즉, 개념 정의와 개념 이미지 사이의 의사소통 필요하다.

둘째, 초등학교 제시되어 있는 도형들과 그 구성요소에 대한 정의가 기하적인 정의에 바탕이 되는 기초용어와 어떻게 관련이 되었는지 생각해보고 보다 논리적인 접근방법을 채택해야 한다.

셋째, 도형을 취급하는 일관성의 문제에 대해 고려해야 한다.

넷째, 도형과 관련된 조어의 문제와 도입시기 방법에 따른 문제에 대해 분류하기 활동을 강조해야한다. 초등수학 특히 도형영역 지도시 수학적 사고력을 키우기 위한 중요한 내용이므로 관계적 이해의 관점에서 범주별로 도입하는 것이 교과서에 보다 강조되고, 교사는 이를 재구성하여 지도해야한다.

수학을 가르치는 교사는 학습자의 수준을 고려하여 초등수학의 도형영역 정의를 잘 익히도록 할 뿐 아니라 순수수학적 정의로 입문하는 연결 고리를 만들어 주어야한다. 그러므로 수학적 개념의 의미를 전달하는 교사는 그 개념이 지니고 있는 의미에 대해 명료하고 정확하게 알고 있어야 할 것이다.

※ 주요어 : 학교수학, 초등수학 도형영역, 정의, 교수학적 변환

dCollection @ jeju

목차

Collection @ jeju

Collection @ jeju

표 목차

Collection @ jeju

그림 목차

Collection @ jeju

Ⅰ. 서 론

학교수학에서의 상황은 일상의 상황과는 달리 정의가 매우 중요한 역할을 하며 수학적 개념은 주로 주어진 정의에 의해 획득된다.

Vinner(1991)는 수학에서의 정의의 역할과 가정을 다음과 같이 제시하고 있다(Tall, 1991, p.88).

첫째, 수학적 개념은 주로 정의에 의하여 획득된다.

둘째, 학생들은 정의를 이용해서 문제를 해결하고 정리를 증명한다.

셋째, 정의는 최소한으로 서술되어야 한다. 즉, 정의는 그 정의의 일부분으로부터 수학적으로 추론 가능해서는 안 된다. 예를 들어, 직사각형을 정의할 때, '네 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의 보다는 '세 개의 직각을 갖는 사각형'이라는 정의가 바람직하다.

넷째, 세련된 정의가 바람직하다. 이를테면, 소수(prime number)를 정의할 때, '1보다 큰 수로 1과 그 자신에 의해서만 나누어지는 수'보다는 '두 개의 서로 다른 약수만을 갖는 수'로 정의하는 것이 더 우아한 것이라고 여긴다.

다섯째, 정의의 임의적이다. 즉, 정의는 '사람이 만든' 것으로 수학적 개념들은 정의에 따라 개념들 사이의 관계 또는 구조가 형성된다.

이러한 다섯 가지의 가정은 학생들의 일반적인 인지적 능력(단계)을 염두에 두지 않은 수학적 입장의 측면만을 고려한 것이다. 즉, 순수수학적 상황에서의 정의는 엄밀하게 제시되나 학교수학에서는 교수학적 변환과정으로 인한 오개념 형성의 가능성이 항상 존재한다. 많은 경우, 학교수학에서는 수학에서 사용하는 정의의 방법으로 그대로 사용하기 보다는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 제시된다(우정호・조영미, 2001). 그렇다면 덜 엄밀하게 제시된 학교수학에서의 용어 및 정의의 내용이 교사와 학생들의 오개념을 형성할 가능성에 대한 연구가 필요하다고 여겨진다.

또한, 제 7차 교육과정 초등수학교과서에서의 정의(약속하기)의 도입방법은 최근의 학교수학에서의 경향에 편승하여 실생활과 관련되어 있다. 따라서 수학화 활동이 강조되면서 정의를 활동으로 지도하는 방안에 대한 교수학적 연

Collection @ jeju

구가 있어왔다(Freudenthal, 1973). 학교 수학 수업에서 사용하는 교과서가 주된 텍스트라는 우리의 현실을 살펴볼 때 수학 교과서에 실린 도형의 영역의 정의 방법이 얼마나 수학화의 활동을 강조하고 있는지 살펴보는 것도 의미있는 일일 것이다.

따라서 본 연구에서는 제 7차 초등수학교과서의 도형영역에 제시된 정의(약속하기)에 대하여 현행 초등수학교과서가 채택하고 있는 수학적 정의의 관점을 살펴보고, 현행 수학교과서의 관점을 채택했을 시 교사들에게 나타날 수 있는 수학적 개념 오류에 대한 가능성을 조사하여 초등수학 도형영역 지도시 오개념 형성의 가능성이 있는 내용에 대한 개선방법을 고찰해보고자 한다.

Ⅱ. 연구 절차, 내용 및 연구 방법

1. 연구 절차

가. 제 7차 교육과정 도형영역 개념정의 분석 : 2007. 3. 1 ~ 8. 31

나. 제 7차 교육과정 도형영역 개념 정의에 대한 교사 인식도 조사

: 2007. 9. 1 ~ 2007. 9. 20

다. 도형영역의 오개념 가능성 및 개선방안 연구 : 2007. 10. 1 ~ 11. 30

2. 연구 내용 및 방법

가. 제 7차 교육과정 도형 영역 개념 정의 분석

van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 용어 정의 수준에 따른 도형의 도입 시기 및 순서를 분류하고 학교 수학에서 사용되는 용어의 정의의 특성에 대해 살펴본 후 이를 토대로 제 7차 교육과정 초등 수학교과서 및 교사용 지도서의 도형영역의 정의(약속하기)에 대해 분석하여 문제점을 도출한다.

Collection @ jeju

나. 제 7차 교육과정 도형영역 개념 정의에 대한 교사 인식도 조사

현장에서 수학을 지도하고 있는 교사들에게 현재의 교과서에서 다루고 있는 수학적 정의에 대한 관점 및 오개념의 가능성이 있는 용어에 대한 인식을 설문을 통해 조사한다.

설문은 제주도내에 재직하고 있는 교사 80명에 대한 결과를 비교 분석한다.

다. 도형영역의 오개념 가능성 및 개선방안에 대한 연구

교과서와 설문분석을 통해 나타난 학교수학에서의 도형영역의 오개념의 가능성을 정리하고 그 개선방안에 대해 제언한다.

Ⅲ. 이론적 배경

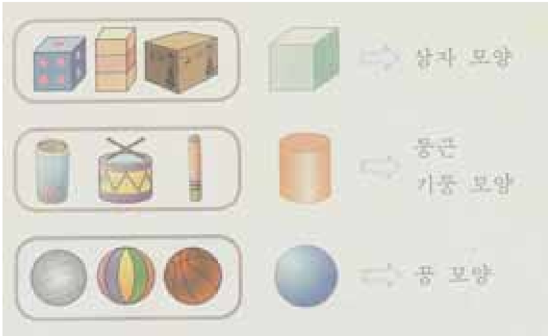
1. 학교 기하에서의 정의 방법

순수수학에서 사용되는 정의와 학교 수학에서 사용되는 정의가 다름을 앞에서 언급하였다. 그렇다면 본 연구에서 논의할 제 7차 도형영역에 사용된 정의의 특성을 탐색하기에 앞서 학교수학 특히, 학교 기하에서 사용되는 정의의 특성은 무엇인가에 대한 논의가 필요하다. 학교 기하영역의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의에 다룬 선행연구(강흥규· 조영미(2002))에 의하면 아래와 같이 다섯 가지로 나눠볼 수 있다.

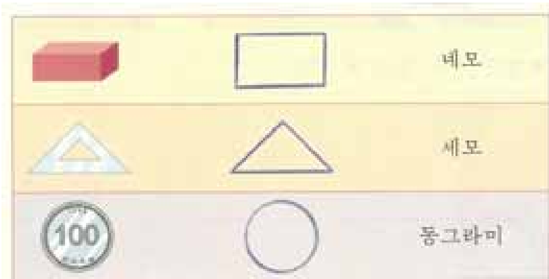
가. 동의(同意)적 방법

학습자가 이미 친숙하게 알고 있는 동의어를 사용하는 것이다. 예를 들어, 〔그림Ⅲ-1〕,〔그림Ⅲ-2〕를 들 수 있다.

dCollection @ jeju



〔그림Ⅲ-1〕 입체모양(교육부, 2004, <1-가>, p.33)



〔그림Ⅲ-2〕 평면모양(교육부, 2004, <1-나>, p.23)

이 방법은, 친숙한 것을 통하여 가르치고자 하는 개념을 수월하게 받아들이도록 하는 장점을 가지고 있다. 〔그림Ⅲ-1〕, 〔그림Ⅲ-2〕에서처럼, 학교 수학에서는 개념을 가르치기 위해 동의어를 사용한다고 할 때 동의어는 일상에서 사용되는 용어들이다. 단, 일상에서는 ‘한 단어에 한 가지 의미’, 또는 ‘한 의미에 한 단어’의 대응을 이루고 있지 않다. 예를 들어, ‘동그라미 모양’이라고 할 때 일상에서는 동그라미 모양이라고 부르지 못할 이유가 없다. 그러므로 원을 순전히 ‘동그라미 모양’으로 치면, 학습자는 자신이 일상에서 ‘동그라미 모양’에 대해 가지고 있던 개념을 원에 적용하게 될 것이다.

일상에서는 한 단어에 여러 가지 의미가 수반되어 있지만, 수학에서는 한 단어에 한 가지 의미만을 고집하는 경향이 있다. 수학에서 한 단어에 한 가지 의

dCollection @ jeju

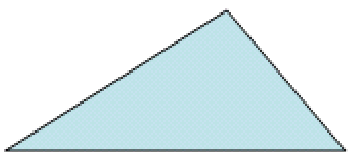
미만을 고집하는 것은 의미를 엄밀하고 정확하게 사용하기 위해서이다. 그런데, 수학적 상황에서 사용되는 용어를 일상적인 용어로 설명하게 되면, 이러한 차이점이 희석된다. 이렇게 되면, 학습자는 일상적 상황에서 용어를 쓰는 것과 마찬가지의 태도로 수학적 상황에서의 용어를 사용하게 될 것이다. 용어를 수학에서 요구하는 그 수준에 적합하도록 사용하는 것을 알지 못할 것이다.

수학적 상황에서 용어를 사용하는 모습이 일상에서의 용어 사용과 다르다는 점을 가르치는 사람들이 인식하고 있어야 함을 강조하고 있는데, 본 연구에서도 이 관점에 대해서 자세히 논의하고자 한다.

동의어, 특히 일상용어들을 사용하여 개념을 지도할 경우, 친숙하다는 점에서 그 개념에의 접근을 용이하게 할 수 있지만 그에 따른 부작용도 있을 수 있다. 즉, 일상에서 획득한 개념들이 고스란히 수학적인 상황에서의 용어에 적용되어 그 결과 수학적인 개념 형성에 장애 요소로 작용할 수 있는 것이다.

나. 예시적 방법

이 방법은 한 마디로 예를 사용하는 것이다. 개념을 내포와 외연으로 드러날 수 있다. 내포는 개념에 속하는 대상들이 지닌 공통의 속성을 가리키며, 외연은 개념에 속하는 대상들을 가리키므로, 예시적 방법은 개념의 외연을 활용하는 것이라고 볼 수 있다.



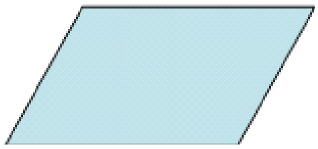
이것을 삼각형이라고 한다.

일상적 활동에서 예시 방법은 매우 유용하다. 아이가 ‘개’에 대한 개념을 지나가는 ‘개’를 직접 보고 습득했다고 했을 때 이 개념은 일종의 가설이라 할 수 있다. 이 가설을 ‘소’에 적용하여 보고 가설에 어긋나는 대답을 듣는다면 자신의 ‘개’에 대한 개념을 검증하고 수정하는 과정을 거치게 된다. 이렇게 일상에서 가설 설정, 적용, 검증, 수정의 과정을 거치면서 개념을 습득하게 되며,

Collection @ jeju

이때 예시는 중요한 역할을 한다.

그러나, 개념 형성이나 지적 활동에서 예시가 중요한 역할을 하지만 그로 인한 부정적인 영향과 조심해야 할 사항이 있음을 인식하고 있어야 한다. '전형적 모델'을 언급한 Fischbein이 말한 부정적인 영향을 살펴보면, 위계의 해체(dissolution of hierarchies)이다. 이를테면, 평행사변형 개념의 전형적 모델인 다음의 그림을 보자.



지적 활동 중에 이 그림이 작용하기 때문에, 직사각형은 평행사변형이 아니라고 생각하게 된다.

예시적 정의를 사용하게 되는 것은 특수한 예로부터 정의하려는 보편적인 것을 이끌어내야 함을 이야기한다. 때로는 특수한 예로부터 보편적인 성질을 이끌어낼 수 있지만 그렇지 못할 수도 있다. 가르치고자 하는 보편적인 내용을 학습자가 배우지 못하고 단지 예를 배우게 될 수도 있는 것이다. 가르치는 사람은 예시에서 보편적인 성질을 읽어낼 수 있지만, 그 성질을 처음 대하는 학습자는 예시에 고착되어 있을 수 있다.

또한, 특수한 예에서 보편적인 내용으로 넘어가는 과정에서 파생하는 다른 문제로 '잡음문제'를 들 수 있다. 다시 말해, 예시를 통해 교사가 가르치고자 했던 개념의 속성이 아닌 다른 속성이 포함될 수 있다는 것이다. 이런 일이 벌어지는 원인은 '예시'라는 도구의 성격 때문으로 예시는 가르치고자 하는 개념의 속성들만 담고 있을 수만은 없기 때문에 발생한다. 원래 가르치고자 하는 요소 이외의 요소가 아동의 머릿속에 자리 잡을 수 있음을 염두에 두어야 한다.

따라서 예시만으로 전달하려는 개념이 충분히 전달되기 위해서 다음과 같은 세 가지 조건이 만족되어야 한다는 Dubs의 지적은 시사하는 바가 있다.(강홍규・조영미, 2002, p.100; Robinson, 1954, p.110에서 재인용)

Collection @ jeju

① 용어의 의미를 전달하는 사람이 그 용어의 의미에 대해 명료하고 정확한 개념을 가지고 있어야 한다.
② 그 용어에 대한 다양한 예를 담고 있는 상황이 있어야 한다.
③ 학습자가 상당한 주의력과 이해력을 겸비해야 한다.

이를 수학 도형영역의 교수학습 상황에서 생각해본다면 교사는 전달하려는 도형의 개념에 대해 명확한 개념과 다양한 예들을 가지고 있어야 한다. 이러한 조건이 만족된다고 해서 예시적 방법을 통해 보편화된 개념을 학습자가 습득할 수 있다는 것은 아니며 이를 위해서 반드시 학습자의 수준이 고려되어야 한다. 예시적 방법을 통한 정의가 제대로 이루어지기 위해서는 학습자의 주의력과 이해력이 전제되어야 하며 이를 교사는 인식하고 있어야 한다.

교사가 명확한 개념과 다양한 예들을 가지고 있다는 것을 전제로 할 때 남겨진 과제는 학습자가 예시를 통한 정의 방법을 제대로 활용할 수 있는 능력을 갖춰야 함을 이르는 것이다. 이를 위한 방안으로 다음과 같은 제안(Fischbein, 1987, p.152에서 재인용)을 하고 있다.

> 가능한 일찌감치 수학적인 정의가 의미하는 바를 학습해야만 한다. 가능한 구체적 조작기에 시작해서 형식적 조작기에 정의의 개념을 확실히 고착시키는 경험을 하는 것이 필요하다. 해당하는 용어를 사용함에 있어 개념을 명확히 정의하는 활동이 갖는 결정적인 역할을 배워야만 한다. 개념에 비추어 전형적인 모델을 분석하고 개념에 따라 예인 것과 아닌 것을 찾는 학습을 하면서, 학습자는 어떤 개념을 이해하는 단계에 이를 수 있을 것이다. 이때 도달한 개념은 의미 없는 것이 아니며 또한 건전하게 사용될 예시와 관련되어 있을 것이다.

예시적 방법은 초등학교 수학에서 개념을 도입하거나 전개하는 과정에서 거의 필수적으로 쓰이는 방법이다. 이 방법의 장점은 물론이고 한계를 극복하고자 하는 논의는 꾸준히 연구되어야 하는 내용이며 본 연구에서도 논의해보고자 한다.

예시적 방법으로 정의를 내릴 경우, 그 정의를 학습하기 위해 예인 것과 예가 아닌 것을 구별하는 것이 교수학습 과정에서 중요한 논점이 될 수 있다.

Collection @ jeju

다. 암묵적 방법

<2-가>의 사각형의 정의를 보면 '4개의 선분으로 둘러싸인 도형'으로 약속한다. 여기서 '도형'은 특별한 정의 없이 약속되고 있다. '점','선','면', '평면도형', '둘레', '넓이'등이 그런 예로 관련 내용들을 다루면서 학습자에게 자연스럽게 그 단어들에 대한 이미지 혹은 개념이 파악되길 기대하고 있는 것으로 보인다. 명시적으로 정의되어 있지 않는데도 이러한 용어를 학습자가 어떻게 받아들일 수 있는가? Pascal은 『기하학의 정신』에서 이 질문에 대한 답을 다음과 같이 하고 있는데 "이들을 정의하지 않는 까닭은 우리들의 인지에 매우 자명한 것으로 받아들여지기 때문이다"라고 하고 있다. 즉, 표현할 수는 없어도 이들은 인간이 자연스럽게 가지고 있는 관념이라는 생각이다.

Pascal의 말에 따르면 모든 용어가 '자연적인 인지'가 가능하다면 명시적으로 정의할 필요가 없을 지도 모른다. 이 때 생각해 볼 문제는 과연 어떤 용어가 '자연적인 인지'에 비추어 자연스럽게 받아들여지는 것인가를 판단하는 문제이다. '자연적인 인지'가 어려운 것이라면 마땅히 명시적으로 정의를 내려야 할 것이다.

라. 구성적 방법

구성적 방법으로 단어를 정의한다는 것은 사물이 생성되는 방식을 기술하는 것으로 Euclid 『원론』에서 구를 반원을 회전하여 얻은 도형으로 정의하고 있는 것을 예로 들 수 있다. 이 방법의 특징은 운동 개념이 함의 된다는 것이다. 수학적으로 이러한 정의 방법은 수학에서의 논증방식과 철학자들의 사유에 적지 않은 영향을 끼쳤다. 이전에 언급한 동의적 방법과 예시적 방법은 용어의 의미를 가르치기 위해 사용된다는 측면이 강하고 학교수학에서 개념을 지도하기 위해 학습자를 고려하여 사용되는 방법이라 볼 수 있다. 반면 구성적 방법은 수학적인 논증이나 사유방식과 관련되어 있는 것으로 보인다. 다시 말해, 구성적 방법을 사용하는 사람들은 어떤 개념을 가르치는 것보다 수학문제를 해결하거나 수학적인 체계를 만드는 데 더욱 관심이 있었던 것으

Collection @ jeju

로 보인다. 이 방법으로 개념을 정의한다는 것은 용어의 의미를 가르친다는 차원을 넘어 수학적인 문제해결, 수학적인 체계를 염두에 둔 활동이라고 보아야 할 것이다.

마. 분석적 방법

이 방법의 대표적인 예는 '류와 종차에 의한 정의'이다. 논리학에서 이 정의 방법은 '논리적 정의'라고 부를 만큼 정의의 모범으로 여겨지고 있다. 이 정의 방법을 설명할 때 흔히 인용되는 예는 '인간은 이성적 동물이다'라는 문장이다. 여기에서 동물은 인간을 포함하는 류, 그것도 최근류며, '이성적'이라는 것은, 동물에 속하는 여러 가지 대상들과 인간을 구별시켜 주는 특성으로 종차에 해당한다. 이를 기호로 표현하면 'A는 B이다'에서 A는 피정의항이며, B는 정의항으로 종차와 최근류가 나타나 있는 것이다.

수학적 정의 전부는 아니더라도 일부를 분석적 정의로 나타낼 수 있을까 하는 문제에 대해 '류와 종차에 의한 정의'를 분석적 정의의 대표적인 예로 볼 수 있다. 수학, 특히 기하에서의 많은 용어들이 이런 형태를 취하고 있다. 예를 들어, '삼각형은 세 변으로 둘러싸인 도형', '평행사변형은 두 쌍의 대변이 평행인 사각형'이 있다. 이런 예들을 볼 때 수학적 정의는 위에서 언급한 분석적 방법을 선호하는 것으로 보인다.

그런데 Aristoteles에 따르면 분석적 정의에는 본질이 담겨야 한다고 말하였다. 그렇다면, '세 변으로 둘러싸인 도형', '두 쌍의 대변이 평행한 사각형', 이라는 것은 각각 삼각형, 평행사변형의 본질인가? 짐작컨대, 수학적 정의는 일련의 내용들을 순차적으로 질서정연하게 배열하는 체계화를 중시한다. 이전에 이미 보여진 내용들을 사용하여 연역적으로 전개하는 특징을 지니고 있는 것이다. 곧, 체계화를 가능케 하는 속성을 정의에 사용하게 된다.

2. 용어의 정의 수준

가. van Hieles의 기하 학습 수준

1950년대 네덜란드의 수학교사였던 van Hieles 부부는 자신들이 지도하고

dCollection @ jeju

있는 학생들이 기하학습에 곤란을 겪고 있음에 주목하여 그 원인을 밝혀내려고 노력하였다. 그들이 기하에서의 사고수준 체계를 세운 것은 Piaget에 대하여 연구하던 중 아동에게 제시되는 문제나 과제가 종종 아동의 사고수준을 넘어서는 용어나 성질에 대한 지식을 요구함에 주목하여 지도가 아동의 사고수준 이상의 수준에서 이루어지면 그 내용은 적절히 동화되지 못한다는 것을 밝혀내었다. van Hieles는 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 과정을 반복하는바, 수학의 학습-지도는 그러한 불연속적인 사고수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해 가도록 되어야 한다고 하였다.(우정호, 2000, p.434) 이러한 견해에 따라 기하학적 사고를 다음과 같은 5수준으로 구분하고 있다.(우정호, 2000, p.435)

제 0수준: 주변대상을 형이란 인식수단에 의해 파악하는 단계로, 기본적인 도형을 그 구성요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다. 세모꼴, 네모꼴, 상자모양 등으로 도형의 이름을 말할 수 있으나, 그 성질을 명확히 말하지 못한다.

제 1수준: 주변대상의 정리수단이었던 형이 연구의 대상이 되어 도형의 형이 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 직사각형의 대각선의 길이는 같다든가 마름모의 네변의 길이가 같다는 등의 성질을 말할 수 있지만, 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수 없다.

제 2수준: 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면, 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다.

제 3수준: 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단을 등장하며 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체기하의 연역체계를 파악한다. 이를테면, 삼각형의 내각의 합은 180°라는 명제를 증명할 수 있다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며, 다른 공리체계의 가능성을 이해하지 못한다.

제 4수준: 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지

Collection @ jeju

공리체계를 비교할 수 있고, Hilbert의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리체계의 성질을 이해한다.

나. Freudenthal의 수학적 언어수준

Freudenthal에 의하면 수학화 과정은 역사적으로는 점진적으로 도식화 과정인 거시적 학습과정이며, 심리적으로는 수준의 비약과 관점이 거듭되는 불연속적인 과정으로 수학학습은 수학화 과정의 재발명이어야 한다고 주장한다. (우정호, 2000, p.407)

Freudenthal의 수학적 언어 수준에 대한 견해는 다음과 같다. 수학적 언어에는 수준이 있어서 그에 따라 수학적 사고가 발달해간다. 첫째는 구체적 언어 수준으로, 일상적 예나, '이것','저것' 등과 같은 지시적 언어를 사용하는 수준이다. 둘째는 상대적인 관계를 사용하는 언어 수준이다. 셋째는 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어 수준이고, 넷째는 변환 등을 사용하여 나타내는 함수적 언어 수준이다(조영미, 2001, p.124; Freudenthal, 1978,pp.233-242에서 재인용).

Freudenthal의 언어 수준에 대한 견해는 정의 수준을 탐색하는데 유용한 기준을 제공하며 말로 된 언어보다는 문자가, 문자보다는 기호화된 표현이, 기호화된 표현 중에서도 함수를 이용한 표현이 수학적으로 수준이 높다는 주장은 수학교육에 많은 영향을 끼쳤으며 실제로 van Hieles가 기하학습 수준이론의 기본 사고가 되었다. 또한 이를 토대로 많은 학자들이 기하학습 수준이론 적용한 연구를 통해 수학과 학습지도 개선을 위해 유효한 준거로 사용될 수 있음을 보여주었다(우정호, 2000, p.427).

Ⅳ. 초등수학에서의 도형의 정의

1. 초등수학에서의 용어의 정의 수준

학교수학에 제시된 정의와 관련된 우정호, 조영미(2001) 및 조영미(2002) 연구

Collection @ jeju

에서 van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어수준 이론을 바탕으로 정의의 수준을 前(전)수학적 수준, 기술적 수준, 대상기호를 사용하는 수준, 관계기호를 사용하는 수준, 함수언어를 사용하는 수준의 5수준으로 설정하고 있다. 이 중에서 초등학교 수학과 관련된 수준은 0수준과 1수준에 해당한다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 0수준과 1수준에 해당되는 내용을 중심으로 초등학교에서의 용어의 정의 수준에 대해 살펴보았다.

가. 제 0수준: 前(전)수학적 수준

수학적 성격의 의미보다 일상적 의미를 대응시키는 단계로, 외형을 지시, 동의어 사용, 이미지나 행동을 연상하도록 묘사하는 방법이다.

초등학교 수학교과서에서 도형을 도입하는 시기에 해당하는 수준으로 볼 수 있다. 구체물 또는 반구체물들의 시각적 외형의 모양(shape)으로부터 공통적인 특징을 인식한 후 일상의 언어로 그 용어를 도입하고 있으며, 용어를 언어적인 방법으로는 기술하지 않는다(〔그림Ⅲ-1〕, 〔그림Ⅲ-2〕 참조).

이 수준에서는 학생들의 생활 주변에서 흔히 접할 수 있는 여러 가지의 물건들의 외형으로부터 시각적인 공통점을 추상화한다. 이것은 van Hieles의 기하적 사고의 제 0수준인 ‘시각적 인식’ 수준에 해당된다. 즉, 학생들은 도형의 성질에 주목하지 않고 단지 시각적인 이미지로 표상한다. 이는 Piaget의 세 가지의 추상화 중에서, 인식 주체가 여러 가지의 관찰 가능한 재료들을 조작하면서 보이는 행동과 같이 대상에서 정보를 얻는 경험의 추상화(empirical abstraction)에 해당된다고 볼 수 있다(Beth & Piaget, 1961, Piaget et al.,1977).

나. 제 1수준: 기술적 수준

용어를 정의하는 데 성질이나 관계를 기술하는 성격의 문장을 사용한다. 이를테면 제 1수준에서는 삼각형을 ‘△’또는 ‘세모’로 정의한다면, 이 수준에서는 삼각형을 그 구성요소인 선분을 사용하여 ‘세 선분으로 둘러싸인 도형’으로 정의하는 것이다. 이 수준은 van Hieles의 기하 학습 수준 중에서 도형의 구성요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 제 1수준에 대응하는 것이다. 즉, 이 수준의 학생들은 도형의 성질에 주목하여 도형의 구성요소에

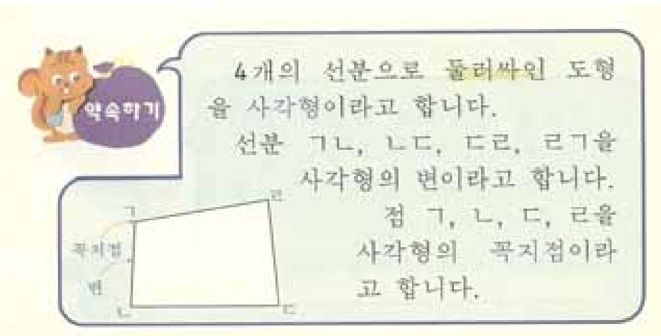
dCollection @ jeju

대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악한다.

제 7차 교육과정 초등수학 교과서에서는 2단계부터의 정의(약속하기)가 이 수준에 해당되며, 비로소 도형에 대한 일반적인 수학적용어가 도입된다. 즉, 도형과 관련된 용어가「~모양(shape)」에서 「~형(figure)」으로 바뀌며, 사고의 대상이 되는 수학적 추상화가 일어난다.

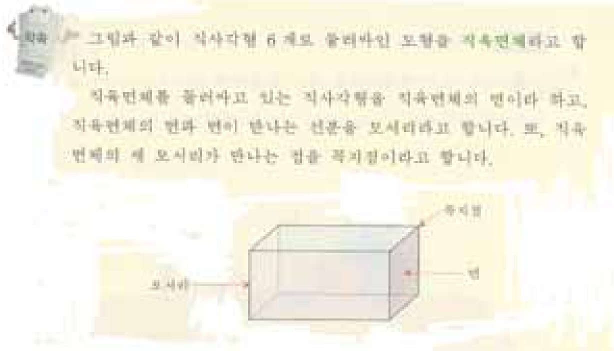
조영미(2001)에 따르면 제 1수준은 다시 두 단계로 구분할 수 있다. 먼저, 제 0수준의 시각적 특성이, 기술된 성질과 관계가 동시에 사용되어 정의되는 단계로, 이를 1a수준으로 보기로 한다. 다음으로 순전히 기술된 성질과 관계만으로 정의하는 관계로, 이를 1b수준으로 보기로 한다. 이 때, 1a수준에 해당하는 정의는 제 0수준과 1b수준의 가교 역할을 한다고 볼 수 있다. 분석적인 성질이나 관계를 사용하여 정의를 하는 상황이지만, 순전히 이러한 방식으로만 정의하는 것은 학습자에게 부담이 될 우려가 있으므로, 제 0수준에 해당하는 성격의 의미를 첨가하여 학생들의 부담을 줄이려는 의도가 있다고 볼 수 있다.

현행 초등수학교과서에서는 〔그림Ⅳ-1〕, 〔그림Ⅳ-2〕와 같이 분석적인 성질이나 관계를 기술함과 동시에 제 0수준에 해당하는 예시를 함께 제시하고 있다.



〔그림Ⅳ-1〕 사각형(교육부, 2004, <2-가>, p.38)

dCollection @ jeju



［그림Ⅳ-2］ 직육면체(교육부, 2004, <5-가>, p.53)

제 7차 교육과정 초등 수학교과서에서의 도형영역에 제시된 약속하기의 도입 순서 및 그 수준을 van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어수준 이론을 바탕으로 분류하면 부록의 <표 5>과 같다.[1] 부록의 <표 5>를 살펴보면, 초등학교 수학에서는 수학적 성격의 의미보다는 일상적인 의미를 사용하여 외형을 지시하거나 동의어를 사용하는 개념 정의 방법을 주로 사용하며 도형의 구성요소에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하고 있는데 이는 다른 도형으로의 일반화, 도형이 속한 범주의 모호함 등과 같은 문제를 야기한다. 학년에 따라 도형의 개념 정의가 상이하나 교사는 도형의 개념 정의를 다룰 때는 상위 수준의 도형의 개념 정의도 염두에 두고 있어야 한다. 초등학교에서 다뤄지는 용어 및 정의들이 중·고등학교에서는 수준이 상향 조정됨에 따라 정의를 수정, 개선해 가는 방식으로 교육과정과 교과서가 구성되는 경우가 많다. 예를 들어, 원은 초등학교에서는 '동그란 모양의 도형'으로, 중학교나 고등학교에서는 '한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합'으로 정의되는데 비록 동그란 모양의 도형을 원으로 가르치고 있더라도 교사들은 원이 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합임을 염두에 두고 있어야 한다.[2]

1) 우정호, 조영미 (2001)는 제 6차 교육과정을 따른 초·중·고 교과서에 제시된 정의의 수준을 분석하였다. 여기서는 제 7차 교육과정을 따른 초등학교수학교과서의 도형영역에 제시된 모든 정의를 대상으로 하였지만, 앞선 논문의 분석에 많은 부분을 참고로 하였다.
2) 유클리드 기하학에서는 '원이란 그 도형의 내부에 있는 한 정점으로부터 곡선에 이르는 거리가 똑같은 하나의 곡선에 의해 둘러싸인 평면도형'으로 약속하나, 현재 1899년 D.힐베르트(1862~1943)에 의하여 발표된 『기하학기초론』 공리계에 의하여 재구성된 정의를 현재 받아들이고 있다.

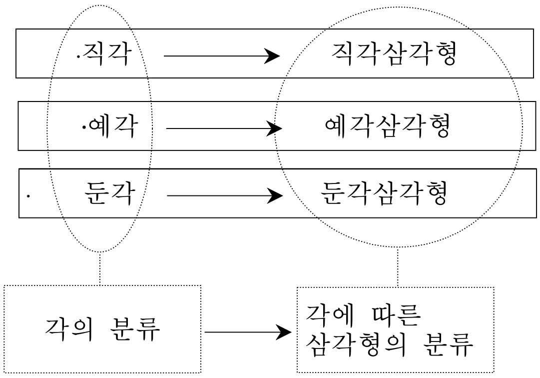
dCollection @ jeju

2. 도형의 도입 시기 및 순서

제 7차 교육과정 초등수학교과서의 도형영역에서는 1단계에서 4단계까지는 주로 평면도형, 5-6단계는 주로 입체도형으로 구성되어 있다. 1단계에서는 언어적 기술 없이 시각적으로 외형을 지시하는 방법으로 도입되며 2단계부터 외형을 지시하는 방법을 사용한다. 2단계부터 실제적인 수학적인 용어의 사용과 용어의 설명이 예시와 함께 제시된다(부록의 <표5> 참조). 평면도형은, <2-가>에서 기하학적인 정의에 바탕이 되는 용어와 기초적인 도형이, <3-가> 단계에서 <4-나> 단계까지는 변에 따른 또는 각에 따른 평면도형을 분류하는 관점으로, 도입된다. 입체도형의 경우는 <5-가> 단계에서 직육면체로부터 도입되기 시작하여, <6-가> 단계에 각기둥과 각뿔, <6-나> 단계에 원기둥, 원뿔, 구와 관련된 내용이 나타난다.

현행 초등학교 도형영역의 일반적인 특징은 평면도형과 입체도형을 단계별로 분리하거나 각 소주제별(차시별)로 도형을 다루고 있다는 것이다. 물론 이러한 관점을 채택할 때 각 차시별로 도입되는 용어를 익히는 데 유용하다. 또한 초등학교 수학에서는 어느 수준에 이르기 전까지는 용어를 익히는데 초점이 맞춰질 수밖에 없다는 것에 동의하는 바이다. 그러나 초등수학교실에서 사용하는 용어가 논리적 사고 수준이나 개념형성의 효율성의 측면이 고려되어야 함을 생각해본다면 현행 교과서에서 소홀히 다뤄지고 있는 도형의 관계적인 이해부분이 강조되어야 할 필요가 있다. 삼각형을 각에 따른 도입시기로 예를 들어 본다면, <3-가> 단계에서 직각삼각형, <4-가> 단계에서 예각삼각형, 둔각삼각형이 약속되고 있다. 교과서상에 삼각형의 각에 따른 분류의 관점에서의 개념 도입이 아닐지라도 <4-가>예각삼각형, 둔각삼각형 지도시에는 각에 따른 분류를 하는 활동을 하고, 예각삼각형, 둔각삼각형을 약속할 뿐 아니라 직각삼각형의 개념을 다시 생각해보는 기회를 제공해야 한다. 도입되는 도형의 개념 및 용어가 많아질수록 이해되어져야 하는 도형의 관계역시 늘어남을 인식하고, 도형의 개념 정의(약속하기)를 할 때에는 전에 학습했던 도형과의 관계를 염두에 두고 교사는 지도해야 한다.

dCollection @ jeju



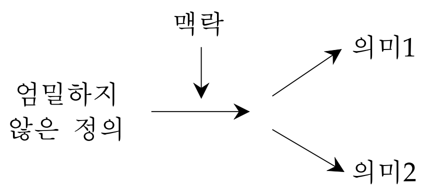
〔그림 Ⅳ-3〕 실선박스: 현행교과서; 점선: 분류의 관점의 교수-학습

현행 초등학교 수학교과서에서는 약속할 용어를 일방적으로 제시하고 익히도록 하는 경우가 있다. <4-나> 사각형의 지도를 예로 들어 본다면 도형의 약속하기에 사용될 속성을 미리 제시한 후 그 관점에 따라 도형을 분류하게 하고, 다시 분류된 도형의 공통점을 찾아 이름을 약속하고 있다. 그러나 이러한 성질을 처음 대하는 학습자는 예시에 고착되어 있을 수 있고, 이러한 기술순서에 따라 학습하면 학생들이 도형을 약속하기 위해 사용한 속성과 도형의 정의를 우연적인 것으로 받아들이기 쉽다. 즉, 학생들이 마름모라는 용어를 기억하는 만큼, '네 변의 길이가 같은 도형'이라는 성질을 기억하지는 못할 것이라는 점이다. 따라서 이러한 문제를 줄이기 위해서는 교사는 마름모의 의미에 대해 정확한 개념을 가지고 다른 사각형과의 관계를 파악한 후 마름모를 지도할 때 마름모라는 개념을 익힐 수 있는 다양한 예를 담고 있는 상황을 제시해주고 아동은 교사가 제시한 상황에 도형의 개념(약속하기)과 관계된 내용에 주의를 기울여 활동을 해야 할 것이다. 학생들에게 도형의 개념에 주의를 기울이도록 하는 것은 한 차시에 이루어지지 않는다. 관계적 이해를 위한 분류하기 활동을 많이 하도록 하는 것은 도형의 후속학습에서 학생들의 수학적 이해력을 증진시키고 개념형성에서 지적활동을 강화하는데 도움을 줄 것이다. 도형영역(기하영역)은 분류의 문제가 주된 관점이라는 것을 항상 상기하여야 한다.

Collection @ jeju

3. 맥락 의존적 정의

현재 학교 수학에서 용어를 다루는 방식은 용어를 엄밀하게 정의하지 않은 채 맥락에 따라 상의한 의미로 해석하는 것을 허용하고 있다(박교식, 임재훈, 2004). 박교식, 임재훈(2004)에 따르면 학교교육은 긴 시간에 걸쳐 이루어지는 일이며, 그 기간 중 특정 단계에서는 엄밀하지 않은 정의를 사용하면서 맥락에 따라 그 의미를 다르게 사용할 수 있다. 즉, 학교수학에서는 ‘중의적인 정의’ 또는 ‘맥락 의존적 정의’의 사용을 허용하며 학습자의 발달 단계상 초등학교 수학에서는 다뤄지는 정의는 맥락 의존적 정의인 경우가 많다.



［그림 Ⅳ-4］ 맥락 의존적 정의(박교식, 임재훈, 2004, p.24)

현행 7차 초등학교 교과서에 실린 도형의 개념 정의를 부록의 <표 5>과 같이 분석한 결과 덜 엄밀한 정의를 사용하는 경우 뿐 아니라 비교적 엄밀한 정의를 사용하는 경우에도 주의를 요하는 문제는 발생한다.

이를테면, <2-가> 단계에 있는 원의 정의 ‘본을 떠 그린 동그란 모양’과 <3-나>에 있는 원과 관련된 활동을 보면, 원은 내부를 포함하고 있지 않다([그림Ⅳ-6] 참조). 만일 학교현장에서 원의 넓이를 구하라고 했을 때 ‘0’이라고 답한 학생이 원은 내부를 포함하고 있지 않아서 그렇게 답했다고 한다면 교사는 어떻게 처리해야 할까? 대부분 교사나 학생은 이러한 문제에 대해 원의 넓이를 원에 의하여 둘러싸인 영역(원판)의 넓이를 구하는 문제로 인식하여 해결한다.

때로는 수학적 정의가 특정한 성질을 지니는 경우에 정의와 특정한 성질이 동일시되는 경우가 흔히 있다. 이를테면, 원의 반지름은 선분으로 정의되지만

Collection @ jeju

맥락에 따라서는 선분의 길이를 의미하기도 한다.

원의 영역 문제(내부를 포함하는가? 포함하지 않는가?) 및 원의 지름, 반지름 등의 용어가 초등수학의 특징인 맥락 의존적인 정의를 채택하여 해석한다고 할 때 발생하는 오개념의 문제에 대해서는 교수학적인 분석이 요구된다. 이러한 관점에서 오개념 형성 가능성이 있는 문제를, 엄밀하지 않은 정의 사용에 따른 문제와 비교적 엄밀한 정의를 사용하고 있지만 상황에 따라서 정의가 왜곡되는 문제로 분류하여 분석해 보았다.

이는 도형의 측정과 관련된 (겉)넓이, 부피의 문제와 입체도형의 전개도의 문제와도 밀접하게 관련된다.

가. 엄밀하지 않은 정의 사용에 따른 문제

도형의 도입 시기인 1학년에서는 시각적인 외형의 모양(shape)에 의존함으로 내부를 포함하지 않은 관점을 채택한다(〔그림Ⅲ-1〕, 〔그림Ⅲ-2〕 참조). 그러나 2단계에서부터는 도형과 관련된 수학적 추상화가 일어나면서 도형의 정의가 도형의 구성요소의 분석적 성질에 의존하게 된다(〔그림Ⅳ-1〕, 〔그림Ⅳ-2〕 참조).

<2-가>에서 '사각형은 4개의 선분으로 둘러싸인 도형'이라고 정의된다. 초등학교 수학교과서에서는 삼각형, 다각형, 직육면체 등을 정의할 때 '둘러싸인'이라는 용어가 사용된다. '둘러싸인'이라는 용어는 교과서에 도입된 다각형과 관련된 활동에 비추어 볼 때, 내부를 포함하고 있다.

박교식, 임재훈(2004)은 '둘러싸인'과 관련된 분석을 다음과 같이 논의하고 있다.

> 학교수학에서 다각형이 본질적으로 closed라는 것을 알기 쉽도록 나타내기 위해 '둘러싸인'이라는 표현을 사용한 것으로 보이지만, '둘러싸인'으로부터 closed를 연상하기는 쉽지 않다. closed의 우리말 표현인 '닫힌'이 있으나 이를 초등학교 저학년에서부터 사용하는 것이 적절한지 등에 대해서는 별도의 연구와 논의가 필요하다. 다각형의 정의에서 closed와 '둘러싸인'의 거리를 좁히는 방편으로 '완전히 둘러싸인' 또는 '빈틈없이 둘러싸인'과 같이 수식어를 넣어주는 것도 고려할 수 있다(p.25).

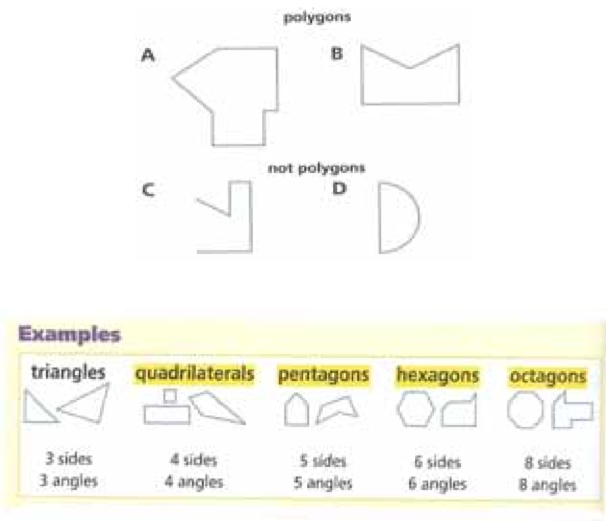
dCollection @ jeju

'둘러싸인'과 관련하여 박교식, 임재훈(2004)의 분석을 다른 관점에서 논의해 보자. 이를 위해 먼저, 다각형의 정의와 관련된 하나의 영어 표현을 참조하자(Rich, 1963).

> A polygon is a <u>closed</u> plane figure <u>bounded by</u> straight line segment as sides.

위에서 밑줄 친 부분에 따르면 다각형은 내부를 포함하고 있음을 알 수 있다. 즉, '둘러싸인'은 'bounded by …'와 대응된다. 또한 closed는 '닫힌'의 의미를 뜻하며, 이는 도형의 경계(가장자리, 변)와 관련됨을 알 수 있다.

미국의 초등수학 교과서(Harcourt Math)에 따르면 다각형을 '닫힌 도형'과 '열린 도형'이라는 용어를 먼저 도입한 후, 「곧은 변(side)을 가지는 닫힌 평면 도형」으로 '다각형'의 용어를 도입하고 있다.



［그림 Ⅳ-5］ 3단계 다각형

여기서도 내부의 포함여부는 명확하게 진술된 것은 아니지만, 'side[3]'의 의미

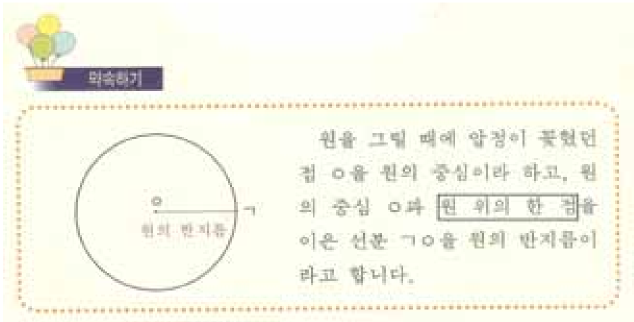
3) any of the lines or surfaces that bound <u>something</u>(Webster's New World Dictionary).

dCollection @ jeju

(변, 가장자리)로부터 유추할 수 있다.[4]

입체도형은 영어로 solid figure이다. 여기서, ‘solid’의 일반적인 의미는 ‘속이 찬’이다. 이러한 점과 다각형에서 ‘둘러싸인’의 의미를 내부와 그 경계까지 포함한다고 할 때 〔그림 Ⅳ-1〕에서의 ‘둘러싸고’의 관점에서 입체도형도 그 내부를 포함하고 있다는 입장에 타당성이 있다. 그러나 이 경우 입체도형의 전개도를 다룰 때 문제가 생긴다. 이를 위한 개선 방안으로 전개도의 정의를 약간 엄밀하게 정의하는데, 이를테면 ‘입체도형 표면의 평면패턴’ 또는 ‘접어서 입체도형을 만들 수 있는 평면패턴’등을 생각할 수 있다. 물론 적절성에 대한 수학적 논의가 필요하다.

나. 엄밀한 정의를 사용하고 있지만 상황에 따라서 정의가 왜곡되는 문제



[그림 Ⅳ-6] 원(교육부, 2004, <3-나>, p. 31)

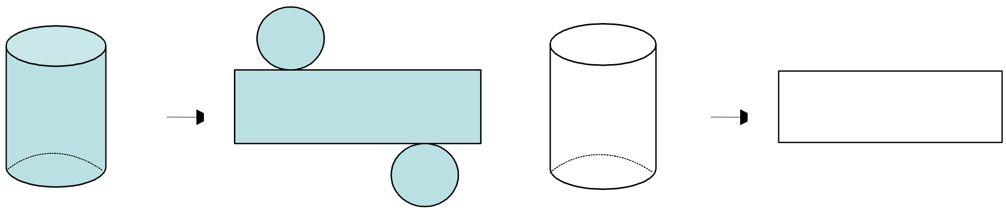
엄밀한 정의를 사용하고 있지만 상황에 따라서 엄밀한 정의가 왜곡될 수 있다는 점에서 덜 엄밀한 정의를 사용하는 경우보다 주위를 요한다. 엄밀하게 사용된 정의가 교수학습의 맥락에 따라 오류를 범할 가능성이 있기 때문이다. 예를 들어, 원의 정의와 관련된 활동 〔그림 Ⅳ-6〕에서 살펴보면 원은 내부를 포함하고 있지 않음을 유추할 수 있다. 원의 정의로부터 파생되는 입체도형 및

4) 실제로, 미국(Harcourt Math, 2002)의 경우를 살펴보면, 용어의 설명이 우리의 경우보다는 좀더 구체적으로 진술됨을 알 수 있다. 초등수학에서 학생들의 인지적 수준의 이유로 맥락의존적 정의를 사용한다면, 오개념을 줄이기 위해서라도 인지수준을 벗어나지 않은 범위 내에서 어느 정도의 진술의 구체성은 고려해야 한다.

dCollection @ jeju

원의 넓이를 다룰 때 원이 내부를 포함하고 있느냐에 대해서는 오류의 가능성을 염두에 두고 신중히 다뤄야 한다.

예를 들어, 초등수학교과서에서 제시되고 있는 원기둥의 정의는 "위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 **원**으로 되어 있는 입체도형"이나, 교과서에 제시된 원기둥을 보면 원기둥의 밑면인 원이 내부를 포함된 것으로 인식하도록 색칠되어 있는데 이는 원기둥의 겉넓이(전개도)를 구하는 문제와도 관계된다.



[그림 Ⅳ-7] 원기둥의 전개도

즉, 원래 의도는 [그림 Ⅳ-7]의 왼쪽에 있는 것이지만, 만일 원의 정의에 충실하다면 위의 오른쪽의 그림이다.

$$\text{원} \xrightarrow{\text{상황(맥락)}} \text{원판}$$

[그림 Ⅳ-8] 원의 맥락에 따른 의미

[그림 Ⅳ-8]과 같은 현상은 학생들의 인지적인 측면에서도 나타날 수 있다. 초등수학에서 수학적 개념의 형성은 주로 활동을 통해서 형성되며 또한 활동에 사용된 대상(구체물 또는 반구체물)들은 학생들의 개념 이미지 형성에 많은 영향을 준다. 여기서 소위 ‘포괄적 확장의 원리(generic extension principle)’가 생성될 수 있다.

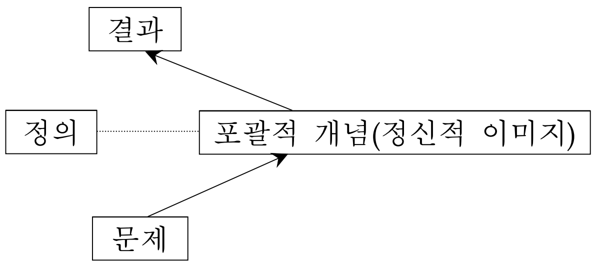
dCollection @ jeju

특수한 상황에서 자신이 생각했던 모든 예들이 갖는 어떤 성질이 다른 상황에서도 의미 있을 것이라고 가정한다(Tall, 1986).

즉, 활동을 통해서 수학적 개념에 대한 정신적 이미지를 형성하게 되고, 이 정신적 이미지는 반드시 수학적 의미의 개념일 필요는 없으며, 특수한 사항에서 추출한 결과인 각자의 마음속에서 생각하게 된 수학적 개념이다. 예를 들어, 원과 관련된 수학활동의 소재는 실제적으로는 '원판(closed disc)'이 형성된다. 또한 이러한 포괄적 원의 개념은 평면도형인 다각형(삼각형, 사각형 등)은 내부를 포함하고 있다는 사실로부터 나타날 수도 있다.

일반적으로, 교사들은 정의를 통하여 주어진 문제의 답을 산출하도록 하는 이상적인 과정을 요구한다. 그러나 학생에게서 일어나는 실제의 문제해결과정은 [그림 Ⅳ-9]와 같은 과정이 흔하다.

즉, 초등학교에서 주어지는 문제의 대부분은 포괄적으로 획득한 정신적 이미지만을 적용해도 성공할 수 있고, 교사들은 학생들이 개념을 잘 형성했다고 생각할 가능성이 있다.



[그림 Ⅳ-9] 학생의 직관적 문제해결 과정

4. 세부적인 분석

도형의 도입시기에서는 시각적 외형의 모양(shape)의 특징으로 도형을 인식하며, 이로부터 수학적 도형으로의 수학적 추상화가 일어난다. 수학적 추상화의 단계에서는 도형을 이루는 구성요소 및 구성요소 사이의 관계가 그 도형을 특

Collection @ jeju

징짓는 주요한 역할을 한다.

가. 점, 선, 면

모든 기하적인 정의에 바탕이 되는 용어는 점(point), 선(line), 면(plane)인데, 일반적으로 무정의 용어(undefined term)로 받아들이며, 정의(definition)가 아니라 설명(description)의 방식으로 그 의미를 전달한다. 앞서 논의한 기하의 정의 방식인 암묵적 방법이 이에 해당될 것인데, 이러한 용어의 도입시 생각해야 할 점은 설명과 표현의 문제이다.

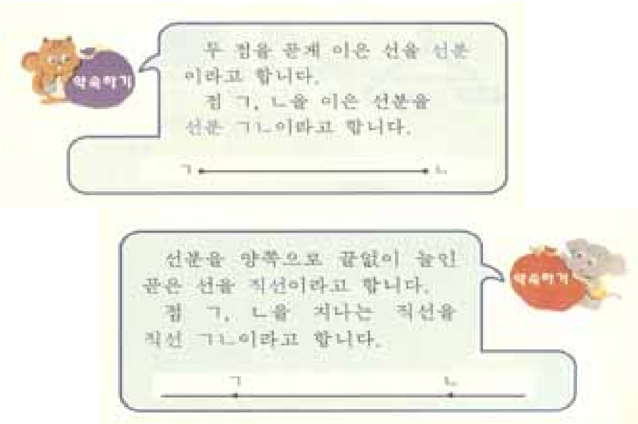
제 7차 초등수학교과서에서는 초등학생의 인식수준에 맞게 추상적인 개념의 일반적인 설명보다는 직관적 표현(시각적)을 중시하는 관점으로 그 용어를 도입하고 있다. 구체적으로 점(point)은 용어에 대한 설명 없이 시각적 표현의 관점에서 우리가 일상에서 사용하는 점(dot; ·)으로 도입하고, 이로부터 선분, 직선을 도입하고 있다([그림 Ⅳ-10] 참조). 그러나 면(plane)에 대한 설명이나 표현은 도입하지 않고 있다.[5] 점, 직선, 평면의 용어가 무정의 용어로 받아들여지는 점, 개념 인식을 시키는 것이 초등학교에서 쉽지 않다는 점으로 인해 수학교과서의 내용 전개 방식에 영향을 준 듯 하다. Pascal은 이러한 무정의 용어를 인간의 자연스러운 인식이 가능하다고 파악하고 있으나 초등학생의 인식 수준에서는 점, 선, 면이 직관적 표현에 머무른다는 점에서 용어의 도입에 대해서는 상당한 논의가 필요하고 여겨진다.

우리는 일상생활에서 어떤 장소를 묻거나 가르쳐주는 경험을 자주한다. 이 경우 장소의 크기는 관심의 대상이 아니다. 단지 그 장소의 위치가 주된 관심사이다. 이것에 대한 설명(표현)의 수단으로 점(dot)을 사용한다. 즉, 지도상에 있는 점은 장소를 표현한 것이지 그 장소가 아닌 것처럼, 점(dot)은 점(point)과는 다르게 크기를 가진다. 우리의 경우는 수학적 개념의 용어인 점(point)과 그 표현(기호)의 용어인 점(point)을 모두 '**점**'이라는 용어로 혼영하고 있음을 교수학적 관점에서 상기할 필요가 있다. 특히, 우리의 경우에는 점이라는 용어를 많이 사용하고 있지만 이와 관련된 개념적 설명 없이 이에 대한 표현만 사용하고

5) 미국 초등교과서(Harcourt Math, Math-Grade 4)에서는 다음과 같은 설명의 방식으로 평면에 대한 용어를 도입하고 있다: A *plane* is a flat surface of points, with no end.

dCollection @ jeju

있다.



[그림 Ⅳ-10] 선분과 직선(교육부, 2004,<2-가>, p.37)

직선과 선분[6]의 도입방식(순서)을 살펴보면 용어의 '의미' 보다는 초등학생의 '인식수준'을 따르고 있다([그림 Ⅳ-10] 참조). 논리적인 수준에 따르면 선분은 사전적으로 직선의 부분을 의미하고 있으므로 '선분→직선→선분(용어)의 의미'의 순서로 가르치는 방식을 채택하여, 개념 정의와 개념이미지의 상호작용의 중요성을 고려한 전개에 대해서 생각해 볼 필요가 있다.

제 7차 초등수학교과서에서는 평면의 용어를 약속하지 않고 사용하고 있다. 도형의 도입시기인 1단계에 보다 다양한 형태의 입체도형을 경험하게 한다면, 입체도형의 평평한 표면이라는 의미에서 면(face)에 대한 개념이 보다 일찍 형성될 수 있을 것이다. 또, 선분으로부터 직선을 도입하듯이, 면(face)의 확장된 개념으로 평면(plane)을 도입하는 방법도 고려할 수 있다.

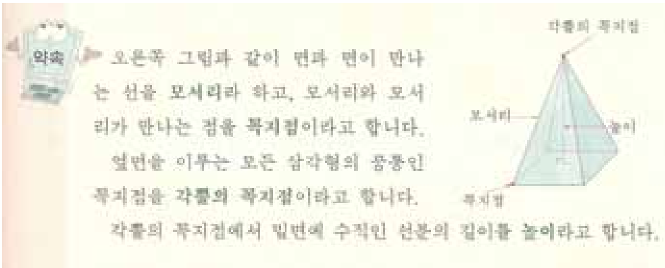
나. 평면도형과 입체도형의 구성성분과 관련된 용어

일반적으로 평면도형과 입체도형의 구성성분과 관련하여 초등에 도입된 용어

6) 미국의 경우는 '선(line)' 은 '직선(straight line)' 을 의미하고, 따라서 직선분(straight line segment)이라는 용어 대신에 선분(line segment)의 용어를 사용하고 있다. 그런데 우리의 경우는 생활에서 알아보기를 통해서 곧은 선과 굽은 선을 구별하는 활동을 하고 직선과 선분을 도입하고 있다. 따라서 우리의 경우 직선의 부분이라는 관점에서 본다면 선분의 실제적 용어는 직(곧은)선분(straight line segment)이 타당할 수 있다.

dCollection @ jeju

는 꼭지점(vertex), 변(side), 면(face), 모서리(edge), 밑면(base), 옆면(lateral face) 등이 있다. 이러한 용어는 주로 구체적인 예시를 통하여 지시적 관점에서 제시하고, 일반화하려는 경향을 보인다. 이 경우 구성성분에 대한 용어의 제시는 크게 두 가지의 방식을 따르고 있다. 이를테면, 특수한 도형의 구성성분을 강조하는 형태의 용어로 '…의 성분(변, 꼭지점, 밑면 등)' 또는 예시를 통한 약간의 일반적인 형태의 용어로 '성분(변, 꼭지점, 밑면 등)'이다([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2],[그림 Ⅳ-11]참조).



[그림 Ⅳ-11] 각뿔의 구성성분(교육부, 2004, <6-가>, p. 27)

이는 우리 초등수학교과서에서 도형 도입방식(순서)과 관련된 문제라 할 수 있다. 초등학교 저학년에서 다루어지는 도형의 수가 많지 않고, 이로 인하여 다양한 도형 및 구체물 조작을 통한 구성성분의 공통성을 추출할 수 있는 활동이 적다. 따라서 주로 초등학교 저・중학년에서는 특수한 도형과 연계된 구성성분의 용어를 택하고 있으며, 고학년에는 보다 일반적으로 기술하고 있다.[7]

▶꼭지점[8]: 평면도형의 경우는 예시를 통한 지시적인 방식으로, 입체도형의 경우에는 모서리가 만나는 점으로 용어 설명을 하고 있지만 각・원뿔의 경우에는 '각・원뿔의 꼭지점[9]'이라는 용어도 도입하고 있다.

---

7) 미국의 경우는 저학년에 우리보다 많은 수의 도형을 도입하여 구성성분에 의한 분류의 활동을 많이 다루고 있다. 이로부터 도형의 구성성분의 용어 설명이 우리의 경우와는 달리 저학년부터 보다 포괄적이고, 일반적으로 도입된다. 예를 들어, 면(face)은 입체도형상의 평평한 표면이다(A *face* is a flat surface on a solid figure).

8) 미국의 경우는 저학년의 경우에 코너(corner)라는 용어를 도입하고 그 후의 단계에서 모서리가 만나는 코너의 관점으로 꼭지점을 도입한다. 수학적 용어선택의 이러한 접근방식에서 우리는 교수학적 시사점을 얻을 수 있다.

dCollection @ jeju

▶변: 주로 평면도형의 구성성분을 다룰 때 사용되는 용어로 예시를 통한 지시적 방식으로 도입하고 있다. 평면도형에서 변이라는 용어로 번역된 영문용어인 ‘side’의 의미(<각주3>)를 앞서 논의했던 ‘둘러싸인’ 용어와 관련하여 재음미해볼 필요가 있다.

▶면[10]: 면이라는 용어는 직육면체<5-가>단계를 다룰 때 「직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형」으로 ‘직육면체의 면’이라는 용어가 제한적으로 도입되고 있고 직육면체와 정육면체는 면에 의한 용어정의와 밀접하나 그 후에 나타나는 일반적인 입체도형의 경우에는 면에 대한 용어는 사용하고 있지만 구체적인 설명이 없다. 다시 말해 직육면체, 원기둥과 같은 구체적인 입체에서 각각 면이 무엇인지를 말하고 있을 뿐이다. 만약 ‘직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형을 직육면체의 면’이라고 약속하는 것처럼 입체도형을 둘러싸고 있는 다각형을 다면체의 면이라고 일반화를 하는 문제에 대해서도 고려해봐야 한다.

직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형

↓

입체도형을 둘러싸고 있는 다각형

또, 한 가지의 문제는 면을 보는 관점의 문제이다. 즉, 선을 곧은 선과 굽은 선으로 구별하듯이, 면을 평평한 면과 곡면으로 구별하여 다루고 있다는 것이다. 실제로, 입체도형에서의 면을 세분화한 용어인 ‘밑면’과 ‘옆면’을 취급할 때, 밑면은 평평한 면만을, 옆면은 곡면(원기둥의 경우)까지도 취급하고 있다. 미국의 경우(Harcourt Math)는 면은 평평한 경우만을 취급하므로 면의 용어설명이 우리보다 용의한 점이 있다. 박교식, 임재훈(2004)은 초등학교 수학에서는 면은 직육면체, 각기둥, 각뿔을 둘러싸고 있는 다각형, 또는 원기둥, 원뿔 등과 같은

9) 이 용어는 뿔의 높이와 모선(원뿔의 경우)을 설명하기 위한 수단으로만 사용된다. 단지, 몇 개의 용어를 설명하기 위한 방편으로서 용어의 사용은 생각해볼 문제이다. 다시 말해서, 새로운 용어의 도입은 편의성뿐만 아니라 효용성을 동시에 고려해야한다.

10) 미국의 경우는 ‘선(line)’은 ‘직선(straight line)’을 의미하듯이 ‘면(face)’도 우리와는 달리 ‘평평한’ 한 경우만을 취급한다.

dCollection @ jeju

회전체를 둘러싸고 있는 부분으로 취급되며 부분으로서의 면을 영어의 face(겉면, 표면)에 해당한다고 표현하고 있다. 반면에 중학교 수학에서 면은 surface와 face의 의미로 동시에 사용되고 있다. face가 입체를 둘러싼 면이라면 입체라는 맥락에 국한되지 않는 선이 움직인 자리로서의 면은 영어 surface에 해당한다고 볼 수 있다. 우리의 경우는 face와 surface 모두를 '면'으로 혼용해서 사용하고 있다.

이 문제에 대해 입체도형을 다루는 감각적 단계(초등 저학년)에서 반구체물(수학적 모형)을 이용한 활동을 통해서 입체도형의 표면과 관련된 특성(평평하다, 둥글다 등)[11]을 파악한 후 초등 고학년에서 면과 관련된 수학적 정의를 다루는 방식의 활동을 한다면 인지적 측면에서 학생들이 용어의 정의를 파악하는데 도움이 될 것이다. 또한, 평면도형의 도입시에도 입체도형의 표면의 관점과 관련된 활동이 필요하고 여겨진다.[12]

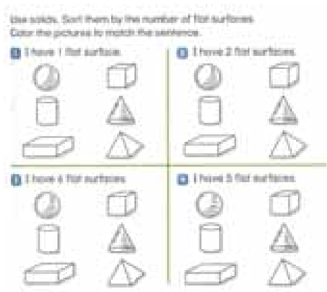
단, '면'이 입체도형의 부분이라고 볼 때 발생하는 문제의 지도 방안에 대해서는 V-1장에서 좀 더 논의해보도록 하겠다.

입체도형에서 면의 감각적 특징

↓

입체도형에서 면의 수학적 특징

11) 입체도형상의 표면(surface)의 특성과 관련된 활동(Harcourt Math, Math Grade 1).



12) 입체도형의 표면으로서의 평면도형(Harcourt Math, Math-Grade 1)

dCollection @ jeju

▶모서리: 입체도형의 구성성분을 다룰 때 사용되는 용어로 「면과 면이 만나는 선」으로 도입된다. 초등학생의 인식 수준에서는 포괄적 의미의 '선'(곧은 선, 굽은 선), 보다는 '선분'으로 구체적인 용어 진술이 바람직하다고 생각된다 (〔그림Ⅳ-2〕, 〔그림Ⅳ-11〕,<각주4>참조).

▶밑면: 밑면과 관련된 영문용어는 base이다. 즉, 입체도형의 토대(기초, 바탕)가 되는 면이라는 뜻이다. 밑면이라는 용어에 사용된 '밑'은 방향과 관련된 용어이므로 가끔씩 학생들이 오인할 수 있다는 점에 주의가 요구된다.

▶옆면: 입체도형에서 「옆으로 둘러싸인 면」으로 용어설명을 하고 있는데, 밑면과 마찬가지로 '옆'은 방향과 관련된 용어이므로 용어를 설명할 때, 주어진 입체도형에서 밑면을 결정한 후, 「밑면이 아닌 면」이라는 관점에서 옆면을 설명할 수 있다.

다. 평면도형과 입체도형

앞서 언급한 것처럼 평면(plane)에 대한 설명이나 표현은 도입하지 않고 있음으로 인하여 평면도형의 설명이나 약속하기는 초등학교 수학교과서에는 없다. 그러나 <6-가> 단계에서 입체도형의 정의를 도입할 때, 분류의 관점에서 평면도형이라는 용어를 사용하고 있음을 알 수 있다([그림 Ⅳ-12]참조).

[그림 Ⅳ-12] 입체도형과 관련된 활동(교육부, 2004, <6-가>, p. 18)

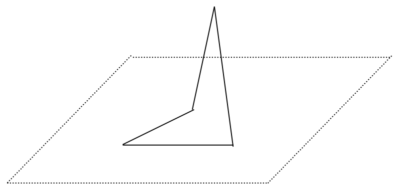
평면도형의 도입시기인 <2-가>단계에서 평면도형과 입체도형의 용어를 함께 도입하는 것에 대한 논의가 필요하다. 2학년의 아동의 인지 수준에 이러한 두 가지 개념 모두를 형성하는 것이 힘들다면 적어도 교사는 다양한 구체물을 활용하여 아동들에게 평면과 입체를 구분할 수 있는 감각적 활동을 많이 하도록 해야 한다. 평면도형과 입체도형의 이러한 문제는 평면(plane)이라는 무정의 용어의 도입과도 연관된 것이기는 하지만, 수학과 도형 학습 전반에 평면도형과 입체도형을 분류하는 활동뿐만 아니라 아동들의 여러 가지 도형에서의 분류

dCollection @ jeju

하기 활동을 강화하는 차원의 논의이기도 하다. 이러한 점은 결국 평면도형과 입체도형을 단계별로 분류해서 다루는 (1단계에서 4단계까지는 주로 평면도형, 5단계 및 6단계는 주로 입체도형) 교과서 구성의 문제와도 연관되나, <2-가> 단계에서 입체도형을 탐색하는 활동을 통해 평면도형 및 평면이라는 용어의 정의를 이해시키고 <6-가>단계의 입체도형의 학습 시에 다시 분류하기 활동을 통해 입체도형의 정의를 알아보는 활동을 생각해볼 수 있다.

라. 다각형과 이와 관련된 용어

<2-가> 3. 도형과 도형 움직이기 단원에서 「4개의 선분으로 둘러싸인 도형」으로 사각형을 정의하고 있는데 여기서 사용된 '도형'이라는 말은 포괄적이므로 이 도형의 의미를 해석하는 것에 따라 사각형의 범주도 달라질 것이다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-13]과 같이 공간상에 위치한 도형도 사각형이라 인식할 수 있다.



[그림 Ⅳ-13] 4개의 변을 가지는 도형

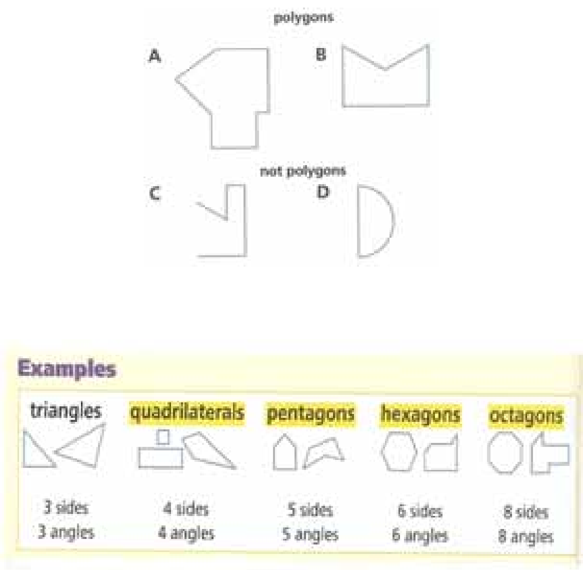
이러한 오류를 해결하기 위한 하나의 방안으로 다각형의 정의를 조금 더 엄밀하게 「선분들로 둘러싸인 평면도형」으로 구체화할 수 있다. 또는 입체도형의 2차원 패턴의 관점에서 설명하는 방안도 생각해 볼 수 있다.

현재 초등수학교과서를 살펴보면 <4-나>에서 주어진 도형에서 선분으로만 둘러싸인 도형을 찾은 후 「선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형」이라 약속하고 있으며 다각형이 되지 않는 도형을 찾는 활동은 중요시 되지 않는다. 또, 볼록 다각형만을 교과서에서 예로 제시하고 있다. 그러나 학생들의 수학적 개념 형성을 돕기 위해서는 다양한 예를 제시할 필요가 있다. 브루너(Bruner)는 어떠한 것을 정의한다는 것은 그 정의에 부합하지 않은 예가 있다는 사실을 반증

Collection @ jeju

하고 있으며 주어진 정의에 부합하지 않는 예를 많이 다룸으로써, 원래 알고자 하는 개념에 좀 더 충실할 수 있다고 하였다. 따라서, 현행 초등학교 수학교과서에서 제시되고 있는 도형에 대한 논의가 좀 더 필요하다고 생각된다.

참고로 미국 교과서에서는 '닫힌 도형'과 '열린 도형'이라는 용어를 먼저 도입한 후, 「곧은 변을 가지는 닫힌 평면도형」으로 '다각형'의 용어를 도입하고 있으며 다각형인 경우와 아닌 경우의 예를 도입하고, 볼록이 아닌 다각형의 경우도 다루고 있다.

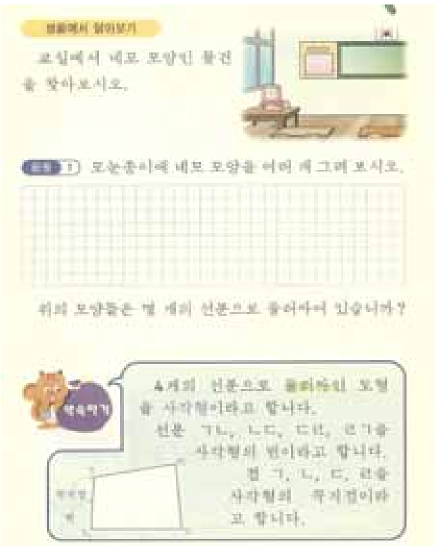


[그림 Ⅳ-14] Harcourt Math <3단계> 다각형

또 다른 문제는 다각형과 관련된 용어 선택의 문제이다. 구체적으로, 다각형의 용어 설명은「선분의 수」로 결정되는데, 용어자체는 「각의 수」로 조어가 되어 있다는 것이다. 물론 용어의 설명인「선분의 수」로 조어가 된다면 좋겠지만 오랫동안 사용해온 도형의 용어를 바꾸는 것이 쉽지 않음을 고려해볼 때 다각형의 학습시에 약속하기에 사용된 「선분의 수」 뿐만 아니라 용어의 관점인 「각의 수」로 분류하는 활동 내용을 강화한다면 학생들에게 다각형의 이름과 정의가 유의미하게 연결될 수 있다. 「선분의 수」에 따른 조어를 지금 사용하는 용어와 함께 허용하는 것도 생각해볼 문제다.

dCollection @ jeju

현행 수학교과서 <2-가>를 살펴보면 사각형의 용어 도입과 관련된 활동은 네모 모양인 물건 찾아보기, 그려보기를 통해서 불변량(선분의 개수)을 추상화 한다. '위의 모양들은 몇 개의 선분으로 둘러싸여 있습니까?'라고 묻고, 바로 사각형의 약속하기가 도입된다([그림 Ⅳ-15]참조).



[그림 Ⅳ-15] 사각형의 용어 도입(교육부, 2004, <2-가>, p. 38)

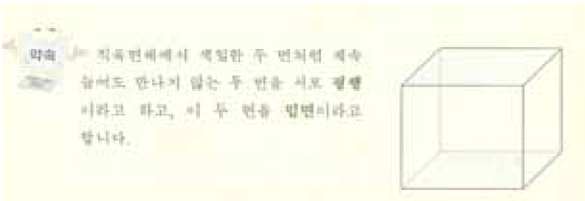
사각형이라는 용어가 관습적인 수학적 용어이나, 교수학적 관점에서 생각해 본다면 처음 도형을 배우는 학생들에게는 생소한 용어이다. 따라서 학생들에 스스로 용어를 만드는 활동을 도입한다면 개념이미지 형성의 측면에서 유용하다고 생각된다. 예를 들어, 삼각형이라는 용어를 배운 후에 용어의 정의에 따라 삼변형이라는 용어를 붙이는 것이 어떠한지에 대해 의사소통 해본다면 그냥 교과서 내용 그대로 '사각형'을 익힌 아동보다는 분명 의미있는 개념 이미지 형성이 되었을 것이다. 또, <4-나>에서 다각형을 다룰 때도 '다각형은 변의 수에 따라 삼변형, 사변형, 오변형, 육변형이라 부른다' 고 하는 표현에 대해 의사소통해보는 시간을 갖는다면 아동들이 가지게 되는 용어과 정의 사이의 간극을 줄일 수 있을 것이다.

평면도형인 다각형의 용어를 사용해서 설명되어지는 입체도형의 용어에는 각

Collection @ jeju

기둥13)과 각뿔14)이 있다.

각기둥의 정의와 관련하여서는 입체도형에서 '두 면의 평행'과 관련된 개념은 직육면체를 다룰 때 처음 도입되고([그림 Ⅳ-16] 참조), 이 개념을 각기둥에 직관적 일반화를 하고 있다. 즉, 두 다각형의 평행개념을 별다른 설명 없이 기술하고 있는 것이다. 실제로, 직육면체 후에 나타나는 입체도형에서의 면의 평행 개념을 별다른 설명 없이 기술하고 있다.



[그림 Ⅳ-16] 면의 평행(교육부, 2004, <5-가>, p. 56)

또한 용어설명을 살펴보면 밑면의 특징만을 기준으로 삼고 있다. 즉, 각기둥이 속한 범주가 단지 입체도형(미국의 경우 다면체가 범주)이기 때문에(옆면에 대한 설명 없음), 만일, 그림의 제시가 없다면 인식의 문제가 제기될 수 있다.

마. 원과 이와 관련된 용어

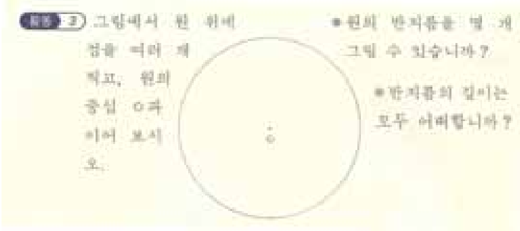
원과 관련된 초등수학교과서의 내용을 살펴보면, 먼저 <2-가> 단계에서 「본을 떠 그린 동그란 모양의 도형」으로 도입하고, 원의 구성성분과 관련된 용어는 <3-나> 단계에 다루고 있다. 여기서 [그림 Ⅳ-6]과 [그림 Ⅳ-17]을 살펴보면 원은 그 내부를 포함하고 있지 않은 도형이다.

---

13) (그림제시) 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형. 미국의 경우(Harcourt Math)는 다면체를 「다각형인 면을 가지는 입체도형」으로 도입하고, 그 후 다면체의 범주에서 각 기둥을 설명하고 있다.

14) 몇 개의 그림으로 제시. 미국의 경우(Harcourt Math)는 단지 하나의 밑면을 가지는 다면체로 설명한다.

Collection @ jeju



[그림 Ⅳ-17] 원의 반지름 활동(교육부, 2004, <3-나>, p. 32)

그러나, 원과 관련된 대부분의 활동(모양 만들기, 분수 개념지도 등)은 실제로 원판을 이용하고 있다는 점에서 원과 그 내부를 포함하고 있는 원판을 동일시하는 하여 원을 맥락에 따라 내부를 포함하고 있다고 생각할 수 있다. 그러나 구체적 조작기의 학생들은 실제적인 활동을 통해 획득한 개념 이미지가 개념 정의보다 앞설 수 있고 잘못 형성된 개념이 고착화 될 수 있으므로 교사는 항상 이를 염두에 두어야 한다.

평면도형인 원이라는 용어를 사용해서 설명되어지는 입체도형의 용어에는 원기둥, 원뿔, 구가 있다.

원기둥의 정의와 관련하여, 입체도형에서의 '두 면의 평행'과 관련된 개념은 각기둥과 마찬가지로 직육면체로부터 직관적 일반화를 하고 있다. 또한 원기둥과 원뿔의 정의의 설명('…합동인 원'과 '…밑면이 원')에 있는 '원'을 실제로 '원판'을 의미한다. 또, 원기둥과 원뿔의 정의 설명에서 '곡면'이라는 용어는 이전에 배운 입체도형의 경험으로부터 형성된 관념인 '면은 평평하다'라는 이미지에 혼돈이 올 수 있다. 이와 같은 문제는 초등학교 수학교과서에서 '면'에 대한 용어가 설명이 없이 도입 사용되고 있다는 점에서 기인한다고 볼 수 있다. 여기서 고려해야 할 관점의 문제는 '다면체'의 범주를 어디까지 볼 것인가와 관련된다. 즉, 원기둥과 원뿔을 일반적인 관점과는 다르게 다면체의 범주에 속한다고 해석할 수 있으며, 중등과정과의 연계적 측면이 고려되지 않은 문제점이 있다.

바. 합동, 두 직선 사이의 관계

도형영역에서 발생하는 용어의 문제 뿐 아니라 다루고 있는 범위가 한정되어

dCollection @ jeju

있는 부분에 대해서도 논의해 본다면 대표적으로 초등수학교과서의 합동과 두 직선 사이의 관계를 들 수 있다.

수학교과서 <5-나>에 합동이라는 용어가 처음 등장하지만, 다루고 있는 도형은 다각형, 원의 범위에서 한정되고 있다. 도형의 합동의 지도 내용을 살펴보면, 대응각, 대응변, 대응점을 익히고 삼각형의 합동조건에 대해 알아보는 순서로 되어 있는데 교과서의 내용이 합동이라는 개념보다는 삼각형의 합동에 초점이 맞춰진 듯하다. 선분의 합동이나 각의 합동에 대해서는 대응변, 대응각의 지도시에 혼동을 줄 우려가 있으나, 합동이라는 용어의 제시가 <5-나>단계인 만큼 선분의 합동도 다루어 선분의 위치에 상관없이 길이가 같으면 합동이라는 표현을 사용하게 한다면 보다 수학적으로 접근할 수 있다.

또, <4-나> 4. 수직과 평행 단원을 통해 직선 사이의 관계를 처음 다루고 있다. 앞서 도형의 도입시기에도 언급된 바 있지만 직선 사이의 관계를 익히기 보다는 각 차시별로 평행, 수직의 개념을 익히기에만 초점을 두고 있다. 도형의 분류에 좀 더 관심을 두어 만나는 직선과 만나지 않는 직선을 분류해 보고 만나는 직선의 특수한 예인 수직 관계를 다루는 순서로 교사가 교과서를 재구성하여 지도한다면 수직과 평행을 후속학습인 사각형과 도형 만들기 단원을 위한 선수학습에 머무르진 않을 것이다.

Ⅴ. 도형영역 개념 정의에 대한 교사 인식도 연구

본 연구를 수행하면서 현재 재직하고 있는 제주도내 교사 80명에게 오류의 가능성이 있는 개념 문제인 점, 평면, 다각형, 원에 대해 교사들의 수학적 지식과 교수학적인 관점에 대해 물었으며 설문의 구체적인 내용은 **<부록 1>**을 참조한다. 설문 조사시 경력별(5년미만, 5-10년, 10년-20년, 20년 이상 각 20명씩)로 설문 대상을 선정하여 경력별로 생각의 차이가 있는지 살펴보고자 하였으나, 설문결과를 분석해 본 결과 경력대별로 유의미한 차이가 없었다.

설문에 대한 80명의 회신에 대한 내용을 분석하여 기본도형, 다각형, 원, 도형영역의 지도로 나누어 분석 정리한 내용은 아래와 같다.

Collection @ jeju

1. 기본도형(점, 평면)에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 도형의 정의에 바탕이 되는 용어인 점(point), 선(line), 면(plane) 등의 무정의 용어 중에서도 초등학교에서 약속되고 있지 않은 점과 평면에 대한 교사 인식을 알아보기 위해 실시되었다. (<부록1>의 2. 3. 참조)

<표1> 기본도형에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈 도					
	①	②	③	④	⑤	계
2. “점”을 설명 없이 시각적 표현으로만 도입하는 데 대한 생각	12	26	30	11	1	80
3. 학생이 평면이 무엇인가라고 묻는다면 어떻게 설명할 것인가?	50	3	25	2	0	80

교사들은 현행 보다는 도형의 개념의 기본인 시각적 표현과 위치적 의미를 알 수 있도록 점에 대해서 교과서에 실리거나 설명해주어야 한다는 의견을 가지고 있었다. 아동들이 상식적으로 알고 있는 점은 직관적 표현인 점(・;dot)인 것만을 생각할 때 위치적 의미의 설명이 필요하다. 점에 대한 위치적 의미를 설명하는 방법으로 교수학습 도구로 흔히 사용하는 레이저 포인터를 활용하는 것을 생각할 수 있다.

‘평면’용어에 대해서는 시각적 표현, 직선이 움직인 자취의 의미 모두를 설명한다는 의견도 많았으나 50명의 교사가 구체물을 활용한 시각적인 학습이 적합하다는 응답을 했다. 입체를 둘러싸고 있는 평평한 부분의 의미로 평면을 해석하여 구체물을 활용하더라도 입체도형 중에서도 원뿔과 원기둥의 옆면을 다룰 시에는 면에 대한 용어 사용에 대해 고려해야 한다. 교사는 다면체에서 한정되어 있던 면의 개념이 수정됨을 알고 원뿔이나 원기둥에서 옆면을 면으로 보는 것이 좋을지 아닌지를 탐구하는 활동을 하게 할 수 있으며 아동은 이 활동을 통해 면이 평면뿐만 아니라 입체도형을 둘러싼 부분임을 인식할 수 있을 것이다. 이런 관점에서는 직선이 움직인 자취를 설명한다면 아동의 이해가 용이할

Collection @ jeju

것이다.

학교 현장에서는 기본도형인 점, 평면의 의미에 대해서 교과서에 지도 내용을 구성해야 할 필요성이 있음을 이야기하고 있으며, 3번 설문의 답변을 보면 많은 교사들이 교과서에는 실리지 않았지만 학생들의 이해 수준에 맞게 실생활에서 구체물을 활용하여 개념을 지도함을 알 수 있다. 초등학생들의 인식수준을 생각해본다면 다양한 구체물 및 예시를 통한 학습은 도형의 개념 학습에 도움을 줄 것이다. 다만, 활용하고 있는 구체물 및 전형적 모델이 지니는 '포괄적 확장의 원리'를 생각해볼 때 개념 지도에 문제가 없는지 또는 학교 학년급의 상승에 따라 어떻게 다른 맥락으로 재정의가 되고 있는지 교사들은 인식하고 있어야 한다.

2. 다각형에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 다각형의 정의에 사용된 맥락 의존적인 정의에 대한 교사들의 생각과 직관적 수준과 개념적 수준의 갈등의 문제, 관계적 이해(분류)의 관점에 따른 용어 도입의 문제에 대해 다루었다. (<부록1>의 4. 5. 6. 7. 8. 9. 참조)

<표2> 다각형에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈 도					
	①	②	③	④	⑤	계
4. 다각형의 약속하기의 "선분으로 둘러싸인 도형"에서 "둘러싸인"의 의미	63	9	7	1		80
5. 다각형에서 내부를 포함하고 있는 것과 포함하지 않는 것 중 지도에 유용한 것	56	7	17 (무응답)			80
·6. 공간상의 도형으로 4개의 선분으로 둘러싸인 도형은 사각형인가?	31	37	8	4		80
7. 수업시간에 오목다각형을 제시한 경험	21	55	4			80
8. 다각형의 정의의 관점은 '변의수'이면서도 '각의 관점'인 용어를 사용하는 문제에 대한 의견	12	43	23	1	1	80

dCollection @ jeju

9. '관계적 이해'에 따른 용어도입에 대한 의견	17	45	16	0	2	80

제 7차 <2-가>단계에서는 사각형을 "**4개의 선분으로 둘러싸인 도형**"이라고 정의하면서 '**둘러싸인**'이라는 용어가 처음 도입된다. 이에 대해 대부분의 교사는 '둘러싸인'의 의미를 내부와 선분 모두를 포함하고 있다고 인식하고 있으며 내부를 포함했을 때 학생들의 지도에 더 유용하다고 생각하고 있었다. 후속학습인 둘레의 길이, 넓이, 입체도형의 전개도등의 개념과 연계가 되어야 하고, 다각형 지도 시 색종이 오리기 내부 색칠하기 등 구체적 조작활동을 하므로 교사들은 학생들이 쉽게 이해할 것이라는 의견이었다. <1-나> 단계에서 구체물을 본뜨는 활동을 통해 세모, 네모의 형태를 인식하는 활동을 하는 것을 보면 저학년 시기에는 도형의 형태 즉, 선분만을 의미하는 것으로 지도하는 것이 유용하다고 여길 수 있다. 박교식·임재훈(2004)은 초등수학의 특징이 엄밀하지 않은 다소 애매한 표현을 사용하여 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성을 고려한다고 하였다. 입체도형의 전개도 지도시 자르는 맥락에서는 '속이 꽉 차 있는 도형'이라는 의미를 선택하고, 펼치는 맥락에서는 '속이 빈 도형'이라는 의미를 선택하는 것처럼 수학적 엄밀성에서 보면 결함이 생긴다. 그러나 학교수학에서 어느 한 시점에서 모든 수학적 관점의 맥락이 등장할 수 없으므로 학년, 학교급이 올라감에 따라 점진적으로 보다 수학적인 맥락에서 정의가 등장하게 된다. 교사들은 초등학교에서 사용하는 수학적 개념들이 학교, 학년이 올라갈수록 보다 엄밀하고 수학적인 용어로 수정된다는 것을 알고 있다. 하지만, 학교, 학년이 올라갈수록 엄밀해지는 용어 및 개념 정의가 초등학교에서 배웠던 용어들의 토대위에서 얻어진 개념이라고 볼 때 초등학교 교과서에 등장하는 맥락의 의미를 통찰하여 보다 수학적으로 접근할 수 있는 방법에 대해 교사들은 숙고하여야 할 것이다. 특히 활동을 통해 얻어진 개념이 반드시 수학적인 개념이 아니라는 것을 교사는 인식하여 후속학습에서 다른 맥락이 등장할 때 발생하는 인식의 갈등의 문제를 줄이는 방법을 모색해야 한다.

공간상에 놓인 "**4개의 선분으로 둘러싸인 도형**"가 사각형인가라는 설문에 대해 31명의 교사가 '사각형이다'라고 답변하였는데, 너무 넓은 류(類)를 제시함으로써 혼동을 줄 수 있는 개념으로 교사들조차도 평면도형이 아닌 도형을 사

dCollection @ jeju

각형이라 인식하는 오류를 범하고 있었다. 조영미(2001)는 초등학교 도형 영역에서는 최근류를 제시할 수 있음에도 불구하고, 매우 넓은 류(類)를 제시하여 도형을 정의하는 경우가 적지 않다고 하였는데 사각형의 정의를 "**4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형**"이라 하는 방법에 대해서도 고려해야 한다. 또, 보다 엄밀한 의미의 도형의 정의에 대해 학습했던 교사들조차 직관적 수준과 개념적 수준의 혼동을 겪고 있는 것으로 보여지므로 전형적인 모델, 예시를 통한 사물의 정의를 가르칠 때 발생하는 문제점을 교사들도 인식해야 하는 설문결과로 보여 진다.

교사가 명확한 개념과 다양한 예들을 가지고 있다는 것을 전제로 할 때 학습자가 예시를 통한 정의 방법을 제대로 활용할 능력을 갖추게 되는데, 이를 위한 방안으로 Fischbein은 다음과 같은 제안을 하고 있다..(강흥규・조영미, 2002, p.100; , Fischbein, 1987, p,152에서 재인용)

> 가능한 일찌감치 수학적인 정의가 의미하는 바를 학습해야 한다. 가능한 구체적 조작기에 시작해서 형식적 조작기에 정의의 개념을 확실히 고착시키는 경험을 하는 것이 필요하다. 해당하는 용어를 사용함에 있어 개념을 명확히 정의하는 활동이 갖는 결정적인 역할을 배워야만 한다. 개념에 비추어 전형적인 모델을 분석하고 개념에 따라 예인 것과 아닌 것을 찾는 학습을 하면서, 학습자는 어떤 개념을 이해하는 단계에 이를 수 있을 것이다. 이때 도달한 개념은 의미 없는 것이 아니며 또한 건전하게 사용될 예시와 관련되어 있을 것이다.

Fischbein의 제안의 구체적인 방안에 대해서는 많은 연구가 필요하겠지만 현재 수학교과서에서 제시되고 있는 도형의 개념에 대한 교사들의 명확한 개념 정의가 전제되어야 아동들이 개념을 이해하는 수학적 활동이 이루어질 수 있음을 강조하는 논의이다.

학습자가 어떤 도형의 개념을 이해하는 단계에서 유용한 활동은 분류하기 활동이다. <설문 9>를 분석해보면 도형영역에서는 평면도형과 입체도형을 단계별로 분리하거나 각 소주제별(차시별)로 도형을 다루고 있는 부분에 대해 많은 교사들이 문제 인식을 하고 있었다. 최병훈, 방정숙, 송근영, 황현미, 구미진, 이성미(2006)의 도형과 측정영역을 중심으로 한 싱가포르 교과서와 우리나라 교과서의 비교 연구에 따르면 학생 스스로 짝지어보고 구별하여 분류하는 활동은

dCollection @ jeju

도형 영역에서 강조되는 활동 중의 하나이나 우리나라 교과서의 경우 도형의 개념 도입 시 분류하기의 사고 기능을 찾아 볼 수 없다는 것이 아쉽다고 하였다. 현행 7차 수학과 교육과정이 수학적 사고력과 문제 해결력을 강조하는 방향인 점을 생각해 본다면 분류하기 활동을 통한 개념 도입의 문제는 우리 교과서에서도 다뤄져야 할 내용이다.

또, 우리나라의 초등수학 교과서의 도형 영역이 분류하기 활동을 통한 개념 도입보다는 학습할 도형의 개념에 관한 내용을 찾는 활동을 통해 정의를 내리는 과정으로 학습이 이루어지는 까닭에 우리나라 교과서에 제시된 도형들은 매우 제한적이다. 수업 시간에 오목다각형을 제시한 경험이 있다고 답한 교사가 21명으로 많지 않았으며 교사용 지도서에 초등학교에서는 볼록다각형만을 다룬다는 제한점이 제시되어 있다. 그러나, 다양한 도형을 분류, 조작하는 활동을 하는 기회가 자주 주어진다면 학생들은 개념을 기억하는 차원에 머무르는 것이 아니라 개념에 대한 이해를 이끌어낼 수 있을 것이다.

정의와 용어가 일치하지 않는 관점에 대한 설문에 대한 응답으로는 기존에 사용하던 용어를 그대로 사용하자는 의견이 43명으로 가장 많았고, 삼각형과 삼변형, 사각형과 사변형 등과 같이 용어 정의를 다양하게 수용하자는 의견에도 23명이 응답하였다. 오랫동안 사용해온 용어를 바꾸는 것에 따른 많은 문제가 파생되며 논의도 필요하나 교사는 교과서의 내용을 재구성할 수 있으므로 도형의 용어 지도 시 분류의 관점에 따라 아동들이 도형의 이름을 붙여보는 활동을 하면 도형의 관계적 이해에도 도움을 주고 수학적 사고력을 향상시키는데도 유용한 활동이 될 것이다. 예를 들어 삼각형을 변을 기준으로 분류한 후 부등변 삼각형, 이등변 삼각형, 삼등변 삼각형 이라 할 수도 있고 또는 변이 같지 않은 삼각형, 두변 같은 삼각형, 세변이 같은 삼각형처럼 용어를 풀어 이름을 만드는 학생도 있을 것이다. 단, 용어 소통의 문제 역시 수학에서 중요한 문제이므로 반드시 이러한 활동 후 도형의 정확한 이름을 지도해야 한다.

3. 원에 대한 교사 인식도 분석

설문의 내용은 초등학교 수학 교과서에 실린 원과 원기둥의 정의에 사용된

dCollection @ jeju

원의 용어에 대한 교사들의 이해정도와 지도관점에 대해 다루었다. (설문의 내용은 <부록1>의 10. 11. 12. 13. 참조)

<표3> 원에 대한 교사 인식도 설문결과

설문내용	빈 도					
	①	②	③	④	⑤	계
10. 학생이 원이 내부를 포함하고 있다는 오류를 범할 가능성	5	70	3	2		80
11. 원은 내부를 포함하고 있는가의 문제	44	30	6			80
12. 원의 면적을 '0'이라고 한 학생에 대한 정답처리 문제	20	1	20	9		50
13. 원기둥의 정의에서 사용된 원의 용어 문제	29	12	9			50

다각형이 내부를 포함하는 것으로 취급하는 인식이 많은 것처럼 [그림 Ⅳ-6]에서 원이 내부를 포함하고 있는가를 묻는 질문에 대해 44명의 교사들이 원이 내부를 포함하고 있다고 답하였다. 원과 관련된 대부분의 활동이 원판을 이용하고 있다는 점에서 내부를 포함하고 있는 원판을 원과 동일시하여 원을 맥락에 따라 내부를 포함한다고 생각하는 오류를 범하고 있다.

설문의 12, 13번 문항은 11번 문항에서 원이 내부를 포함하고 있지 않다고 답한 교사들만 응답하도록 되어 있었으나 내부를 포함하고 있지 않다고 답한 교사가 30명에 지나지 않으며 내부를 포함하고 있다고 답한 교사중 에서도 설문에 응한 교사가 있어 설문에 응한 교사 50명의 응답을 분석하였다.

[그림 Ⅳ-6]의 관점은 원이 내부를 포함하고 있지 않고 있으나 원 위의 점을 찍을 때 내부에 점을 찍을 수 있는 가능성에 대해서는 70명의 교사가 가능성이 있다고 답하였다. 교사는 원은 내부를 포함하고 있지 않다는 것을 분명히 인식하여 학생들이 오류를 범하지 않도록 해야 할 것이다.

원이 내부를 포함하고 있지 않다고 생각한 아동이 원의 넓이를 계산하는 문제에서 '0'이라고 답할 가능성에 대해서는 20명의 교사가 가능성에 대해 생각해 본 적이 없다고 하였으며 20명의 교사는 틀렸다고 하겠다는 것으로 보아 원의

Collection @ jeju

넓이를 구하는 경우는 맥락에 따라 내부를 포함한 넓이를 구하는 것으로 인식하는 것으로 보인다. 왜 '0'이라는 답을 했는지 물어보고 정답으로 처리하겠다는 것과 원의 넓이를 구하는 것은 원 내부의 넓이를 구하는 것으로 다시 설명해주겠다는 기타 의견이 있었다.

초등수학교과서에서 제시되고 있는 원기둥의 정의에 대한 교사의 반응을 분석해보면 29명의 교사가 틀린 답으로 하겠으며 12명의 교사는 이와 같은 관점으로 생각해 본적이 없다는 것으로 보아 원기둥의 정의에 사용된 원의 개념 역시 맥락에 따라 원판으로 해석하고 있음을 알 수 있다. 이러한 오류를 줄이는 방법에 대해 평면과 입체에 대한 개념 설명이 선행되어야 하며 입체도형은 겉을 둘러싼 면이 있는 도형이라고 정의해주고 각기둥에서 배운 내용을 상기하도록 하겠다는 의견과 원의 넓이를 내부의 넓이를 구하는 것으로 원기둥에 사용된 원은 내부를 포함하고 있음을 알리는 방향으로 교과서에 설명되어야 한다고 하는 의견이 있었다.

이와 같이 맥락에 따른 해석은 초등학생들이 원을 내부를 포함하고 있는 도형으로 생각할 가능성을 높인다. 물론 초등학교에서 다뤄지는 도형의 개념과 관련된 내용들이 초등학생의 인식 수준에 알맞은 맥락에서 다뤄져야 하므로 교과서의 내용이 크게 문제가 되지 않는다. 교사들은 학생들의 인식수준이 높아질수록 새로운 맥락이 등장하고 그 맥락에서는 원을 원판으로 해석하는 내용이 수정될 수 있을 것으로 기대하기 때문이다. 이러한 교사의 기대대로라면 학교급이 올라갈수록 고등의 수학교육을 받게 된다면 원을 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합으로, '부등식의 영역'이라는 맥락에서 지금 논의하고 있는 도형과 도형의 영역에 대한 의미를 예전보다 명확하게 이해할 수 있을 것이다.

그러나, 설문12의 답변에 대한 많은 오류의 원인이 초등수학교육의 관점에서 문제를 해석하여 접근한 것이였는지, 정말로 원의 개념에 대한 오개념을 지니고 있는지는 불분명하나 초등학교 교사들이 초등학교 수준의 수학개념 정의에 대한 이해에만 머무른다면 교사들의 기대대로 학교급이 올라가는 과정에서 새로 적용되는 맥락을 학생들이 이해하지 못하고, 개념 수정시 어려움을 겪을 것이다. 이는 중등교사들이 초등수학이 지니는 도형 용어들의 불분명함(실생활과 관련된 활동, 맥락 의존적인 정의, 예시적 정의 등)에 대해 이해해야 하는 것과

Collection @ jeju

같은 맥락이라 여겨진다. 원에 대한 교사 인식도를 분석한 결과 교사들은 다루고 있는 도형 개념의 본질에 대해 정확한 개념을 지녀야하며 이 정의로부터 파생되는 입체도형의 맥락에 대해서도 분명히 이해하여야 할 것이다.

4. 도형지도의 전반적인 사항에 대한 교사들의 인식도 분석

설문의 내용은 도형영역 지도시 수학적 정의에 대한 생각과 학교수학에 사용되는 용어에 대한 지도관점에 대해 물었다. (설문의 내용은 <부록1>의 15. 16. 참조)

<표4> 도형지도의 전반적인 사항에 대한 교사인식도 설문결과

설문내용	빈 도					
	①	②	③	④	⑤	계
15. 도형 영역 지도시 수학의 정의에 대한 생각의 빈도	20	43	16	1		80
16. 학교수학에서 사용되는 용어에 대한 인식	22	50	5	3		80

63명의 교사가 도형영역 지도시 수학정의에 대한 생각을 하고 있다고 답하였으나 본 설문에 대한 관점에 대해서 생각해보지 않은 교사도 16명이나 되었다. 학교수학에서 사용하고 있는 교과서에 실린 정의에 대해서 많은 교사들이 오류의 가능성을 염두에 두고 지도한다고 하였으며, 경력이 있는 교사 중 엄밀한 정의의 방법을 채택해야 한다고 인식한다고 답한 교사가 많았다.

인지 발달단계에 맞는 교육이 이루어져야 하므로 너무 엄밀한 정의를 초등수학에서 다루는 것은 힘이 들고 학습자에게 이러한 관점으로 모두 안내할 필요는 없다는 생각과 엄밀한 수학 정의를 채택하되 약속하기 상에 제시하는 것이 아니라 다양한 예나 구체적 조작활동을 통해 교사들이 학생들이 접근할 수 있도록 돕는 역할을 해야 한다는 기타 의견이 있었다.

dCollection @ jeju

5. 개선방안

장혜원(1997)은 개념 형성 과정에서 학생들의 표상에 가장 결정적인 영향을 미치는 것은 교사와 교과서 요인일 것이라고 하면서 새로운 개념이 소개될 때 교사나 교재가 사용한 표현이 학생이 구성하는 개념 표상의 근거가 되며 그것에 국한된 표상만을 갖기도 한다고 하였다.

이 말의 의미는 교사의 수학적 내용에 대한 이해 정도나 교과서에 소개된 수학적 내용의 수준이 아동들의 개념 형성의 근간이 되며, 새로운 개념 의 형성을 위해서는 교사의 접근 방법과 수학 교재에 내재된 수학적 개념을 향한 적극적 접근이 필수적이라는 것이다. 그러므로 수학의 도형 영역의 개념 지도시에는 교사들의 수학적 개념에 대한 좀 더 신중한 접근이 필요하며, 교과서에 소개된 정의의 관점을 이해하고 덜 엄밀한 형태로 제시된 학교수학의 교수학적인 측면에서 오개념이 형성될 가능성이 있음을 항상 염두에 두고 도형개념을 지도해야 한다.

대부분의 초등 교사들이 고등학교 또는 대학교에서 배웠던 내용을 다시 접하는 일이 힘들다는 점을 감안할 때, 초등수학을 가르치는 교사들에 대한 연수가 이뤄져야 한다. 초등수학을 이해하고 잘 가르치기 위한 방법적인 연구 뿐 아니라 초등수학을 가르치는 교사들의 수학적 소양에 대한 필요성을 인식시켜야 한다. 초등수학이 학문적 수학과는 분명 다르나 초등수학이 학문적 수학을 가르치기 위한 토대를 마련한다는 점을 생각해본다면 학문적 수학의 기초적인 지식은 필수이기 때문이다. 특히 본 연구에서 다루어졌던 도형(기하)영역 부분에 대한 교사들의 재교육은 반드시 필요하다.

Collection @ jeju

Ⅳ. 결론 및 제언

1. 결론

학교수학에서의 상황은 일상의 상황과는 다르다. 이 두 가지의 상황사이의 거리감을 좁히기 위하여, 현행 수학교과서에서는 실생활 문제를 많이 도입하고 있으며, 이로부터 많은 수학적 개념을 추출한다. 일반적으로 수학적 개념은 수학적 정의로부터 만들어지며 출발점이 된다는 점에서, 정의의 중요성을 엿볼 수 있다.

정의는 전문적 상황인 순수수학적 측면과 학생들의 인지수준을 고려한 학교수학적 측면이 있다. 학교수학적 측면에서의 정의는 교수학적 의도에 따라 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀한 형태로 제시된다. 이러한 점에서 항상 학생들의 수학적 오개념이 형성될 소지가 있다.

앞선 분석을 통해 초등수학의 도형영역에서 수학적 오개념이 형성될 수 있는 가능성을 살펴보고 교사 인식도를 알아보았다. 이에 따른 개선점을 개략적으로 요약하면 다음과 같다.

첫째, 교사들은 가르치고자 하는 개념 이미지의 문제를 항상 생각해 보아야 한다. 구체적 조작기의 범주에 속한 초등학생들은 두가지 상황의 개념이미지가 나타날 수 있다. 약속하기(정의)를 추출하기 위한 활동으로부터 획득된 이미지와 약속하기를 통해 형성된 이미지 사이의 충돌이 나타날 수 있다. 예를 들어, 원의 개념과 관련하여 원판의 이미지(활동으로 획득된 이미지)와 원의 이미지(약속하기를 통한 이미지)가 있을 수 있다. 이 두가지 개념이미지 사이에 수학적 오개념이 형성될 수 있으며, 그 간극을 좁히는 교수방법이 요구된다. 즉, 개념정의와 개념이미지 사이의 의사소통이 필요하다.

둘째, 기하적인 정의에 바탕이 되는 기초용어와 관련된 영향을 생각해야 한다. 예를 들어, 선과 면의 개념의 설정문제는 모든 평면도형과 입체도형의 약속하기에 영향을 준다. 우리의 경우는 이와 관련하여, 두 가지로 세분화하여 다루고 있다. 즉,

dCollection @ jeju

·선 — 곧은 선 → 직선
　　 — 굽은 선 → 원(?)

·면 — 평평한 면
　　 — 곡면

우리의 방식에서는 도형용어의 설명 중에 자주 나타나는 '선'과 '면'의 용어를 구체화해서 설명할 필요가 있다. 이를테면, 모서리를 정의할 때 「면과 면이 만나는 선」으로 용어 설명을 하고 있는데 이 경우 '선'을 '선분'으로 구체화하자는 것이다.

한편, 초등수학교과서에서 다루고 있는 원과 관련된 도형(원, 원기둥, 원뿔, 구)을 제외하고는 대부분의 다른 도형의 경우에는 '선' 은 '직선' 을, '면' 은 '평평한 면' 을 의미하므로, 입체도형의 범주를 다면체인 경우와 아닌 경우로 나누어 다루는 것도 생각해 볼 수 있다. 이유는 입체도형의 도입순서를 보면 다면체를 먼저 다루고 나중(<6-나> 단계)에서 비로소 원기둥, 원뿔과 구와 같은 일반적 의미에서의 다면체가 아닌 도형을 취급하고 있다는 점이다.

셋째, 도형을 취급하는 일관성의 문제를 생각할 수 있다. 직육면체와 관련된 용어의 경우는 비교적 상세하게 다루고 있지만, 그 외의 다른 입체도형의 구성성분과 관련된 용어는 소홀히 다루어지는 경향이 있다. 여기서 생각할 문제는 과연 일반화가 이루어수 있느냐는 점이다.

넷째, 도형과 관련된 조어의 문제를 생각할 수 있다. 오랫동안 사용해온 용어를 바꾸는 것에 따른 많은 문제가 파생되며 논의도 필요하나 교사는 교과서의 내용을 재구성할 수 있으므로 도형의 용어 지도 시 분류의 관점에 따라 아동들이 도형의 이름을 붙여보는 활동을 하면 도형의 관계적 이해에도 도움을 주고 수학적 사고력을 향상시키는데도 유용한 활동이 될 것이다.

끝으로, 도형의 도입시기와 방법을 생각할 수 있다. 관계적 이해의 관점에서 범주별로 도형을 도입하는 것이 교과서에 보다 강조되어야 할 것이다. 이것은 하나의 범주 안에서의 여러 가지 도형을 비교의 관점으로 파악하게 함으로, 도

dCollection @ jeju

형이 지닌 용어의 수학적 개념을 좀더 쉽게 인식할 수 있다.

본 연구에서 덜 엄밀한 정의를 사용함으로써 발생할 수 있는 오개념의 문제에 대한 개선점을 제시해보았다. 현장에서 수학을 직접 지도하는 교사들이 이러한 문제들에 문제인식을 하지 않는다면 맥락 의존적인 용어가 많은 학교수학 특히 초등수학의 특성상 당장 문제가 발생하지 않더라도 보다 학문적인 수학의 세계로 입문할 때는 분명 문제를 발생시킬 것이다. 따라서 교사는 도형영역의 지도시 교과서를 재구성하여 학생들에게 도형의 의미를 이해하는 초석을 마련해주어야 한다.

2. 제언

본 연구에서는 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 대해 오개념 형성의 가능성을 염두에 두고 그 개선방안을 고찰해 보았는데 초등수학의 도형영역에 대한 내용을 다룰 때는 다음과 같은 점을 고려해 볼 필요가 있다고 생각되어 다음과 같이 제언한다.

첫째, 도형영역에서 발생하는 오류를 줄이기 위해 교과서를 재구성하고 수업에 활용하는 교사들의 노력이 요구되어야 한다.

둘째, 도형영역의 개념형성뿐만 아니라 도형영역의 지도시 사고력과 문제해결력을 신장할 수 있는 방법을 함께 모색할 수 있는 교과서의 지도내용 구성에 대한 구체적이고 다양한 연구가 이루어지길 바라며 교사용지도서에도 도형영역의 개념 정의에 대한 학문적 수학의 관점(특히, 중・고등학교에 가서 맥락의 수정을 요하는 내용)이 실려 초등수학을 가르치는 교사들의 수학적 소양을 높이도록 해야 한다.

셋째, 본 연구는 교사 인식도에 한정하였으나 초등학생들이 지닌 개념이미지 및 도형영역의 오류의 가능성에 대한 연구가 체계적이고 광범위하게 이루어지기를 제안한다.

Collection @ jeju

참 고 문 헌

교육부(2004). **수학 <1-가> 단계 ~ <6-나> 단계 교과서**. (주)대한교과서 주식회사.

우정호. (2000). **수학 학습지도의 원리와 방법**. 서울대학교 출판부

박교식・임재훈(2004). **다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석**. 수학교육학 연구, 14(1), 19-37.

우정호・조영미(2001). **학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구**. 수학교육학연구, 11(2), 363-384.

강흥규・조영미(2002). **학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의**. 수학교육학연구, 12(1), 95-107

조영미(2001). **학교수학에 제시된 정의에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문

조영미(2002). **수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성분석과 수준탐구**. 학교수학, 4(1), 15-27.

장혜원(1997). **수학학습에서 표현 및 표상에 관한 연구: 표상모델 개발을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

최병훈・방정숙・송근영・황현미・구미진・이성미(2006). **한국과 싱가포르 수학 교과서 비교 분석:도형과 측정영역을 중심으로**. 학교수학, 8(1), 45-67.

Beth, E. & Piaget, J. (1961), W. Mays(trans.) (1966), *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht: D. Reidel.

Evan M. Maletsky et al. (2002). *Harcourt Math* (Math-Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6), Harcourt, Inc.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dortrecht: Reidel.

Piaget, J. et al. (1977), *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, Paris: Presses Universitaires de France.

Rich, B. (1963) (revised by Philip A. Schmidt) (2000). Schaum's outlines

Collection @ jeju

Geometry (3rd Edition), McGraw-Hill Companies, Inc.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Computer Graphics*, Ph.D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Tall, D. (1991). **고등수학적사고**. (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사.

Collection @ jeju

A B S T R A C T

A Study on the Definitions in the Area of Geometry of Elementary School Mathematics

Oh, Suk kyoung

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University of Education
Jeju, KOREA

Supervised by Professor KeunBae Choi, Ph. D

Unlike ordinary situations, definitions play a very important role in mathematical education in schools. Mathematical concepts have been mainly acquired by given definitions. However, according to intentions on teaching, mathematical education in schools has employed mathematical concepts and definitions with less strict forms than those in mathematical science without using definitions in mathematical science. This research mainly discusses definitions used in geometry (promising) course in primary schools to cope with possibilities of creating misconception due to this didactical transformation.

After analyzing problems with potential misconceptions, a survey was conducted on 80 primary school teachers in Jeju to investigate their recognitions in meaning of mathematical concepts in geometry and attitudes toward teaching. Most of the respondents answered they taught their students while they knew well about mathematical definitions in geometry but the respondents sometimes confused mathematical concepts of polygons and circles. Also, they were aware of problems in current mathematics textbooks which have explained

dCollection @ jeju

figures in small topics (classes).

Here, several improvements will be proposed as follows from analyzing teachers' recognitions and researches in mathematical viewpoints of definitions (promising) in figures which have been adopted by current mathematics textbooks in primary schools from the seventh educational curriculum.

First, when primary school students in their detailed operational stage studying figures, they tend to experience collision between acquired images from activities to find out promising and images formed through promising. Therefore, a teaching method is required to lessen possibility of misconceptions. That is, there should be a communication method between defining conceptual definitions and images.

Second, there should be a thought about how figures and their elements in primary school textbooks are connected with fundamental terminologies laying the foundation for geometrical definitions and more logical approaches should be adopted.

Third, the consistency with studying figures should be considered.

Fourth, sorting activities about problems in coined words related to figures and way and time of their introductions should be emphasized.

In the curriculums of mathematics in primary schools, geometry has played a crucial role in increasing mathematical ways of thoughts. Hence, being introduced by parts from viewpoints of relational understanding should be emphasized more in textbooks and teachers should teach students after restructuring this.

Teachers who teach mathematics should consider levels of their students and help their students not only learn definitions of geometry in their courses well but also form entrance to mathematical definitions. Therefore, that's why mathematics teachers should know meanings of concepts clearly and accurately.

Collection @ jeju

부 록

1. 교사용 설문지

2. 도형영역에 제시된 약속하기의 도입순서 및 그 수준<표5>

Collection @ jeju

교사용 설문지

안녕하십니까?

이 설문지는 제 7차 초등수학교과서 도형영역에서 도입하고 있는 정의(약속하기)에 대한 교사인식도 조사 및 분석을 통해 초등수학 도형영역의 지도 방향에 대해 모색해보려 합니다.

여러분의 답변은 본 연구에 많은 도움을 줄 것이며 본 연구 이외에는 다른 목적에 사용하지 않음을 약속드립니다.

2007. 9

제주교육대학교 교육대학원

오 숙 경 드림

□ 개인사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

1. 선생님의 교직 경력은?
   ① _____5년 미만
   ② _____5년 이상 -- 10년 미만
   ③ _____10년 이상 -- 20년 미만
   ④ _____20년 이상

□ 기본도형(점, 평면) 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

2. 초등수학교과서에서는 "**점**"이라는 용어를 설명 없이 시각적 표현(dot; ●)으로만 도입하고 있습니다. 이에 대해 어떻게 생각하십니까?
   ① _____지금처럼 시각적 표현으로만 도입해도 별 문제가 없다.
   ②_____점의 본래 의미인 공간에서의 장소 또는 위치의 의미(point, position, location)도 설명해주어야 한다.

Collection @ jeju

③ _____시각적 표현과 위치적 의미를 알 수 있도록 점에 대해서 교과서에 설명되어야 한다.
④ _____깊이 생각해 본적이 없다.
⑤ _____기타(   )

3. 초등수학교과서에서는 “**평면**”이라는 용어를 설명 없이 도입하여 사용하고 있습니다. 만일 학생이 “평면이 무엇인가요?”라는 질문을 한다면 어떻게 설명하시겠습니까?
① _____구체물(칠판, 박스 등)을 활용하여 시각적 표현으로 설명한다.
② _____직선이 움직인 자취의 의미로 설명한다.
③ _____시각적 표현, 직선이 움직인 자취의 의미 모두를 설명한다.
④ _____이와 관련하여 깊이 생각해 본적이 없다.
⑤ _____기타(   )

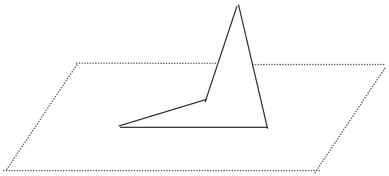
□ 다각형 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

4. 초등수학교과서에서는 “**선분으로만 둘러싸인 도형**”으로 다각형의 약속하기로 도입하고 있습니다. “둘러싸인”의 의미와 관련하여 어떻게 생각하십니까?
① _____다각형은 내부와 선분 모두를 포함하고 있다.
② _____다각형은 선분만을 의미한다.
③ _____깊이 생각해 본적이 없다.
④ _____기타 (   )

5. 4번 문항의 ①, ② 중에서, 초등학생에서 어느 것이 더 유용하다고 생각됩니까? 그렇게 생각한 이유는 무엇입니까?

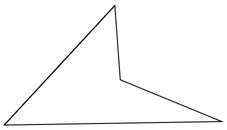
dCollection @ jeju

6. 초등수학교과서에서 사각형의 약속하기는 "**4개의 선분으로 둘러싸인 도형**"으로 되어 있습니다. 공간상에 위치한 아래의 도형도 사각형의 약속하기를 만족하고 있습니다. 아래의 도형도 사각형이라고 생각합니까?



① _____사각형이다.
② _____사각형이 아니다.
③ _____이러한 문제를 생각해 본적이 없다.
④ _____기타 (　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

7. 초등수학교과서에서는 다각형의 예로 볼록다각형만을 다루는 경향이 있습니다. 수업시간에 오목다각형을 제시한 경험이 있습니까?



① _____있다
② _____없다
③ _____생각해 본적이 없다.

8. "다각형은 변의 수에 따라 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형 등으로 부른다."에서 다각형 정의의 관점은 '변의 수'이면서도 삼각형, 사각형 등의 '각의 관점'인 용어를 사용하고 있습니다. 이에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?

① _____일관성을 생각해 볼 때 변의 관점에서 삼변형, 사변형 등으로 이름을 약속하는 것이 좋을 것 같다.

dCollection @ jeju

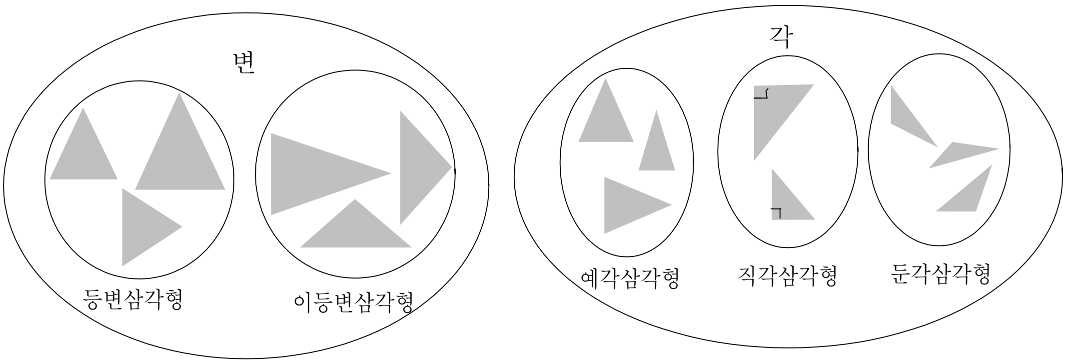
② _____오랫동안 사용해온 약속이므로 그대로 사용한다.

③ _____삼각형과 삼변형, 사각형과 사변형 등과 같이 용어 정의를 다양하게 수용한다.

④ _____이러한 관점으로 생각해 본적이 없다.

⑤ _____기타 (   )

9. 삼각형, 사각형의 종류를 도입할 때 차시별로 약속하기(예, 정삼각형, 이등변 삼각형에 대해 알아보자)를 하고 있습니다. 만약 아래 그림처럼 각 또는 변에 따라 분류를 한 후 관점에 따라 용어를 동시에 도입하는 것에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?



① _____교과서처럼 차시별로 도입하는 것이 아동이 용어를 확실히 알 수 있는 것 같다.

② _____위의 활동을 통해야 아동이 용어를 확실히 알 수 있을 것 같다.(관계적 이해)

③ _____위와 같은 활동은 한번에 너무 많은 용어가 도입되므로 아동들에게 어려울 것 같다.

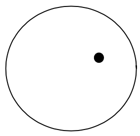
④ _____깊이 생각해 본적이 없다.

⑤ _____기타(   )

dCollection @ jeju

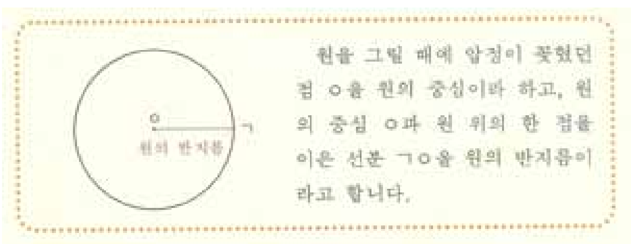
□ 원 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

10. 초등수학교과서에서 원의 약속하기와 관련된 여러 가지 활동을 통한 학생들의 원의 인식에 대하여, ‘원 위의 한점을 찍어라’라는 문제의 상황에서 아래의 그림과 같은 현상이 발생할 수 있는 가능성에 대한 선생님의 생각은 어떻습니까?



① _____가능성이 없다.
② _____가능성이 있다.
③ _____깊이 생각해 본적이 없다.
④ _____기타(   )

11. 아래와 같은 초등수학교과서의 약속하기에서 원은 내부를 포함하고 있습니까?



①_____내부를 포함하고 있다.
②_____내부를 포함하지 않는다. (이 경우 12, 13 문항으로)
③_____깊이 생각해 본적이 없다.

dCollection @ jeju

12. 어떤 학급에서 ‘원의 면적을 구하라’라는 문제에서 답을 ‘0’이라고 한 학생이 있다면 어떻게 처리하겠습니까?

① _____그 학생의 답이 틀린 경우로 취급한다.

② _____그 학생의 답이 맞은 것으로 취급한다.

③ _____이와 같은 가능성에 대하여 생각해 본적이 없다.

④ _____기타(   )

13. 교과서에 원기둥을 “위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 **원**으로 되어있는 입체도형”으로 약속하고 있습니다. 만약 이 정의를 생각하여 원기둥의 전개도를 아래와 같이 그린 아동이 있다면 어떻게 지도하시겠습니까?

① _____그 학생이 틀린 경우로 취급한다.

② _____깊이 생각해 본적이 없다.

③ _____기타(   )

14. 문항 12와 13과 같은 오류를 배제하기 위한 선생님의 아이디어가 있으시면 기술해 주십시오.

dCollection @ jeju

□ 전반적인 사항(해당 사항에 √ 표시하여 주시기 바랍니다)

15. 도형영역을 지도할 때, 앞에서와 같은 수학정의에 대하여 숙고한 적이 있습니까?

① _____자주

② _____가끔씩

③ _____이와 같은 관점으로 생각해 본적이 없다.

④ _____기타(   )

16. 학교수학에서는 비교적 덜 엄밀한 방법으로 수학용어를 정의하고 있습니다. 이로부터 학생들에게 나타날 수 있는 수학적 개념의 오류에 대한 선생님의 관점은?

① _____엄밀한 정의의 방법을 택해야 한다.

② _____오류의 가능성을 항상 염두에 두고 가르친다.

③ _____이에 대하여 깊이 생각해 본적이 없다.

④ _____기타(   )

Collection @ jeju

<표 5> 제 7차 교육과정 초등 수학교과서의 도형영역에 제시된 약속하기의 도입순서 및 수준

단계	용어	약속하기	수준
1-가	상자 모양	시각적 외형을 지시 (그림으로 제시)	제 0수준
	둥근기둥 모양		
	공 모양		
1-나	네모	시각적 외형을 지시 (그림으로 제시)	제 0수준
	세모		
	동그라미		
2-가	선분	두 점을 곧게 이은선	제 0수준
	직선	선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선	제 0수준
	사각형	4개의 선분으로 둘러싸인 도형	제 1a수준
	삼각형	3개의 선분으로 둘러싸인 도형	제 1a수준
	(사각형, 삼각형에서)변 · 꼭지점	(그림제시)	제 0수준
	원	본울 떠 그린 동그란 모양의 도형	제 0수준
2-나			
3-가	각	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형	제 1a수준
	(각에서) 꼭지점 · 변	(그림제시)	제 0수준
	직각	삼각자의 코너부분을 본 떠 그린 그림을 제시	제 0수준
	직각삼각형	한 각이 직각인 삼각형	제 1b수준
	직사각형	네 각이 모두 직각인 사각형	제 1b수준
	정사각형	네 각이 모두 직각이고, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형	제 1b수준
3-나	원의 중심	원을 그릴 때에 압정이 꽂혔던 점	제 0수준
	원의 반지름	원의 중심 0와 원 위의 한 점을 이은 선분 ㄱㄴ(그림에서)	제 1a수준
	원의 지름	원의 중심을 지나는 선분 ㄱㄴ(그림에서)	제 1a수준
4-가	이등변 삼각형	두 변의 길이가 같은 삼각형	제 1b수준
	정삼각형	세 변의 길이가 같은 삼각형	제 1b수준
	예각	직각보다 작은 각	제 1a수준
	둔각	직각보다 크고, 180°보다 작은 각	제 1b수준
	예각삼각형	세 각이 모두 예각인 삼각형	제 1b수준
	둔각삼각형	한 각이 모두 둔각인 삼각형	제 1b수준

Collection @ jeju

4-나	수직	두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직	제 1b수준
	수선	두 직선이 수직일 때, 한 직선을 다른 직선에 대한 수선	제 1b수준
	평행	한 직선에 수직인 두 직선을 그으면, 두 직선은 서로 만나지 않습니다. 이와 같이, 서로 만나지 않는 두 직선	제 1a수준
	평행선	평행인 두 직선	제 1a수준
	평행선 사이의 거리	평행선 사이의 수직인 선분의 길이	제 1b수준
	사다리꼴	마주 보는 한 쌍의 변이 서로 평행인 사각형	제 1b수준
	평행사변형	마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형	제 1b수준
	마름모	네 변의 길이가 모두 같은 사각형	제 1b수준
	다각형	선분으로만 둘러싸인 도형	제 1a수준
	정다각형	변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형	제 1a수준
	대각선	다각형에서 선분 ㄱㄷ(그림에서)과 같이 이웃하지 않은 두 꼭지점을 이은 선분	제 1a수준
5-가	직육면체	그림과 같이 직사각형 6개로 둘러싸인 도형	제 1a수준
	(직육면체에서)면	직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형	제 1a수준
	(직육면체에서)모서리	직육면체의 면과 면이 만나는 선분	제 1b수준
	(직육면체에서)꼭지점	직육면체의 세 모서리가 만나는 점	제 1b수준
	정육면체	크기가 같은 정사각형 6개로 둘러싸인 도형	제 1b수준
	(직육면체에서) 두 면의 평행	직육면체에서 색칠한 두 면처럼(그림제시) 계속 늘여도 만나지 않는 두 면을 서로 평행	제 1a수준
	(직육면체에서)밑면	직육면체에서 서로 평행인 두 면	제 1b수준

Collection @ jeju

	(직육면체에서)두 면의 수직	직각으로 만나는 두 면	제 1b수준
	(직육면체에서) 옆면	밑면과 수직인 면	제 1b수준
	직육면체의 겨냥도	오른쪽 그림은 직육면체의 모양을 잘 알 수 있도록 하기 위해 평행인 모서리는 평행이 되게 그리고, 보이는 모서리는 실선으로, 보이지 않는 모서리는 점선으로 그린 것입니다. 이러한 그림	제 0수준
	직육면체의 전개도	아래 그림은 직육면체를 펼쳐서, 접혔던 부분을 점선으로 나타낸 것입니다. 이와 같이 직육면체를 펼쳐서 평면에 그린 그림	제 0수준
	(삼각형에서)밑변	삼각형 ㄱㄴㄷ에서 변ㄴㄷ(그림에서)	제 0수준
	(삼각형에서)높이	꼭지점 ㄱ에서 밑변에 수직으로 그은 선분 ㄱㄹ(그림에서)	제 1a수준
5-나	합동	모양과 크기가 같아서 완전히 포개지는 두 도형	제 0수준
	대응점	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 꼭지점	제 0수준
	대응변	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 변	제 0수준
	대응각	합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때, 겹쳐지는 각	제 0수준
	선대칭도형	오른쪽과 같이 어떤 직선으로 접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭도형	제 0수준
	선대칭의 위치에 있다, 선대칭의 위치에 있는 도형	삼각형 ㄱㄴㄷ과 삼각형 ㄹㅁㅂ이 직선 ㅅㅇ을 따라 접어서 완전히 포개어질 때, 두 도형은 직선 ㅅㅇ 에 대하여 선대칭의 위치에 있다, 두 도형은 선대칭의 위치에 있는 도형	제 1a수준
	대칭축	....직선	제 0수준
	점대칭도형	한 점을 중심으로 180° 돌렸을 때, 처음도	제 0수준

Collection @ jeju

		형과 완전히 겹쳐지는 도형	
	점대칭의 위치에 있다, 점대칭의 위치에 있는 도형	위와 같이(활동-그림제시) 점 o을 중심으로 180° 돌렸을 때, 완전히 포개어지는 두 도형	제 1a수준
	대칭의 중심	....점	제 0수준
6-가	입체도형	(그림으로 제시)	제 0수준
	각기둥	입체도형 가,나,아,자(활동-그림제시)와 같이 위와 아래에 있는 면에 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형	제 1a수준
	(각기둥에서)밑면	오른쪽 그림의 면 ㄱㄴㄷ과 면ㄹㅁㅂ과 같이 서로 평행인 두 면	제 1a수준
	(각기둥에서)옆면	오른쪽 그림과 같이 밑면에 수직인 면	제 1a수준
	(각기둥에서)모서리	각기둥에서 면과 면이 만나는 선	제 1b수준
	(각기둥에서)꼭지점	각기둥에서 모서리와 모서리가 만나는 점	제 1b수준
	(각기둥에서)높이	각기둥에서 두 밑면 사이의 거리	제 1b수준
	삼각기둥, 사각기둥, 오각기둥 등	각기둥은 밑면의 모양에 따라	제 0수준
	각뿔	(그림으로 제시)	제 0수준
	(각뿔에서)밑면	오른쪽 그림의 사각뿔에서 면 ㄴㄷㄹㅁ	제 0수준
	(각뿔에서)옆면	오른쪽 그림과 같이 옆으로 둘러싸인 면	제 0수준
	(각뿔에서)모서리	오른쪽 그림과 같이 면과 면이 만나는 선	제 1a수준
	(각뿔에서)꼭지점	오른쪽 그림과 모서리와 모서리가 만나는 점	제 1a수준
	각뿔의 꼭지점	옆면을 이루는 모든 삼각형의 공통인 꼭지점	제 1b수준
	(각뿔에서)높이	각뿔의 꼭지점에서 밑면에 수직인 선분의 길이	제 1b수준
	삼각뿔,사각뿔,오각뿔	위의 그림과 같이 각뿔의 이름은 밑면의 모양에 따라	제 0수준
	각기둥의 전개도	그림과 같이 각기둥의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림	제 0수준
	각뿔의 전개도	그림과 같이 각뿔의 모서리를 잘라서 펼쳐 놓은 그림	제 0수준

dCollection @ jeju

6-나	원기둥	그림과 같이 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 원으로 되어 있는 입체도형	제 1a수준
	(원기둥에서)밑면	원기둥에서 위와 아래에 있는 면	제 0수준
	(원기둥에서)옆면	원기둥에서 옆으로 둘러싸인 곡면	제 0수준
	(원기둥에서)높이	원기둥에서 두 밑면에 수직인 선분의 길이	제 1b수준
	원기둥의 전개도	오른쪽 그림과 같이 원기둥을 펼쳐 놓은 그림	제 0수준
	원뿔	그림과 같이 밑면이 원이고 옆면이 곡면인 뿔 모양의 입체도형	제 1a수준
	원뿔의 꼭지점	원뿔의 뾰족한 점	제 0수준
	모선	(그림제시)	제 0수준
	구 구의 중심 구의 반지름	반원의 지름을 회전축으로 하여 1회전 한 회전체를 구, 이때 반원의 중심은 구의 중심, 반원의 반지름은 구의 반지름	제 1b수준
	단면	입체도형을 평면으로 잘랐을 때에 생기는 도형의 면	제 0수준
	원주	원의 둘레의 길이	제 0수준
	원주율	원에서 원주와 지름의 길이의 비는 일정합니다. 이 비율을	제 1b수준

dCollection @ jeju