碩士學位論文

퍼지논리에서의 함수와 연산

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

任　　昭　　炫

2007年　8月

퍼지논리에서의 함수와 연산

指導敎授 尹 龍 植

任 昭 炫

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2007年 8月

任昭炫의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審查委員長 ________________ 印

委 員 ________________ 印

委 員 ________________ 印

濟州大學校 敎育大學院

2007年 8月

목 차

<초록>

퍼지논리에서의 함수와 연산

任　昭　炫

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授　尹　龍　植

우리가 일상생활에서는 많이 사용하지만 보통 집합개념으로는 다룰 수 없는 집합개념을 퍼지집합으로 정의하고 이러한 퍼지집합에서의 여러 예제와 연산을 알아보았다. 두 개의 이차퍼지수와 삼각퍼지수의 사칙연산에 대해 덧셈과 뺄셈은 그대로 이차퍼지수와 삼각퍼지수가 되지만 곱셈과 나눗셈은 이차퍼지수와 삼각퍼지수로 표현되지 않는 것과 삼각함수 퍼지수는 사칙연산에 대해서 모두 삼각함수 퍼지수로 표현된다는 것을 구체적으로 계산하였다.

명제의 진위를 잘 정의할 수 없는 명제에 대해 퍼지명제로 정의하고 이러한 명제를 진리공간에서 진리값으로 표현했다. 이 때 각 연산에 대하여 제시된 식 이외에도 순서도를 작성하여 보고 매스메티카를 이용하여 특정함수에 대한 그래프를 그리고 그 함수들의 연산결과를 그래프로 그려보았다.

1. 퍼지집합

우리는 생활 속에서 '예쁜 꽃들의 집합', '큰 숫자들의 집합' 등과 같이 원소가 집합에 속하는지 또는 속하지 않는지 명확하게 구분할 수 없는 집합개념을 사용하곤 한다. '예쁜 꽃들의 집합', '큰 숫자들의 집합'과 같은 집합은 주관적이고 집합으로 표현하기 애매한 언어를 사용하며 소속의 정도를 분명히 하기 어렵기 때문에 기존의 집합개념으로는 다룰 수 없다. 우리가 일상생활에서 많이 사용하지만 보통 집합개념으로는 다룰 수 없는 형태의 집합개념을 다루기 위하여, Zadeh는 퍼지집합을 1960년대 초에 소개하였다. Zadeh는 원소가 집합에 속하는 정도를 0과 1사이의 값으로 나타내고 소속함수(membership function)라는 용어를 사용하였고, 소속의 정도가 0과 1사이의 값으로 표현되는 집합을 퍼지집합이라 불렀다.

1.1. 퍼지집합

X를 임의의 집합이라 하자. X의 부분집합인 A는

$$\mu_A : X \to \{0, 1\}, \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

을 만족하는 특성함수(characteristic function)로 표현할 수 있다. 다음 정의는 위의 내용을 일반화한 것이다.

정의 1.1 집합 X 위에서의 퍼지집합 A는 X에서 구간 $[0, 1]$로의 함수이다. 이 함수를 A의 소속함수(membership function)라고 한다.

A를 소속함수 μ_A를 갖는 X 위에서의 퍼지집합이라 하자. A는 다음의 순서쌍

의 집합에 의해 완전하게 특성화된다.

$$A=\{(x,\ \mu_A(x))\},\qquad x\in X$$

소속함수의 값이 0인 원소들은 보통 쓰지 않는다. X가 유한집합 $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$일 때, X 위에서 퍼지집합 A는

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$$

으로 나타낸다. X가 유한집합이 아니면

$$A=\int_X \mu_A(x)/x$$

로 쓴다. 두 퍼지집합 A와 B에 대하여 모든 $x\in X$에 대하여 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$일 때, A와 B는 같다고 하며 $A=B$로 나타낸다.

예제 1.2 $X=\{1,2,3,4\}$라 하자.

$$\mu_A(1)=0,\ \mu_A(2)=1,\ \mu_A(3)=0.5,\ \mu_A(4)=0$$

에 의해 정의된 함수 $\mu_A: X\to[0,1]$는 $A=\{\textit{two or so}\}$라는 퍼지집합에 대한 소속함수라고 생각할 수 있다. 즉, $A=0/1+1/2+0.5/3+0/4$이다.

예제 1.3 $X=R$이고 $\mu_A(x)=\dfrac{1}{1+(x-5)^2}$ 즉, $A=\int_R \dfrac{1}{1+(x-5)^2}\,/x$ 라고 하자. 이 때 A는 5에 가까운 실수에 대한 퍼지집합으로 생각할 수 있다.

예제 1.4 집합 X는 $X=\{x\,|\,0\le x\le 50$인 실수$\}$이고 퍼지집합 A가 $A=\{x\,|$ x는 20에 가까운 실수$\}$일 때 다음은 퍼지집합 A를 나타내는 예들이다.

$$A=\int_X \frac{1}{1+(x-20)^2}\,/x$$

또는

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & x < 10, \\ \dfrac{1}{10}(x-10), & 10 \le x \le 20, \\ -\dfrac{1}{10}(x-10)+1, & 20 < x \le 30, \\ 0, & x > 30. \end{cases}$$

1.2. 퍼지집합의 연산

정의 1.5 A와 B를 퍼지집합이라 하자. 두 퍼지집합 A와 B의 연산은 다음과 같이 정의한다.

1. 합집합 $A \cup B$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

2. 교집합 $A \cap B$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

3. 여집합 A^c

$$\mu_{A^c} = 1 - \mu_A(x), \qquad \forall x \in X.$$

4. 확률합 $A \hat{+} B$

$$\mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

5. 확률적 $A \cdot B$

$$\mu_{A\cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

예제 1.6 $X = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$, $A = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 1), (4, 0.9), (5, 0.5)\}$ 그리고 $B = \{(2, 0.4), (3, 0.8), (4, 1), (5, 1), (6, 0.8)\}$라고 하자. 그러면,

$A \cup B = \{(1,\ 0.5), (2,\ 0.9), (3,\ 1), (4,\ 1), (5,\ 1), (6,\ 0.8)\}.$

$A \cap B = \{(2,\ 0.4), (3,\ 0.8), (4,\ 0.9), (5,\ 0.5)\}.$

$A^c = \{(1,\ 0.5), (2,\ 0.1), (4,\ 0.1), (5,\ 0.5), (6,\ 1), (7,\ 1), (8,\ 1), (9,\ 1), (10,\ 1)\}.$

$A \hat{+} B = \{(1,\ 0.5), (2,\ 0.94), (3,\ 1), (4,\ 1), (5,\ 1), (6,\ 0.8)\}.$

$A \cdot B = \{(2,\ 0.36), (3,\ 0.8), (4,\ 0.9), (5,\ 0.5)\}.$

정리 1.7 A, B 그리고 C를 집합 X 위에서의 퍼지집합이라 하면 다음이 성립한다.

1. 교환법칙 (Commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A.$$

2. 결합법칙 (Associative laws)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

3. 분배법칙 (Distributive laws)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B).$$

4. 대합 (Involution)

$$(A^c)^c = A.$$

5. 멱등법칙 (Idempotency)

$$A \cup A = A,\ \ A \cap A = A.$$

6. 흡수법칙 (Absorption)

$$A \cup (A \cap B) = A,\ \ A \cap (A \cup B) = A.$$

7. 항등원 (Identity)

$$A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing.$$

8. $\varnothing$와 X에 의한 흡수법칙 (Absorption by $\varnothing$ and X)

$$A \cup X = X,\ A \cap X = A,$$

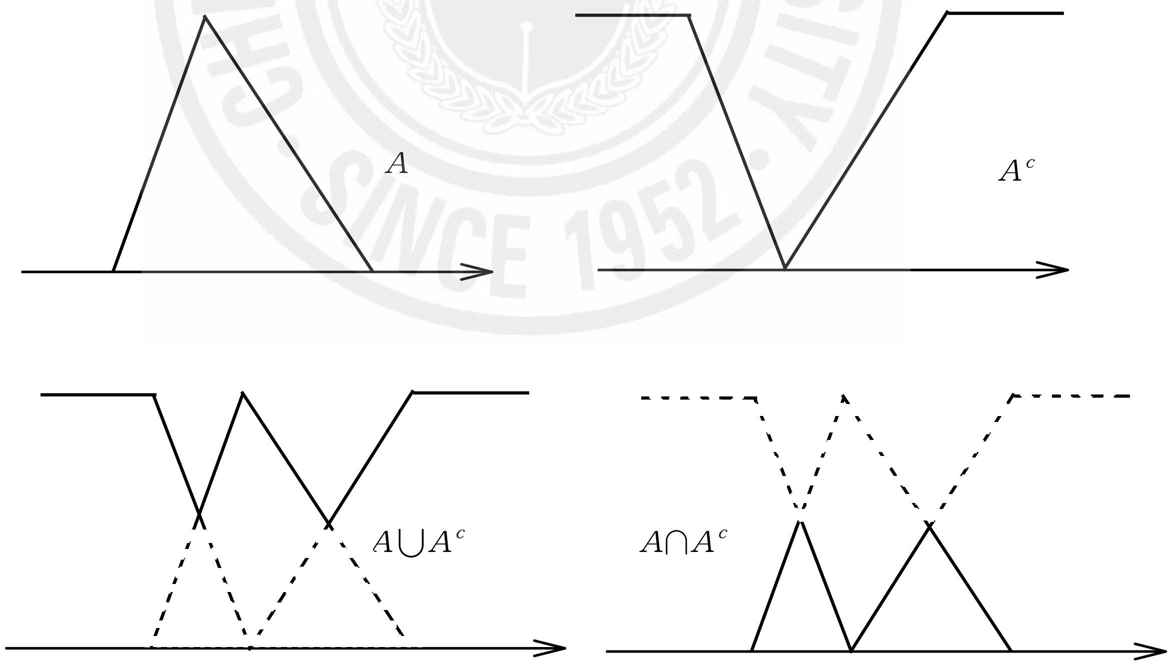
$$A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing.$$

9. 드 모르간의 법칙 (De Morgan's laws)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. 보통집합의 연산에서 성립하는 배중법칙(Excluded-middle law)과 모순법칙(Contradiction law)은 퍼지집합에서는 일반적으로 성립하지 않는다.

예제 1.8 다음 [그림 1]에서 $A \cup A^c \neq X,\ A \cap A^c \neq \varnothing$ 임을 알 수 있다.



[그림 1]

2. 퍼지수에서의 연산

2.1. 퍼지수의 연산

정의 2.1 실수 공간 R에서 정의된 볼록 퍼지집합 A가 다음의 조건을 만족하면 A를 퍼지수라 한다.

$\mu_A(x_0)=1$인 x_0가 R에 하나만 존재하고 $\mu_A(x)$는 연속이다.

정의 2.2 퍼지수 A와 B의 합, 차, 곱, 나눗셈은 다음과 같이 정의된다.

1. 합 $A(+)B$:

$$\mu_{A(+)B}(z)=\sup_{z=x+y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\qquad(x,y\in R)$$

2. 차 $A(-)B$:

$$\mu_{A(-)B}(z)=\sup_{z=x-y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\qquad(x,y\in R)$$

3. 곱 $A(\cdot)B$:

$$\mu_{A(\cdot)B}(z)=\sup_{z=x\cdot y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\qquad(x,y\in R)$$

4. 나눗셈 $A(/)B$:

$$\mu_{A(/)B}(z)=\sup_{z=x/y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\qquad(x,y\in R)$$

예제 2.3 $A=\{(2,1),(3,0.5)\}$, $B=\{(3,1),(4,0.5)\}$라고 하면

1. 합 :

(ⅰ) $z<5$이면 모든 $x\in A$, $y\in B$에 대하여 $x+y\geq 5$이므로, $\mu_{A(+)B}(z)=0$.

(ⅱ) $z=5$이면 $\mu_A(2)\wedge\mu_B(3)=1\wedge 1=1$이므로, $\mu_{A(+)B}(5)=\sup_{2+3}\{1\}=1$.

(ⅲ) $z=6$이면 $\mu_A(3)\wedge\mu_B(3)=0.5\wedge 1=0.5$, $\mu_A(2)\wedge\mu_B(4)=1\wedge 0.5=0.5$이므

로, $\mu_{A(+)B}(6)= \sup_{3+3, 2+4}\{0.5, 0.5\}=0.5.$

(ⅳ) $z=7$이면 $\mu_A(3)\wedge\mu_B(4)=0.5\wedge 0.5=0.5$

이므로, $A(+)B=\{(5, 1), (6, 0.5), (7, 0.5)\}$이다. 같은 방법으로 하면,

2. 차 : $A(-)B=\{(-2, 0.5), (-1, 1), (0, 0.5)\}$.

3. 곱 : $A(\cdot)B=\{(6, 1), (8, 0.5), (9, 0.5), (12, 0.5)\}$.

4. 나눗셈 : $A(/)B=\left\{\left(\frac{1}{2}, 0.5\right), \left(\frac{2}{3}, 1\right), \left(\frac{3}{4}, 0.5\right), (1, 0.5)\right\}$.

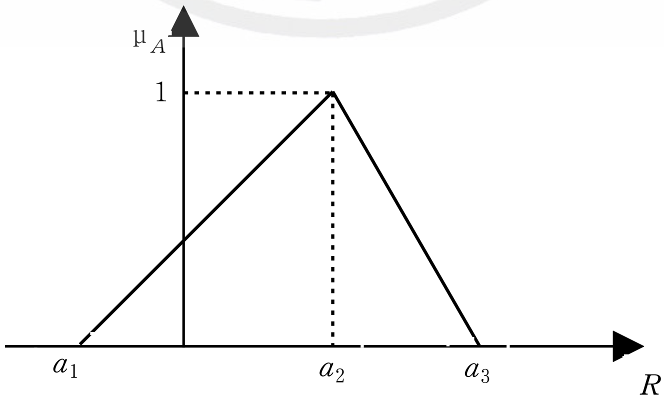
2.2. 삼각 퍼지수의 연산

정의 2.4 $\mu_A(x)\geq\alpha$인 원소 x들로 이루어진 집합을 퍼지집합 A의 α-수준집합이라 한다. 즉, 퍼지집합 A의 α-수준집합 A_α는

$$A_\alpha=\{\, x\in X \mid \mu_A(x)\geq\alpha \,\}$$

인 집합이다.

정의 2.5 소속함수가 [그림 2]와 같이 삼각형인 퍼지수를 삼각 퍼지수(triangular fuzzy number)라 부르며 삼각 퍼지수 A를 (a_1, a_2, a_3)으로 나타낸다.



[그림 2] 삼각 퍼지수

정리 2.6 삼각 퍼지수 $A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$와 $B=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여 다음이 성립한다.

1. $A(+)B=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$.
2. $A(-)B=(a_1-b_3,\ a_2-b_2,\ a_3-b_1)$.
3. $A(\cdot)B$ 와 $A(/)B$ 는 일반적으로 삼각 퍼지수가 되지 않는다.

예제 2.7 $A=(0,\ 1,\ 3)$와 $B=(1,\ 2,\ 3)$라고 하자. 즉,

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\ 3\le x, \\ x, & 0\le x<1, \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}, & 1\le x<3, \end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases} 0, & x<1,\ 3\le x, \\ x-1, & 1\le x<2, \\ -x+3, & 2\le x<3. \end{cases}$$

α-수준집합을 이용하여 앞에서 제시한 네 가지 연산에 대한 값을 정확하게 계산할 수 있다. 먼저, $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]$이고 $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]$를 각각 A, B의 α-수준집합이라 하자. $\alpha=a_1^{(\alpha)}$이고 $\alpha=-\dfrac{a_2^{(\alpha)}}{2}+\dfrac{3}{2}$이므로, $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]=[\alpha,\ -2\alpha+3]$이고, $\alpha=b_1^{(\alpha)}-1$이고 $\alpha=-b_2^{(\alpha)}+3$이므로, $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]=[\alpha+1,\ \alpha+3]$이다.

1. 합 : 위 사실에 의하여 $A_\alpha(+)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}]=[2\alpha+1,\ -3\alpha+6]$이므로, 구간 $[1,\ 6]^c$에서 $\mu_{A(+)B}(x)=0$이고 $x=3$에서 $\mu_{A(+)B}=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(+)B}(x)=\begin{cases}0, & x<1,\ 6\le x,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, & 1\le x<3,\\ -\frac{1}{3}x+2, & 3\le x<6,\end{cases}$$

즉, $A(+)B=(1, 3, 6)$이다.

2. 차 : $A_\alpha(-)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}-b_2^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}-b_1^{(\alpha)}]=[2\alpha-3,\ -3\alpha+2]$이므로, 구간 $[-3,\ 2]^c$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=0$이고 $x=-1$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(-)B}(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\ 2\le x,\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, & -3\le x<-1,\\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, & -1\le x<2,\end{cases}$$

즉, $A(-)B=(-3,\ -1,\ 2)$이다.

3. 곱 : $A_\alpha(\cdot)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}\cdot b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}\cdot b_2^{(\alpha)}]=[\alpha^2+\alpha,\ 2\alpha^2-9\alpha+9]$이므로, 구간 $[0,\ 9]^c$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=0$이고 $x=2$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(\cdot)B}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ 9\le x,\\ \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}, & 0\le x<2,\\ \frac{9-\sqrt{9+8x}}{4}, & 2\le x<9,\end{cases}$$

즉, $A(\cdot)B$는 삼각 퍼지수가 아니다.

4. 나눗셈 : $A_\alpha(/)B_\alpha=\left[\dfrac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\ \dfrac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]=\left[\dfrac{\alpha}{-\alpha+3},\ \dfrac{-2\alpha+3}{\alpha+1}\right]$이므로, 구간

$[0,\ 3]^c$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=0$이고 $x=\dfrac{1}{2}$에서 $\mu_{A(/)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(/)B}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ 3\le x,\\ \dfrac{3x}{x+1}, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{-x+3}{x+2}, & \dfrac{1}{2}\le x<3,\end{cases}$$

즉, $A(/)B$는 삼각 퍼지수가 아니다.

정의 2.8 다음과 같이 이차식을 소속함수로 갖는 퍼지수를 이차퍼지수라 한다.

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\ ,\beta\le x,\\ -a(x-\alpha)(x-\beta)=-a(x-k)^2+1, & \alpha\le x<\beta,\end{cases}\qquad \text{단, } a>0.$$

위의 이차 퍼지수를 $A=[\alpha,\ k,\ \beta]$로 표시한다.

정리 2.9 이차 퍼지수 $A=[x_1,\ k,\ x_2]$와 $B=[x_3,\ m,\ x_4]$에 대하여 다음이 성립한다.

1. $A(+)B=[x_1+x_3,\ k+m,\ x_2+x_4]$.
2. $A(-)B=[x_1-x_4,\ k-m,\ x_2-x_3]$.
3. 구간 $[x_1x_3,\ x_2x_4]^c$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=0$이고 $x=km$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=1$이다. $A(\cdot)B$는 일반적으로 이차 퍼지수가 되지 않는다.
4. 구간 $\left[\dfrac{x_1}{x_4},\ \dfrac{x_2}{x_3}\right]^c$에서 $\mu_{A(/)B}(x)=0$이고 $x=\dfrac{k}{m}$에서 $\mu_{A(/)B}(x)=1$이다. $A(/)B$는 일반적으로 이차 퍼지수가 되지 않는다.

예제 2.10 이차 퍼지수 $A=[0,1,2]$와 $B=[1,3,5]$에 대하여 α-수준집합을 이용하여 위에서 제시한 네 개의 연산값을 정확하게 계산할 수 있다.

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x<0\ ,2\le x, \\ -(x-1)^2+1, & 0\le x<2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases} 0, & x<1\ ,5\le x, \\ -\frac{1}{4}(x-3)^2+1, & 1\le x<5. \end{cases}$$

$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]$이고 $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]$라고 하자. $\alpha=-(a_1^{(\alpha)}-1)^2+1$ 이고 $\alpha=-(a_2^{(\alpha)}-1)^2+1$ 이므로, $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]=[1-\sqrt{1-\alpha},\ 1+\sqrt{1-\alpha}\ ]$이다. 같은 방법으로 하면, $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]=[3-2\sqrt{1-\alpha},\ 3+2\sqrt{1-\alpha}]$이다.

1. 합 : 위 사실에 의해 $A_\alpha(+)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}]=[4-3\sqrt{1-\alpha},\ 4+3\sqrt{1-\alpha}]$이므로, 구간 $[1,\ 7]^c$에서 $\mu_{A(+)B}(x)=0$이고 $x=4$에서 $\mu_{A(+)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(+)B}(x)=\begin{cases} 0, & x<1,\ 7\le x, \\ -\frac{1}{9}(x-4)^2+1, & 1\le x<7, \end{cases}$$

즉, $A(+)B=[1,4,7]$이다.

2. 차 : $A_\alpha(-)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}-b_2^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}-b_1^{(\alpha)}]=[-2-3\sqrt{1-\alpha},-2+3\sqrt{1-\alpha}]$이므로, 구간 $[-5,\ 1]^c$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=0$이고 $x=-2$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(-)B}(x)=\begin{cases}0, & x<-5,\ 1\le x,\\ -\dfrac{1}{9}(x+2)^2+1, & -5\le x<1,\end{cases}$$

즉, $A(-)B=[-5,\ -2,\ 1]$이다.

3. 곱 : $A_\alpha(\cdot)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}\cdot b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}\cdot b_2^{(\alpha)}]=[5-2\alpha-5\sqrt{1-\alpha}, 5-2\alpha+5\sqrt{1-\alpha}]$ 이므로, 구간 $[0,\ 10]^c$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=0$이고 $x=3$에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(\cdot)B}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ 10\le x,\\ -\dfrac{1}{8}(-4x-5+5\sqrt{8x+1}), & 0\le x<10,\end{cases}$$

즉, $A(\cdot)B$는 이차 퍼지수가 아니다.

4. 나눗셈 : $A_\alpha(/)B_\alpha=\left[\dfrac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\ \dfrac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]=\left[\dfrac{1-\sqrt{1-\alpha}}{3+2\sqrt{1-\alpha}},\ \dfrac{1+\sqrt{1-\alpha}}{3-2\sqrt{1-\alpha}}\right]$이므로 구간 $[0,\ 2]^c$에서 $\mu_{A(-)B}(x)=0$이고 $x=\dfrac{1}{3}$에서 $\mu_{A(/)B}(x)=1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(/)B}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ 2\le x,\\ \dfrac{-5x(x-2)}{(2x-1)^2}, & 0\le x<2,\end{cases}$$

즉, $A(/)B$는 이차 퍼지수가 아니다.

정의 2.11 다음과 같이 삼각함수를 소속함수로 갖는 퍼지수를 삼각함수 퍼지수라고 한다.

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x < \Theta_1, \Theta_3 \le x, \\ \sin(x-\Theta_1), & \Theta_1 \le x < \Theta_3, \end{cases} \qquad 단,\ \Theta_3-\Theta_1=\pi.$$

위의 삼각함수 퍼지수는 $\Theta_2=\Theta_1+\frac{\pi}{2}$ 일 때, $A=\langle\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3\rangle$로 표시된다.

정리 2.12 삼각함수 퍼지수 $A=\langle c_1,\ c_2,\ c_3\rangle$와 $B=\langle d_1,\ d_2,\ d_3\rangle$에 대하여 다음이 성립한다.

1. $A(+)B=\langle c_1+d_1,\ c_2+d_2,\ c_3+d_3\rangle$.
2. $A(-)B=\langle c_1-d_3,\ c_2-d_2,\ c_3-d_1\rangle$.
3. $A(\cdot)B$와 $A(/)B$는 삼각함수에 의해 표현된다.

이 때 $\sin^{-1}(\cdot)$은 $\sin(\cdot):[0,\Theta_2-\Theta_1]\to[0,1]$의 역함수로 정의한다.

예제 2.13 삼각함수 퍼지수 $A=\left\langle\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right\rangle$와 $B=\left\langle\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi\right\rangle$에 대하여 α-수준집합을 이용하여 위에서 제시한 네 개의 연산값을 정확하게 계산할 수 있다.

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x < \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi \le x, \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} \le x < \frac{5}{4}\pi, \end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases} 0, & x < \frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi \le x, \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right), & \frac{\pi}{6} \le x < \frac{7}{6}\pi. \end{cases}$$

$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]$이고 $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]$라고 하자. $\alpha=\sin(a_1^{(\alpha)}-\frac{\pi}{4})$이고 $a_2^{(\alpha)}=\frac{3}{2}\pi-a_1^{(\alpha)}$이므로, $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}]=\left[\frac{\pi}{4}+\sin^{-1}\alpha,\ \frac{5}{4}\pi-\sin^{-1}\alpha\right]$이다. 같은 방법으로 하면, $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]=\left[\frac{\pi}{6}+\sin^{-1}\alpha,\ \frac{7}{6}\pi-\sin^{-1}\alpha\right]$이다.

1. 합 : 위의 사실에 의해

$$\begin{aligned} A_\alpha(+)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \\ &= \left[\frac{5}{12}\pi + 2\sin^{-1}\alpha,\ \frac{29}{12}\pi - 2\sin^{-1}\alpha\right] \end{aligned}$$

이므로, 구간 $\left[\frac{5}{12}\pi,\ \frac{29}{12}\pi\right]^c$에서 $\mu_{A(+)B}(x) = 0$이고 $x = \frac{17}{12}\pi$에서 $\mu_{A(+)B}(x) = 1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(+)B}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{5}{12}\pi,\ \frac{29}{12}\pi \le x, \\ \sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{12}\pi\right), & \frac{5}{12}\pi \le x < \frac{29}{12}\pi, \end{cases}$$

즉, $A(+)B = \left\langle \frac{5}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\ \frac{29}{12}\pi \right\rangle$이다.

2. 차 : 같은 방법으로

$$\begin{aligned} A_\alpha(-)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] \\ &= \left[2\sin^{-1}\alpha - \frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi - 2\sin^{-1}\alpha\right] \end{aligned}$$

이므로, 구간 $\left[-\frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi\right]^c$에서 $\mu_{A(-)B}(x) = 0$이고 $x = \frac{\pi}{12}$에서 $\mu_{A(-)B}(x) = 1$이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(-)B}(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi \le x, \\ \sin\frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{12}\pi\right), & -\frac{11}{12}\pi \le x < \frac{13}{12}\pi, \end{cases}$$

즉, $A(-)B = \left\langle -\frac{11}{12}\pi,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{13}{12}\pi \right\rangle$이다.

3. 곱 :

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}]$$
$$= \left[\frac{\pi^2}{24} + \frac{5}{12}\pi\sin^{-1}\alpha + (\sin^{-1}\alpha)^2,\ \frac{35}{24}\pi^2 - \frac{29}{6}\pi\sin^{-1}\alpha + (\sin^{-1}\alpha)^2\right]$$

이므로, 구간 $\left[\frac{\pi^2}{24},\ \frac{35}{24}\pi^2\right]^c$ 에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x) = 0$ 이고 $x = \frac{\pi^2}{2}$ 에서 $\mu_{A(\cdot)B}(x) = 1$ 이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(\cdot)B}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\pi^2}{24},\ \frac{35}{24}\pi^2 \le x, \\ \sin\left(-\frac{5}{12}\pi + \sqrt{\frac{19}{144}\pi^2 + x}\right), & \frac{\pi^2}{24} \le x < \frac{35}{24}\pi^2. \end{cases}$$

4. 나눗셈 :

$$A_\alpha(/)B_\alpha = \left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\ \frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]$$
$$= \left[\frac{12\sin^{-1}\alpha + 3\pi}{14\pi - 12\sin^{-1}\alpha},\ \frac{15\pi - 12\sin^{-1}\alpha}{12\sin^{-1}\alpha + 2\pi}\right]$$

이므로 구간 $\left[\frac{3}{14},\ \frac{15}{2}\right]^c$ 에서 $\mu_{A(/)B}(x) = 0$ 이고 $x = \frac{9}{8}$ 에서 $\mu_{A(/)B}(x) = 1$ 이다. 이것을 계산하면,

$$\mu_{A(/)B}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{13}{14},\ \frac{15}{2} \le x, \\ \sin\frac{14\pi x - 3\pi}{12(x-1)}, & \frac{13}{14} \le x < \frac{15}{2}. \end{cases}$$

3. 퍼지논리

3.1. 언어진리값

일상생활에서 'x is A'라는 명제의 참과 거짓의 정도를 *true, more or less true, very true, false, completely false* 등으로 나타내는데 특히, 한 주장이나 명제의 진위를 잘 정의할 수 없을 때에는 그것을 위에서처럼 나타낸다. 이런 경우 용어집합이 *true, very true, false,*$\cdots$등인 언어변수 '*Truth*'를 도입하여 사용하며 명제의 진위정도를 수치적 진리값(numerical truth-value)이 아닌 언어적 진리값(linguistic truth-value)으로 나타낼 수 있다.

정의 3.1 명제의 진리값을 $\{0, 1\}$로는 기술할 수 없고, $[0, 1]$사이의 값으로 기술해야 하는 명제를 퍼지명제(fuzzy proposition)라 한다.

'x is A'라는 퍼지명제가 있을 때

(ⅰ) A의 의미 M_A

(ⅱ) 퍼지명제 'x is A'의 진리값

에 대하여 생각해 보자.

A의 의미 M_A는 집합 X에 있는 이름이 A인 퍼지 부분집합의 의미이다. 'Tom is old.'라는 명제에서 M_A는 언어변수 Age의 집합 안에 있는 old의 의미를 나타내며, 'Tom is old.'를 'Age(Tom)=old.'로 이해할 수 있다.

명제 'x is A'의 전형적인 언어진리값 $v(x\ is\ A)$는

$$true, not\ true, very\ true, more\ or\ less\ true, \cdots$$
$$false, not\ false, very\ false, \cdots$$

등으로, 퍼지 진리값 공간 $[0, 1]$에서의 퍼지 부분집합들이다.

먼저 Zadeh가 제시한 언어변수 *Truth*의 변수값 *true*에 대하여 기술하면, 다음과 같다.

$$\mu_{true}(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 \le \eta \le a, \\ 2\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^2, & \text{for } a \le \eta \le \dfrac{a+1}{2}, \\ 1 - 2\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^2, & \text{for } \dfrac{a+1}{2} \le \eta \le 1. \end{cases}$$

퍼지명제 'Tom who is 60 years old is old.' 의 진리값에 대하여 생각해 보자. old를 다음과 같이 정의할 경우,

$$\mu_{old}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 60], \\ \left(1 + \left(\dfrac{x - 60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & x \in [60, 100]. \end{cases}$$

퍼지명제 'Tom who is 70 years old is old.'의 진리값은 $\mu_{old}(70) = 0.8$이다. 그러나 'Tom who is 70 years old is old.'의 진리값이 *true* 이거나 'Red apple is ripe.'의 진리값이 *very true*인 경우엔 즉, 퍼지명제의 진리값이 언어값으로 주어지면 명제의 진리값을 정량적으로 표현하기가 어려워진다. 언어진리값이 *very true*인 퍼지명제 'Red apple is ripe.'는 언어진리값 *very true*를 명제에 포함시켜 'Red apple is ripe is *very true*.'로 쓸 수 있다.

그러면 다음의 명제들에서와 같이, 명제 내에 명제의 언어진리값이 내포된 명제들이 수치적 진리값에 대하여 생각해 보자.

(ⅰ) Tom (70 years old) is old is *true*.

(ⅱ) Tom (70 years old) is old is *very true*.

(ⅲ) Tom (70 years old) is old is *more or less true*.

'Tom (70 years old) is old is *very true*.'의 명제에서 old를 앞에 제시된 $\mu_{old}(x)$에 대한 식으로 정의하고 Zadeh가 제시한 $a = 0.6$인 *true*를 사용하면

$$\mu_{true}(\tau)=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\tau\le 0.6,\\ 2\left(\dfrac{\tau-0.6}{0.4}\right)^2, & \text{for } 0.6\le\tau\le 0.8,\\ 1-2\left(\dfrac{\tau-0.6}{0.4}\right)^2, & \text{for } 0.8\le\tau\le 1.\end{cases}$$

이때 *very true*는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\tau)=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\tau\le 0.6,\\ 4\left(\dfrac{\tau-0.6}{0.4}\right)^4, & \text{for } 0.6\le\tau\le 0.8,\\ \left(1-2\left(\dfrac{\tau-0.6}{0.4}\right)^2\right)^2, & \text{for } 0.8\le\tau\le 1.\end{cases}$$

70세인 Tom이 old의 특성을 만족하는 정도 τ는 $\tau=\mu_{old}(70)=0.8$이므로 'Tom (70 years old) is old'의 명제가 *very true*일 가능성은 $\mu_{very\ true}(0.8)=0.25$이다. 즉, v(Tom (70 years old) is old is *very true*) $=0.25$이다.

이제 명제 'Tom is old is *very true*'의 진리값에 대하여 살펴보자. old를 Zadeh가 제시한 *true*를 사용하면 *very true*는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\tau) = \mu^2_{true}(\tau)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\tau\le a,\\ 4\left(\dfrac{\tau-a}{1-a}\right)^4, & \text{for } a\le\tau\le\dfrac{a+1}{2},\\ \left(1-2\left(\dfrac{\tau-a}{1-a}\right)^2\right)^2, & \text{for } \dfrac{a+1}{2}\le\tau\le 1.\end{cases}$$

Tom의 나이가 0세에서 60세 사이라면 $\tau=0$이므로 $\mu_{very\ true}(\tau)=0$이다. 따라서 'Tom is old'라는 명제가 *very true*일 가능성은 0이다. Tom의 나이가 60세에서 100세 사이라면 $\tau=\left(1+\left(\dfrac{x-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$이며, 'Tom is old'라는 명제가 *very true*일 정도는 위 식에 의해 계산할 수 있다.

언어진리값이 τ인 퍼지명제 'x is A'는

$$x \ is \ A \ is \ \tau$$

로 쓸 수 있으며 이것과 동등한 식의 퍼지명제를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x \ is \ A'$$

그렇다면,

$$\mu_{A'}(x) = \mu_{\tau}(\mu_A(x)), \quad x \in X$$

이다. 즉, $x \ is \ A \ is \ \tau$ 인 퍼지명제의 진리값은 위 식에 의해 계산할 수 있다.

3.2. 퍼지논리 연산자

이제 퍼지논리 연산자에 대하여 살펴본다.

1. 명제의 부정(negation)

1) 언어진리값의 부정 : $\neg v(P)$

명제 'P is τ_P' 의 부정을 'P is not τ_P'로 정의하면, 'P is $\neg\tau_P$'의 진리값은 다음과 같다.

$$v(P \ is \ not \ \tau_P) = \mu_{\neg\tau_P}(\eta) = 1 - \mu_{\tau_P}(\eta), \quad \eta \in [0,1]$$

2) 퍼지술어의 부정 : $v(\neg P)$

명제 'P is τ_P'의 부정을 'not P is τ_P'로 정의하면, 'not P is τ_P'의 진리값은 다음과 같다.

$$v(not \ P \ is \ \tau_P) = \mu_{\tau_P}(1-\eta).$$

2. 명제의 논리곱(conjunction) : P and Q

'P is τ_P'와 'Q is τ_Q'의 논리곱은 'P and Q is τ_P and τ_Q'로 취급할 수 있으므로 $v(P \text{ and } Q) = \tau_{P \text{ and } Q}$라고 하면, $\tau_{P \text{ and } Q}$는 다음으로 정의된다.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \wedge \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

3. 논리합 (disjuction) : P *or* Q

'P is τ_P'와 'Q is τ_Q'의 논리합은 'P *or* Q is τ_P *or* τ_Q'로 취급할 수 있으므로 $v(P \; or \; Q) = \tau_{P \, or \, Q}$라고 하면, $\tau_{P \, or \, Q}$는 다음으로 정의된다.

$$\mu_{\tau_{P \, or \, Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

4. 진리함수사상

몇 개의 전제조건인 명제들로부터 결론을 이끌어내는 과정을 추론이라 하며, 명제는 참과 거짓을 명확히 구분할 수 있는 문장이어야 한다. 따라서 수학에서의 논리는 2가 논리이다. 그러나 우리가 일상생활에서 사용하는 논리는 이러한 2가 논리를 기반으로 하지 않고 다가논리를 기반으로 추론하게 된다. 예를 들면 사과가 익은 정도를 설명할 때 사과가 익었다와 사과가 익지 않았다 두 가지 문장만을 사용하지는 않는다. 매우 잘 익었다, 잘 익었다, 잘 익지 않았다, 전혀 익지 않았다 등 여러 가지 방법으로 설명할 수 있다.

4.1. 언어변수

명확하게 참이거나 거짓인 문장을 명제라고 하고 참인 명제에 진리값 1을 대응시키고 거짓인 명제에 진리값 0을 대응시키면 명제는 0 또는 1의 진리값을 갖는다. 퍼지명제의 참과 거짓의 정도를 *true*, *very true*, *fairly true*, *false*, *very false* 등의 언어적인 단어를 사용하여 나타낸 값을 언어적 진리값 또는 언어적 변수값이라 한다.

일반적으로 함수에서 변수라고하면 실수, 즉 수치변수를 뜻하는 것처럼 언어가 변수가 되는 것을 언어변수라고 하는데, 예를 들어 '온도'의 수치변수는 5°, 15°, 23°, 32°,… 등의 수치적 값을 가지고, 언어변수는 춥다, 서늘하다, 따뜻하다, 덥다,…등의 언어적 값을 가지는 변수이다. 따라서 언어변수의 변수값을 퍼지 부분집합으로 생각할 수 있기 때문에 각 변수값을 소속함수로 나타낼 수 있다. 특히, Baldwin은 언어변수 *truth*의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의하였고, [그림 3]과 같이 나타낼 수 있다.

정의 4.1 $x \in [0,1]$인 x에 대하여, 언어변수 *truth*의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의한다.

① $\mu_{true}(x) = x$,

② $\mu_{false}(x) = 1 - x$,

③ $\mu_{very\ true}(x) = \mu^2_{true}(x)$,

④ $\mu_{very\ false}(x) = \mu^2_{false}(x)$,

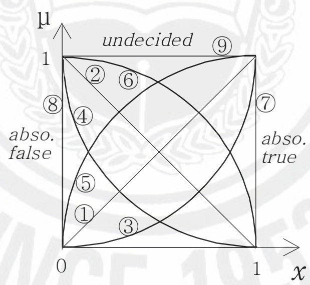
⑤ $\mu_{fairly\ true}(x) = \mu^{1/2}_{true}(x)$,

⑥ $\mu_{fairly\ false}(x) = \mu^{1/2}_{false}(x)$,

⑦ $\mu_{absolutely\ true}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1, \\ 0, & \text{if } x \neq 1, \end{cases}$

⑧ $\mu_{absolutely\ false}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 0, \\ 0, & \text{if } x \neq 0, \end{cases}$

⑨ $\mu_{undecided}(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]$.



[그림 3] *truth*의 변수값

그리고 [그림 3]으로부터 $n \to \infty$일 때 다음을 얻을 수 있다.

$(very)^n\ true \to absolutely\ true \quad (x \neq 0)$

$(very)^n\ false \to absolutely\ false \quad (x \neq 1)$

$(fairly)^n\ true \to undecided \quad (x \neq 0)$

$(fairly)^n\ false \to undecided \quad (x \neq 1)$

4.2. 근사추론

정의 4.3 만일 ‘ x 가 P 이면 y 는 Q 이다’와 ‘ x 는 P' 이다’라는 두 가지 전제가 주어졌을 때

전제 1 : x 가 P 이면 y 는 Q이다.

전제 2 : x 는 P' 이다.

결 론 : y 는 Q' 이다.

일 때, ‘ y는 Q' 이다’라는 결론을 얻는 과정을 근사추론이라 한다.

Baldwin은 퍼지암시 $A \rightarrow B$의 퍼지 진리값을 I라 할 때 그것을 다음과 같이 진리함수사상으로 정의하였다.

$$\mu_I : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \rightarrow [0,\ 1]$$
$$(\eta,\ \lambda) \rightarrow \mu_I(\eta,\ \lambda) \in [0,\ 1]$$

정의 4.4 $\mu_I(\eta, \lambda)$에 대한 대표적인 정의는 다음과 같다.

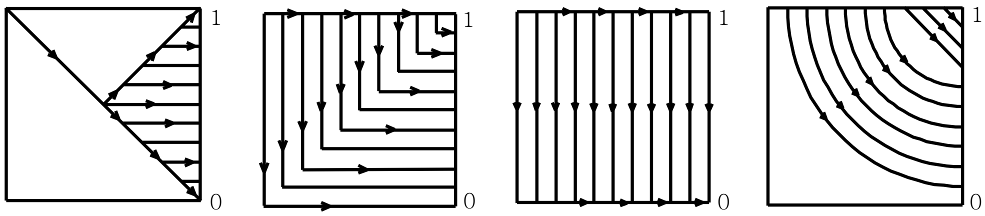
(i) Max-min rule : $\mu_I(\eta, \lambda) = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$

(ii) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

(iii) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

(iv) $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

식 (i)~(iv)의 그래프는 [그림 4]와 같다.



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$ $\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$ $\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$ $\mu_I = 1 \wedge \frac{\lambda}{\eta}$

[그림 4] λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta, \lambda)$의 그래프

정리 4.5 Zadeh의 'compositional rule of inference'

퍼지관계 R가 X에서 U로의 관계이고 A'이 X의 퍼지부분집합이면, A'에 의한 추론값 B'은 R와 A'의 $\max - \min$ 합성으로 주어진다. 즉,

$$B' = A' \circ R$$

이다. 위 식에 의해 $\mu_{B'}(u)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(u) &= \sup_{x \in X} \min\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x, u)\} \\ &= \sup_{x \in X}\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, u)\} \end{aligned}$$

Baldwin이 사용한 $\tau_{(A/A')}$과 I의 합성방법인 Zadeh의 'compositional rule of inference'에 의해 τ_B의 소속함수는 다음과 같다.

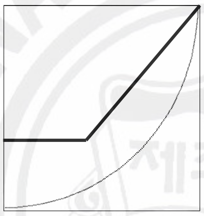
$$\mu_{\tau_B}(\lambda) = \max_{\eta \in [0,1]} \{\mu_{\tau(A/A')}(\eta) \wedge \mu_I(\eta, \lambda)\}$$

정리 4.6 위 정의에 나타난 각 진리함수사상에 대한 추론결과는 다음의 [표 1]과 같다.

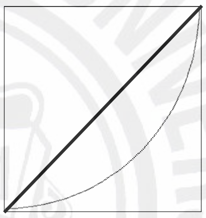
[표 1] 추론결과

식 / $\tau_{(P/P')}$	*abs. true*	*very true*	*true*	*fairly true*	*undecided*	*false*
(i)	*true*				*unknown*	*unknown*
(ii)	*true*	*true*	*true*	*fairly true*	*unknown*	*unknown*
(iii)		*very true*	*true*	*fairly true*	*unknown*	*unknown*
(iv)	*true*	*fairly true*	*fairly true*		*unknown*	*unknown*

위 표의 빈 칸은 결과를 언어변수 *truth*의 언어적 진리값으로 표현하기 어려운 형태로 결과가 나타난 경우이다. 그리고 어두운 부분에 해당하는 몇 가지 경우를 그래프로 표현하여 보면 아래 [그림 5], [그림 6]과 같다.

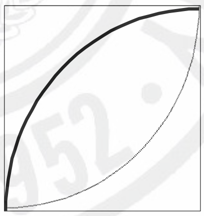


$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$



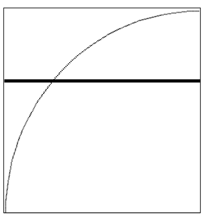
$\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

$\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

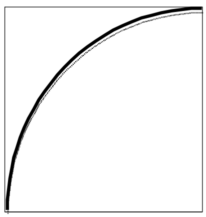


$\mu_I = 1 \wedge \frac{\lambda}{\eta}$

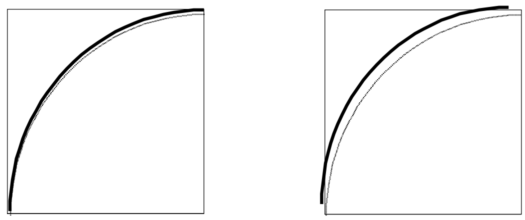
[그림 5] $\tau_{(P/P')} = \textit{very true}$일 때의 $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$의 그래프



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$



$\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$



$\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$ $\qquad$ $\mu_I = 1 \wedge \frac{\lambda}{\eta}$

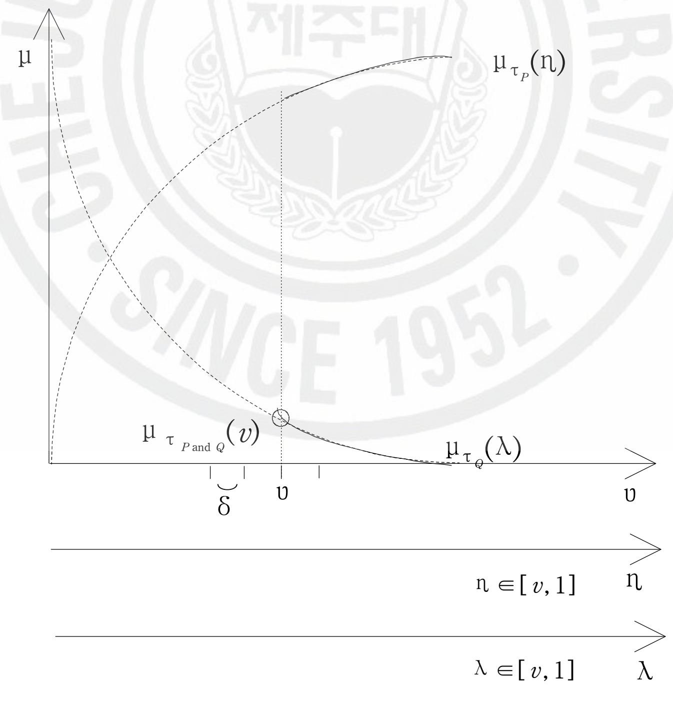
[그림 6] $\tau_{(P/P')} = \textit{fairly true}$일 때의 $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$

5. 퍼지논리에서의 기본연산

5.1. 논리곱

언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 ‘P is τ_P.’와 ‘Q is τ_Q.’의 논리곱은 ‘P is τ_P and Q is $\tau(Q)$.’이고 이것은 ‘P and Q is τ_P and τ_Q.’로 말할 수 있다. 즉, $v(P \text{ and } Q) = \tau_{P \text{ and } Q}$라고 할 때, AND 연산으로 나타내면

$$\mu_{\tau_{P\text{ and }Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \wedge \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$



[그림 7]

[그림 7]로 부터 최대값의 조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \in [v,1]:\lambda = v, \\ \lambda \in [v,1]:\eta = v}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

단, 최대값은 $\lambda = v$인 구간 $[v,1]$에서 η의 값들보다 크고, $\eta = v$인 구간 $[v,1]$에서 λ의 값들보다 크다.

$$\begin{aligned}\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \; & [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \max_{\lambda \in [v,1]}\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee \\ & [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max_{\eta \in [v,1]}\{\mu_{\tau_P}(\eta)\}\}], \quad \forall v \in [0,1]\end{aligned}$$

위의 그림은 특별한 경우에 대하여 설명한 것인데 $\mu_{\tau_P}(\eta)$는 η에 대한 단조증가 함수이고 $\mu_{\tau_Q}(\lambda)$는 λ에 대한 단조감소 함수이다.

$$\max\{\mu_{\tau_P}(\eta)\} = \mu_{\tau_P}(1),$$

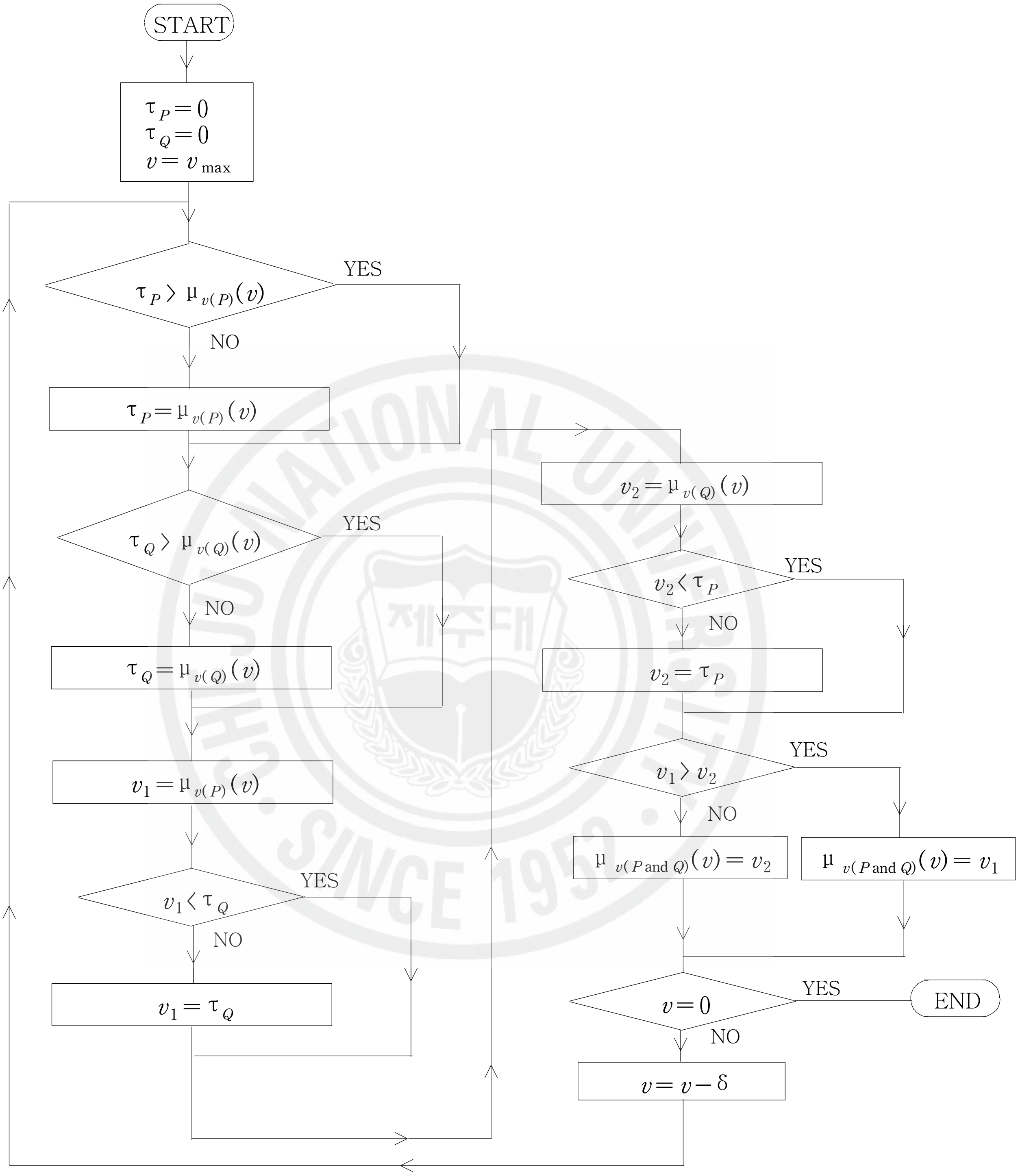
이고

$$\max\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\} = \mu_{\tau_Q}(v)$$

그러므로 이런 경우에 대한 식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

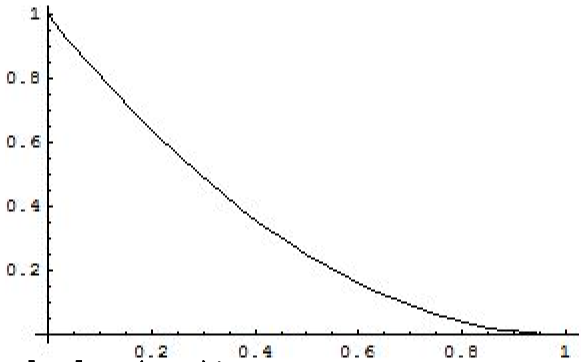
$$\begin{aligned}\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) &= [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \mu_{\tau_Q}(v)\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \mu_{\tau_P}(1)\}] \\ &= \mu_{\tau_Q}(v) \qquad\qquad \forall v \in [0,1]\end{aligned}$$

좀 더 일반적인 경우에서 논리곱에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 논리곱을 매스메티카를 이용하여 나타내면 다음 [그림 8], [그림 9]와 같다.

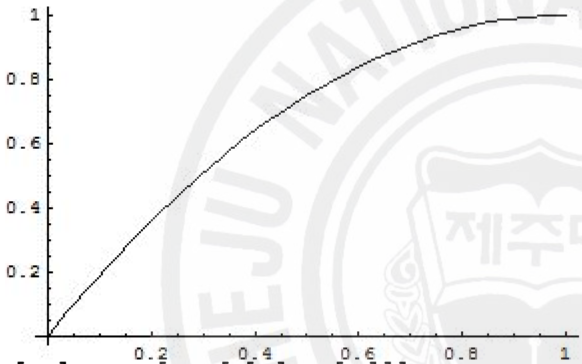


[그림 8] 논리곱에 대한 알고리즘

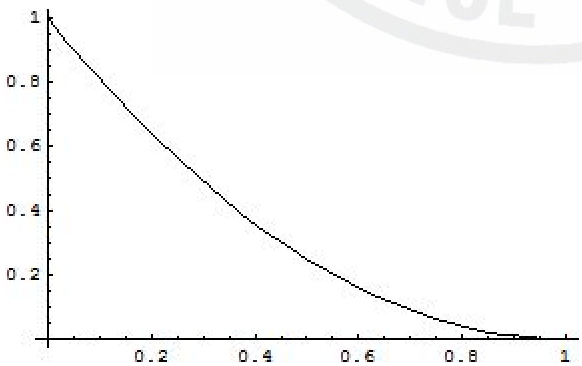
```
f[η_]:=-η^2+1
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```




```
g[λ_]:=-(λ-1)^2+1
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```




```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Min[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[f[v], g[1]],Min[f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```

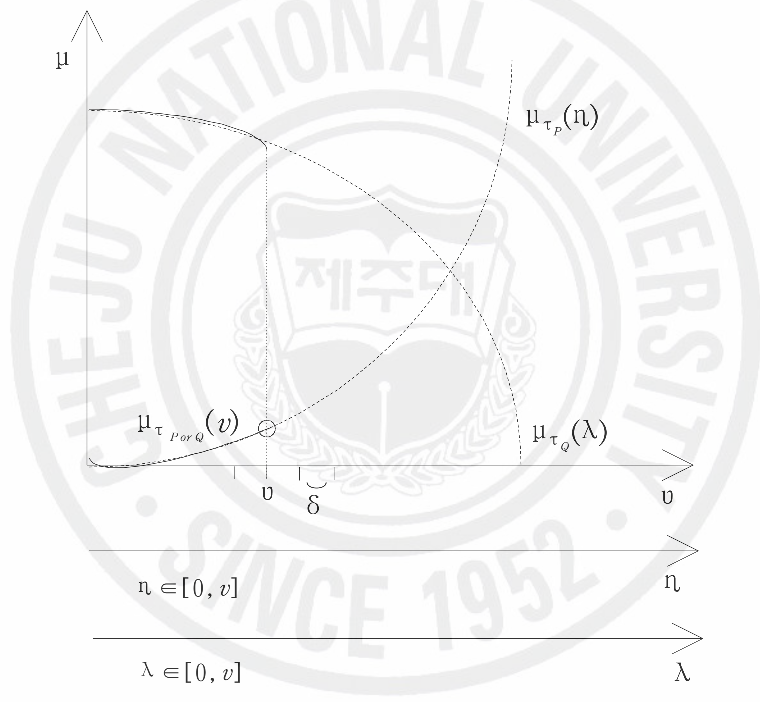


[그림 9]

5.2. 논리합

언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 ‘P is τ_P’와 ‘Q is τ_Q’의 논리합은 ‘P is τ_P or Q is τ_Q’이고 이것은 ‘P or Q is $\tau_P\, or\, \tau_Q$’로 말할 수 있다. 즉, $v(P\, or\, Q) = \tau_{P\, or\, Q}$라고 할 때, OR 연산으로 나타내면

$$\mu_{\tau_{P\,or\,Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$



[그림 10]

[그림 10]으로부터 다음을 알 수 있다.

$$\mu_{\tau_{P\,or\,Q}}(v) = [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \max_{\lambda \in [0,v]}\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee$$
$$[\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max_{\eta \in [0,v]}\{\mu_{\tau_P}(\eta)\}\}], \quad \forall v \in [0,1]$$

여기에서도 논리곱에서와 마찬가지 과정으로 식을 간단히 하면

$$\max\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\} = \mu_{\tau_Q}(1),$$

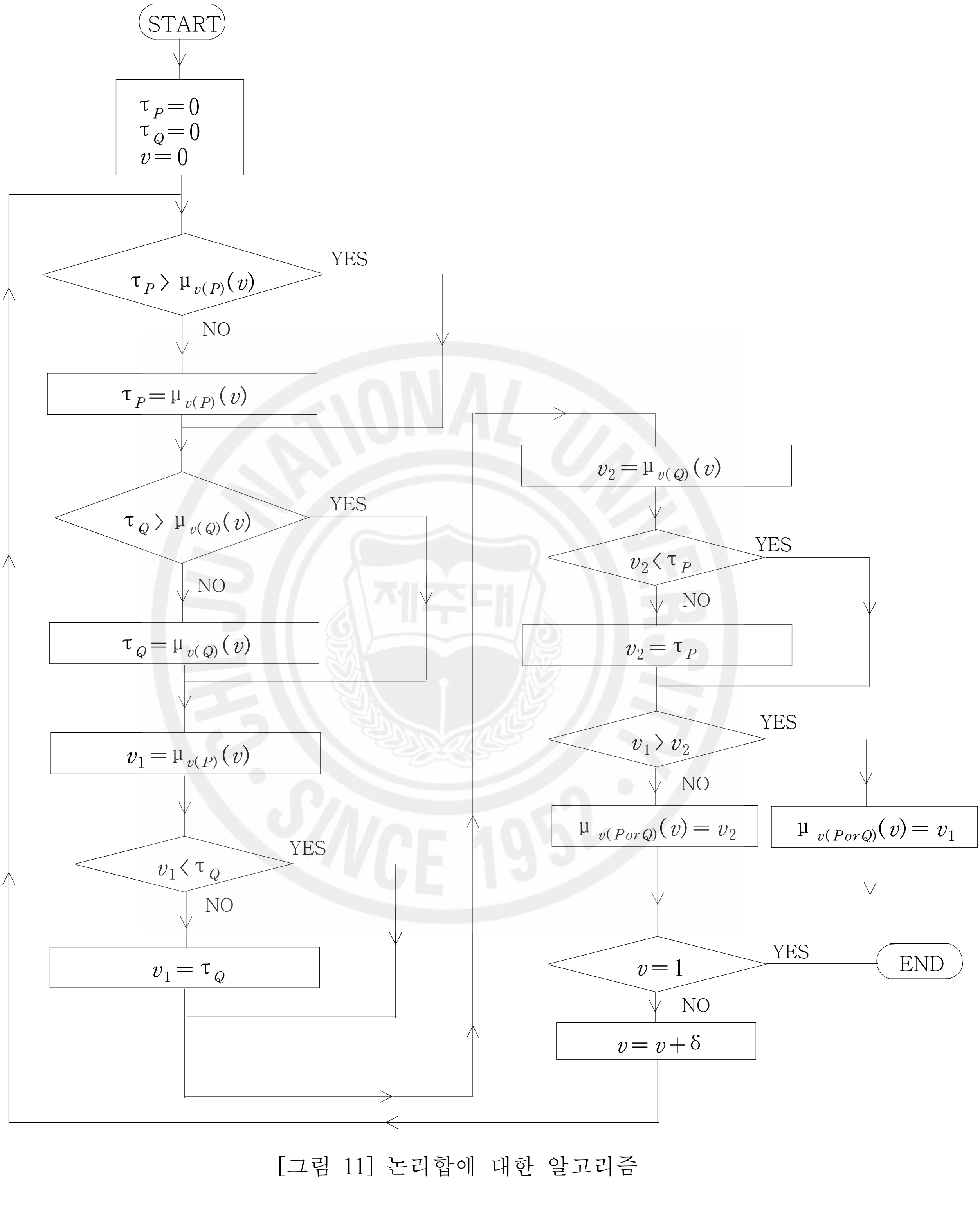
이고

$$\max\{\mu_{\tau(P)}(\eta)\} = \mu_{\tau(P)}(v).$$

그러므로 이런 경우에 대한 식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

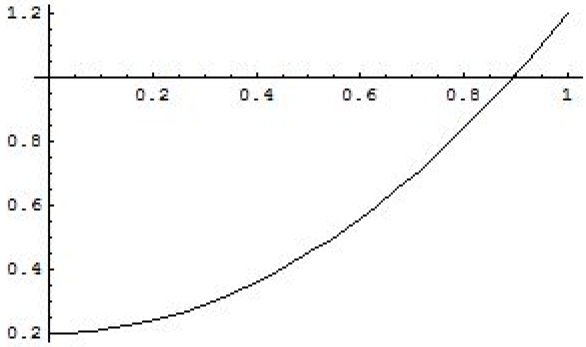
$$\begin{aligned} \mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) &= [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \mu_{\tau_Q}(1)\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \mu_{\tau_P}(v)\}] \\ &= \mu_{\tau_P}(v) \qquad\qquad \forall v \in [0,1] \end{aligned}$$

마찬가지로, 좀 더 일반적인 경우에서 논리합에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 논리합을 매스메티카를 이용하여 나타내면 다음 [그림 11], [그림 12]와 같다.

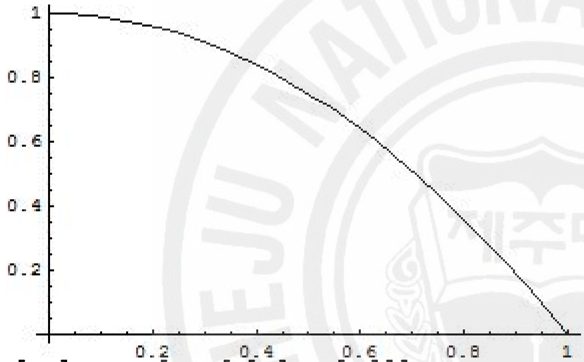


[그림 11] 논리합에 대한 알고리즘

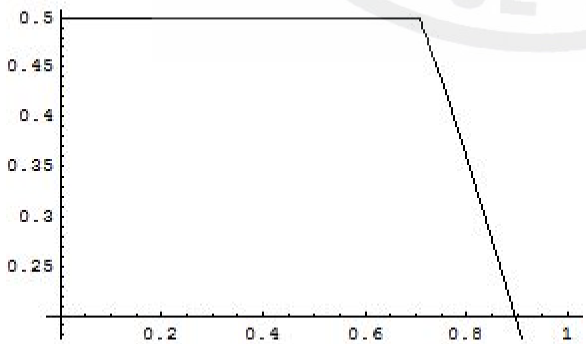
```
f[η_]:=η^2+1/5
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```




```
g[λ_]:=-λ^2 +1
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```




```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Max[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[f[v], g[0]],Min[f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```



[그림 12]

5.3. 암시

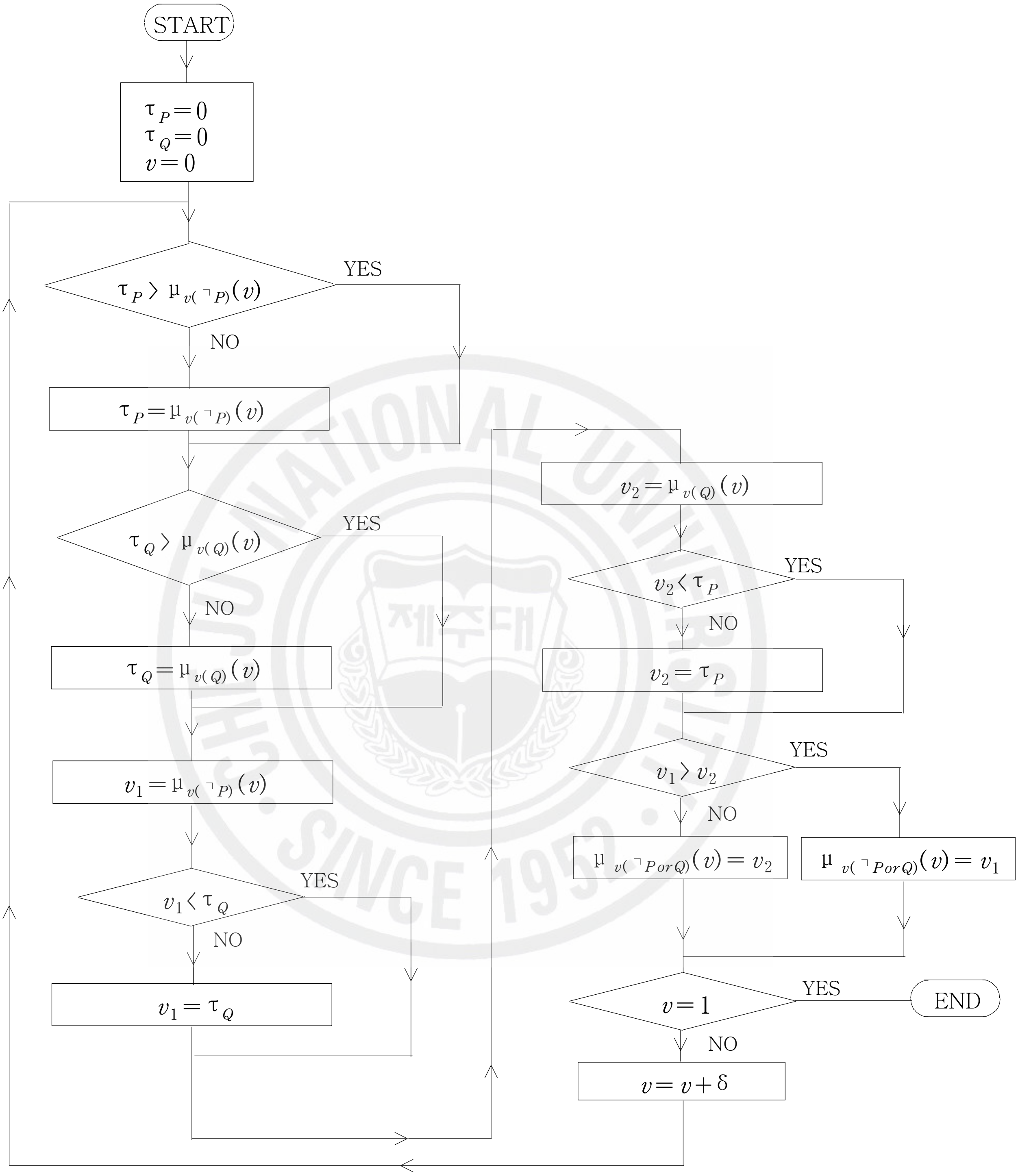
''If P is τ_P then Q is τ_Q'는 '$P \rightarrow Q$ is $\tau_P \rightarrow \tau_Q$'로 생각할 수 있다. 즉,

$$\tau_{P \rightarrow Q} = \tau_{\neg P \vee Q} = \tau_{\neg P} \vee \tau_Q$$

이므로 언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 '$\neg P$ is $\tau_{\neg P}$ or Q is τ_Q'는 '$\neg P$ or Q is $\tau_{\neg P}$ and τ_Q'로 말할 수 있다. 위 식을 OR 연산으로 나타내면

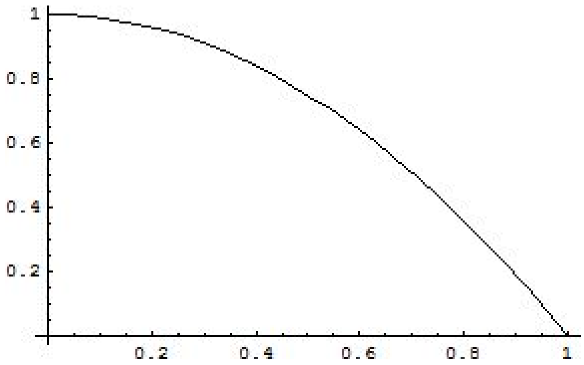
$$\begin{aligned} \mu_{\tau_{\neg P\, or\, Q}}(v) &= \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_{\neg P}}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\} \\ &= [\{\mu_{\tau_{\neg P}}(v) \wedge \max_{\lambda \in [0,v]}\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max_{\eta \in [0,v]}\{\mu_{\tau_{\neg P}}(\eta)\}\}], \\ &\quad \text{단, } \forall v \in [0,1] \end{aligned}$$

마찬가지로, 좀 더 일반적인 경우에서 암시에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 암시를 매스메티카를 이용하여 나타내면 [그림 13], [그림 14]와 같다.

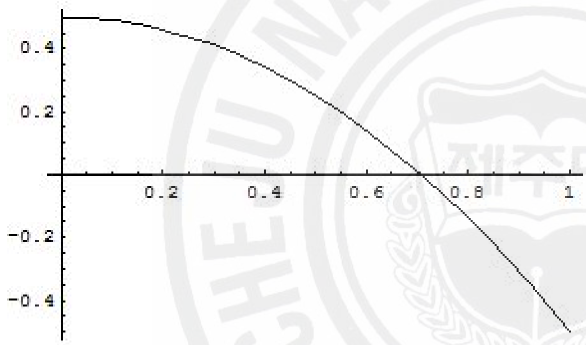


[그림 13] 암시에 대한 알고리즘

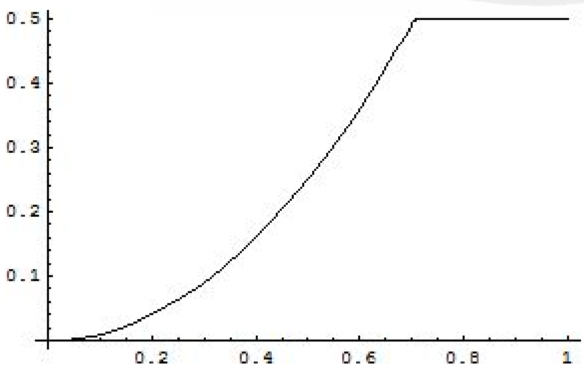
```
f[η_]:=η^2 +1
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```




```
g[λ_]:=-λ^2 +0.5
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```




```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Max[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[1-f[v], g[0]],Min[1-f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```



[그림 14]

참 고 문 헌

[1] 송재충, Normal fuzzy probability and exponential fuzzy probability for various fuzzy numbers, 제주대학교 박사학위논문, 2005

[2] 채 석 외, 퍼지이론과 제어, 청문각, 2004

[3] J. F. Baldwin, Fuzzy logic and approximate reasoning for mixed input arguments, Research Report EM/FS4, Engineering Mathematics Dept., University of Bristol(1978)

[4] J. F. Baldwin, "Fuzzy logic and fuzzy reasoning", Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 11, 1979

[5] J. F. Baldwin and N. C. F. Guild, "Feasible algorithms for approximate reasoning using fuzzy logic", FSS, Vol. 3, (1980) 225-251

[6] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and Systems: Theory and Appli- cation, Academic Press, London, 1980

[7] A. Kaufmann, Introduction to the theory of fuzzy subsets, Academic Press, New York, 1975

[8] A. Kaufmann and M. M. Gupta, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, North-Holland, 1988

[9] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I", Information Sciences, Vol 8, (1975) 199-249

[10] L.A.Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex-systems and decision processes", IEEE Trans. Systems, Man, and Cyber- netics, Vol. SMC-3 NO, 1, (1973) 28-44

[11] L. A. Zadeh, fuzzy sets, Information and Control 8, No. 338, (1965) 338-353

[12] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer-Nijh off Publishing, 1985

<Abstract>

Function and operation on fuzzy logic

In fuzzy set theory, we give some examples and calculate some operations (addition, subtraction, multiplication and division) for various two fuzzy sets. The results of addition and subtraction of two quadratic fuzzy numbers and two trigonometric fuzzy numbers become a quadratic fuzzy number and trigonometric fuzzy number, but the results of multiplication and division may not be a quadratic fuzzy number and a trigonometric fuzzy number, respectively. But the results of multiplication and division of two trigonometric fuzzy numbers are expressed by trigonometric function. And we calculate the operations of two fuzzy numbers through an actual examples.

We define the fuzzy proposition which cannot well define true or not and give some propositions relating their truth value in truth space. Then we can find the graphs for the specification functions using mathematica and the algorithms for the general case.

감사의 글

2004년도에 수학과를 졸업하자마자 일반대학원 수학과에 입학하고서 한학기만에 그 길을 접고 다음 해에 교육대학원 수학교육과에 입학하던 때가 생각납니다. 과연 나의 선택이 잘 한 일일까 궁금해 하면서도 후회하고 싶지 않았고 그러기 위해 열심히 노력하리라 다짐했는데 2년 반이 지난 지금 그 다짐에 과연 내가 당당하게 마주할 수 있는지 조심스럽게 자문해보면서 아쉬움이 살짝 밀려옵니다. 하지만 지금이 끝은 아니기에 대단한 논문은 아니지만 이 논문을 계기로 더 노력하고 최선을 다하는 제가 될 것을 약속하며 도움을 주신 분들에게 감사의 말을 전하고자 합니다.

먼저, 지도교수님이신 윤용식 교수님께 감사드립니다. 늘 모자라고 나태해지는 저에게 격려로서 힘을 주시고 충고로서 반성하게 해 주신 점 정말 감사드립니다. 교수님께 부끄럽지 않은 제자가 되도록 노력하겠습니다.

윤용식 교수님과 함께 제가 이 논문을 쓰는데 함께 애써 주신 박진원 교수님께도 더불어 감사 인사를 드립니다. 그리고 제가 학부 때부터 수학을 하는데 후회하지 않게 해주신 양영오 교수님, 방은숙 교수님, 송석준 교수님, 정승달 교수님, 유상욱 교수님, 그리고 교육대학원에 입학해서 가르침을 주신 현진오 교수님, 고봉수 교수님, 고윤희 교수님, 양성호 교수님, 김도현 교수님께도 감사드립니다. 또한 논문을 준비하고 완성하는 과정에서 논문 연구에 함께 하셨고 모자란 저에게 많은 도움과 격려를 주셨던 강상진 선생님, 강경훈 선생님께도 감사하다는 인사를 전하고 싶습니다.

대학교 시절부터 현재 교육대학원까지 같은 길을 함께하고 있는 영심이, 먼저 논문을 완성해서 얻은 경험을 바탕으로 격려를 아끼지 않았던 민주, 효정, 금란이 그 외에 저에게 힘을 실어 준 경은, 지은, 진숙, 내인, 현아, 아름, 정은, 선영, 주연, 진희, 민선이를 비롯한 소중한 친구들이 있었기에 제가 힘을 낼 수 있었습니다. 항상 고마운 마음 간직하고 있습니다. 또한, 이런저런 인연으로 만나 날 언니로 잘 따라주는 예쁜 동생들 한별이, ej의화, 혜린이 그리고 저와 함께 교육대학원 5학기를 함께 한 대학원 동기 선생님들 역시 너무 고맙고 제가 수의예과 조교를 마치면서 후임으로 와서 제가 필요 할 때마다 주저하지 않고 도움을 준 김경미 선생님, 그 외에 고은이 선생님, 김아름 선생님, 현미숙 선생님과 김지혜 선생님, 김선희 선생님, 이충선 선생님을 비롯한 05~06년도 전형반 선생님들 모두모두 감사합니다.

지난 5월 뒤늦게 아라중에서 교생실습을 하면서 만난 유경언니를 비롯한 여러 선후배 동료 교생선생님들도 논문 발표 전까지 격려의 말씀을 전해 주신 점 감사드립니다. 한

달 동안 정도 많이 들었고 짧은 기간이지만 정말 반갑고 즐거웠습니다.

마지막으로, 직접 말로써 표현은 못 하시지만 마음으로나마 저를 믿고 걱정해 주시는 부모님과 동생 미현이, 현재 강원도에서 군복무로 고생하는 막내 진석이에게도 너무 고맙고 부끄럽지 않은 딸, 언니, 누나가 되겠다고 약속하며 이 논문을 드립니다.

2007. 06.

임 소 현