석사학위청구논문

퍼지관계와 퍼지숫자

지도교수 양 성 호

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

강 순 구

1995년 8월

퍼지관계와 퍼지숫자

지도교수 양 성 호

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

1995년 6월 일

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

제출자 강 순 구

강순구의 교육학 석사학위 논문을 인준함

1995년 7월 일

심사위원장 인

심 사 위 원 인

심 사 위 원 인

<초 록>

퍼지관계와 퍼지숫자

강 순 구

제주대학교 교육대학원 수학교육 전공

지도교수 양 성 호

본 연구에서는 일반집합론의 확장된 개념인 퍼지집합의 정의와 퍼지집합에 대한 기본 개념과 연산, 퍼지합집합 함수의 조건, 퍼지교집합 함수의 조건, 퍼지여집합 함수의 조건을 살펴보고 일반집합론의 관계를 바탕으로 퍼지 합관계, 퍼지 교관계, 퍼지여관계, 퍼지역관계, 퍼지관계의 합성, 퍼지관계의 α-수준 관계 그리고 퍼지 그래프와 퍼지 동치관계 및 동치관계에 의한 분할, 퍼지숫자의 개념, 퍼지숫자의 연산과 삼각 퍼지숫자, 사다리꼴 퍼지숫자를 정의하여 그 연산의 성질을 살펴본다.

목 차

초 록

Ⅰ. 서 론 ········· 1

Ⅱ. 퍼지 집합 ········· 3

Ⅲ. 퍼지집합의 연산 ········· 10

Ⅳ. 퍼지 관계 ········· 22

Ⅴ. 퍼지 그래프와 퍼지관계 ········· 29

Ⅵ. 퍼지숫자 ········· 40

Ⅶ. 결 론 ········· 55

참고문헌 ········· 57

Abstract ········· 58

I. 서 론

일상생활에서 우리가 대하는 대상 중에는 명확하게 그 소속을 정의할 수 없는 경우가 많다. 기존 수학의 참과 거짓 사이에 존재하는 중간적 개념을 인정하고 그 중간적 개념이 참 또는 거짓에의 근접성에 대한 불확실한 상태를 그대로 표현해 주는 방법이 1965년 미국 버클리 대학의 자데(Lofti A. Zadeh) 교수에 의해서 처음 소개 되었다. 수학은 긍정과 부정, 즉 참과 거짓을 바탕으로 한 이원론적 논리를 기본논리로써 전개하고 있음으로 인하여 본질적으로 애매함을 가지는 인간의 사고와는 부합되지 않는 측면이 있다. 이러한 인간의 애매한 표현을 처리 할 수 있는 이론적 바탕을 제공하고 기존의 수학적 논리와 인간적 사고와의 이런 차이점을 극복하고 인간 사고에 보다 가까운 논리를 전개하고자 하는 이론이 바로 퍼지이론(fuzzy theory)이다. 따라서 21 세기 정보화 시대에 대비하여 수학교육에 있어서도 이가 논리만을 바탕으로 한 사고범위에서 점차 탈피하여 퍼지 논리를 바탕으로 한 사고범위로 확대되어야 한다. 퍼지 이론에 대한 학생들의 사고력과 응용력을 배양하여, 급변하는 현대 과학 문명 사회에 능동적으로 대처 할 수 있는 적응력을 길러야 할 것이다.

본 연구에서는 일반 집합론의 일반화로서의 퍼지집합에 기본이 되는 연산을 정의하고 그 연산사이의 관계 또한 일반 집합론의 성질을 퍼지 집합론으로 확장하여 퍼지집합의 기본개념과 연산, 퍼지관계, 퍼지 그래프, 퍼지숫자에 중점을 두었다. 본 내용을 살펴보면 다음과 같다.

제 Ⅱ 장에서는 퍼지집합의 정의와 퍼지집합에 관한 기본적 개념, 그리고 퍼지

집합의 기본적 연산을 살펴 본다.

제 Ⅲ 장에서는 퍼지집합의 연산 즉, 퍼지 합집합 함수의 조건, 퍼지 교집합 함수의 조건, 퍼지 여집합 함수의 조건, 그리고 그 예들을 살펴본다.

제 Ⅳ 장에서는 일반집합론에서의 관계를 바탕으로 퍼지 합관계, 퍼지 교관계, 퍼지 여관계, 퍼지 역관계 그리고 퍼지관계의 합성, 퍼지관계의 α-수준관계와 그 예를 살펴본다.

제 Ⅴ 장에서는 퍼지 그래프와 퍼지관계, 퍼지 동치관계와 동치관계에 의한 분할 그리고 그 예들을 살펴본다.

제 Ⅵ 장에서는 퍼지숫자의 개념과 퍼지숫자의 연산, 특별한 형태의 퍼지숫자인 삼각 퍼지숫자, 사다리꼴 퍼지숫자를 정의하여 그들의 연산의 성질과 곱셈, 나눗셈에 대한 근사값에 대해 조사하고 그 예들을 제시한다.

Ⅱ. 퍼지 집합

[1] 퍼지집합의 정의

일상생활에서 흔히 쓰는 애매한 표현을 수학적으로 표현하고 수학적으로 처리함으로서 현대사회의 여러 방면에서 응용되고 또 인간과 비슷하게 생각하고 일하는 컴퓨터를 만들고자 하는 인공지능 연구가 활발하게 진행되고 실용화하는 이론이 퍼지이론이다. 예를 들면 "아름다운 여인들의 모임", "당신은 공부를 잘하는 편입니까?" 또는 "나이가 젊다." 등과 같이 우리가 일상생활에서 흔히 쓰는 표현 중에는 주관과 보는 시기, 장소, 각도 등 여러 가지 조건에 따라 변화할 것이다. 이러한 대상들은 보통개념의 집합을 이룰 수 없다. 그런데 이러한 대상들은 우리의 일상적인 사고에서 중요한 역할을 한다. 이상의 사실로 미루어 보아도 인간은 본래 애매한 존재라는 것을 이해할 수 있다. 즉 우리의 감정과 사고를 충분히 그리고 적절히 표현 하기는 매우 어렵다. 기존의 수학은 이원론적 논리를 바탕으로 한 학문이기 때문에 더욱 그러하다. 그러나 우리의 일상생활에서 이원론적 논리로써는 표현할 수 없고 해결할 수 없는 부분의 애매성을 적극적으로 인정하는 퍼지 논리로써 표현하고 해결할 수 있으며 여기에서 퍼지 논리의 필요성이 인정된다. 이와 같이 애매하고 불확실한 상태 또는 자료를 유용한 자료로 만들기 위해서 퍼지집합, 퍼지관계, 퍼지숫자 등의 개념을 도입하고 수학적으로 계산할 수 있도록 한 것이 퍼지 이론인 것이다. 위에서와 같이 불확실하고 애매한 대상들의 모임을 퍼지집합으로 나타낼 수 있다.

전체 집합 X 의 부분집합 A 는 다음과 같이 정의되는 특성함수

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \notin A \\ 1 & \text{if} \quad x \in A \end{cases}$$

에 의하여 나타낼 수 있다. 즉, $\mu_A(x) = 1$ 의 의미는 x 가 A 에 속할 소속척도가 1 이고 $\mu_A(x) = 0$ 의 의미는 x 가 A 에 속할 소속척도가 0 임을 나타낸다. 함수 $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ 을 퍼지집합 A 의 소속함수(membership function)라 부르고, 퍼지집합 A 를 기호로 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ 으로 나타낸다. 퍼지집합은 단위구간 $[0,1]$ 사이의 실수 값을 소속척도로 취하는 원소들로 구성된다. 그리고 소속척도는 속하는 정도(grade of membership)로 이해함으로써 퍼지집합은 전통적인 보통집합의 확장된 개념이라 볼 수 있다.

< 참고 > 퍼지집합 A 의 표시 방법
$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ 또는 $A = \int_x (\mu_A(x) | x)$. (원소들의 연속적일 때)
$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) | x_i$. ($A$ 가 유한집합일 때)
여기서 소속함수값이 0 인 원소의 표기는 생략할 수도 있다.

퍼지집합의 몇 가지 예를 살펴보자.

예 2-1. $X = \mathbb{R}$(실수들의 집합), A 를 10 에 가까운 실수들의 모임이라 하면 A 는 퍼지집합으로서

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) | \mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x-10)^2} \right\}$$

라 표현할 수 있다.

예 2-2. A 를 큰 자연수들의 퍼지집합이라 하면 소속함수를 $\mu_A(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{10}$ 로 정의하고 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathbb{N}\}$ 라 할 수 있다.

예 2-3. A 를 매우 작은 수들의 퍼지집합이라 하면

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100x+2} & \text{if} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{-x+1}{-x+2} & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

로 정의하고 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ 로 표현할 수 있다.

예 2-4. A 를 키가 $160cm$ 정도 남자들의 퍼지집합이라 하면 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, X 는 남자들의 집합으로 표현할 때 소속함수는 $\mu_A(x) = (1 + (x - 160)^2)^{-1}$ 으로 정의할 수 있다.

예 2-5. A 를 달리는 차의 빠른 속도들의 퍼지집합이라 하면 $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, X 는 시속들의 집합으로 표현할 때 소속함수는

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 50 \\ \dfrac{(x-50)^2}{(x-50)^2+10} & \text{if} \quad x > 50 \end{cases}$$

로 정의할 수 있다.

[2] 퍼지집합에 관한 개념의 확장

A 와 B 를 전체집합 X 의 퍼지 부분집합이라고 하자. 이때 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ 인 경우 "B 는 A 를 포함한다."라고 하고 $A \subset B$ 로 표기한다. A 와 B 가 퍼지집합일 때 A 와 B 가 동치(상등관계)라는 것은 전체집합 X 의 모든 원소 x 가 A 와 B 에 소속된 정도가 같은 때를 말한다. 즉,

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad x \in X.$$

예 2-6. 갑과 을의 스포츠에 대한 선호 정도를 조사했다고 하자.
갑의 선호도는 A = { (야구, 0.8) , (축구, 0.9) , (수영, 0.7), (권투, 0.5) }
이고 을의 선호도는 B = { (야구, 0.8), (축구, 0.6), (수영, 0.6), (권투, 0.4)}
였다. 여기서 갑의 선호 정도가 을의 선호 정도보다 전부 크거나 같음을 알 수 있다. 즉, 갑이 을보다 전반적으로 스포츠를 좋아한다는 것을 알 수 있다. 따라서 $B \subset A$ 이다.

전체집합 X 의 원소 중에서 소속함수의 값이 양인 원소들로 이루어진 집합을 A 의 지지(support)라 한다. 즉, $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}$ 이다. A 의 높이(height)는 $\mathrm{hgt}(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x)$ 을 의미한다. 그리고 $\mu_A(x) = 1$ 되는 원소 x 가 존재할 때 A 는 정규화(normalized)되었다고 한다. 퍼지집합에 포함된 원소들 중에서 소속함수의 값이 α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ 이상인 원소들로만 구성된 집합을 α-수준집합(α-cut)라 하고 A_α 로 나타낸다.

즉, $A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$ 를 α-수준집합 (α-cut)이라 한다. 퍼지집합 A 의 소속함수 μ_A 의 치역을 A 의 레벨집합이라 하고 L_A 로 나타낸다. 즉, $L_A = \{\alpha \in [0,1] \mid \mu_A(x) = \alpha,\ x \in X\}$ 이다.

예 2-7. $A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7)\}$ 라면 $\alpha = 0.5$ 에 대하여 $A_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$ 이다.

전체집합 X 가 n 차원 Euclid 공간이고, 퍼지집합 A 가 모든 원소 $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$ 에 대하여 다음이 성립할 때 "A 는 볼록하다."라고 말한다.

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}.$$

볼록집합에 대한 성질을 알아보자.

정리 2-1. 퍼지집합이 볼록집합이기 위한 필요충분조건은 모든 α-수준집합이 보통집합으로서 볼록집합이 되는 것이다.

< 증명 > 퍼지집합 A 가 볼록이고 $\forall\alpha \in [0,1]$ 라 하면

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

$x, y \in A_\alpha$ 이면 $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \geq \alpha$ 이고, A 가 볼록집합이므로 임의의 $\lambda \in [0,1]$ 에 대하여

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \geq \alpha.$$

따라서 $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_\alpha$. 그러므로 A_α 는 볼록집합이다.

역으로 임의의 $\alpha \in [0,1]$ 에 대하여 A_α 가 보통집합으로서 볼록집합이라 하자. 임의의 $x, y \in X$ 에 대하여 $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} = \alpha$ 라 하면 A_α 는 볼록집합이므로 임의의 $\lambda \in [0,1]$ 에 대하여

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A_\alpha.$$

곧,

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}.$$

따라서 A 는 볼록집합이다.

보통집합과 마찬가지로 퍼지집합에서도 집합의 크기를 나타낼 수 있다. 퍼지집합의 크기를 나타내는 세 가지 방법을 소개하면 다음과 같다.

첫째: 스칼라 기수

전체집합 X 가 유한집합 일 때, 퍼지집합 A 의 각 원소의 소속함수 값의 합을 원소의 개수로 나타내는 방법이다. 즉,

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

만약, μ_A 가 구분적으로 연속(piecewise continuous)이면 $|A| = \int_x \mu_A(x)dx$ 으로 정의한다.

<참고> A 가 전체집합 X 의 유한인 보통집합이면 $\mu_A(x)=0$ 또는 $\mu_A(x)=1,\ x\in X$ 이다. 따라서 $|A|=\sum_{x\in X}\mu_A(x)$ 는 집합 A 에 속하는 원소의 개수를 나타낸다. 그러므로 퍼지집합의 스칼라 기수는 보통집합에 대한 기수의 확장된 개념이다.

둘째: 상대 기수

A 의 크기를 전체집합 X 와 비교하여 나타내는 방법이다. 즉

$$||A||=\frac{|A|}{|X|}.$$

셋째: 퍼지 기수

집합의 크기를 퍼지숫자(퍼지집합) $|\tilde{A}|$ 로 나타내는 방법이다. 즉,

$\mu_{|\tilde{A}|}(|A_\alpha|)=\alpha,\quad \alpha\in L_A.$

예 2-8. $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 이고

$A=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$ 라 하면

$|A|=0.2+0.5+0.8+1+0.7+0.3=3.5$ 이고 $||A||=\frac{3.5}{10}=0.35$ 이다. A 의 퍼지 기수를 구하기 위하여 A 의 레벨집합 $L_A=\{0,0.2,0.3,0.5,0.7,0.8,1\}$ 에 대해서 각 α-수준집합들을 구하자.

$A_0=X$, $A_{0.2}=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{0.3}=\{2,3,4,5,6\}$, $A_{0.5}=\{2,3,4,5\}$, $A_{0.7}=\{3,4,5\}$, $A_{0.8}=\{3,4\}$, $A_1=4$.

그리고 $|A_0|=10$, $|A_{0.2}|=6$, $|A_{0.3}|=5$, $|A_{0.5}|=4$, $|A_{0.7}|=3$, $|A_{0.8}|=2$, $|A_1|=1$ 이므로 A 의 퍼지기수는

$|\tilde{A}|=\{(10,0),(6,0.2),(5,0.3),(4,0.5),(3,0.7),(2,0.8),(1,1)\}$ 이다.

Ⅲ. 퍼지집합의 연산

1. 퍼지 여집합

[1] 퍼지 여집합 함수의 조건

여집합 A^c 는 퍼지집합 A 가 의미하는 내용을 부정하는 개념으로서 다음과 같은 함수 $C : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ 에 의해서 정의 될 수 있다. 여집합 함수 C 가 되기 위해서는 다음 공리를 만족하여야 한다.

(공리C_1): 보통집합의 여집합 성질을 만족해야 한다. 즉,

$$C(0) = 1, \quad C(1) = 0.$$

(공리C_2): 함수 C 는 비증가 함수이다. 즉,

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_{A^c}(x) \geq \mu_{B^c}(x).$$

특별한 목적을 위하여 이상의 기본 공리 외에 다음의 새로운 공리를 추가할 수도 있다.

(공리C_3): 함수 C 는 연속함수이다.

(공리C_4): 함수 C 는 Involutive 이다. 즉, $\mu_{(A^c)^c}(x) = \mu_A(x)$.

일반적으로 여집합 함수를 다음과 같이 정의한다. 이 함수는 위의 4 가지 공리를 모두 만족시킨다.

$$x \in X, \quad \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

예 3-1. 다음은 갑과 을이 각각 좋아하는 주사위의 눈을 나타낸 퍼지집합이다.

$$A = \{(1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.6), (4, 0), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

$$B = \{(1, 1), (2, 0.2), (3, 0.9), (4, 0.3), (5, 0.8), (6, 0.5)\}.$$

갑이 싫어하는 주사위 눈의 퍼지집합, 을이 싫어하는 주사위 눈의 퍼지집합을 구하면

$$A^c = \{(1, 0.3), (2, 0.2), (3, 0.4), (4, 1), (5, 0), (6, 0.6)\},$$

$$B^c = \{(1, 0), (2, 0.8), (3, 0.1), (4, 0.7), (5, 0.2), (6, 0.5)\}.$$

위의 여집합 함수 외에 다음과 같은 여집합 함수를 사용하기도 한다.

(1) λ - 여집합 (sugeno)

$\forall x \in X, \quad \mu_{A^c}(x) = \dfrac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda \mu_A(x)}, \quad \lambda \in (-1, \infty)$ 로 정의한다.

이때, $A \cap A^c \neq \phi$, $A \cup A^c \neq X$ 임을 알 수 있다. 그리고 Involution 과 드모르강 법칙이 만족된다. 여기서도 λ 는 매개변수로서 λ 의 값에 따라 모양이

변한다. 즉 $\lambda = 0$ 이면 표준 여집합 함수가 되고 λ 의 값이 커질수록 여집합의 소속함수의 값은 작아진다. 이를테면 $\mu_A(x) = 0.4$ 일 때,

$\lambda = -0.9$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.94$, $\lambda = -0.5$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.75$ 이다.

$\lambda = 0$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.6$, $\lambda = 2$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.33$ 이다.

$\lambda = 10$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.12$ 이다.

(2) Yager의 여집합

$\forall x \in X$, $\mu_{A^c}(x) = (1 - \mu_A(x)^w)^{\frac{1}{w}}$, $w \in (0, \infty)$ 로 정의한다. 이 연산도 매개변수 w 에 따라 모양이 변한다. 즉, $w = 1$ 이면 표준 여집합 함수가 되고 w 값이 커질수록 여집합의 소속함수 값도 커진다. 이를테면 $\mu_A(x) = 0.4$ 일 때, $w = 0.5$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.14$, $w = 1$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.6$, $w = 2$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 0.92$, $w = 5$ 이면 $\mu_{A^c}(x) = 1.00$ 이 된다.

2. 퍼지 합집합

[1] 퍼지 합집합 함수의 조건

퍼지집합 A 와 B 의 합집합은 일반적으로 다음 함수 U 에 의해서 정의된다.

$$U : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

즉, 전체집합 내의 모든 원소 x 에 대하여 퍼지집합 A 와 B 의 합집합의 소속함수값을 $\mu_{A \cup B}(x) = U(\mu_A(x), \mu_B(x))$ 로 정의한다.

이 합집합 함수는 다음과 같은 공리를 만족하여야 한다.

(공리U_1) 함수 U 는 보통집합의 합집합 성질을 만족한다.(경계 조건)
$U(0,0)=0,\quad U(0,1)=1,\quad U(1,0)=1,\quad U(1,1)=1.$

(공리U_2) 함수 U 는 교환법칙이 성립한다. 즉,
$U(\mu_A(x),\mu_B(x))=U(\mu_B(x),\mu_A(x)).$

(공리U_3) 함수 U 는 단조함수이다. 즉,
$\mu_A(x_1)\le\mu_A(x_2),\quad \mu_B(x_1)\le\mu_B(x_2)$ 이면
$U(\mu_A(x_1),\mu_B(x_1))\le U(\mu_A(x_2),\mu_B(x_2))$ 이다.

(공리U_4) 함수 U 는 결합법칙이 성립한다. 즉,
$U(U(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))=U(\mu_A(x),U(\mu_B(x),\mu_C(x))).$

이상의 4 개의 공리는 합집합의 기본공리이며 그 외에 다음의 2 개의 공리를 추가하여 사용하기도 한다.

(공리U_5) 함수 U 는 연속함수이다.
즉, $\mu_A(x)$ 나 $\mu_B(x)$ 가 조금 증가하는 것은 $\mu_{A\cup B}(x)$ 의 강한 증가를 일으키지 않는다.

(공리U_6) $U(\mu_A(x),\mu_A(x))=\mu_A(x)$: Idempotency

합집합의 함수는 응용목적에 따라 여러 가지로 정의할 수 있으나, 일반적으로 함수 U 로써 max 을 많이 사용한다. 즉,

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

예 3-2. 다음은 갑과 을이 각각 좋아하는 주사위의 눈을 나타낸 퍼지집합이다.

$$A = \{(1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.6), (4, 0), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

$$B = \{(1, 1), (2, 0.2), (3, 0.9), (4, 0.3), (5, 0.8), (6, 0.5)\}.$$

갑과 을 중 한사람이라도 좋아하는 주사위 눈의 퍼지집합을 구하면

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 0.8), (3, 0.9), (4, 0.3), (5, 1), (6, 0.5)\}$$ 이다.

max 에 의한 합집합 함수 외에 다음과 같은 함수를 사용하기도 한다.

(1) 대수적 합: $A \uplus B$

$\forall x \in X, \quad \mu_{A \uplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ 로 정의한다. 이 연산은 교환법칙, 결합법칙, 항등법칙, 드모르강 법칙을 만족하고 $A \uplus X = X$ 가 성립한다. 이 연산을 확률적 합이라고도 한다.

예 3-3. $A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 1), (4, 0.7)\}$,

$B = \{(2, 0.4), (3, 0.5), (5, 0.3)\}$ 라 하면

$A \uplus B = \{(1, 0.2), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3)\}$ 이다.

(2) 한계합: $A \oplus B$

임의의 $x \in X$,

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

$$= \frac{1 + \mu_A(x) + \mu_B(x) - |1 - \mu_A(x) - \mu_B(x)|}{2}$$ 로 정의한다.

이 연산은 다음의 Yager의 합집합 함수에서 $w = 1$ 일 때와 일치한다. 그리고 교환법칙, 결합법칙, 항등법칙, 드모르강 법칙을 만족하고 $A \oplus X = X$ 를 만족한다.

예 3-4. $A = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$이고 $B = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$이면 $A \oplus B = \{(3, 1), (5, 1), (7, 0.6)\}$ 이다.

(3) Yager의 합집합

$\forall x \in X$, $\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, [(\mu_A(x))^w + (\mu_B(x))^w]^{\frac{1}{w}}\}$, $w \in (0, \infty)$ 로 정의한다. 이 연산은 합집합의 공리 중 Idempotency 는 만족하지 않고 그 외의 공리는 만족한다. 또한 w 값에 따라 함수의 모양이 바뀌므로 목적에 따라 w 값을 특별히 정한다. $w = 1$ 이면 $\min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$가 되어 한계합이 되고 $w = 2$ 이면 $\min[1, \sqrt{(\mu_A(x))^2 + (\mu_B(x))^2}]$ 가 된다. $w \to \infty$ 이면 Yager의 합집합은 $\lim_{w \to \infty} \min\{1, [(\mu_A(x))^w + (\mu_B(x))^w]^{\frac{1}{w}}\} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ 임이 잘 알려져 있다.

예 3-5. $A = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.6)\}$ 이고 $B = \{(2, 0.4), (4, 0.8), (5, 1)\}$ 라 하고 $w = 5$ 를 택하여 각 x 에 대한 Yager의

합집합의 소속함수값을 계산해보면

$x = 2, \min\{1, ((0.4)^5 + (0.4)^5)^{\frac{1}{5}}\} \cong \min\{1, 0.46\} = 0.46,$

$x = 3, \min\{1, (0.6^5 + 0^5)^{\frac{1}{5}}\} = 0.6,$

$x = 4, \min\{1, (0.8^5 + 0.8^5)^{\frac{1}{5}}\} \cong \min\{1, 0.92\} = 0.92,$

$x = 5, \min\{1, (1^5 + 1^5)^{\frac{1}{5}}\} = 1,$

$x = 6, \min\{1, (0.8^5 + 0^5)^{\frac{1}{5}}\} = 0.8,$

$x = 7, \min\{1, (0.6^5 + 0^5)^{\frac{1}{5}}\} = 0.6$ 이다.

그러므로 Yager의 합집합은

$A \cup B = \{(2, 0.46), (3, 0.6), (4, 0.92), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.6)\}$ 이다.

3. 퍼지 교집합

[1] 퍼지 교집합 함수의 조건

퍼지집합 A 와 B 의 교집합은 일반적으로 다음 함수 I 에 의하여 정의된다.

$$I : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

즉, 전체집합 내의 모든 원소 x 에 대하여 퍼지집합 A 와 B 의 교집합의 소속함수값을 $\mu_{A \cap B}(x) = I(\mu_A(x), \mu_B(x))$ 로 정의한다.

이 교집합 함수는 다음과 같은 공리를 만족하여야 한다.

(공리I_1): 함수 I 는 보통집합의 교집합 연산의 성질을 만족한다.

$I(1,1)=1,\quad I(1,0)=0,\quad I(0,1)=0,\quad I(0,0)=0.$ (경계조건)

(공리I_2): 함수 I 는 교환법칙이 성립한다. 즉,

$I(\mu_A(x),\mu_B(x))=I(\mu_B(x),\mu_A(x)).$

(공리I_3): 함수 I 는 단조함수이다. 즉,

$\mu_A(x_1)\le\mu_A(x_2), \mu_B(x_1)\le\mu_B(x_2)$ 이면

$I(\mu_A(x_1),\mu_B(x_1))\le I(\mu_A(x_2),\mu_B(x_2))$ 이다.

(공리I_4): 함수 I 는 결합법칙이 성립한다. 즉,

$I(I(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))=I(\mu_A(x),I(\mu_B(x),\mu_C(x))).$

이상의 4 개의 공리를 교집합의 기본공리라 하며, 그 외에 다음의 2 개의 공리를 추가해서 사용하기도 한다.

(공리I_5): 함수 I 는 연속함수이다.

(공리I_6): $I(\mu_A(x),\mu_A(x))=\mu_A(x)$: Idempotency

교집합의 함수는 응용목적에 따라 여러 가지로 정의할 수 있으나, 일반적으로 함수 I 로써 min 을 많이 사용한다. 즉,

$$\forall x\in X,\ \mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

예 3-6. 다음은 갑과 을의 각각 좋아하는 주사위의 눈을 나타낸 퍼지집합이다.

$$A = \{(1, 0.7), (2, 0.8), (3, 0.6), (4, 0), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

$$B = \{(1, 1), (2, 0.2), (3, 0.9), (4, 0.3), (5, 0.8), (6, 0.5)\}.$$

갑과 을이 동시에 좋아하는 주사위의 눈의 퍼지집합을 구하면

$$A \cap B = \{(1, 0.7), (2, 0.2), (3, 0.6), (4, 0), (5, 0.8), (6, 0.4)\}$$ 이다.

min 에 의한 교집합 함수는 A 의 소속함수의 값과 B 의 소속함수의 값 중 하나만을 결과로 택함으로써 둘 중 하나의 값이 변하여도 결과에 영향을 미치지 못하는 단점이 있기 때문에 다음과 같은 함수를 사용하기도 한다.

(1) 대수곱: $A \cdot B$

$\forall x \in X, \quad \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ 로 정의한다.

이 연산은 교환법칙, 결합법칙, 항등법칙, 드모르강법칙을 만족하고 $A \cdot \phi = \phi$ 또한 만족한다. 그리고 이 연산을 확률적 곱이라 한다.

예 3-7. $A = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 1), (4, 0.7)\}$ 이고,
$B = \{(2, 0.4), (3, 0.5), (5, 0.3)\}$ 이면 $A \cdot B = \{(2, 0.2), (3, 0.5)\}$ 이다.

(2) 한계곱: $A \odot B$

임의의 $x \in X$,

$$\mu_{A \odot B} = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

$$= \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1 + |1 - \mu_A(x) - \mu_B(x)|}{2} \text{ 로 정의한다.}$$

이 연산은 교환법칙, 결합법칙, 항등법칙, 드모르강법칙을 만족하고 $A \odot \phi = \phi$, $A \odot A^c = \phi$ 도 만족한다. 이 연산은 Yager의 교집합 함수에서 $w = 1$ 일 때, $\mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min[1, 2 - \mu_A(x) - \mu_B(x)]$ 와 일치한다.

예 3-8. $A = \{(3, 0.5), (5, 1), (7, 0.6)\}$, $B = \{(3, 1), (5, 0.6)\}$ 라 하면 $A \odot B = \{(3, 0.5), (5, 0.6)\}$ 이다.

(3) Yager의 교집합

임의의 $x \in X$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min\{1, [(1 - \mu_A(x))^w + (1 - \mu_B(x))^w]^{\frac{1}{w}}\}, \quad w \in (0, \infty)$$

이 연산은 Idempotency 를 제외한 교집합의 공리를 만족 시킨다. 또한 w 값에 따라 함수의 모양이 바뀌므로 목적에 따라 w 값을 특별히 정한다. $w = 1$ 이면 $\mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min\{1, 2 - \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$이 되어 한계곱과 같아진다. $w = 2$ 이면 $\mu_{A \cap B}(x) = 1 - \min\{1, \sqrt{(1 - \mu_A(x))^2 + (1 - \mu_B(x))^2}\}$ 이다. 그리고 $w \to \infty$ 이면 Yager의 교집합은

$$\mu_{A \cap B}(x) = \lim_{w \to \infty} (1 - \min\{1, [(1 - \mu_A(x))^w + (1 - \mu_B(x))^w]^{\frac{1}{w}}\})$$

$$= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \text{ 임이 잘 알려져 있다.}$$

예 3-9. $A=\{(2,0.4),(3,0.6),(4,0.8),(5,1),(6,0.8),(7,0.6)\}$, $B=\{(2,0.4),(4,0.8),(5,1),(7,0.6)\}$ 라 하고 $w=10$ 으로 택하여 각 x 에 대한 Yager 교집합의 소속함수값을 계산해 보면,

$x=2, 1-\min\{1,[(1-0.4)^{10}+(1-0.4)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}\cong 1-\min\{1,0.64\}=0.36$,

$x=3, 1-\min\{1,[(1-0.6)^{10}+(1-0)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}\cong 1-\min\{1,1.00\}=0$,

$x=4, 1-\min\{1,[(1-0.8)^{10}+(1-0.8)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}\cong 1-\min\{1,0.21\}=0.79$,

$x=5, 1-\min\{1,[(1-1)^{10}+(1-1)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}=1-0=1$,

$x=6, 1-\min\{1,[(1-0.8)^{10}+(1-0)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}\cong 1-\min\{1,1.00\}=0$,

$x=7, 1-\min\{1,[(1-0.6)^{10}+(1-0.6)^{10}]^{\frac{1}{10}}\}\cong 1-\min\{1,0.43\}=0.57$.

그러므로 Yager 교집합은 $A\cap B=\{(2,0.36),(4,0.79),(5,1),(7,0.57)\}$ 이다.

4. 퍼지집합의 거리

두개의 퍼지집합이 정의하는 내용의 차이를 나타내기 위하여 거리개념을 도입한다. 거리를 나타내는 척도는 다음과 같은 것이 있다.

(1) 해밍거리

두 개의 퍼지집합 A, B 의 해밍거리는 다음과 같이 각 원소의 소속함수 값의 차이를 합한 값으로 정의한다.

$$d(A,B)=\sum_{x\in X}|\mu_A(x)-\mu_B(x)|.$$

예 3-10. 두 개의 퍼지집합 $A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.8), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$, $B = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$ 에 대해서 A 와 B 의 해밍거리는 $d(A, B) = |0| + |0.5| + |1| + |0| = 1.5$ 이다.

(2) 유클리드 거리

두 개의 퍼지집합 A, B 의 유클리드 거리는 다음과 같이 정의한다.

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{x \in X} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2}.$$

예 3-11. 두 개의 퍼지집합 $A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.8), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$ 과 $B = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$ 에 대해서 유클리드 거리는 $e(A, B) = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1.25} \cong 1.12$ 이다.

(3) 민코스키 거리

두 개의 퍼지집합 A, B 의 민코스키 거리는 다음과 같이 정의한다.

$$d_w(A, B) = \left(\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^w \right)^{\frac{1}{w}}, \quad w \in [1, \infty].$$

민코스키 거리는 해밍거리와 유클리드 거리를 일반화한 것으로 $w = 1$ 일 때는 해밍거리, $w = 2$ 인 때는 유클리드 거리가 된다.

Ⅳ. 퍼지 관계

집합의 원소들 사이에는 관계가 있을 수 있으며 이 관계는 퍼지관계로 확장될 수 있다. 따라서 일반집합론의 관계를 바탕으로 퍼지관계를 살펴 본다.

1. 관계의 정의

집합 A, B 에 대하여 A 의 원소 x 와 B 의 원소 y 사이에 어떤 관계가 있을 때 이 관계를 순서쌍 (x, y) 로 표시할 수 있다. 이때 (x, y) 의 모임을 관계 R 로 표시한다. 즉, $R \subset A \times B$ 이다. 그리고 x 와 y 사이에 R 의 관계가 있으면 $(x, y) \in R$ 이고 x 와 y 사이에 R 의 관계가 없으면 $(x, y) \notin R$ 이다.

2. 퍼지관계

[1] 퍼지관계의 정의

집합 A 에서 B 로의 퍼지관계 R 이란 곱집합 $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 에서의 퍼지집합이며 소속함수 $\mu_R : A \times B \longrightarrow [0, 1]$ 에 의해서 특정지어진 것이다. 특히 $A = B$ 일 때, R 를 A 위의 퍼지관계라 한다.

예 4-1. A 를 실수의 집합으로 한다. $x, y \in A$ 에 대해서 y 는 x **보다 훨씬** 큰 관계는 A 위의 퍼지관계 R 이 되고 다음과 같은 소속함수로 특정 지울 수 있다.

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \geq y \\ \dfrac{1}{1 + (\frac{10}{y-x})^2} & \text{if } x < y. \end{cases}$$

[2] 퍼지행렬

유한집합인 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, $B = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 에 대해서 $A \times B$ 에서의 퍼지관계 R 은 아래와 같이 $m \times n$ 행렬 M_R 로 표시할 수 있다.

$$M_R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}.$$

이와 같이 퍼지관계를 표현하는 행렬을 퍼지행렬이라고 한다. μ_R 이 구간 $[0, 1]$ 내의 값을 취하므로 퍼지행렬의 성분은 $[0, 1]$ 내의 값을 취한다.

예 4-2. $A = \{a, b, c\}$ 위의 퍼지관계 $R = 0.2/(a, a) + 1/(a, b) + 0.4/(a, c) + 0.6/(b, b) + 0.3/(b, c) + 1/(c, b) + 0.8/(c, c)$ 을 퍼지행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

[3] 퍼지관계의 연산

A 에서 B 로의 퍼지관계는 $A \times B$ 에서의 퍼지집합이므로 퍼지집합에 대한 연산을 그대로 적용할 수 있다.

(1) 퍼지 합관계

R 과 S 는 $A \times B$ 에서의 퍼지관계일 때 R 과 S 의 합관계는 다음과 같은 소속함수로 정의한다. 임의의 $(x, y) \in A \times B$ 에 대하여

$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)]$ 이다. 이 때, $\max[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)]$ 을 간단히 $\mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$ 으로 쓰기도 한다.

예 4-3. 퍼지관계 R 과 S 를 퍼지행렬 M_R 과 M_S 로 다음과 같이 나타냈다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.9 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$R \cup S$ 에 대응되는 퍼지행렬 $M_{R \cup S}$ 는 다음과 같다.

$$M_{R \cup S} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 1 & 1 \\ 0.6 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(2) 퍼지 교관계

R 과 S 는 각각 $A \times B$ 에서의 퍼지관계일 때 R 과 S 의 교관계는 다음과 같

은 소속함수로 정의한다. 임의의 $(x, y) \in A \times B$ 에 대하여

$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min[\mu_R(x, y),\ \mu_S(x, y)]$ 이다. 이 때,

$\min[\mu_R(x, y),\ \mu_S(x, y)]$ 을 간단히 $\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(x, y)$ 으로 쓰기도 한다.

예 4-4. 퍼지관계 R 과 S 를 퍼지행렬 M_R 과 M_S 로 다음과 같이 나타냈다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.9 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$R \cap S$ 에 대응되는 퍼지행렬 $M_{R \cap S}$ 는 다음과 같다.

$$M_{R \cap S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(3) 퍼지 여관계

$A \times B$ 에서의 퍼지관계 R 이 있을 때 R 의 여관계는 다음과 같은 소속함수로 정의한다. $\forall (x, y) \in A \times B$ 에 대하여 $\mu_{R^c}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$ 이다.

예 4-5. 퍼지관계 R 를 다음의 퍼지행렬 M_R 로 나타냈다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

R^c 에 대응되는 퍼지행렬 M_{R^c} 는 다음과 같다.

$$M_{R^c} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(4) 퍼지 역관계

$A \times B$ 에서의 퍼지관계 R 이 있을 때 R 의 역관계는 다음과 같은 소속함수로 정의한다. $\forall(x, y) \in A \times B$ 에 대하여 $\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$ 이다. 이 때 퍼지관계 R 의 퍼지 역관계를 R^{-1} 로 표시한다.

[4] 퍼지관계의 합성

S 를 $A \times B$ 에서, R 를 $B \times C$ 에서의 퍼지관계라고 하면 R 과 S 의 합성 $R \circ S$ 는 다음 소속함수에 의해 정의되는 $A \times C$ 에서의 퍼지관계다. $\forall (x, y) \in A \times B$ 와 $\forall (y, z) \in B \times C$ 에 대하여 $\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in B}[\min(\mu_R(x, y),\ \mu_S(y, z))]$ 으로 정의한다.

예 4-6. $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3\}$, $C = \{z_1, z_2\}$ 에 대하여 퍼지관계 R 과 S 가

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

와 같이 퍼지행렬로 주어졌을 때 R 과 S 의 합성을 퍼지행렬로 나타내면

$$M_{R \circ S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

가 된다.

[5] 퍼지관계의 α-수준 관계

퍼지관계에서도 소속함수 값이 α 이상인 것만 취하면 α-수준 관계를 얻을 수 있다.

예 4-7. 퍼지관계 R 을 다음과 같이 퍼지행렬로 나타낸다고 하자.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

그러면 퍼지관계 R 를 $\alpha = 0.4$ 에서의 α-수준관계는

$$M_{R_{0.4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이며, $\alpha = 0.9$ 에서의 α-수준관계는

$$M_{R_{0.9}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이며, $\alpha = 1.0$ 에서의 α-수준관계는 다음과 같다.

$$M_{R_{1.0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

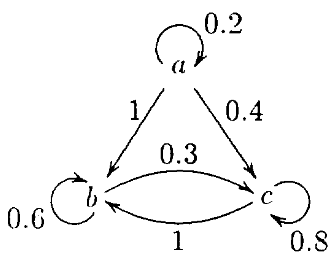
V. 퍼지 그래프와 퍼지관계

퍼지관계를 시각적으로 표현하는 방법으로써 퍼지 그래프를 생각해보자. $A \times B$ 에서의 퍼지관계 R 에 대해서, A 와 B 의 원소들은 점(꼭지점)으로 표현할 수가 있다. 이 점들의 집합을 V 라 하자. x 와 y 사이에 퍼지관계가 있을 때 즉, $\mu_R(x,y) = \alpha$ 일 때 방향을 갖는 연결선 위에 소속함수의 값(관계의 강도)을 표시하여 $x \xrightarrow{\alpha} y$ 와 같이 나타낼 수가 있다. 이러한 연결선들의 집합을 E 라 하자. 이 때, $G = (V, E)$ 을 퍼지 그래프라 한다. 여기서 소속함수의 값(관계의 강도)을 표현하기 위해서 연결선을 여러 가지 색깔로 나타내기도 하고, 각기 다른 굵기로 나타내기도 한다.

예 5-1. $A = \{a, b, c\}$ 위의 퍼지관계 R 이 $R = 0.2/(a,a) + 1/(a,b) + 0.4/(a,c) + 0.6/(b,b) + 0.3/(b,c) + 1/(c,b) + 0.8/(c,c)$ 일 때 퍼지행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

그리고 이 퍼지행렬 R 을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



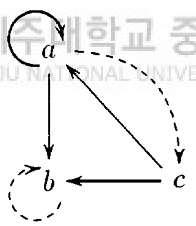
1. 퍼지 그래프 α-수준

퍼지 그래프와 퍼지관계는 결국 동일한 개념이라 할 수 있다. 따라서 퍼지관계의 α-수준관계를 생각하듯이 퍼지 그래프의 α-수준을 생각할 수 있을 것이다.

예 5-2. $A = \{a, b, c\}$ 위에서 퍼지관계 R 이 다음과 같은 퍼지행렬로 정의되었다고 하자.

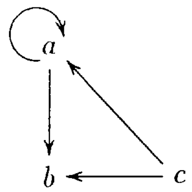
$$M_R = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

그러면 퍼지관계 R 의 그래프는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

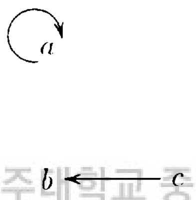


이제 $\alpha = 0.8$ 과 1.0 에 대하여 α-수준을 구하면 퍼지관계가 아닌 관계들을 얻을 수 있으며, 이에 대응하는 퍼지행렬과 그래프들은 아래와 같다.

$$M_{R_{0.8}} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$



$$M_{R_{1.0}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$



2. 퍼지관계의 성질

A 위에서의 퍼지관계 R 이 정의되었다고 하자. 이제 퍼지관계의 여러 가지 성질들을 알아보자.

(1) 반사관계

집합 A 위에서 퍼지관계 R 이 정의되었다고 할 때, 모든 $x \in A$ 에 대해서 $\mu_R(x,x) = 1$ 이면 퍼지관계 R 은 반사관계라 한다.

예 5-3. 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에서 $x, y \in A$ 에 대하여 "x 와 y 는 근접하다"라는 관계는 $x = y$ 일 때 $\mu_R(x, x) = 1$ 이 될 것이기 때문에 반사관계이다.

(2) 대칭관계

집합 A 위에서 퍼지관계 R 이 정의되었을 때, $\forall(x, y) \in A \times A$ 에 대하여 $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ 이면 퍼지관계 R 를 퍼지 대칭관계라 한다.

예 5-4. $A = \{a, b, c\}$ 에서 $x \in A$, $y \in A$ 에 대하여 "x 와 y 는 근접하다"라는 관계가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

그러면 "x 와 y 는 근접하다"라는 관계는 대칭관계임을 알 수 있다.

(3) 이행관계

집합 A 위에서 퍼지관계 R 이 정의되어 있을 때, $\forall(x, y), (y, z), (x, z) \in A \times A$ 에 대하여 $\mu_R(x, z) \geq \max_{y \in A}[\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))]$ 을 만족하면 퍼지관계 R 을 이행관계라 한다. R 과 R 의 합성 $R \circ R$ 을 간단히 R^2 로 나타낸다면 정의로부터 R 이 이행관계일 필요충분조건은 $M_R \geq M_{R^2}$ $(R \supset R^2)$ 임을 알 수 있다.

예 5-5. 퍼지관계 R 의 퍼지행렬 M_R 이 다음과 같다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

그러면

$$M_{R^2} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 얻어지고 $M_R \geq M_{R^2}$ $(R \supset R^2)$ 이므로 퍼지관계 R 은 이행관계이다.

3. 퍼지 동치관계

A 위에서 퍼지관계 R 이 다음 세 가지 조건을 만족하면 이 퍼지관계 R 을 동치관계라 한다.

(1) 반사성

$\forall x \in A$ 에 대하여 $\mu_R(x, x) = 1$ 이다.

(2) 대칭성

$\forall (x, y) \in A \times A$ 에 대하여 $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ 이다.

(3) 이행성

$\forall(x,y),(y,z),(x,z) \in A \times A$ 에 대하여

$\mu_R(x,z) \geq \max_{y\in A}[\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,z))]$ 이다.

예 5-6. 다음의 퍼지행렬로 나타내는 퍼지관계 R 은 반사성, 대칭성, 이행성이 모두 만족함을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 관계 R 은 동치관계가 된다.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 1 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. 동치관계에 의한 분할

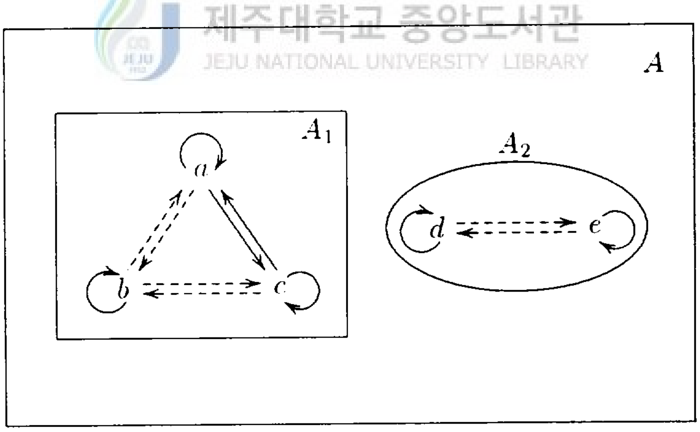
(1) 집합의 분할

보통집합 A 가 퍼지 동치관계 R 에 의해서 부분집합 A_1 과 A_2 로 분할이 되면 임의의 $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ 에 대하여 $\mu_R(a_1,a_2) = 0$ 가 됨을 다음과 같

이 알 수 있다. A 위에서의 퍼지 동치관계 R 이 주어졌다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

이러한 동치관계 R 에 의해서 집합 A 의 분할은 아래 그림과 같다. 즉, $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e\}$ 이다.



(2) α-수준에 의한 분할

집합 A 위에의 퍼지 동치관계 R 에 대해서 α-수준관계 R_α 을 구하면 R_α 는 보통의 동치관계가 되고 이러한 R_α 에 의해서 집합 A 는 분할될 수 있다. 이를테면, α-수준관계에 의해서 집합 A 가 부분집합 $A_1, A_2, \cdots$ 로 분할이 되면 A_i 에 있는 원소들 사이에는 α 정도 이상으로 관계를 갖게 된다. 즉, $\forall x, y \in A_i$, $\mu_R(x,y) \geq \alpha$ 이다. 소속정도의 값들을 모아 놓은 레벨집합 $L_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ 에 있는 α 에 대해서 α-수준관계 R_α 에 의한 분할을 A/R_α 으로 표시한다. 이때 $\alpha_1, \alpha_2 \in L_A$ 에 대해서 $\alpha_1 \geq \alpha_2$ 이면 $R_{\alpha_1} \subset R_{\alpha_2}$ 이므로 A/R_{α_1} 이 A/R_{α_2} 보다 더 섬세하게 분할된다.

예 5-7. A 위에서의 퍼지 동치관계 R 이 아래와 같이 주어졌다고 하자.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

그러면 레벨집합은 $L_A = \{0, 0.4, 0.5, 0.8, 1\}$ 이다.

이제 각 α 값에 대해서 α-수준관계를 이용하여 A 의 분할 A/R_α 을 구해 보자.

$\alpha = 0$ 에 대한 α-수준관계는

$$M_{R_0} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 $A = A_1$ 과 같이 하나의 클래스로 분할이 된다.

$\alpha = 0.4$ 에 대한 α-수준관계는

$$M_{R_{0.4}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 $A = \{a, b, d\} \cup \{c, e, f\}$ 로 분할이 된다.

$\alpha = 0.5$ 에 대한 α-수준관계는

$$M_{R_{0.5}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 $A = \{a, b\} \cup \{d\} \cup \{c, e, f\}$ 로 분할이 된다.

$\alpha = 0.8$ 에 대한 α-수준관계는

$$M_{R_{0.8}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

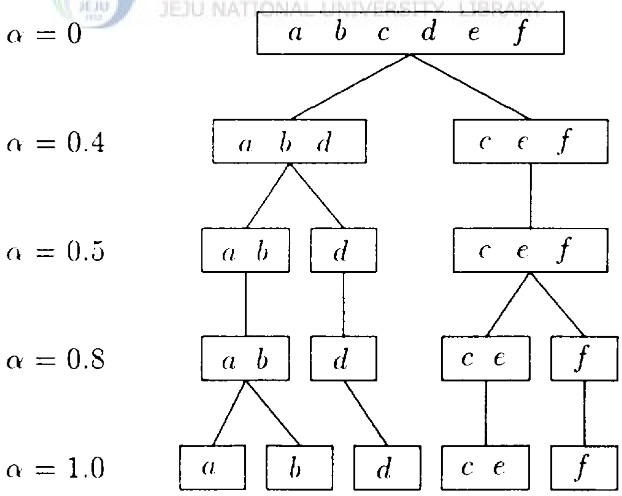
이므로 $A = \{a, b\} \cup \{d\} \cup \{c, e\} \cup \{f\}$ 로 분할이 된다.

마지막으로 $\alpha = 1$ 에 대한 α-수준관계는

$$M_{R_{1.0}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 $A = \{a\} \cup \{b\} \cup \{d\} \cup \{c, e\} \cup \{f\}$ 로 분할이 된다.

이상에서 얻어진 각 α 에 대한 분할은 트리 형태로 아래 그림과 같이 나타낼 수 있으며 여기서 α 의 값이 클 수록 A 는 더욱 섬세하게 분할되고 있음을 알 수 있다.



VI. 퍼지 숫자

퍼지숫자의 기본이 되는 개념인 구간에 대해서 알아본 후, 퍼지숫자의 개념을 정의하고 구간의 연산을 확장하여 퍼지숫자의 연산을 다룬다. 그리고 특별한 형태의 퍼지숫자와 그 예를 함께 알아본다.

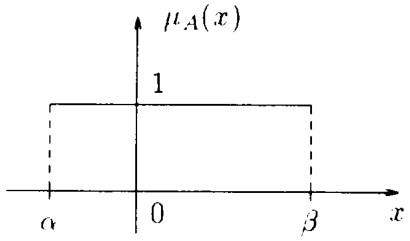
1. 퍼지숫자의 개념

[1] 구 간

구간을 집합의 소속함수로 표현하면 다음과 같이 정의되는 퍼지집합이다. 임의의 구간 $A = [\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta)$ 에 대해서 그 소속함수는 다음과 같이 줄 수 있다.

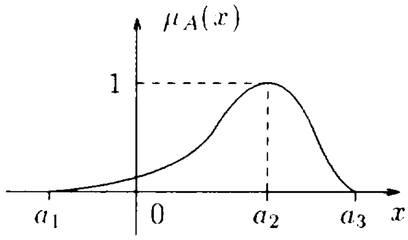
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \alpha \\ 1 & \text{if } \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{if } x > \beta. \end{cases}$$

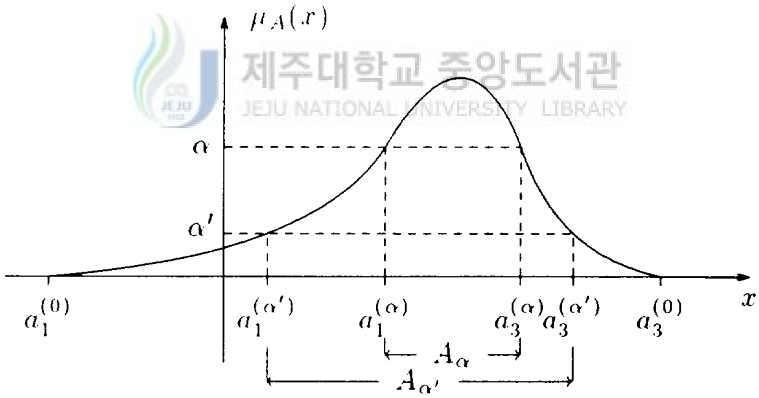
그리고 그 소속함수의 그래프는 다음과 같다.



[2] 퍼지숫자

실수 $\mathbb{R}$ 에서 정의되는 퍼지집합으로서 정규화 되고 볼록할 때 퍼지숫자라 한다. 퍼지숫자 A 는 정규화 되었기 때문에 최대 소속함수 값이 1 이다. 또한 볼록하므로 임의의 α-수준집합 A_α 는 볼록하다. 즉, 임의의 α 에 대해서 $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ 와 같이 구간이 된다. 따라서 $\alpha' < \alpha$ 이면 $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ 이다. 퍼지숫자의 소속함수와 α-수준집합 A_α 는 일반적으로 다음과 같다.





2. 퍼지숫자의 연산

퍼지숫자의 연산은 구간의 연산으로부터 확장될 수 있다.

[1] 구간의 연산

실수 $\mathbb{R}$ 에서의 구간 $A = [\alpha,\ \beta]$, $B = [\gamma,\ \delta]$ 에 대하여 구간의 연산들을 다음과 같이 정의한다.

(1) 덧셈

$[\alpha,\ \beta] + [\gamma,\ \delta] = [\alpha + \gamma,\ \beta + \delta]$.

(2) 뺄셈

$[\alpha,\ \beta] - [\gamma,\ \delta] = [\alpha - \delta,\ \beta - \gamma]$.

(3) 곱셈

$[\alpha,\ \beta] \cdot [\gamma,\ \delta] = [\alpha\gamma \wedge \alpha\delta \wedge \beta\gamma \wedge \beta\delta,\quad \alpha\gamma \vee \alpha\delta \vee \beta\gamma \vee \beta\delta]$.

(4) 나눗셈

$[\alpha,\ \beta]/[\gamma,\ \delta] = [\alpha/\gamma \wedge \alpha/\delta \wedge \beta/\gamma \wedge \beta/\delta,\quad \alpha/\gamma \vee \alpha/\delta \vee \beta/\gamma \vee \beta/\delta]$.

(단, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$)

(5) 역수구간

$[\alpha,\ \beta]^{-1} = [1/\alpha \wedge 1/\beta,\quad 1/\alpha \vee 1/\beta]$. (단, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$)

만약 위의 구간 A, B 가 $\mathbb{R}^+$ 에서 정의되면 곱셈, 나눗셈, 역수구간의 연산은 다음과 같이 정의된다.

(3)$'$ 곱셈

$[\alpha,\ \beta]\cdot[\gamma,\ \delta] = [\alpha\gamma,\ \beta\delta].$

(4)$'$ 나눗셈

$[\alpha,\ \beta]/[\gamma,\ \delta] = [\alpha/\delta,\ \beta/\gamma].$

(5)$'$ 역수구간

$[\alpha,\ \beta]^{-1} = [1/\beta,\ 1/\alpha].$

예 6-1. $A = [3,\ 5]$, $B = [-2,\ 7]$ 일 때,

$A + B = [3-2,\ 5+7] = [1,\ 12]$, $A - B = [3-7,\ 5-(-2)] = [-4,\ 7]$,

$A\cdot B = [(-6)\wedge 21\wedge(-10)\wedge 35,\ (-6)\vee 21\vee(-10)\vee 35] = [-10,\ 35]$,

$A/B = [3/(-2)\wedge 3/7\wedge 5/(-2)\wedge 5/7,\ 3/(-2)\vee 3/7\vee 5/(-2)\vee 5/7]$

$= [-2.5,\ 5/7]$,

$B^{-1} = [-2,\ 7]^{-1} = [1/(-2)\wedge 1/7,\ 1/(-2)\vee 1/7] = [1/(-2),\ 1/7]$ 이 된다.

[2] 퍼지숫자의 연산

퍼지숫자 A 와 B 에 대해서 퍼지숫자의 연산들을 다음과 같이 정의한다.

(1) 덧셈: $A+B$

$\mu_{A+B}(z) = \max_{z=x+y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)).$

(2) 뺄셈: $A - B$

$$\mu_{A-B}(z) = \max_{z=x-y}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

(3) 곱셈: $A \cdot B$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \max_{z=xy}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

(4) 나눗셈: A/B

$$\mu_{A/B}(z) = \max_{z=x/y}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

예 6-2. 퍼지숫자 $A = \{(2,1),(3,0.5)\}$, $B = \{(3,1),(4,0.5)\}$ 에 대해서

1) $A + B$ 를 계산해 보자. $z = x + y$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자.

i) $z < 5$ 일 때, 만족하는 x, y 는 없다. 즉, $\mu_{A+B}(z) = 0$ 이다.

ii) $z = 5$ 일 때, $x + y = 2 + 3$ 이므로 $\mu_A(2) \wedge \mu_B(3) = 1 \wedge 1 = 1$ 이다.

따라서 $\mu_{A+B}(5) = 1$.

iii) $z = 6$ 일 때, $x + y = 3 + 3$, $x + y = 2 + 4$ 이므로 $\mu_{A+B}(6) = 0.5$ 이다.

iv) $z = 7$ 일 때, $x + y = 3 + 4$ 이므로 $\mu_{A+B}(7) = 0.5$ 이다.

v) $z > 7$ 일 때, 만족하는 x, y 는 없으므로 $\mu_{A+B}(z) = 0$ 이다.

따라서 $A + B = \{(5,\ 1),\ (6,\ 0.5),\ (7,\ 0.5)\}$ 이다.

2) $A - B$ 를 계산해 보자. $z = x - y$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자.

i) $z < -2$ 일 때, 만족하는 x, y 가 없으므로 $\mu_{A-B}(z) = 0$ 이다.

ii) $z = -2$ 일 때, $x - y = 2 - 4$ 이므로 $\mu_{A-B}(-2) = 0.5$ 이다.

iii) $z = -1$ 일 때, $x - y = 2 - 3$, $x - y = 3 - 4$ 이므로 $\mu_{A-B}(-1) = 1$ 이다.

ⅳ) $z=0$ 일 때, $x-y=3-3$ 이므로 $\mu_{A-B}(0)=0.5$ 이다.

ⅴ) $z \geq 1$ 일 때, 만족하는 x, y 가 없으므로 $\mu_{A-B}(z)=0$ 이다.

따라서 $A-B=\{(-2,\ 0.5),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0.5)\}$ 이다.

3) $A \cdot B$ 를 계산해 보자. $z=xy$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자.

ⅰ) $z \leq 5$ 일 때, x, y 가 없으므로 $\mu_{A \cdot B}(z)=0$ 이다.

ⅱ) $z=6$ 일 때, $xy=2 \cdot 3$ 이므로 $\mu_{A \cdot B}(z)=1$ 이다.

ⅲ) $z=7$ 일 때, x, y 가 없으므로 $\mu_{A \cdot B}(7)=0$ 이다.

ⅳ) $z=8$ 일 때, $xy=2 \cdot 4$ 이므로 $\mu_{A \cdot B}(8)=0.5$ 이다.

ⅴ) $z=9$ 일 때, $xy=3 \cdot 3$ 이므로 $\mu_{A \cdot B}=0.5$ 이다.

ⅵ) $z=10, 11$ 일 때, x, y 가 없으므로 $\mu_{A \cdot B}(10)=\mu_{A \cdot B}(11)=0$ 이다.

ⅶ) $z=12$ 일 때, $xy=3 \cdot 4$ 이므로 $\mu_{A \cdot B}(12)=0.5$ 이다.

ⅷ) $z=13$ 일 때, x, y 가 없으므로 $\mu_{A \cdot B}=0$ 이다.

따라서 $A \cdot B=\{(6,\ 1),\ (8,\ 0.5),\ (9,\ 0.5),\ (12,\ 0.5)\}$ 이다.

4) A/B 를 계산해 보자. $z=x/y$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자.

ⅰ) $z=2/3$ 일 때, $x/y=2/3$ 이므로 $\mu_{A/B}(2/3)=1$ 이다.

ⅱ) $z=1$ 일 때, $x/y=3/3$ 이므로 $\mu_{A/B}(1)=0.5$ 이다.

ⅲ) $z=1/2$ 일 때, $x/y=2/4$ 이므로 $\mu_{A/B}(1/2)=0.5$ 이다.

ⅳ) $z=3/4$ 일 때, $x/y=3/4$ 이므로 $\mu_{A/B}(3/4)=0.5$ 이다.

ⅴ) 그 외에 z 에 대해서는 $\mu_{A/B}(z)=0$ 이다.

따라서 $A/B=\{(1/2,\ 0.5),\ (2/3,\ 1),\ (3/4,\ 1),\ (1,\ 0.5)\}$ 이다.

3. 특별한 형태의 퍼지숫자

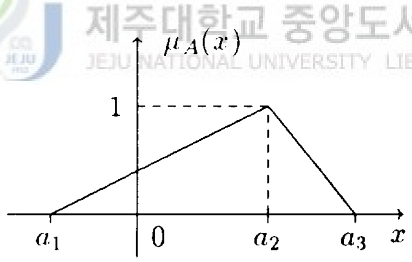
[1] 삼각 퍼지숫자

(1)삼각 퍼지숫자의 정의

소속함수의 값을 다음과 같이 정의하는 퍼지숫자 A 를 삼각 퍼지숫자라 하고 $A = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ 로 나타낸다.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{if } a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{if } a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & \text{if } x > a_3. \end{cases}$$

삼각 퍼지숫자의 소속함수는 다음과 같다.



이 때, α-수준집합 A_α 를 구간 $[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$ 라 하면 $\dfrac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha$ 이고,

$\dfrac{a_3 - a_3^{(\alpha)}}{a_3 - a_2} = \alpha$ 이다. 따라서 $a_1^{(\alpha)} = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$, $a_3^{(\alpha)} = (a_2 - a_3)\alpha + a_3$

즉, $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_2 - a_3)\alpha + a_3]$ 가 된다.

예 6-3. 삼각 퍼지숫자 $A = (-5, -1, 1)$ 에 대해서 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -5 \\ \dfrac{x+5}{4} & \text{if } -5 \le x \le -1 \\ \dfrac{1-x}{2} & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

α-수준집합 A_α 을 구해보자.

$\dfrac{a_1^{(\alpha)}+5}{4} = \alpha$, $a_1^{(\alpha)} = 4\alpha - 5$ 이고 $\dfrac{1-a_3^{(\alpha)}}{2} = \alpha$, $a_3^{(\alpha)} = -2\alpha + 1$ 이다.

그러므로 $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] = [4\alpha - 5, \quad -2\alpha + 1]$ 이다.

특히, $\alpha = 0.5$ 이면 $A_{0.5} = [-3, \ 0]$ 가 된다.

(2) 삼각 퍼지숫자의 연산

< 삼각 퍼지숫자 연산의 특징>

첫째: 삼각 퍼지숫자 사이의 덧셈과 뺄셈의 결과는 삼각 퍼지숫자가 된다.

둘째: 삼각 퍼지숫자 사이의 곱셈, 나눗셈, 역수연산의 결과는 반드시 삼각 퍼지숫자가 아니다.

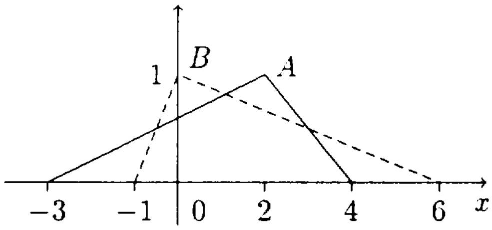
삼각 퍼지숫자 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대해서 덧셈과 뺄셈의 경우는 소속함수를 사용하지 않고 다음과 같이 계산할 수 있다.

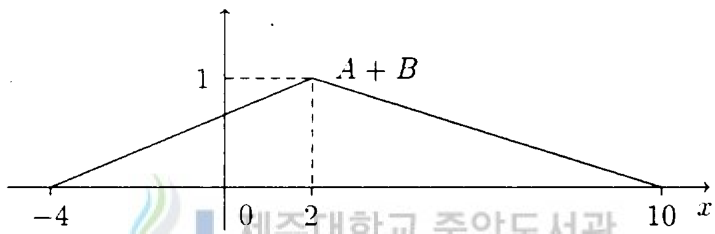
$A + B = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

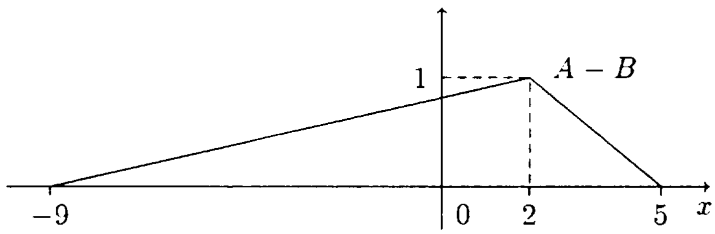
$A - B = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$.

예 6-4. 퍼지숫자 $A=(-3,2,4)$, $B=(-1,0,6)$ 에 대해서

$A+B=(-4,\ 2,\ 10)$, $A-B=(-9,\ 2,\ 5)$ 이 된다. 이 결과에 대한 소속함수들은 다음과 같다.







한편 α-수준집합을 이용하여 $A+B$ 와 $A-B$ 를 계산해 보자.

$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_3^{(\alpha)}]=[(a_2-a_1)\alpha+a_1,-(a_3-a_2)\alpha+a_3]=[5\alpha-3,-2\alpha+4]$,

$B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},b_3^{(\alpha)}]=[(b_2-b_1)\alpha+b_1,-(b_3-b_2)\alpha+b_3]=[\alpha-1,-6\alpha+6]$,

$A_\alpha + B_\alpha = [6\alpha - 4, -8\alpha + 10]$ 이고 $A_\alpha - B_\alpha = [11\alpha - 9, -3\alpha + 5]$ 이다. 여기에 $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ 에 대하여 $A_0 + B_0 = [-4,\ 10]$, $A_1 + B_1 = [2,\ 2] = 2$ 이므로 앞에서 구한 퍼지숫자의 세 점 $A + B = (-4,\ 2,\ 10)$ 과 일치한다. 그리고 $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ 에 대하여 $A_0 - B_0 = [-9, 5]$, $A_1 - B_1 = [2, 2] = 2$ 이므로 앞에서 구한 퍼지숫자의 세 점 $A - B = (-9, 2, 5)$ 과 일치한다.

(3) 소속함수를 이용한 연산

1) 덧셈 $A + B$

두 개의 퍼지숫자 $A = (-3, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 6)$ 에 대하여 $z \in A + B$ 를 구해 보자. 그리고 $z = x + y$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자. 그러면 A 와 B 의 소속함수는 다음과 같이 된다.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{2+3} & \text{if } -3 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{4-2} & \text{if } 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{if } x > 4. \end{cases}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < -1 \\ \dfrac{y+1}{0+1} & \text{if } -1 \le y \le 0 \\ \dfrac{6-y}{6-0} & \text{if } 0 \le y \le 6 \\ 0 & \text{if } y > 6. \end{cases}$$

$z = 8$ 을 만드는 덧셈은 $2 + 6$, $3 + 5$, $3.5 + 4.5, \cdots$ 등이 있다. 따라서

$$\mu_{A+B}(8) = \max_{8=x+y} [\mu_A(2) \wedge \mu_B(6),\ \mu_A(3) \wedge \mu_B(5),\ \mu_A(3.5) \wedge \mu_B(4.5), \cdots]$$

$= \vee[1 \wedge 0,\ 0.5 \wedge 1/6,\ 0.25 \wedge 0.25, \cdots] = \vee[0,\ 1/6,\ 0.25, \cdots]$.

이와 같이 모든 z 에 대해서 연산을 계속하면 실제로 앞에서 구한 결과와 일치하는 다음의 소속함수를 얻게 된다.

$$\mu_{A+B}(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z < -4 \\ \dfrac{z+4}{6} & \text{if } -4 \le z \le 2 \\ \dfrac{10-z}{8} & \text{if } 2 \le z \le 10 \\ 0 & \text{if } 10 < z. \end{cases}$$

2) 곱셈 $A \cdot B$

두 개의 퍼지숫자 $A = (1,\ 2,\ 4)$, $B = (2,\ 4,\ 6)$ 에 대하여

$z = xy$, $x \in A$, $y \in B$ 라 하자. 그러면 A 와 B 의 소속함수는 다음과 같이 된다.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ x-1 & \text{if } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{-1}{2}x + 2 & \text{if } 2 \le x < 4 \\ 0 & \text{if } x \ge 4. \end{cases}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 2 \\ \dfrac{1}{2}y - 1 & \text{if } 2 \le y < 4 \\ \dfrac{-1}{2}y + 3 & \text{if } 4 \le y < 6 \\ 0 & \text{if } y \ge 6. \end{cases}$$

$z = xy = 8$ 을 만드는 곱셈은 $z = 2 \cdot 4$ 또는 $z = 4 \cdot 2$ 등일 때 가능하다.

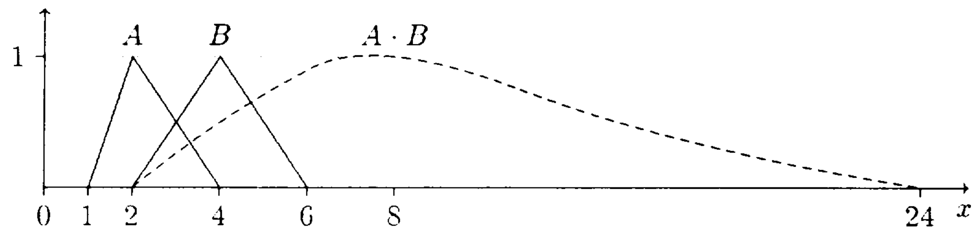
$\mu_{A \cdot B}(8) = \max\limits_{x \cdot y = 8}[\mu_A(2) \wedge \mu_B(4), \mu_A(4) \wedge \mu_B(2), \cdots] = \vee[1 \wedge 1,\ 0 \wedge 0, \cdots] = 1.$

또한 $z = xy = 12$ 일 때, $z = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = (2.5) \cdot (4.8) = \cdots$ 등이 가능하다.

$$\mu_{A \cdot B}(12) = \max_{x \cdot y = 12}[\mu_A(3) \wedge \mu_B(4),\ \mu_A(4) \wedge \mu_B(3),\ \mu_A(2.5) \wedge \mu_B(4.8), \cdots]$$

$$= \vee[0.5 \wedge 1,\ 0 \wedge 0.5,\ 0.75 \wedge 0.6, \cdots] = \vee[0.5,\ 0,\ 0.6, \cdots] = 0.6\ .$$

이와 같이 모든 z 에 대해서 연산을 하면 실제로 다음과 같은 소속함수를 얻게 된다.



그런데 이 결과는 곡선으로 얻어지기 때문에 삼각 퍼지숫자는 아니다. 그러나 편의를 위하여 $A \cdot B$ 의 근사값으로 $A \cdot B \cong (2, 8, 24)$ 을 취해서 삼각 퍼지숫자로 간주하여 사용할 수 있다.

(4)삼각 퍼지숫자의 근사값

두 개의 삼각 퍼지숫자의 곱셈과 나눗셈의 결과를 삼각 퍼지숫자의 근사값으로 구하는 방법을 생각해 보자.

삼각 퍼지숫자 $A = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ 와 $B = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ 에 대해서

$A_0 = [a_1,\ a_2]$, $B_0 = [b_1,\ b_2]$ 이고 $A_1 = a_2$, $B_1 = b_2$ 이므로

$A_0 \cdot B_0 = [P_m,\ P_M]$, $A_1 \cdot B_1 = a_2 b_2$ 가 된다.

단, $P_m = a_1 b_1 \wedge a_1 b_3 \wedge a_3 b_1 \wedge a_3 b_3$, $P_M = a_1 b_1 \vee a_1 b_3 \vee a_3 b_1 \vee a_3 b_3$ 이다.

따라서 $\alpha = 0$ 와 $\alpha = 1$ 일 때의 세 점으로부터 근사값인 삼각 퍼지숫자를 얻

어낼 수 있다. 즉, $A \cdot B \cong (P_m, a_2 b_2, P_M)$ 이다.
나눗셈의 경우도 마찬가지로 $A/B \cong (q_m, a_2/b_2, q_M)$ 을 얻을 수 있다. 여기서 $q_m = a_1/b_1 \wedge a_3/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3/b_3$, $q_M = a_1/b_1 \vee a_3/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_3$ 이다.

예 6-5. $A = (1,\ 2,\ 4)$, $B = (2,\ 4,\ 6)$ 에 대해서
$A_0 \cdot B_0 = [1,\ 4] \cdot [2.\ 6] = [2,\ 24]$ 이고 $A_1 \cdot B_1 = 2 \cdot 4 = 8$ 이다.
따라서 $A \cdot B \cong (2,\ 8,\ 24)$ 이다.
그리고 $A_0/B_0 = [1,\ 4]/[2,\ 6] = [1/6,\ 2]$ 이고 $A_1/B_1 = 2/4 = 1/2$ 이다.
따라서 $A/B \cong (1/6,\ 1/2,\ 2)$ 이다.

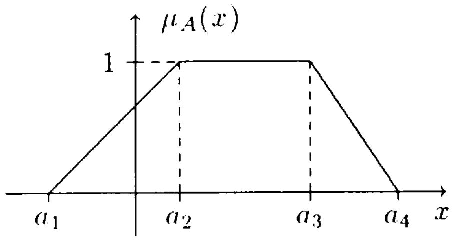
[2] 사다리꼴의 퍼지숫자

사다리꼴 퍼지숫자는 삼각 퍼지숫자의 확장으로써 소속함수 값이 최대가 되는 점($\alpha = 1$)이 여러 개인 퍼지숫자이다.

(1) 사다리꼴 퍼지숫자
소속함수의 값이 다음과 같이 정의되는 퍼지숫자 A 를 사다리꼴 퍼지숫자라 하고 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 로 나타낸다.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{if } a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & \text{if } a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & \text{if } a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & \text{if } x > a_4. \end{cases}$$

사다리꼴 퍼지숫자의 소속함수는 다음과 같다.



이 때, α-수준집합 A_α 를 구간 $[a_1^{(\alpha)},\ \ a_4^{(\alpha)}]$ 라 하면

$\dfrac{a_1^{(\alpha)}-a_1}{a_2-a_1}=\alpha,\quad \dfrac{a_4-a_4^{(\alpha)}}{a_4-a_3}=\alpha$ 이므로

$a_1^{(\alpha)}=(a_2-a_1)\alpha+a_1,\quad a_4^{(\alpha)}=(a_3-a_4)\alpha+a_4$ 이 된다.

즉, $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)}, a_4^{(\alpha)}]=[(a_2-a_1)\alpha+a_1,\quad (a_3-a_4)\alpha+a_4]$ 이다.

이 때, $a_2=a_3$ 이면 삼각 퍼지숫자가 된다.

(2)사다리꼴 퍼지숫자의 연산

<사다리꼴 퍼지숫자 연산의 특징>

첫째: 사다리꼴 퍼지숫자 사이의 덧셈과 뺄셈은 사다리꼴 퍼지숫자가 된다.

둘째: 사다리꼴 퍼지숫자 사이의 곱셈, 나눗셈, 역수는 반드시 사다리꼴 퍼지숫자가 되지는 않는다.

두 사다리꼴 퍼지숫자 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ 에 대한 덧셈과 뺄셈도 삼각 퍼지숫자와 마찬가지로 다음과 같이 간단히 계산이 된다.

$A+B=(a_1,a_2,a_3,a_4)+(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)$.

$A-B=(a_1,a_2,a_3,a_4)-(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1-b_4,a_2-b_3,a_3-b_2,a_4-b_1)$.

그러나 곱셈과 나눗셈의 결과는 사다리꼴 퍼지숫자가 되지 않기 때문에 편의상 사다리꼴 퍼지숫자인 근사값을 취하여 사용할 수 있다.

예 6-6. 사다리꼴 퍼지숫자 $A=(1,5,6,9)$, $B=(2,3,5,8)$ 에 대하여 곱셈을 근사값으로 표현하기 위해서 α-수준집합을 이용하여 계산해 보자.

$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_4^{(\alpha)}]=[(a_2-a_1)\alpha+a_1,\ (a_3-a_4)\alpha+a_4]=[4\alpha+1,\ -3\alpha+9]$,

$B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},b_4^{(\alpha)}]=[(b_2-b_1)\alpha+b_1,\ (b_3-b_4)\alpha+b_4]=[\alpha+2,-3\alpha+8]$.

여기에서 $\alpha=0$, $\alpha=1$ 에 대하여 $A_0\cdot B_0=[1,\ 9]\cdot[2,\ 8]=[2,\ 72]$,

$A_1\cdot B_1=[5,\ 6]\cdot[3,\ 5]=[15,\ 30]$ 이므로 $A\cdot B\cong[2,\ 15,\ 30,\ 72]$ 이다.

나눗셈에 대해서도 비슷하게 계산된다.

VII. 결 론

퍼지이론은 1965년 Lofti A. Zadeh 교수에 의하여 제창된 이후로 오늘날 우리가 추구하는 인공지능 세계를 실현하는 하나의 방안으로 주목 받고 있다. 인간이 무엇인가를 추리해 나가는데 있어서 정확하기 보다는 오히려 부정확한 편으로 흐르기 쉬운 경우가 많다. 일상 생활에서의 대화를 비롯하여, 사회현상에 있어서 애매모호한 표현이나 대상을 쉽게 찾아 볼 수 있을 것이다. 종래의 확률론이나 이가 논리로서는 처리할 수 없는 막연한 대상도 형식화 할 수 있도록 이론적 기반을 닦아 놓은 퍼지 집합의 개념은 오늘날에는 인간관계, system 공학, pattern 인식, 정보 검색 등 여러 방면에 활용되기에 이르렀다.

제 2 장에서는 일반 집합론의 일반화로서의 퍼지 집합론에 기본이 되는 여러가지 연산을 정의하고 그 연산들이 만족시키는 성질과 그 연산들 사이의 관계를 설명하였다.

제 3 장에서는 퍼지 합집합 함수의 조건과 퍼지 교집합 함수의 조건 그리고 퍼지 여집합 함수의 조건을 설명하였다.

제 4 장에서는 통상관계의 일반화로서 논해지는 일반집합론의 성질을 퍼지 집합론으로 확장시키는 퍼지관계를 설명하였다.

제 5 장에서는 퍼지관계의 정의에서 시작해 퍼지관계의 행렬 및 그래프에 의한 표현방법을 설명했고, 또 퍼지 제어, 퍼지 진단 등에서 중요한 역할을 다하는 퍼지 추론법이 퍼지 관계의 합성으로 설명되는 것을 설명하였다. 그리고 퍼지 관계의 특별한 형태인 동치관계와 그 클래스 및 퍼지 순서관계에 대해서 설명하였다.

제 6 장에서는 퍼지숫자의 개념과 특별한 형태의 퍼지숫자를 설명하였다.

우리는 20 세기 산업 사회에서 21 세기 정보화 사회로의 변환점에 살고 있으며 수학적 사고가 어느 때 보다도 우리의 실 생활과 깊이 관련 되어 있다. 이러한 새로운 시대에 적응할 수 있는 훌륭한 사회인으로 육성하기 위해서는 이가 논리를 바탕으로 한 수학교육에 병행하여 퍼지 논리를 바탕으로 한 수학교육의 도입이 시급하다고 할 수 있다. 이가 논리에 치중한 교육은 피교육자의 상상력과 직관력의 신장을 억제 시키는 요인이 될 수도 있기 때문이다. 따라서 21 세기의 정보화 시대에 대비해 퍼지논리를 바탕으로 한 수학교육에 관한 많은 연구와 새로운 교육 방법이 모색되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1]. 한국과학기술원 이광형, 한국전자통신 연구소 오길록 (1991), "FUZZY 퍼지이론 및 응용 I권: 이론", 홍릉과학출판사.

[2]. 퍼지기술 연구회 (1992). "퍼지이론해설", 기전연구사.

[3]. 퍼지기술 연구회 (1992). "퍼지시스템입문", 기전연구사.

[4]. 이홍천 (1987). "퍼지집합론". 서강대학교 출판부.

[5]. 강영구 (1993). "퍼지집합의 연산에 관한 연구". 연세대학교 교육대학원.

[6]. 김은령 (1992), "FUZZY 집합에 관한 연구", 성균관대학교 교육대학원.

[7]. A. Kaufmann (1975), Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press, New York.

<Abstract>

Fuzzy Relations and Fuzzy Numbers

Kang, Sun-Gu

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by professor Yang, Sung-Ho

We study the fuzzy sets, an extended concept of ordinary sets, in this thesis.

Firstly, the basic definitions and notations of the fuzzy sets are defined and examples are introduced in Chapter 2.

In Chapter 3, we introduce the basic operations on the class of fuzzy sets and the various examples.

In Chapter 4 and 5, we extend the relations on the ordinary set to ones on the fuzzy set and investigate the various properties of them.

Finally, we define the fuzzy numbers and the operations on them and introduce the method of finding the approximation for multiplication and division on the fuzzy numbers in Chapter 6.

A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1995.

감 사 의 글

하나의 과정을 마친다는 것, 더군다나 한 편의 논문을 완성한다는 것이 이렇게 많은 노력과 시간을 필요로 하는 것인지를 절실하게 깨달았습니다. 이제 이 논문을 대하면서 더욱 교수님들이 존경스럽고, 한편으론 성취감으로 마음 뿌듯함을 느낍니다.

이 논문이 완성되기까지 세심한 학문 지도는 물론 TEX의 이용 방법까지 자세하게 지도해 주신 양성호 교수님께 진심으로 감사를 드립니다. 그리고, 그동안 깊은 관심을 가지고 지도와 충고, 격려를 아끼지 않으신 수학교육과, 수학과 교수님들께도 고마운 말씀을 드립니다.

또한 함께 고생하고 의지했던 현대영,안성의 선생님의 앞날에도 항상 행운이 함께 하길 빌겠습니다.

아울러 학교 수업진행의 어려움 속에서도 대학원 과정을 마칠 수 있도록 배려해 주신 교장선생님을 비롯한 여러 선생님께 감사드리며, 주위에서 성원해 주신 모든 분들께도 감사를 드립니다.

끝으로 끝없는 사랑으로 학업에 전념하게 해 주신 장모님, 많은 어려움을 불평없이 이겨내며 내조해준 사랑하는 아내, 항상 말벗이 되어준 귀여운 딸 주연이, 건강하게 자라나는 아들 승현이와 함께 이 성취의 기쁨을 나누고자 합니다.

1995년 8월

강 순 구 드림