碩士學位論文

피보나치數列과 黃金比에 관한 研究

指導教授 梁 永 五

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

吳 時 鳳

1999年 8月

피보나치 數列과 黃金比에 관한 研究

指導敎授 梁 永 五

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1999年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 吳 時 鳳

吳時鳳의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1999年 7月 日

審查委員長 印

審 查 委 員 印

審 查 委 員 印

<抄 錄>

피보나치 數列과 黃金比에 관한 研究

吳 時 鳳

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 梁 永 五

중세의 수학에서 간단하면서도 심오한 이론을 가진 피보나치 수열은 현행 고등학교 교육과정에서는 다뤄지지 않고 있다. 다만 일부 교과서에서 단편적으로 소개되고 있을 뿐이다.

본 논문에서는 첫째, 피보나치 수열의 일반적 성질과, 피보나치 수열을 일반화시켜 일반항을 새롭게 정의하여 체계적으로 정리·증명하였다. 둘째, 황금분할과 황금비의 개념을 정의하고, 황금비에 대한 응용 분야의 사례들을 자연 현상 및 생활 주변에서 조사·분석하였다.

이 논문은 피보나치 수열에 관해 체계적이고 지속적으로 연구하는 사람과 수학 교사들을 위한 지침서 및 교수·학습 자료로 제시하는 데 의의가 있다.

목 차

I. 서 론

수학에서는 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 문제가 가장 좋은 문제이며 수학의 아름다움을 추구하는 대상이 된다. 중세의 수학에서 일상생활의 토끼번식 문제에서 파생된 피보나치 수열이 그 대표적인 예이다. 그럼에도 불구하고 현재 우리 나라에는 피보나치 수열과 관련된 연구자료가 그리 많지 않다. 또한 고등학교 수학 교과서에서 사고력과 문제 해결 능력을 신장시키기 위하여 피보나치 수열이 연구과제 또는 수학산책 난에 단편적으로 소개되고 있는 실정이다.

피보나치(Leonadro Fibonacci) 수열의 개념은 1202년에 간행된 그의 유명한 저서 《산반서(算盤書, Liber abaci)》의 문제에서 파생된 것인데, '피보나치 수열'이란 용어는 19세기 프랑스 수학자 에두아르루카가 처음으로 사용했다. 《산반서》에 제시된 문제는 다음과 같다.

"새로 태어난 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 한 달이면 성장해서 어미가 되고, 짝을 지을 수 있어서 두 번째 달 말에는 암컷이 다른 한 쌍의 토끼를 낳을 수 있다. (단, 절대로 죽지 않는다고 가정하자.) 그리고 두 번째 달부터는 암컷은 항상 새로운 한 쌍의 토끼를 계속해서 낳는다고 가정할 때, 일 년이 되면 한 쌍의 토끼로부터 몇 쌍의 토끼가 생기겠는가?"

위 문제에서 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, ……, x, y, x+y,……가 되는데 유럽에 알려진 최초의 점화수열로서 각 수는 앞선 두 항들의 합이다.

'피보나치 수열'에 대해서 과학자들은 자연에서 해바라기 꽃술의 나선, 솔방울, 수펄의 혈통(족보 연구)과 같은 예들을 발견하기 시작했고 달팽이 껍데기, 줄기 위의 잎눈의 배열, 동물 뿔 등과 관련된 등각나선을 발견하기도 했다. 이 밖에도 고대 건축·예술과 주식 시장 등 실생활에도 놀랄만치 많

은 응용 분야를 가지고 있다. 우리는 나중에 이와 관련된 대단히 흥미 있는 성질들을 살펴보게 될 것이다.

피보나치 수열의 많은 성질들 중에서 몇 가지를 소개하면 다음과 같다.

(단, m과 n은 양의 정수라고 하자.)

① 피보나치 수열의 일반항 u_n (Binet의 공식)은

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{단,} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

② $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

③ u_n은 u_{mn}을 나눈다.

④ $\gcd(u_n, u_m) = u_{\gcd(m,n)}$

⑤ $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^{n-1}$

⑥ $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$

⑦ 모든 자연수는 서로 다른 피보나치 수들의 합으로 쓸 수 있다.

⑧ 4개의 연속하는 피보나치 수들의 곱은 피타고라스 삼각형의 넓이가 된다.

이제 우리는 피보나치 수들과 피보나치 황금비들이 세상의 모든 곳에 실제로 잠복하고 있으면서 언젠가 발견되기를 기다리고 있는 것들을 이 논문을 통하여 조금이나마 맛볼 수 있을 것이다.

이 논문에서는 피보나치 수열의 역사적 배경을 서술하고, 피보나치 수열의 성질들을 체계적으로 정리·증명하고, 이 수열이 자연 현상이나 예술, 문화 분야에서 어떻게 나타나고 있는가를 조사·분석하고자 한다.

II. 고등학교 교과내용 분석

1. 교과 단원

고등학교 수학 I 교과서와 참고서를 중심으로 살펴본 바에 의하면, 수열과 순서도, 수학적 귀납법과 순서도, 수학적 귀납법과 점화식 단원 또는 수열과 순서도 단원의 수학 산책에서 소개되고 있다. 피보나치 수열의 정의와 특성, 피보나치 수열과 연분수, 피보나치 수열의 연속하는 항들의 극한값과 황금비, 컴퓨터 베이직 언어를 이용하여 피보나치 수열의 제31항 구하기, 응용 등에 관하여 단편적인 내용 소개나 연구 과제, 또는 문제로 제시되고 있는 실정이다.

2. 피보나치 수열의 교과내용

1) 피보나치 수열과 황금비

점화식 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(a_1=0,\ a_2=1)$ 처럼 각 항이 앞의 두 항의 합으로 표현되는 수열을 피보나치 수열이라고 한다. 즉, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$ 이다.

이 피보나치 수열은 식물의 잎·가지·줄기의 배열, 동물의 생식 등에서 나타나는 재미있는 수열이다. 그런데 피보나치 수열은 황금비와도 아주 밀접한 연관을 가지고 있다. 즉, 일련의 연속적인 피보나치 수열로 이루어진 비는 황금비의 값을 중심으로 진동하고 있고, 피보나치 수열의 극한값은 바로 황금비(1.61803398…)이다.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \cdots$$

$$0, 1, 2, 1.5, 1.6, 1.625, 1.6153, 1.619, \cdots$$

황금비, 황금사각형, 등각나선이 나타나는 곳이면 어느 곳이나 피보나치 수열을 볼 수가 있다.

(수학적 귀납법과 순서도, <수리영역 수학 I >, 디딤돌, 1998, 47p.)

2) 피보나치 수열과 연분수

> 귀납적으로
>
> $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ \cdots,\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n\ \ (n \geq 2)$
>
> 과 같이 정의되는 수열을 피보나치 수열이라고 한다.

이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci, 1180~1250?)가 '번식하는 토끼의 쌍의 수'에 대한 문제를 제기하면서 비롯된 수열의 처음 몇 항을 열거하면 다음과 같다.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$$

그런데 피보나치 수열의 인접한 두 항의 사이의 비의 값 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$은 다음과 같이 분수의 모양으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1},\ \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1}$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}},$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

$\cdots$

위와 같은 모양으로 나타내어지는 분수를 연분수라고 한다.

피보나치 수열의 인접한 두 항 사이의 비의 값

$$\frac{F_2}{F_1},\ \frac{F_3}{F_2},\ \frac{F_4}{F_3},\ \frac{F_5}{F_4},\ \frac{F_6}{F_5},\ \cdots$$

를 모두 연분수로 나타낼 때, 분모는 1이 되며, 이러한 성질은 언제나 성립한다.

[연구 과제]

수학적 귀납법을 이용하여 피보나치 수열의 두 인접한 항 사이의 비의 값 $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$은 분모가 모두 1인 연분수로 나타내어짐을 증명하여라. 또, n이 점점 커짐에 따라 $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$은 어떤 수에 가까워지는지 말하여라.

(조승제, 수열과 순서도, 재능교육, 1995, 72p.)

3) 피보나치 수열의 귀납적 정의

① 수열 $\{a_n\}$을 a_1과 이웃하는 항 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 또는 a_1, a_2와 이웃하는 항 a_{n+2}, a_{n+1}, a_n 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 한다. 이때, 다음 항을 정하는 규칙인 등식을 점화식이라 한다.

② 관찰, 실험 등을 통하여 a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$를 차례로 구하여 보고 일반적인 관계를 추론해 나간다.

[문제] 어미 토끼 암수 한 쌍이 있다. 이 토끼는 1개월 후부터 매월 한 달에 암수 한 쌍의 새끼를 낳고, 태어난 새끼 토끼는 생후 1개월이 되면 어미 토끼가 되어 생후 2개월이 될 때부터 매월 한 쌍씩의 새끼를 낳는다고 한다. 지금부터 n개월 후의 토끼의 수를 a_n쌍이라고 했을 때, 다음 중 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의로 나타내면? (단, 질병등으로 죽는 일은 없다)

[풀이] 어미 토끼는 1개월 후부터 매월 한 달에 암수 한 쌍씩 새끼를 낳고, 새기 토끼는 2개월이 될 때부터 매월 한 쌍씩의 새끼를 낳으므로 실제로 매월 태어나는 토끼 쌍의 수를 구해 보면 다음과 같다.

1개월 후 : $a_1 = 2$,

2개월 후 : $a_2 = 3$

3개월 후 : $a_3 = 5 = 2 + 3 = a_1 + a_2$

4개월 후 : $a_4=8=3+5=a_2+a_3$

………

따라서 앞에 있는 두 항의 합은 그 뒤의 항이 됨을 추측할 수 있다. 결국, $n+2$ 개월 후의 토끼의 쌍의 수 a_{n+2}는 $n+1$ 개월째의 토끼 쌍의 수 a_n+1 과 $n+1$ 개월째 태어난 지 1개월 이상된 토끼 a_n쌍이 $n+2$개월째 낳은 새끼 a_n쌍의 합과 같다.

$$\therefore\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

[별해] n개월 후의 a_n쌍 중에 새로 태어난 쌍의 수를 b_n이라 하자. $n+1$개월 후에는 (a_n-b_n)쌍은 새끼를 낳고 b_n쌍은 새끼를 낳지 못하므로 전체는

$2(a_n-b_n)+b_n=a_{n+1}$ ………㉠

$n+2$개월 후에는 새로 태어난 (a_n-b_n) 쌍은 새끼를 낳지 못하고 $(a_n-b_n)+b_n$ 쌍은 새끼를 낳을 수 있으므로

$(a_n-b_n)+2a_n=a_{n+2}$ ………㉡

㉠, ㉡에서 b_n을 소거하면 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

(수학적 귀납법과 순서도, <필수수학 I >, 중앙교육진흥연구소, 1995, 61p.)

4) 피보나치 수열의 성질

이탈리아의 상인이며 수학자였던 피보나치는 다음과 같은 수열을 발견하였다.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$$

여기서 13 다음의 수가 무엇인지 찾을 수 있는가?(13 다음의 수는 $8+13=21$임을 알 수 있다.) 한편, 이 수열의 점화식은 $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n\ (n\geq 2)$이다.

이제, 피보나치 수열과 관련이 있는 현상을 찾아보자.

① 모든 자연수는 다음과 같이 1과 2의 합으로 나타낼 수 있다. 이때, 나타내는 방법의 수는 피보나치 수열을 이룬다.

1 : 1 ………………………………………………………(1가지)

2 : 2, 1+1 ……………………………………………………(2가지)

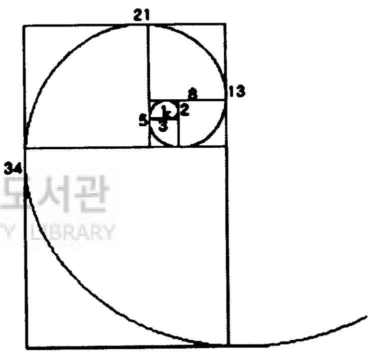
3 : 2+1, 1+2, 1+1+1 ……………………………………(3가지)

4 : 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1 ……………(5가지)

5 : 2+2+1, 2+1+2, 1+2+2, 2+1+1+1, 1+2+1+1, 1+1+2+1, 1+1+1+2, 1+1+1+1+1……………………………………………(8가지)

② 다음은 앵무조개(Nautilus)의 단면을 그림으로 나타낸 것인데, 여기에서도 피보나치 수열을 찾아볼 수 있다.

(박한식 외 5인, 수열과 순서도, <수학 I >, 지학사, 1996, 74p.)



[그림 1] 앵무조개의 단면

③ $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$

④ $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ $(n=1, 2, \cdots)$

⑤ a_n 과 a_{n+1}은 서로 소이다.

또한, 우리의 주변에서 자주 접하게 되는 소용돌이 무늬에서 피보나치 수열의 이웃하는 두 항이 흔히 발견되기도 한다. 예를 들어 솔방울에서는 소용돌이가 5, 8개 순 또는 8, 13개 순으로 배열된 경우가 많고, 해바라기 꽃의 소용돌이에도 34, 55개 순의 배열이 들어 있는 것으로 알려져 있다.
(양승갑외 2인, 수열과 순서도, <수학 I>, 금성교과서(주), 1995, 76~77p.))

5) 피보나치 수열의 항

[문제] 갓 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 있다. 이 토끼는 태어나서 1개월만 지나면 성장해서 어미가 되고, 그 후 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다.

이 새끼 토끼도 2개월이 되면 마찬가지로 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다고 한다. 이와 같이 하면 30개월 후 토끼는 몇 쌍이 되는가? 이 토끼의 쌍의 수를 매월 계산하여 보면 다음과 같은 수열을 얻는다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

이 수열을 피보나치 수열이라고 한다. 일반항을 a_n이라 할 때,

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \ (n=1,2,\cdots),\ \ a_1=1,\ \ a_2=1 \quad \cdots\cdots(1)$$

인 관계를 만족하도록 되어 있다.

컴퓨터를 이용하여 피보나치 수열의 제31항을 구해 보자. 다음은 베이직 언어를 사용하여 만든 프로그램이다.


```
10  n=2                ←두 개의 항으로 시작한다.
20  a=1                ←첫째 항이 1
30  b=1                ←둘째 항이 1
40  n=n+2              ←2개의 항씩 계산하므로
50  a=a+b              ←앞의 두 항을 더한다(홀수 번째 항).
60  b=a+b              ←앞의 두 항을 더한다(짝수 번째 항).
70  IF n <32 GOTO 40    ← n <32이면 40으로 간다.
80  PRINT a      ←n=32이면 a를 인쇄(a는 31번째 항, b는 32번째 항)
RUN   1346269
```

[문제] 피보나치 수열의 제40항을 구해보자.

n=40일 때, a=102334155

(양승갑외 2인, 수열과 순서도, <수학 I>, 금성교과서(주), 1995, 76~77p.)

III. 피보나치의 생애와 업적

1. 피보나치의 생애

피보나치(Leonardo Pisano 본명은 Leonardo Fibonacci, 1170 피사(?)~1240이후)는 피사 상인인 아버지 굴리엘모의 아들로 피사의 상업 중심지에서 태어났다.

그의 아버지는 그 곳에서 상업과 관련된 일에 종사하고 있었다. 그 당시의 이탈리아의 큰 상인들은 지중해 연안의 여러 곳에 무역상을 두고 있었다. 소년 시절, 레오나드로는 그의 아버지가 관세 지배인(상인사회의 영사, 즉 주임 행정관으로 임명됨)으로 근무했던, 아프리카의 북부 연안에 위치한 보우기(Bougie, 지금의 알제리아 베자이아)에서 교육을 받았고 함께 생활하게 되었다. 아버지의 직업 양향을 받은 레오나드로는 소년 시절부터 산술에 흥미를 느끼기 시작했다. 그 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등으로 여행을 하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하게 되었다. 인도-아라비아의 계산술의 실용적 우수성을 확신하게 된 피보나치는 1202년에 고향으로 돌아와서 마침내 그의 유명한 저서 《산반서(Liber abaci)》를 출간하였다.

그는 《산반서(Liber abaci)》 이 외에도 다른 책들을 썼다. 1220년에 출간된 피보나치의 《실용기하학(Practica geometriae)》 은 유클리드적 엄밀함과 약간의 독창성을 가지고 능숙하게 기하학과 삼각법을 다룬 방대한 자료집이다. 1225년경에는 《제곱근서(Liber quadratorum)》 가 나왔다. 부정해석학에 대한 매우 독창적인 이론을 제시하고 있는 저서로서, 피보나치로 하여금 이 분야에서 디오판투스와 페르마 사이의 가장 뛰어난 수학자로 명성을 떨치게 됐다. 그의 저서들은 모두 당대 학자들의 능력을 훨씬 뛰어넘는 작품이었다.

피보나치의 수학적 재능은 학문의 후원자였던 시칠리아 노르망디 왕국의 황제 프레더릭 2세(Frederick Ⅱ)의 관심을 끌게 되었는데, 피보나치는 궁정에서 열린 어떤 수학 경시에 참여할 것을 초청 받았다. 황제의 수행원 중

한 사람인 팔레르모 존(Palermo. John)에 의해서 세 가지 문제가 출제되었다. 피보나치는 그 세 문제를 모두 풀었는데, 그것은 그로 하여금 상당한 존경을 얻도록 만들었다. 첫 번째 문제는 x^2+5, x^2-5가 모두 유리수의 제곱이 되는 유리수 x를 구하는 것이었다. 피보나치는 $x=\frac{41}{12}$로 썼는데, 이는 $(\frac{41}{12})^2+5=(\frac{49}{12})^2$, $(\frac{41}{12})^2-5=(\frac{31}{12})^2$이므로 정확한 답이었다. 이 해는 《제곱근서》에 나온다. 두 번째 문제는 3차 방정식 $x^3+2x^2+10x=20$(현대 대수표기법으로 바꾼 표현)의 답을 구하는 것이었다. 피보나치는 이 방정식의 해가 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 형태의 무리수에 의하여 표현될 수 없음을 증명하고자 했는데, 이는 곧 그것의 어떤 해도 자와 컴퍼스를 가지고 작도될 수 없음을 보이고자 한 것이었다. 그런 다음 그는 근사해법인 시행착오법을 사용해서 풀었다. 그의 해 $1^{\cdot}22^{I}7^{II}42^{III}33^{IV}4^{V}40^{VI}$은 60진법 분수(60을 밑으로 하는 바빌로니아 수체계를 사용한 분수)로 $1+22/60+7/3,600+42/216,000+\cdots$인데, 근대 십진수(1.3688081075)로 바꿀 때 소수점 이하 9번째까지 정확한 값이다. 이 문제들에 대한 그의 해는 창의력과 정확성의 결합으로 이루어진 것이었다. 이 답이 피보나치의 《꽃, Flos》 이라는 이름이 붙은 책에 나오는데 거기에는 어떤 부수적인 논의도 없이 그냥 답만 나와서 다소의 의문을 불러 일으켰다.

피보나치는 때때로 그의 작품에 'Leonardo Bigollo'로 서명을 했다. 그런데 'bigollo'에는 '여행자(traveler)', '얼간이(blockhead)'라는 뜻이 있다. 이와 같이 서명하게 된 이유는 피보나치 자신이 실제로 여행을 즐긴 데서 비롯된 의미일 것이다. 그러나 어떤 학자들은, 그와 같은 시대의 많은 사람들은 그가 새로운 수에 관심을 가졌기 때문에 그를 '얼간이'로 간주했을 것이므로, 그와 같이 서명하기를 즐겼다고 한다. 그리고 그는 얼간이도 무엇인가를 성취할 수 있다는 것을 비판자들에게 보여주는 것을 즐거워했다.

레오나르도는 몇 년 동안 황제 및 그의 학자들과 문제를 교환하면서 서신왕래를 했으며, 황제에게 《제곱수에 대한 책 Liber quadratorum》 (1225)을 헌정했다. 또한 1228년 그는 《산반서》를 수정하여 황제의 수석학자 미

하엘 스코트에게 헌정했다. 그날 이후 1240년까지 그에 대해 알려진 것은 전혀 없다. 피사시는 시에 대한 봉사의 대가로 수당과 함께 연금으로 20피사 파운드를 수여했다. 레오나르도의 사망한 해도 전혀 얼려지지 않았다. 힌두 아라비아 숫자의 사용을 확산시킨 역할을 제외하면 그가 수학에 미친 공헌은 대체로 잊혀져왔다. 그의 이름은《산반서》의 문제에서 파생된 피보나치 수열 때문에 근대 수학자들에게 알려졌다.

피보나치는 그와 동시대의 수학자가 적었기 때문에 실제 업적보다 더 위대하게 보인다는 주장이 있었다. 13세기에 재능 있는 수학자가 별로 많지 않았다는 것은 사실이다. 피보나치 다음으로는 동시대의 인물로서 요르다누스 네모라리우스(Jordanus Nemorarius)가 있었다. 그런데 그가 1222년 급격히 팽창한 도미닉수도회의 제2대 총회장으로 선출된 독일의 수도사 요르다누스 삭소(Jordanus Saxo)와 동일 인물로 간주되기도 하는데 이는 십중팔구 잘못 알려진 것일 것이다. 그는 산술, 대수, 기하학, 천문학, 정역학(靜力學) 등에 관한 다양한 저술을 하였다. 물론 이 장황한 저작들이 한때 상당한 명성을 얻기는 했지만, 오늘날 관점에서 보면 대부분 자명한 내용으로 되어 있다. 그럼에도 불구하고 네모라리우스는 일반적인 수를 표현하는데 문자를 폭넓게 이용한 최초의 인물이었다. 그러나 네모라리우스의 이 방법은 피보나치가 그것을 꼭 한번 사용했을 뿐이다. 이 외에 후학들에게 큰 영향을 주지는 못했다.

'피보나치 수열'에 심취한 사람들은 1963년 호갓(Verner Hoggatt) 박사를 중심으로 피보나치 협회(Fibonacci Association)를 창설하고, 계간지《피보나치(The Fibonacci Quarterly)》를 간행하기 시작했다. 처음 3년 동안 이 잡지에는 피보나치 수열 분야에 대한 연구 논문이 100편 가까이 발표되었다. 1968년에는 많은 양의 밀린 원고들을 소화해 내기 위한 필사적인 노력으로 세 권의 단행본을 추가로 간행했다. 이 열광적인 활동은 줄지 않고 계속되고 있다.

2. 피보나치의 업적

레오나르도 피보나치(Leonardo Fibonacci)는 1202년《산반서 (算盤書, Liber abaci)》를 저술하였고, 1228년 이를 기초로 개정·증보하여 《산반서》를 간행하였다. 이 책은 인도·아라비아식 기수법(記數法)·계산법을 비롯하여 급수(級數)와 부정방정식(不定方程式)까지 다루고 있으며, 유럽 각국에서 널리 읽혀 수학발전에 큰 영향을 끼쳤다. 말에 의한 기호를 사용하지 않은 대수학(代數學)은 당시 수준을 초월한 착상이어서 15~16세기의 수학자들을 크게 도운 셈이 되었다. 1225년에는 신성 로마 제국 프리드리히 2세의 도전을 받아 수학의 시합을 하여 2차방정식과 3차방정식의 근사해(近似解)를 구했다. 이 밖에 기하학과 수론(數論)에 관한 저서도 있다.

1220년 기하학 요약논문인 《기하학 연습 Practica geometriae》을 펴냈는데, 에우클레이데스의 《기하학 원본 Elements》과《나눗셈에 대하여 On Divisions》를 기초로 한 정리들이 8장에 걸쳐 담겨 있다.

또한 레오나르도는 몇 년 동안 황제 및 그의 학자들과 문제를 교환하면서 서신왕래를 했으며, 황제에게《제곱수에 대한 책 Liber quadratorum》(1225)을 헌정했다. 2차(제곱수를 포함하는)디오판토스 방정식에 주력한《제곱수에 대한 책》은 그의 걸작품으로, 체계적으로 정돈된 정리들을 모은 것이다. 이중 많은 수가 그가 발견한 것이었고 자신만의 증명방법으로 일반해를 얻기도 했다. 가장 창의로운 연구는 합동수(주어진 수로 나눌 때 나머지가 같은 수)에 관한 것이었다. 그는 제곱수에 더하거나 빼어 제곱수가 되는 수를 찾는 독자적인 해를 연구했다. x^2+y^2과 x^2-y^2이 둘 다 제곱수가 될 수 없다는 그의 주장은 3변이 모두 유리수로 된 직각3각형 면적을 구하는 데 매우 중요하다. 《산반서》가 더 영향력 있고 다루는 범위가 넓지만, 《제곱수에 대한 책》만으로도 디오판토스와 17세기 프랑스의 수학자 피에르 드 페르마 사이에서 정수론에 가장 크게 기여한 것으로 평가받고 있다.

1) 《산반서》의 내용

《산반서 (算盤書, Liber abaci)》는 1228년에 재판이 나왔는데, 우리에게도 잘 알려진 책이다. 이 저작은 산술과 초등대수에 관하여 쓴 것이다. 비록 독립적인 연구이긴 하지만 알. 화리즈미와 아부. 카밀(Abu Kamil)의 대수로부터 많은 영향을 받았음을 보여주고 있다. 이 책은 인도·아라비아숫자를 유럽으로 소개하는 데 큰 역할을 하였다. 15장으로 된 이 책은 새로운 숫자를 읽고 쓰는 방법, 정수와 분수를 계산하는 방법, 제곱근과 세제곱근을 구하는 방법, 임시위치법과 대수적 과정에 의한 1차 및 2차 방정식의 해법 등을 설명하고 있다. 그러나 방정식의 음근과 허근이 인정되지 않았고 그의 대수는 수사적이었다. 대부분의 응용이 교역, 합자경영, 혼합법, 측량기하 등에 관한 것이었다. 또 이 책에는 많은 문제가 실려 있는데 이것은 수세기 동안 그 이후의 저술가들에게 수학 문제의 보고(寶庫)가 되었다. 이 책에 실려 있는 문제 중에는 그보다 훨씬 이전, 린드 파피루스에 나온 문제를 변형시킨 듯한 것도 있다. 다음은 《산반서》에 나오는 문제이다.

"새로 태어난 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 한 달이면 짝을 지을 수 있어서 두 번째 달 말에는 암컷이 다른 한 쌍의 토끼를 낳을 수 있다.(단, 절대로 죽지 않는다고 가정하자.) 그리고 암컷은 항상 새로운 한 쌍의 토끼를 두 번째 달부터는 계속해서 낳는다고 가정할 때, 일 년이 되면 한 쌍의 토끼로부터 몇 쌍의 토끼가 생기겠는가? " 이 문제는 피보나치 수열

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots, x, y, x+y, \cdots$$

가 되는데 유럽에 알려진 최초의 점화수열로서 각 수는 앞선 두 항들의 합이다.

그밖에 《산반서》에 나오는 몇 개의 문제는 다음과 같다.

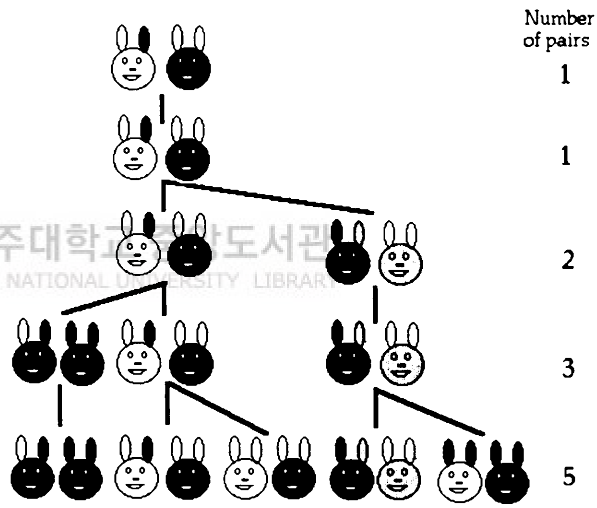
첫 번째 문제는 콘스탄티노플 시장이 보낸 편지를 피보나치가 받은 것이고, 두 번째 문제는 3수법을 예증하기 위해 만든 것이다.

(a) A가 B로부터 일곱 개의 은화를 얻으면 A의 합은 B의 합의 다섯 배가 되고, 또 B가 A로부터 다섯 개의 은화를 얻으면 B의 합은 A의 합의 일곱 배가 된다. A, B는 각각 얼마의 은화를 갖고 있는가?

(b) 어떤 왕이 30명의 사람을 과수원에 보내 나무를 심게 하였다. 만일 그들이 9일 동안에 1000그루의 나무를 심을 수 있다면 36명이 4400그루의 나무를 심기 위해서는 며칠이 걸리겠는가?

2) 피보나치의 토끼

피보나치가 1202년에 연구했던 원래 문제는 토끼가 이상적인 상황에서 얼마나 빨리 번식할 수 있는가 하는 것이었다. 새로 태어난 한 쌍의 토끼(하나는 수컷이고, 하나는 암컷)가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 한 달이면 짝을 지을 수 있어서, 두 번째 달 말에는 암컷이 다른 한 쌍의 토끼를 낳을 수 있다. 토끼들은 절대로 죽지 않는다고 가정하자. 그리고 암컷은 항상 새로운 한 쌍의 토끼(하나는 수컷, 하나는 암컷)를 두 번째 달부터는 계속해서 낳는다고 가정하자. 피보나치의 문제는 다음과 같다.



[그림 2] 피보나치의 토끼

1년 후에는 얼마나 많은 쌍의 토끼가 있을 것인가?

① 첫 번째 달 말에는 토끼는 짝을 짓는다. 하지만 여전히 한 쌍의 토끼만이 있다.

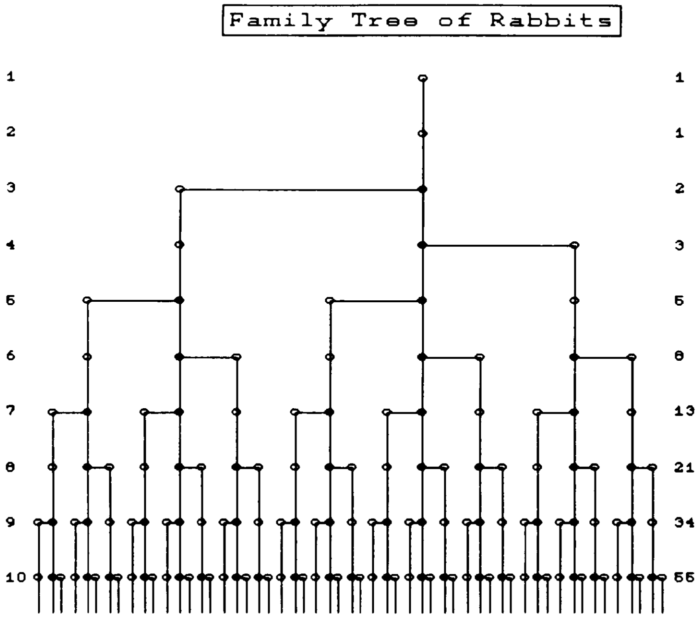
② 두 번째 달 말에는 암컷이 새로운 한 쌍을 낳는다. 그래서 들판에는 두 쌍의 토끼가 있다.

③ 세 번째 달 말에는 처음의 암컷이 두 번째 쌍의 토끼를 낳아서 들판에는 모두 세 쌍의 토끼가 있게 된다.

④ 네 번째 달 말에는 처음의 암컷이 또 다른 쌍의 토끼를 낳고, 두 달 전에 태어난 암컷이 처음으로 한 쌍의 토끼를 낳게 된다. 그래서 모두 다섯 쌍의 토끼가 들판에 있다.

들판에 있는 토끼 쌍의 수는 매달 초에 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
이 수열이 어떻게 형성되었는지, 그리고 어떻게 계속될지 알 수 있는가? 이 토끼의 문제는 현실적인가? 이 문제에서는 오누이가 짝을 짓고 있다. 유전학적으로 문제를 일으킬지도 모른다. 각 쌍의 암컷은 어떤 수컷과도 짝을 지을 수 있고 자식을 낳을 수 있다고 가정함으로써 이 문제를 피해갈 수 있다. 실제와는 다른 또 하나의 문제는 정확히 두 마리씩, 하나는 수컷, 하나는 암컷을 낳는다는 것이다.

다음 그림은 토끼의 가계도와 월별 토끼집단의 성장 표이다.



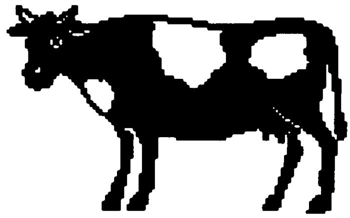
[그림 3] 토끼의 가계도

[표 1] 토끼 집단의 성장표

달	성인 토끼(쌍)	어린 토끼(쌍)	전체 쌍의 수
1월		1	1
2월	1		1
3월	1	1	2
4월	2	1	3
5월	3	2	5
6월	5	3	8
7월	8	5	13
8월	13	8	21
9월	21	13	34
10월	34	21	55
11월	55	34	89
12월	89	55	144

3) 두덴니의 암소 문제에 응용

두덴니(Henry E. Dudeney, 1857 - 1930)는 퍼즐에 관한 몇 권의 훌륭한 책을 썼다. 그 책들 중 한 권에서 그는 피보나치의 토끼 문제를 소 문제에 적용해서 더 실제적인 문제로 만들었다. 그가 관심을 갖는 것은 단지 암수라는 것에 주목함으로써 문제들을 피할 수 있었다.



[그림 4] 두덴니의 암소

그는 그의 책 <536 퍼즐과 신기한 문제 (536 Puzzles and Curious Problems)>에서 토끼 문제의 달을 해로, 그리고 토끼를 수소와 암소로 바꾸었다.

만약 암소가 두 살에 첫 번째의 암송아지를 낳고 그 후로 해마다 한 마리씩의 암송아지를 낳는다면 12년 후에 암송아지는 모두 몇 마리가 되겠는가? (단, 소들은 죽지 않는다고 가정한다.)

이 문제는 토끼 문제보다 더 간단하며 현실적이다.

피보나치는 수학자들이 종종 처음에 하듯이 문제를 단순화하고 어떻게 되는지 살펴보았다. 그리고 그의 이름을 딴 수열은 재미있고 실용적인 응용을 가지고 있다. 이런 응용들에 대해서 우리는 나중에 살펴보게 될 것이다.

Ⅳ. 피보나치 수열의 특성

1. 피보나치 수열의 성질

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …를 살펴보자. 어느 항의 형성 규칙은 임의의 항은 앞의 두 개의 항의 합과 같다. 이 수열의 항들을 $u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots$으로 나타내면 세 연속되는 피보나치 수들은 다음과 같은 관계가 있다.

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

우리는 피보나치 수열의 일반항을 유도하고 몇 개의 재미있는 결과들을 아래에서 제시하고자 한다.

$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$꼴의 점화식에서 일반항을 다음과 같이 유도한다.

[경우1] $p+q=1$, $pq \neq 0$일 경우에는 점화식이 $a_{n+2} - a_{n+1} = -q(a_{n+1} - a_n)$로 변형되므로 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째항 $a_2 - a_1$, 공비 $-q$인 등비수열이다. 따라서 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_2 - a_1)(-q)^{k-1}$$

[경우2] $p+q \neq 1, pq \neq 0$인 경우에 이 점화식이

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

로 변형되었다고 하면 수열 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$과 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$은 각각 첫째 항 $a_2 - \alpha a_1$, 공비 β 및 첫째 항 $a_2 - \beta a_1$, 공비 α인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

변변 빼면 $(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ 이다.

따라서 $\beta\neq\alpha$ 일 경우에는 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

여기서 α, β (단, $\alpha>\beta$)는 방정식 $x^2=px+q$의 근이다. 이 방정식을 주어진 점화식의 특성방정식이라 한다.

$p=1, q=1$일 때, 위의 점화식 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$은 피보나치 점화식이 된다. 또한, α, β (단, $\alpha>\beta$)는 방정식 $x^2=x+1$의 근 이므로

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$a_1=1$, $a_2=1$이므로 $(*)$에 의하여 피보나치 수열의 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$

[성질1] (피보나치의 수열의 일반항, Binet의 공식)

$$u_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} \quad \text{단, } \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

[증명] n=1일 때

$$\text{우변} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1=u_1 = \text{좌변}$$

따라서 주어진 등식은 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때 $u_k=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}$이 성립한다고 가정하자. 이때 n=k+1에 대하여

$$
\begin{aligned}
u_{k+1}=u_k+u_{k-1} &= \frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\alpha^{k}+\alpha^{k-1})-(\beta^{k}+\beta^{k-1})}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{k-1}(\alpha+1)-\beta^{k-1}(\beta+1)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{k-1}\cdot\alpha^{2}-\beta^{k-1}\cdot\beta^{2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식은 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질2] $u_{n+1}u_{n-1}=u_n^2+(-1)^n \quad n\geq 2$

즉, $u_n^2=u_{n+1}u_{n-1}+(-1)^{n-1}, \quad n\geq 2$

[증명] <방법1>

$n=2$일 때, 좌변 $=u_3u_1=2\times1=2=1^2+(-1)^2=u_2^2+(-1)^2=$우변

따라서 주어진 등식은 $n=2$일 때 성립한다.

n=k일때 $u_{k+1}u_{k-1}=u_k^2+(-1)^k$이 성립한다고 가정하자.

그때 $n=k+1$에 대하여

$$
\begin{aligned}
u_{k+2}u_k &= (u_{k+1}+u_k)u_k=u_{k+1}u_k+u_k^2 \\
&= u_{k+1}u_k+u_{k+1}u_{k-1}-(-1)^k=u_{k+1}(u_k+u_{k-1})+(-1)^{k+1} \\
&= u_{k+1}u_{k+1}+(-1)^{k+1}=u_{k+1}^2+(-1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 등식은 $n=k+1$에 대하여도 성립하므로 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. □

<**방법2**> $n=2$일 때, 위 식은 명백하다. $n=k$일 때 위의 식이 성립한다고 가정하면

$$(-1)^k = u_{k-1}u_{k+1} - u_k^2 = u_{k+1}(u_{k-1}+u_k) - u_k(u_k+u_{k+1})$$
$$= u_{k+1}u_{k+1} - u_k u_{k+2} = -(u_k u_{k+2} - u_{k+1}^2)$$

즉, $n=k+1$에 대하여 위의 식이 증명된다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

<**방법3**> 피보나치 수열의 점화식에 의하여

$$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_n(u_{n-1}+u_{n-2}) - u_{n+1}u_{n-1}$$
$$= (u_n - u_{n+1})u_{n-1} + u_n u_{n-2}$$

또한, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ 이므로 위의 괄호 안에 있는 수식은 $u_n - u_{n+1} = -u_{n-1}$ 이다. 따라서 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)(u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2})$ 이다. 이런 과정을 반복하면

$$u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2} = (-1)(u_{n-2}^2 - u_{n-1}u_{n-3})$$

따라서 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^2(u_{n-2}^2 - u_{n-1}u_{n-3})$ 이다.

이런 과정으로 계속하여 $n-2$번째에는

$$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^{n-2}(u_2^2 - u_3 u_1)$$
$$= (-1)^{n-2}(1^2 - 2\cdot 1) = (-1)^{n-1} \quad \square$$

$n=6$과 $n=7$을 택하여 성질 2가 다음과 같이 성립함을 보일 수 있다.

$$u_6^2 = 8^2 = 13\cdot 5 - 1 = u_7 u_5 - 1,$$
$$u_7^2 = 13^2 = 21\cdot 8 + 1 = u_8 u_6 + 1$$

$n=2k$에 대하여 성질 2로부터 $u_{2k}^2 = u_{2k+1}u_{2k-1} - 1$ 를 얻는다.

[성질3] $u_{n+1} = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots$

[증명] 주어진 등식은 명백히 $n=1,\ 2$에 대하여 성립한다.

$n=k-1$과 $n=k$에 대하여 주어진 등식이 성립한다고 가정한다면

$$u_{k+1}={}_{k}C_0+{}_{k-1}C_1+{}_{k-2}C_2+\cdots,\quad u_k={}_{k-1}C_0+{}_{k-2}C_1+{}_{k-3}C_2+\cdots$$

두 개의 방정식을 더하면 다음을 얻을 수 있다.

$$u_{k+1}+u_k={}_{k}C_0+({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1)+({}_{k-2}C_1+{}_{k-2}C_2)+\cdots\cdots$$

${}_{k}C_0={}_{k+1}C_0$, ${}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1={}_{k}C_1$이므로 위의 식은

$$u_{k+2}={}_{k+1}C_0+{}_{k}C_1+{}_{k-1}C_2+\cdots.$$

즉, 주어진 등식은 $n=k+1$에 대하여 성립한다 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질3-1] Lucas (1876년) : 이항계수(Binomial Coefficient)

$$u_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{n-j}{j-1}+\binom{n-j-1}{j}$$

단, j는 $\frac{n-1}{2}$보다 작거나 같은 가장 큰 정수

[증명] $n=1$에 대하여 좌변 $=u_1=\binom{0}{0}=1=$우변이고, n=2에 대하여 좌변 $=u_2=\binom{1}{0}=1=$우변이다. 따라서 주어진 등식은 n=1일 때와 n=2일 때는 성립한다.

n=1, 2, ⋯, k일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하자. 즉,

$$u_k=\binom{k-1}{0}+\binom{k-2}{1}+\binom{k-3}{2}+\cdots+\binom{k-j}{j-1}+\binom{k-j-1}{j}$$

(단, j는 $\frac{n-1}{2}$보다 작거나 같은 가장 큰 정수이다.) 그때 n=k+1에 대하여

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$$

$$= \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \cdots + \binom{k-j}{j-1} + \binom{k-j-1}{j}$$

$$+ \binom{k-1-1}{0} + \binom{k-1-2}{1} + \binom{k-1-3}{2} + \cdots + \binom{k-1-j}{j-1} + \binom{k-1-j-1}{j}$$

$$= \binom{k-1}{0} + \left\{\binom{k-2}{0} + \binom{k-2}{1}\right\} + \left\{\binom{k-3}{1} + \binom{k-3}{2}\right\}$$

$$+ \cdots + \left\{\binom{k-j-1}{j-1} + \binom{k-j}{j-1}\right\} + \binom{k-j-2}{j}$$

$$= \binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \cdots + \binom{k-j}{j}$$

$$= \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \cdots + \binom{k-j}{j}$$

따라서 n = k+1일 때도 주어진 등식은 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질4] $(u_n, u_{n+1}) = 1$ 즉, 연속하는 피보나치 수 u_n과 u_{n+1}은 서로 소이다.

[증명] d가 u_n 과 u_{n+1}을 나누는 1보다 큰 자연수라 하자. 이때 $u_{n-1}(= u_{n+1} - u_n)$도 d로 나누어진다. 이 사실과 $u_n - u_{n-1} = u_{n-2}$ 로부터 u_{n-2}도 d로 나누어진다. 이런 과정을 계속하여 반복하면 $d|u_{n-3}, d|u_{n-4}, \cdots$ 이고 결국 d는 u_1도 나눈다. 그러나 $u_1 = 1$이므로 이것은 어떠한 자연수 $d>1$로 나눌 수 없다. 이는 모순이 되므로 $d=1$이다. 따라서 $(u_n, u_{n+1}) = 1$이다. □

$\gcd(u_{n+2}, u_{n+1})$를 구하기 위하여 유클리드 알고리즘을 적용한다.

$$u_{n+2} = 1 \cdot u_{n+1} + u_n,$$

$$u_{n+1} = 1 \cdot u_n + u_{n-1},$$

$$\vdots$$

$$u_4 = 1 \cdot u_3 + u_2,$$

$$u_3 = 2 \cdot u_2 + 0$$

분명히 나누는 횟수는 정확히 n이다. 따라서 유클리드 알고리즘에 의하여 $\gcd(u_{n+2}, u_{n+1}) = u_2 = 1$이다. 이는 연속하는 피보나치 수들은 서로 소임을 의미한다.

$n=6$일 때 $u_7 = 13$과 $u_8 = 21$의 최대공약수(gcd)를 구하기 위하여 다음과 같이 여섯 번의 나누기가 필요하다.

$$21 = 1 \cdot 13 + 8,$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5,$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3,$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2,$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1,$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

[성질5] $u_{m+n} = u_{m-1}u_n + u_m u_{n+1}$

[증명] m을 고정하여 우리는 n에 대하여 수학적 귀납법을 적용하고자 한다. n=1일 때 $u_1 = u_2 = 1$ 이므로

좌변 $= u_{m+1} = u_{m-1} + u_m = u_{m-1}u_1 + u_m u_2 =$ 우변.

따라서 n=1일 때 주어진 등식은 성립한다.

$n = 1, 2, \cdots, k$에 대하여 주어진 등식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$u_{m+k}=u_{m-1}u_k+u_m u_{k+1},\qquad u_{m+(k-1)}=u_{m-1}u_{k-1}+u_m u_k$$

위의 식에서 각 변끼리 서로 더하면

$$\begin{aligned}(u_{m+(k+1)}=)\ u_{m+k}+u_{m+(k-1)} &= u_{m-1}(u_k+u_{k-1})+u_m(u_{k+1}+u_k)\\ &= u_{m-1}u_{k+1}+u_m u_{k+2}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식은 성립하므로 n에 관한 귀납법에 의하여 주어진 등식은 성립한다. □

예를 들어, $u_9=u_{6+3}=u_5u_3+u_6u_4=5\cdot2+8\cdot3=34$ 임을 알 수 있다.

[성질6] $m,n\geq1$에 대하여 u_{mn}은 u_m에 의하여 나누어진다.

[증명] 우리는 n에 대하여 귀납법을 적용시킬 것이다. $n=1$일 때 $u_m\mid u_{m\cdot1}$이므로 주어진 등식은 성립한다. $n=1,2,\cdots,k$에 대하여 $u_m\mid u_{m\cdot k}$가 성립한다고 가정하자. 그때 [성질4]에 의하여

$$u_{m(k+1)}=u_{mk+m}=u_{mk-1}u_m+u_{mk}u_{m+1}$$

한편 $u_m\mid u_{mk-1}u_m$이고 $u_m\mid u_{mk}u_{m+1}$이므로 $u_m\mid u_{m(k+1)}$ 이다.

따라서 n=k+1일 때도 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질7] 만약 $m=qn+r$이라면 $\gcd(u_m,u_n)=\gcd(u_r,u_n)$

[증명] [성질5]에 의하여 $u_m=u_{qn+r}=u_{qn-1}u_r+u_{qn}u_{r+1}$ 이다.

$$\gcd(u_m,u_n)=\gcd(u_{qn-1}u_r+u_{qn}u_{r+1},u_n)=\gcd(u_{qn-1}u_r,u_n)$$

이제 $\gcd(u_{qn-1},u_n)=1$임을 보이기 위하여 $d=\gcd(u_{qn-1},u_n)$이라 하자. 그러면 $d\mid u_n$이고 $d\mid u_{qn-1}$이다. 또한 [성질6]에 의하여 $d\mid u_{qn}$이다.

따라서 d는 연속하는 항 u_{qn-1}과 u_{qn}의 공약수이다. 연속하는 피보나치 수는 서로 소이므로 $d=1$이다. $\gcd(a,c)=1$일 때마다 $\gcd(a,bc)=\gcd(a,b)$이다. 따라서 이를 이용하여 $\gcd(u_m,u_n)=\gcd(u_r,u_n)$이 성립한다. □

피보나치 수열의 놀랄만한 특징 중 하나는 두 피보나치 수들의 최대공약수는 또한 피보나치 수가된다는 것이다.

[성질8] 두 피보나치 수들의 최대공약수는 또한 피보나치 수이다.

$$\gcd(u_m,u_n)=u_d \quad \text{단, } d=\gcd(m,n)$$

[증명] m≥n이라고 가정하자. m과 n에 유클리드의 알고리즘을 적용하면

$$m=q_1n+r_1 \qquad 0<r_1<n$$

$$n=q_2r_1+r_2 \qquad 0<r_2<r_1$$

$$r_1=q_3r_2+r_3 \qquad 0<r_3<r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n \qquad 0<r_n<r_{n-1}$$

$$r_{n-1}=q_{n+1}r_n+0$$

u_m과 u_n의 최대공약수(GCD)를 구해 보면

$$\gcd(u_m,u_n)=\gcd(u_{r_1},u_n)=\gcd(u_{r_1},u_{r_2})=\cdots=\gcd(u_{r_{n-1}},u_{r_n})$$

한편 $r_n \mid r_{n-1}$이므로 성질 6에 의하여 $u_{r_n} \mid u_{r_{n-1}}$이다.

따라서 $\gcd(u_m,u_n)=\gcd(u_{r_{n-1}},u_{r_n})=u_{r_n}=u_{\gcd(m,n)}$. □

[성질 7]의 좋은 예로 $\gcd(u_{16},u_{12})=\gcd(987,144)$를 계산해 보자.

유클리드 알고리즘에 의하여

$$987 = 6 \cdot 144 + 123$$

$$144 = 1 \cdot 123 + 21$$

$$123 = 5 \cdot 21 + 18$$

$$21 = 1 \cdot 18 + 3$$

$$18 = 6 \cdot 3 + 0$$

이므로 $\gcd(987, 144) = 3$이다. 따라서 $\gcd(u_{16}, u_{12}) = 3 = u_4 = u_{\gcd(16, 12)}$ 이다.

[성질9] $m \geq 2$에 대하여 $u_m \mid u_n$이 되기 위한 필요충분조건은 $m \mid n$ 이다.

[증명] $m|n$이라 하자. 그러면 [성질6]에 의하여 $u_m \mid u_n$이다.

역으로, $u_m \mid u_n$ 즉, u_n이 u_m으로 나누어진다면, $\gcd(u_m, u_n) = u_m$ 이 된다.

이제 $n = qm + r$ 이라 놓자(단, $0 \leq r < m$). 그때

$$\gcd(u_m, u_n) = \gcd(u_m, u_{qm+r}) = \gcd(u_m, u_r) = u_m$$

따라서 $r=0$이고 $m \mid n$ 이다. □

[성질10] $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$

[증명] $n = 1$일 때 좌변 $= u_1^2 = 1 = 1 \times 1 = u_1 u_2 =$ 우변

따라서 $n = 1$일 때 주어진 등식은 성립한다. 이제 $n \geq 2$라고 가정하자.

한편, $u_n^2 = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = u_n u_{n+1} - u_n u_{n-1}$ 이므로

$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_2 u_1,$$

$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_3 u_2,$$

$$\vdots$$

$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_n u_{n-1}$$

변끼리 더하면

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2$$
$$=1+(u_2u_3-u_2u_1)+(u_3u_4-u_3u_2)+\cdots+(u_nu_{n+1}-u_nu_{n-1})$$
$$=u_nu_{n+1}$$

□

[성질10-1] $u_{n+1}^2=u_n^2+3u_{n-1}^2+2(u_{n-2}^2+u_{n-1}^2+\cdots+u_2^2+u_1^2),\quad n\geq 3$

[증명] [성질10]에 의하여 위 식의 우변은

$$u_{n-1}^2-u_n^2+2(u_n^2+u_{n-1}^2+\cdots+u_2^2+u_1^2)$$
$$=u_{n-1}^2-u_n^2+2u_nu_{n+1}=u_{n-1}^2-u_n^2+2u_n(u_{n-1}+u_n)$$
$$=(u_{n-1}+u_n)(u_{n-1}-u_n+2u_n)=(u_{n-1}+u_n)^2=u_{n+1}^2$$

이므로 주어진 등식은 성립한다. □

예를 들어, $1+1+2+3+5+8+13+21=54=55-1=u_{10}-1$ 이다.

이 예로부터 다음 성질을 유도할 수 있다.

[성질11] (피보나치수의 처음 항부터 n항까지의 합)

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$$

[증명] <방법1> $u_1=u_3-u_2,\ u_2=u_4-u_3,\ \cdots,\ u_n=u_{n+2}-u_{n+1}$ 이므로 이들의 변끼리 더하면 $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$을 얻는다.

<방법2> 주어진 식은 $n=1$일 때 명백히 성립한다. 주어진 등식은 $n=k$일 때 성립한다고 가정한다면, $u_{k+2}-1=u_1+u_2+\cdots+u_k$이다. 이 방정식의 양변에 u_{k+1}를 더해 주면 우리는

$$u_{k+2}+u_{k+1}-1=u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}$$

을 얻는다. 따라서

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{k+1}=u_{k+3}-1$$

$n=k+1$일 때 주어진 등식이 증명된다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

위의 관계식과 [성질2]로부터 다음 두 개의 다른 관계식[성질12]와 [성질13]은 지금 증명될 수 있다.

[성질12] $u_{n-2}u_{n+2}-u_n^2=(-1)^{n+1}$ 즉, $u_n^2=u_{n+2}u_{n-2}+(-1)^n$. $n\geq 3$

[증명]

$$\begin{aligned}
&u_{n-2}u_{n+2}-u_n^2\\
&=u_{n-2}(u_{n+1}+u_n)-u_n(u_{n-2}+u_{n-1})\\
&=u_{n-2}u_{n+1}-u_nu_{n-1}=u_{n-2}(u_{n-1}+u_n)-(u_{n-2}+u_{n-1})u_{n-1}\\
&=u_{n-2}u_n-u_{n-1}^2=u_{n-2}u_n+u_{n-1}u_n-u_{n-1}u_n-u_{n-1}^2\\
&=u_n(u_{n-1}+u_{n-2})-u_{n-1}(u_n+u_{n-1})=u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=-(-1)^n
\end{aligned}$$

이와 같이 주어진 등식이 증명된다. □

[성질13] $u_{n-2}u_{n+2}+u_{n-1}u_{n+1}=2u_n^2$ 또는

$$u_n=\{(u_{n-2}u_{n+2}+u_{n-1}u_{n+1})/2\}^{1/2}$$

[증명] [성질2]와 [성질12]를 더하면 우리는

$$u_{n-2}u_{n+2}+u_{n-1}u_{n+1}=2u_n^2 \text{ 또는 } u_n=\{(u_{n-2}u_{n+2}+u_{n-1}u_{n+1})/2\}^{1/2}$$

을 얻는다. □

[성질14] $u_{n-1}u_{n+1}-u_{n-2}u_{n+2}=2(-1)^n$

[증명] [성질2]에서 [성질12]를 빼면

$u_{n-1}u_{n+1}-u_{n-2}u_{n+2}=2(-1)^n$을 얻는다. □

[성질15] $u_1+2u_2+3u_3+\cdots+nu_n=(n+1)u_{n+2}-u_{n+4}+2$

[증명] $n=1$일 때 좌변 $=u_1=1=2\times2-5+2=2u_3-u_5+2=$우변

따라서 $n=1$일 때 주어진 등식은 성립한다. $n=1,2,\cdots,k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} u_1+2u_2+3u_3+\cdots+ku_k+(k+1)u_{k+1} &= (k+1)u_{k+2}-u_{k+4}+2+(k+1)u_{k+1} \\ &= (k+1)(u_{k+2}+u_{k+1})-u_{k+4}+2 \\ &= (k+1)u_{k+3}-u_{k+4}+2 \\ &= (k+1)u_{k+3}-(u_{k+5}-u_{k+3})+2 \\ &= (k+2)u_{k+3}-u_{k+5}+2 \end{aligned}$$

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질16] $u_1+u_3+u_5+\cdots+u_{2n-1}=u_{2n}$

[증명] $u_1=1$, $u_3=u_4-u_2$, $\cdots$, $u_{2n-1}=u_{2n}-u_{2n-2}$ 이므로

이들의 변끼리 더하면 $u_1+u_3+u_5+\cdots+u_{2n-1}=u_{2n}$을 얻는다. □

[성질17] $u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$

[증명] [성질11]과 [성질16]에 의하여

$$\begin{aligned} u_2+u_4+\cdots+u_{2n} &= (u_1+u_2+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n})-(u_1+u_3+\cdots+u_{2n-1}) \\ &= (u_{2n+2}-1)-u_{2n}=(u_{2n+2}-u_{2n})-1=u_{2n+1}-1 \end{aligned}$$ □

[성질18] $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n=1+(-1)^{n+1}u_{n-1}$

[증명] 경우 1) n=2m일 때 [성질16]과 [성질17]에 의하여

좌변 $= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2m}$

$= (u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m-1}) - (u_2 + u_4 + \cdots + u_{2m})$

$= u_{2m} - (u_{2m+1} - 1) = (u_{2m} - u_{2m+1}) + 1 = 1 - u_{2m-1} =$ 우변

경우 2) n=2m+1일 때

좌변 $= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2m+1}$

$= (u_1 + u_3 + \cdots + u_{2m+1}) - (u_2 + u_4 + \cdots + u_{2m})$

$= u_{2m+2} - (u_{2m+1} - 1) = 1 + u_{2m} =$ 우변

경우1)과 경우2)로부터 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질19] (1) $u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$, (2) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$ $n \geq 2$

[증명] (1) [성질5]에 의하여

$$u_{2n-1} = u_{n+(n-1)} = u_{n-1} u_{n-1} + u_n u_n = u_n^2 + u_{n-1}^2$$

(2) [성질5]에 의하여

$$\begin{aligned} u_{2n} = u_{n+n} &= u_{n-1} u_n + u_n u_{n+1} \\ &= u_{n-1}(u_{n+1} - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_{n-1}) u_{n+1} \\ &= u_{n-1} u_{n+1} - u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2 - u_{n-1} u_{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 \end{aligned}$$

□

[성질20] $u_n u_{n-1} = u_n^2 - u_{n-1}^2 + (-1)^n$

[증명] [성질2]에 의하여

$$\begin{aligned} u_n^2 - u_{n-1}^2 + (-1)^n &= u_{n+1} u_{n-1} - (-1)^n - u_{n-1}^2 + (-1)^n \\ &= u_{n-1}(u_{n+1} - u_{n-1}) \\ &= u_{n-1} u_n = u_n u_{n-1} \end{aligned}$$

□

[성질21] $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

[증명] Binet의 공식(성질 1)에 의해서

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{단, } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

그때 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \square$$

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …에서 이웃하는 항의 비로 구성되는 다음 수열 $\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\}$의 극한은 어떻게 되는가?

$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{2}{1} = 2,\ \frac{3}{2} = 1.5,\ \frac{5}{3} = 1.\dot{6},\ \frac{8}{5} = 1.6,\ \cdots$$

위의 성질에 의하여 위 수열의 극한은 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$임을 알 수 있다.

피보나치수의 연속적인 비율의 수열 $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $(n \geq 1)$을 만들어서 시작한다.

처음 몇 개의 항은

$$v_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad v_5 = \frac{8}{5} = 1.60$$

$$v_2 = \frac{2}{1} = 2 \qquad v_6 = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$v_3 = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad v_7 = \frac{21}{13} = 1.615 \cdots$$

$$v_4 = \frac{5}{3} = 1.66 \cdots \qquad v_8 = \frac{34}{21} = 1.619 \cdots$$

이다. 항이 증가하면 그 결과는 1.61 과 1.62 사이의 해당하는 수가 된다.

위의 성질에 의하여 위 수열의 극한값이 실제로 존재한다. 이 극한값을 α라 하자. 또한 $n \geq 1$이면

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

이 된다. 이 공식은 v_n의 정의에 의해

$$v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}$$

으로 변형될 수 있다. n이 증가하면, 이 등식의 좌·우항은 점점 더 α 와 $1+\frac{1}{\alpha}$에 각각 가까워지고, 그 결과 그 등식은 $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$와 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$에 수렴한다. $\alpha > 0$이므로 α는 이차방정식의 양의 근이다. 따라서

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.618 \cdots$$

이것이 이른바 황금비라 한다.

[성질22] $u_{n+1}^2 - 4u_n u_{n-1} = u_{n-2}^2, \quad n \geq 3$

[증명] $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$이므로

$$u_{n+1}^2 - 4u_n u_{n-1} = (u_n + u_{n-1})^2 - 4u_n u_{n-1} = (u_n - u_{n-1})^2 = u_{n-2}^2 \quad \square$$

[성질23] $\begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$, (단, $n \ge 2$)

[증명] 주어진 등식은 $n=2$일 때 성립한다. 사실,

$$\begin{bmatrix} u_3 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

다음에 $\begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$이라고 가정하면, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$이므로

$$\begin{bmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} + u_n & u_n + u_{n-1} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1}$$

따라서 주어진 등식은 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n \ge 2$에 대하여 성립한다.
□

[성질24] $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3 \quad (n = 2, 3, \cdots)$

[증명] [성질5]과 [성질19]에 의하여

$$\begin{aligned} u_{3n} &= u_{n+2n} = u_{n-1} u_{2n} + u_n u_{2n+1} \\ &= u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n(u_{n+1}^2 + u_n^2) \\ &= u_n^3 - u_{n-1}^3 + u_{n+1}^2(u_{n-1} + u_n) = u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 \end{aligned}$$
□

[성질 25]. $u_1 + u_4 + u_7 + \cdots + u_{3n-2} = \frac{1}{2} u_{3n}$

[증명] $n=1$일 때 좌변은 $u_1 = 1$, 우변은 $\frac{1}{2} u_3 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$이다.

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식은 성립한다.

$n=k$일 때, $u_1 + u_4 + u_7 + \cdots + u_{3k-2} = \frac{1}{2} u_{3k}$ 가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때, 좌변은

$$u_1+u_4+u_7+\cdots+u_{3k-2}+u_{3k+1}=\frac{1}{2}u_{3k}+u_{3k+1}=\frac{1}{2}(u_{3k+2}-u_{3k+1})+u_{3k+1}$$
$$=\frac{1}{2}(u_{3k+2}+u_{3k+1})=\frac{1}{2}u_{3k+3}=\frac{1}{2}u_{3(k+1)}$$

따라서 주어진 등식은 $n=k+1$일 때 성립한다. 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

같은 방법으로 다음 성질도 증명할 수 있다.

$$u_2+u_5+u_8+\cdots+u_{3n-1}=\frac{1}{2}(u_{3n+1}-1)$$

$$u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n}=\frac{1}{2}u_{3n+2}-1$$

[성질26] $u_2+u_6+u_{10}+\cdots+u_{4n-2}=u_{2n}^2$

[증명] $n=1$일 때 좌변은 $u_2=1$, 우변은 $u_2^2=1$이므로 $n=1$일 때 주어진 등식은 성립한다. $n=k$일 때 $u_2+u_6+u_{10}+\cdots+u_{4k-2}=u_{2k}^2$이 성립한다고 가정하자. $n=k+1$일 때

$$\text{좌변}=u_2+u_6+u_{10}+\cdots+u_{4k-2}+u_{4k+2}=u_{2k}^2+u_{4k+2}$$
$$=u_{2k}^2+u_{2k+2k+2}=u_{2k}^2+u_{2k-1}u_{2k+2}+u_{2k}u_{2k+3}$$
$$=u_{2k}^2+(u_{2k+1}-u_{2k})u_{2k+2}+u_{2k}(u_{2k+1}+u_{2k+2})$$
$$=u_{2k}^2+u_{2k+1}u_{2k+2}+u_{2k}u_{2k+1}=u_{2k}(u_{2k}+u_{2k+1})+u_{2k+1}u_{2k+2}$$
$$=u_{2k}u_{2k+2}+u_{2k+1}u_{2k+2}=(u_{2k}+u_{2k+1})u_{2k+2}$$
$$=u_{2k+2}^2=u_{2(k+1)}$$

따라서 $n=k+1$일 때 주어진 등식은 성립한다. 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. □

[성질27] $u_4+u_8+u_{12}+\cdots+u_{4n}=u_{2n+1}^2-1$

[증명] $n=1$일 때, 좌변 $=u_4=3$, 우변 $=u_3^2-1=3$ 이므로 주어진 등식은 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때 $u_4+u_8+u_{12}+\cdots+u_{4k}=u_{2k+1}^2-1$이 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때

$$
\begin{aligned}
\text{좌변} &= u_4+u_8+u_{12}+\cdots+u_{4k}+u_{4k+4}\\
&= u_{2k+1}^2-1+u_{2k+2+2k+2}\\
&= u_{2k+1}^2-1+u_{2k+1}u_{2k+2}+u_{2k+2}u_{2k+3}\\
&= u_{2k+1}^2-1+u_{2k+2}(u_{2k+3}+u_{2k+1})\\
&= u_{2k+1}^2-1+(u_{2k+3}-u_{2k+1})(u_{2k+3}+u_{2k+1})\\
&= u_{2k+3}^2-1=\text{우변}.
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 등식은 $n=k+1$일 때 성립한다. 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다. □

같은 방법으로 다음 성질도 증명할 수 있다.

$$u_1+u_5+u_9+\cdots+u_{4n-3}=\frac{1}{2}(u_{4n}-u_{2n}^2)$$

$$u_3+u_7+u_{11}+\cdots+u_{4n-1}=\frac{1}{2}(u_{4n}+u_{2n}^2)$$

[성질28] $u_n^2-u_{n-p}u_{n+p}=(-1)^{n-p}u_p^2$. $(n=1,2,3,\cdots)$

수학적 귀납법의 원리에 의하여 모두 증명될 수 있는 아래에 몇 개의 결과들을 기재한다.

$$u_2^2+u_4^2+u_6^2+\cdots+u_{2n}^2=\frac{1}{5}(3u_{2n+1}^2+2u_{2n+2}^2-6u_{2n}u_{2n+2}-2n-5)$$

$$u_1^2+u_3^2+u_5^2+\cdots+u_{2n-1}^2=\frac{1}{5}(3u_{2n}^2+2u_{2n-1}^2-4u_{2n-2}u_{2n}+2n-2)$$

$$u_1u_3+u_3u_5+\cdots+u_{2n-1}u_{2n+1}=\frac{1}{5}(2u_{2n+2}^2-3u_{2n+1}^2+3n+1)$$

$$u_2u_4+u_4u_6+\cdots+u_{2n}u_{2n+2}=\frac{1}{5}(3u_{2n+2}^2-2u_{2n+1}^2-3n-1)$$

$$(u_1u_3+u_2u_4)+(u_3u_5+u_4u_6)+\cdots+(u_{2n-1}u_{2n+1}+u_{2n}u_{2n+2})=u_{2n+1}u_{2n+2}-1$$

$$u_2u_3+u_4u_5+\cdots+u_{2n}u_{2n+1}=\frac{1}{5}(u_{2n+2}^2+u_{2n+1}^2-n-2)$$

$$u_1u_2+u_3u_4+\cdots+u_{2n-1}u_{2n}=\frac{1}{5}(4u_{2n+1}^2-u_{2n+2}^2+n-3)$$

$$(u_1u_2+u_2u_3)+(u_3u_4+u_4u_5)+\cdots+(u_{2n-1}u_{2n}+u_{2n}u_{2n+1})=u_{2n+1}^2-1$$

2. 일반화된 피보나치 수열

1) 피보나치 수열의 일반화

$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$로 두면 $a+b=1$, $a-b=\sqrt{5}$, $ab=-1$이므로 a, b는 방정식 $x^2-x-1=0$의 근이다(물론, a와 b의 값은 황금분할의 고대 기하학적 문제들과 연관지어 생각된다.).

피보나치 수열

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots, \qquad (\alpha)$$

은 점화관계 $F_1=F_2=1$이고 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geq 3)$로 정의되고, 이 수열은 잘 알려져 있다(Daniel Bernoulli, 1732). 피보나치 수열의 제n번째 항은 $F_n=\frac{(a^n-b^n)}{\sqrt{5}}$이다.

우리는 피보나치 수열의 점화관계는 유지시킨다고 가정하지만 처음 두 항을 바꾸고 새로 만들어지는 일반화된 피보나치 수열은 (β)에 의하여 정의된다.

$$H_n=H_{n-1}+H_{n-2}\ (n\geq 3),\ H_1=p,\ H_2=p+q \qquad (\beta)$$

여기서 p, q는 임의의 정수이다. 이것은 일반화된 수열 (γ)이다.

$$p,\ p+q,\ 2p+q,\ 3p+2q,\ 5p+3q,\ 8p+5q,\ 13p+8q, \cdots \qquad (\gamma)$$

$l=2(p-qb)$, $m=2(p-qa)$로 두면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$l+m=2(2p-q),\quad l-m=2q\sqrt{5},\quad \frac{1}{4}lm=p^2-pq-q^2=c$$

[성질1] $H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n-mb^n) \qquad (\delta)$

[증명] $n=1$일 때

$$\text{우변} = \frac{la-mb}{2\sqrt{5}} = \frac{2p(a-b)}{2\sqrt{5}} = \frac{p\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = p = H_1 = \text{좌변}$$

따라서 $n=1$일 때 주어진 등식은 성립한다.

$n=k$일 때 $H_k=\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^k-mb^k)$ 이 성립한다고 가정하자.

이때 $n=k+1$에 대하여

$$\begin{aligned} H_{k+1}=H_k+H_{k-1} &= \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^k-mb^k)+\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{k-1}-mb^{k-1}) \\ &= \frac{l(a^k+a^{k-1})-m(b^k+b^{k-1})}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{la^{k-1}(a+1)-mb^{k-1}(b+1)}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{la^{k-1}\cdot a^2-mb^{k-1}\cdot b^2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{la^{k+1}-mb^{k+1}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

즉, 주어진 등식은 $n=k+1$일 때도 성립하므로 귀납법에 의하여 주어진 등식은 성립한다. □

대부분의 결과들은 거의 (β)와 (δ)로부터 직접 얻을 수 있다.

[성질2] $n\to\infty$일 때

(1) $H_n/H_{n-1}\to a$, (2) $H_n/H_{n-i}\to a^i$, (3) $H_n/F_n\to p-qb$

[증명](1) $n\to\infty$일 때 [성질1]에 의하여

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{la^n - mb^n}{la^{n-1} - mb^{n-1}} = \frac{la - mb(b/a)^{n-1}}{l - m(b/a)^{n-1}} \quad \rightarrow \quad a$$

(2) $n\to\infty$일 때 [성질1]에 의하여

$$\frac{H_n}{H_{n-i}} = \frac{la^n - mb^n}{la^{n-i} - mb^{n-i}} = \frac{a^n\left\{l - m(\frac{b}{a})^n\right\}}{a^{n-i}\left\{l - m(\frac{b}{a})^{n-i}\right\}} \rightarrow \frac{a^n}{a^{n-i}} = a^i$$

(3) $$\frac{H_n}{F_n} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n - mb^n)}{\frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)} = \frac{l - m(\frac{b}{a})^n}{2\left\{1 - (\frac{b}{a})^n\right\}} \rightarrow \frac{l}{2} = p - qb \qquad \square$$

[성질3] (1) $H_{n+2} - 2H_n - H_{n-1} = 0$, (2) $H_{n+1} - 2H_n + H_{n-2} = 0$

[증명]<방법1> (1) $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n \quad H_{n+1} = H_n + H_{n-1}$ 이므로

모든 자연수 n에 대하여

$$H_{n+2} - 2H_n - H_{n-1} = (H_{n+1} + H_n) - 2H_n - H_{n-1} = H_{n+1} - H_n - H_{n-1} = 0$$

(2) 마찬가지로 모든 자연수 n에 대하여

$$H_{n+1} - 2H_n + H_{n-2} = (H_n + H_{n-1}) - 2H_n + H_{n-2} = -H_n + H_{n-1} + H_{n-2} = 0$$

<방법2> (1) 주어진 식은 $H_{n+2} = 2H_n + H_{n-1}$ 으로 변형된다.

따라서 $a^2 = a + 1$, $b^2 = b + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\text{우변} &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n - mb^n) + \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n-1} - mb^{n-1}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^{n-1}(2a+1) - mb^{n-1}(2b+1)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^{n-1}(a+a+1) - mb^{n-1}(b+b+1)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^n + la^{n-1}(a+1) - mb^n - mb^{n-1}(b+1)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^n + la^{n+1} - mb^n - mb^{n+1}] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^n(1+a) - mb^n(1+b)] = \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^{n+2} - mb^{n+2}] = H_{n+2}
\end{aligned}$$

(2) 주어진 식은 $2H_n = H_{n+1} + H_{n-2}$ 으로 변형되고

$a^2 = a+1,\ b^2 = b+1$ 로부터 $a^3+1 = 2a^2,\ b^3+1 = 2b^2$ 이므로

$$\text{우변} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+1} - mb^{n+1}) + \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n-2} - mb^{n-2})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}[la^{n-2}(a^3+1) - mb^{n-2}(b^3+1)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(la^{n-2}a^2 - mb^{n-2}b^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(la^n - mb^n) = 2H_n \qquad \square$$

[성질4] (1) $\sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} = H_{2n} - q$, (2) $\sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_{2n+1} - p$

[증명] <방법1> (1) $H_{n+1} = H_n + H_{n-1}$ 이므로

$H_3 = H_4 - H_2,\ H_5 = H_6 - H_4,\ \cdots,\ H_{2n-1} = H_{2n} - H_{2n-2}$ 이므로

이들의 변끼리 더하면 $H_3 + H_5 + \cdots + H_{2n-1} = H_{2n} - H_2$ 을 얻는다.

따라서 $H_1 = p,\ H_2 = p+q$ 이므로

$$H_1 + H_3 + H_5 + \cdots + H_{2n-1} = H_1 + H_{2n} - H_2 = H_{2n} - q$$

(2) 마찬가지로 $H_2 + H_4 + \cdots + H_{2n} = H_{2n+1} - p$ 를 증명할 수 있다. $\square$

<방법2> (1) $l - m = 2q\sqrt{5}$ 이므로

$$\text{좌변} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2i+1} - mb^{2i+1}) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\sum_{i=0}^{n-1}a^{2i+1} - m\sum_{i=0}^{n-1}b^{2i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\{l(a^{2n}-1) - m(b^{2n}-1)\} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\{(la^{2n} - mb^{2n}) - (l-m)\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2n} - mb^{2n}) - q = H_{2n} - q$$

$\square$

(2) $la - mb = 2(pa - qab) - 2(pb - qab) = 2p(a-b) = 2p\sqrt{5}$ 이므로

$$\text{좌변} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2i} - mb^{2i}) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\sum_{i=1}^{n} a^{2i} - m\sum_{i=1}^{n} b^{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\{l(a^{2n+1} - a) - m(b^{2n+1} - b)\} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\{(la^{2n+1} - mb^{2n+1}) - (la - mb)\}$$

$$= H_{2n+1} - p. \qquad (\because l = 2(p - qb),\ m = 2(p - qa))$$

□

[성질5] $\sum_{i=1}^{n}(H_{2i-1} - H_{2i}) = -H_{2n-1} + p - q$

[증명] <방법1> [성질4]에 의하여

$$\sum_{i=1}^{n}(H_{2i-1} - H_{2i}) = \sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} H_{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} H_{2i}$$

$$= (H_{2n} - q) - (H_{2n+1} - p) = H_{2n} - H_{2n+1} + (p - q)$$

$$= H_{2n} - (H_{2n} + H_{2n-1}) + p - q = -H_{2n-1} + p - q$$

<방법2>

$$H_{2i-1} - H_{2i} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2i-1} - mb^{2i-1} - la^{2i} + mb^{2i})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2i-1}\cdot b - mb^{2i-1}\cdot a) \qquad (\because ab = -1)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2i-2} - mb^{2i-2})$$

$\frac{l}{a} - \frac{m}{b} = \frac{bl - am}{ab} = 2\sqrt{5}(p - q)$ 이므로

$$\text{좌변} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{i=1}^{n}(la^{2i-2} - mb^{2i-2})$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{(la^{2n-1} - mb^{2n-1}) - \left(\frac{l}{a} - \frac{m}{b}\right)\right\}$$

$$= -H_{2n-1} + p - q$$

□

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} H_i$, $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ 라 놓으면 다음의 결과를 얻는다.

[성질6] (1) $\sigma_n = H_{n+2} - H_2$ (2) $\tau_n = H_{n+4} - (n+2)H_2 - H_1$

[증명] (1) 만약 $n=1$이면 $\sigma_1 = H_1 = p = (2p+q)-(p+q) = H_3 - H_2$ 이다. 따라서 주어진 등식은 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때 $\sigma_k = H_{k+2} - H_2$ 이 성립한다고 가정하자. 그러면 가정에 의하여

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + H_{k+1} = H_{k+2} - H_2 + H_{k+1} = H_{k+3} - H_2$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식 $\sigma_n = H_{n+2} - H_2$ 은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(2) $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} (H_{i+2} - H_2)$이고

$$\sum_{i=1}^{n} H_{i+2} = (H_3 + H_4 + \cdots + H_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} H_i - H_1 - H_2$$

이므로 (1)에 의하여

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sigma_{n+2} - nH_2 - H_1 - H_2$$

$$= H_{n+4} - H_2 - nH_2 - H_1 - H_2 = H_{n+2} - (n+2)H_2 - H_1$$

<방법2> [성질4]의 변변 합하면 $\sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_{2n} + H_{2n+1} - (p+q)$ 이 되어

$\sum_{i=1}^{2n} H_i = H_{2n+2} - H_2$ 이 된다. 따라서 $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} H_i = H_{n+2} - H_2$ 이다.

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n}(H_{i+2}-H_2) = H_3+H_4+H_5+\cdots+H_{n+2}-nH_2$$

$$= \sum_{i=1}^{n+2} H_i - H_1 - H_2 - nH_2 = (H_{n+4}-H_2) - H_1 - H_2 - nH_2$$

$$= H_{n+4} - (n+2)H_2 - H_1 \qquad \square$$

(γ)는 피보나치 수열 F_n을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$H_1 = p,\ \ H_2 = p+q = qF_1 + pF_2,\ \ H_3 = 2p+q = qF_2 + pF_3,$

$H_4 = 3p+2q = qF_3 + pF_4, \cdots$

위의 사실로부터 우리는 다음의 결과를 얻는다.

[성질7] (1) $H_{n+1} = qF_n + pF_{n+1}$ (2) $H_{n+2} = pF_n + (p+q)F_{n+1}$

[증명] (1) $n=1$일 때 좌변은 $H_2 = p+q$ 이고 우변은 $qF_1 + pF_2 = q+p$ 이므로 $H_2 = qF_1 + pF_2$ 이다. $n=k$일 때 식 $H_{k+1} = qF_k + pF_{k+1}$ 이 성립한다고 가정하자. 그러면 가정에 의하여

$$H_{k+2} = H_{k+1} + H_k = (qF_k + pF_{k+1}) + (qF_{k-1} + pF_k)$$

$$= q(F_k + F_{k-1}) + p(F_{k+1} + F_k) = qF_{k+1} + pF_{k+2}$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 위의 식 $H_{n+1} = qF_n + pF_{n+1}$ 은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(2) 위의 식 (1)에 의하여

$$H_{n+2} = H_n + H_{n+1} = (qF_{n-1} + pF_n) + (qF_n + pF_{n+1})$$

$$= pF_n + q(F_{n-1} + F_n) + pF_{n+1}$$

$$= pF_n + qF_{n+1} + pF_{n+1} = pF_n + (p+q)F_{n+1} \qquad \square$$

[성질7]에서 $n=r$ 로 놓고 (β)를 이용하면, 우리는 다음의 결과를 얻는다.

$$H_{r+3}=H_{r+1}+H_{r+2}=(p+q)F_r+(2p+q)F_{r+1}=H_2F_r+H_3F_{r+1}$$

$$H_{r+4}=H_{r+2}+H_{r+3}=(2p+q)F_r+(3p+2q)F_{r+1}=H_3F_r+H_4F_{r+1}\cdots$$

따라서 일반적으로, 다음의 결과를 얻을 수 있다.

[성질8] $H_{n+r}=H_{n-1}F_r+H_nF_{r+1}\quad (n\geq 3)$

계속되는 결과에서 아마도 (δ)를 사용하는 것이 바람직할 것이다. 여기서 아래의 항등식은 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

$$a-\frac{1}{a^2}=-b\sqrt{5},\quad b-\frac{1}{b^2}=a\sqrt{5},\quad a+\frac{1}{a}=\sqrt{5},\quad b+\frac{1}{b}=-\sqrt{5}$$

$$a^2-a-1=0,\quad b^2-b-1=0 \qquad (\varepsilon)$$

[성질9] $H_{n-1}^2+H_n^2=(2p-q)H_{2n-1}-cF_{2n-1}$

[증명] a,b는 $x^2-x-1=0$ 의 근이므로 $ab=-1$이다. 따라서 (δ)에 의하여

$$\begin{aligned}
&H_{n-1}^2+H_n^2\\
&=[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n-1}-mb^{n-1})]^2+[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n-mb^n)]^2\\
&=\frac{1}{20}(l^2a^{2n-2}-2lma^{n-1}b^{n-1}+m^2b^{2n-2})+\frac{1}{20}(l^2a^{2n}-2lma^nb^n+m^2b^{2n})\\
&=\frac{1}{20}[l^2a^{2n-2}(1+a^2)-2lm((ab)^{n-1}+(ab)^n)+m^2b^{2n-2}(1+b^2)]\\
&=\frac{1}{20}[(1+a^2)l^2a^{2n-2}+(1+b^2)m^2b^{2n-2}]
\end{aligned}$$

한편, (ε)에 의하여

$(2p-q)H_{2n-1}-cF_{2n-1}$

$= \frac{l+m}{2}H_{2n-1}-\frac{1}{4}lmF_{2n-1}$

$= \frac{l+m}{2}[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{2n-1}-mb^{2n-1})]-\frac{lm}{4}[\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{2n-1}-b^{2n-1})]$

$= \frac{1}{4\sqrt{5}}[l^2a^{2n-1}+lma^{2n-1}-lmb^{2n-1}-m^2b^{2n-1}-lma^{2n-1}+lmb^{2n-1}]$

$= \frac{1}{4\sqrt{5}}[l^2a^{2n-1}-m^2b^{2n-1}]=\frac{\sqrt{5}}{20}[l^2a^{2n-1}-m^2b^{2n-1}]$

$= \frac{1}{20}[\sqrt{5}l^2a^{2n-1}-\sqrt{5}m^2b^{2n-1}]$

$= \frac{1}{20}[(a+\frac{1}{a})l^2a^{2n-1}+(b+\frac{1}{b})m^2b^{2n-1}]$

$= \frac{1}{20}[(a^2+1)l^2a^{2n-2}+(b^2+1)m^2b^{2n-2}]$

위의 두 식으로부터 $H_{n-1}^2+H_n^2=(2p-q)H_{2n-1}-cF_{2n-1}$을 얻는다. □

[성질10] $H_{n+1}^2-H_{n-1}^2=(2p-q)H_{2n}-cF_{2n}$

[증명] $H_{2n+1}=H_{2n-1}+H_{2n}$ $F_{2n+1}=F_{2n-1}+F_{2n}$ 이므로 [성질9]에 의하여

$$\begin{aligned}H_{n+1}^2-H_{n-1}^2 &= (H_{n+1}^2+H_n^2)-(H_n^2+H_{n-1}^2)\\ &= [(2p-q)H_{2n+1}-cF_{2n+1}]-[(2p-q)H_{2n-1}-cF_{2n-1}]\\ &= (2p-q)(H_{2n+1}-H_{2n-1})-c(F_{2n+1}-F_{2n-1})\\ &= (2p-q)H_{2n}-cF_{2n}\end{aligned}$$ □

[성질11] $H_{n-1}H_{n+1}-H_n^2=(-1)^nc$

[증명] a,b는 $x^2-x-1=0$ 의 근이므로 $ab=-1$, $(b-a)^2=5$ 이다.

또한 $c=\frac{1}{4}lm$이므로

$H_{n-1}H_{n+1}-H_n^2$

$=[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n-1}-mb^{n-1})][\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+1}-mb^{n+1})]-[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n-mb^n)]^2$

$=\frac{1}{20}(l^2a^{2n}-lma^{n-1}b^{n+1}-lma^{n+1}b^{n-1}+m^2b^{2n})-\frac{1}{20}(l^2a^{2n}-2lma^nb^n+m^2b^{2n})$

$=-\frac{1}{20}lma^{n-1}b^{n-1}(b^2+a^2-2ab)=-\frac{1}{20}lma^{n-1}b^{n-1}(b-a)^2$

$=-\frac{1}{4}lm(-1)^{n-1}=\frac{1}{4}lm(-1)^n=(-1)^nc$ □

[성질12] $H_nH_{n+r+1}-H_{n-s}H_{n+r+s+1}=(-1)^{n+s}cF_sF_{r+s+1}$

[증명] $F_s=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^s-b^s)$, $F_{r+s+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{r+s+1}-b^{r+s+1})c=\frac{1}{4}lm$,

$(-1)^{n-s}=(-1)^{n+s}$ 이므로

$$H_nH_{n+r+1} - H_{n-s}H_{n+r+s+1} = [\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n - mb^n)][\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+r+1} - mb^{n+r+1})]$$

$$-[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n-s} - mb^{n-s})][\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+r+s+1} - mb^{n+r+s+1})]$$

$$= \frac{1}{20}[lma^{n-s}b^{n+r+s+1} + lma^{n+r+s+1}b^{n-s} - lma^nb^{n+r+1} - lma^{n+r+1}b^n]$$

$$= \frac{1}{20}lma^{n-s}b^{n-s}[b^{r+2s+1} + a^{r+2s+1} - a^sb^{s+r+1} - a^{s+r+1}b^s]$$

$$= \frac{1}{20}lm(-1)^{n-s}[b^{r+s+1}(b^s - a^s) + a^{r+s+1}(a^s - b^s)]$$

$$= \frac{1}{20}lm(-1)^{n-s}[(a^s - b^s)(a^{r+2s+1} - b^{r+s+1})]$$

$$= \frac{1}{20}lm(-1)^{n-s}[\sqrt{5}F_s][\sqrt{5}F_{r+s+1}]$$

$$= \frac{1}{4}lm(-1)^{n-s}F_sF_{r+s+1} = (-1)^{n+s}cF_sF_{r+s+1} \qquad \square$$

[성질13] $H_{n+1-r}H_{n+1+r} - H_{n+1}^2 = (-1)^{n-r}cF_r^2$

[증명] a, b는 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 근이므로 $ab = -1$, $(b-a)^2 = 5$ 이다.

또한 $c = \frac{1}{4}lm$, $F_s = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^s - b^s)$ 이므로

$$H_{n+1-r}H_{n+1+r}-H_{n+1}^2=[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+1-r}-mb^{n+1-r})][\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+1+r}-mb^{n+1+r})]$$

$$-[\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^{n+1}-mb^{n+1})]^2$$

$$=\frac{1}{20}(l^2a^{2n+2}-lma^{n+1-r}b^{n+1+r}-lma^{n+1+r}b^{n+1-r}+m^2b^{2n+2})$$

$$-\frac{1}{20}(l^2a^{2n+2}-2lma^{n+1}b^{n+1}+m^2b^{2n+2})$$

$$=\frac{1}{20}lma^{n+1-r}b^{n+1-r}(2a^rb^r-b^{2r}-a^{2r})$$

$$=\frac{1}{20}lm(ab)^{n+1-r}(-1)(a^{2r}-2a^rb^r+b^{2r})$$

$$=\frac{1}{20}lm(-1)^{n-r}5F_r^2=\frac{1}{4}lm(-1)^{n-r}F_r^2=(-1)^{n-r}cF_r^2 \qquad \square$$

[성질13]에서 $r=1$과 n을 $n-1$로 바꾸어 놓으면 [성질11]를 얻을 수 있으므로 [성질13]의 특별한 경우임을 알 수 있다.

[성질14] $H_{n+1}^2+cF_n^2=pH_{2n+1}$

[증명] [성질13]에서 $r=n$ 로 놓으면 $H_{n+1-n}H_{n+1+n}-H_{n+1}^2=(-1)^{n-n}cF_n^2$ 이다. 이를 정리하면 $H_1H_{2n+1}-H_{n+1}^2=cF_n^2$ 따라서 $H_1=p$ 이므로

$pH_{2n+1}-H_{n+1}^2=cF_n^2$ 즉, $H_{n+1}^2+cF_n^2=pH_{2n+1}$ $\square$

우리는 여기서 매우 많은 다른 결과들도 추론할 수 있을 것이다. 그러나 포괄적인 목록을 가지고 문제삼지 않는다. 우리는 다만 유용한 피타고라스 정리에 대하여 언급한다.

[성질15] $\{2H_{n+1}H_{n+2}\}^2+\{H_nH_{n+3}\}^2=\{2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2\}^2$

[증명] $H_{n+1}=H_n+H_{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\{2H_{n+1}H_{n+2}\}^2+\{H_nH_{n+3}\}^2 &= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+\{H_n(H_{n+1}+H_{n+2})\}^2 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+\{H_nH_{n+1}+H_nH_{n+2})\}^2 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+H_n^2H_{n+1}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2H_{n+2}^2 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2(H_{n+1}^2+H_{n+2}^2) \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2(H_{n+1}^2+(H_n+H_{n+1})^2) \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2(H_{n+1}^2+H_n^2+2H_nH_{n+1}+H_{n+1}^2) \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+2H_n^2H_{n+1}^2+2H_n^3H_{n+1}+H_n^4 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+2H_n^2H_{n+1}(H_{n+1}+H_n)+H_n^4 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+2H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^4 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2+4H_n^2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^4 \\
&= (2H_{n+1}H_{n+2}+H_n^2)^2
\end{aligned}$$

□

이외에도 주목할만한 사실은 다음과 같다.

[성질16] $2^{n+1}H_n=\dfrac{l-m}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}5^iC_{2i}^n+(l+m)\sum_{i=0}^{n}5^iC_{2i+1}^n$

[성질17] $H_n^3+H_{n+1}^3=2H_nH_{n+1}^2+(-1)^nc$

[성질18] $\dfrac{H_{n+r}+(-1)^rH_{n-r}}{H_n}=F_{r+1}+(-1)^rF_{r-1}=(\dfrac{a}{2})^r+(-1)^r(\dfrac{2}{a})^r$

여기서 좌변의 표현은 p, q, n과는 관계가 없다.

[보기1] (a) $p=3,\ q=1$를 택할 때 (γ)는 (ζ)이 된다.

$$3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \cdots \qquad (\zeta)$$

여기서 $n=3$으로 놓으면 $H_3=7$, $H_4=11$, $H_5=18$이므로 [성질15]로부터 $(2\times11\times18)^2+(7\times29)^2=(2\times11\times18+7^2)^2$ 즉, $396^2+203^2=445^2$ 을 산출한다.

(b) p와 q에 대하여 이 값들을 다시 사용하고 (즉, $p=3$, $q=1$일 때), [성질18]에서 $n=7$, $r=2$라 놓으면, 우리는 $(123+18)/47=3=F_3+F_1$ 을 얻는다.

[보기2] 각각 $p=1$, $q=0$, $n=1$과 $p=1$, $q=0$, $n=2$일 때 나오는 단순한 결과들 $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ 를 주목하자.

$p=1$, $q=0$, $n=3$일 때, 우리는 간단히 계산한 후 양변을 4로 나누어 $(2\times3\times5)^2+(2\times8)^2=(2\times3\times5+4)^2$ 즉, $8^2+15^2=17^2$ 을 얻는다.

2) 특별한 경우의 피보나치 수열

피보나치 수열 (α)는 $p=1$, $q=0$로 택할 때 (γ)로부터 얻어진다. 이렇게 간단히 계산하여 $l=2(p-qb)=2$, $m=2(p-qa)=2$, $c=1$이므로 (δ)는 $u_n=(a^n-b^n)/\sqrt{5}$로 변형된다. 예를 들어, 위의 [성질 9], [성질 11]와 [성질 14]으로부터 비교적 잘 알려진 다음의 결과를 얻어진다.

[성질9-1] $u_{n-1}^2+u_n^2=u_{2n-1}$

[성질11-1] $u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2=(-1)^n$

[성질14-1] $u_{n+1}^2+u_n^2=u_{2n+1}$

여기서 우리는 어떤 조건에서 (p와 q에 관련된 조건) 피보나치 수열 (α)는 반복되는가? 분명히 $H_1=H_2=p$ (즉, $q=0$)일 때 (γ)로부터 (α)의 각각의 항은 Guest가 관찰할 때 단지 p배가 된다. 또한, p와 q가 연속적인 피보나치 수열인 경우 즉, $p=u_n$, $q=u_{n-1}$인 경우는 피해야만 한다.

왜냐하면 만약 $p=u_n,\ q=u_{n-1}$ 이면 새로운 수열은 첫째 항에서 $n-1$항까지 없는 피보나치 수열임을 알 수 있다. 즉,

$$u_n,\ u_n+u_{n-1},\ 2u_n+u_{n-1},\ 3u_n+2u_{n-1},\ 5u_n+3u_{n-1},\ \cdots,$$

위 수열은 $u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ u_{n+4},\cdots$ 와 똑 같기 때문이다. 특히, $p=8,\ q=5$이면 새로운 수열은 8, 13, 21, 34, 55, … 즉, 처음 5개의 항이 없는 피보나치 수열 (α)이다.

한편, $p=u_{n-1},\ q=u_n$이면, 우리는 피보나치 수열을 얻을 수 없다. 예를 들면, $p=5,\ q=8$이면 수열 5, 13, 18, 31, 49, 80, 129, …을 얻는다. 따라서 이 수열은 피보나치 수열이 아니다.

일반화된 수열 (γ)에서 $q=np$ (n은 정수)일 때, 수열

$$p\{1, 1+n,\ 2+n,\ 3+2n,\ 5+3n,\ 8+5n,\ 13+8n,\ \cdots\}$$

를 얻는다. 즉, 이 수열은 $p=1,\ q=n$인 일반화된 수열에 p를 곱하여 얻어지는 수열이다.

이제 보통 피보나치 수열에 관한 최근의 문제에 주목한다면, 우리는 다음과 같이 Ivanoff의 결과를 일반화할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여

$$H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}(la^n-mb^n),\quad a+1=a^2,\quad b+1=b^2\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} C_i^n H_{n-i} &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{l\sum_{i=0}^{n} C_i^n a^{n-i}-m\sum_{i=0}^{n} C_i^n b^{n-i}\right\}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{5}}\{l(1+a)^n-m(1+b)^n\}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{5}}\{la^{2n}-mb^{2n}\}=H_{2n}\end{aligned}$$

3. 피보나치 소수

피보나치 소수란, 쉽게 추측할 수 있듯이, 소수인 피보나치 수를 일컫는다. 피보나치 수는 다음과 같은 점화식을 가짐을 알고 있다.

$$u_1 = u_2 = 1,\ \ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\ (\mathrm{n} > 2)$$

또한 u_n은 u_{mn}을 나눈다는 사실을 알고 있다. 그러므로 u_n이 소수가 되기 위해서는 아래첨자(즉, 항의 번호)가 4가 되거나, 소수이어야 한다. 하지만 이것은 충분 조건은 아니다.

알려진 피보나치 소수들 u_n은 다음과 같다.

n	3	4	5	7	11	13	17	23	…
u_n	2	3	5	13	89	233	1597	28657	…

[표 2] 피보나치 소수

이 값들은 n = 50,000까지 Dubner Keller에 의해 검증되었다. 그는 위의 소수들 외에도 n값이 다음과 같을 때에도 아마도 소수가 될 것임을 알아내었다.

n = 9677, 14431, 25561, 30757, 35999, 37511*

(다른 모든 n < 50,000 에 대해서는 합성수이거나 1이다.)

아마도 무한히 많은 피보나치 소수가 있을 것처럼 보이지만, 아직 증명되지 않고 있다. 하지만 $n \geq 4$일 때, $u_n + 1$ 은 소수가 아님을 증명하는 것은 상대적으로 쉽다. 사실 $u_4 + 1 = 3 + 1 = 4$이다

몇몇의 사람들은 다음과 같은 질문을 했다. “피보나치 수의 자릿수들을 거꾸로 하면 어떨 것인가?” 예를 들어, $u_7 = 13$인데, 만약 자릿수들을 뒤집으면 31이 되고 이것은 역시 소수가 된다.(그래서 u_7을 가역적(reversable) 소수라 한다.) 자릿수들을 거꾸로 뒤집었을 때 소수가 되는 피보나치 수들

은 다음 항들로 시작된다.

n	3	4	7	9	14	17	21	25	…
u_n	2	3	13	34	377	1597	10946	46368	…

[표 3] 소수가 되는 피보나치 수

4. 피보나치 수의 특징

1) 피보나치 수에서의 주기

다음은 사람들이 이미 알고 있는 몇 가지 형태들이다.

①끝자리의 수(0,1,1,2,3,5,8,3,1,4,⋯)는 $n=60$에서부터 반복된다.

②끝의 두 자리(00,01,01,02,03,05,08,13,⋯)는 $n=300$에서부터 반복되는 주기가 있다.

③끝의 세 자리는, 주기 길이가 1,500이다.

④끝의 네 자리는, 주기 길이가 15,000이다.

⑤끝의 다섯 자리는, 주기 길이가 150,000이다.

⑥기타 등등, ...

2) 피보나치 수의 인수

우리는 다음과 같은 질문을 제기할 수 있다.

①피보나치 수에서 소수는 어디에 나타나는가?

②짝수는 어디에 나타나는가?

③3의 배수는 ?

④5의 배수는 ?

앞의 '질문'으로부터 다음과 사실을 알 수 있었을 것이다.

첫째, $u_n = F(n)$은 $u_{mn} = F(mn)$을 나눈다는 사실[3장 3절 성질6]과 $2 = F(3)$이므로 짝수인 피보나치 수들은 $F(3), F(6), F(9), F(12), \cdots, F(3k)$ 이다. 다시 말하면, 피보나치 수는 세 번에 한 번씩 2의 배수가 된다.

둘째, $F(n)$은 $F(mn)$을 나눈다는 사실과 $3 = F(4)$로부터 다음의 피보나치 수들은 3의 배수이다.

$$F(4), F(8), F(12), F(16), \cdots, F(4k)$$

즉, 피보나치 수는 네 번에 한번씩 3의 배수가 된다.

위의 사실은 다음을 시사한다.

①피보나치 수는 다섯 번에 한 번씩 $F(5) = 5$의 배수가 된다.

②피보나치 수는 여섯 번에 한 번씩 $F(6) = 8$의 배수가 된다.

따라서 $F(n)$은 $F(mn)$을 나눈다는 사실로부터 일반적인 규칙은 다음과 같다.

피보나치 수는 k번에 한 번씩 $F(k)$의 배수가 된다.

또는 수학적으로 표현하면 $F(nk)$는 모든 n과 $k = 1, 2, \cdots$에 대해서 $F(k)$의 배수이다. 이것은, 첨자가 합성수이면(소수가 아니면) 피보나치 수들도 합성수임을 뜻한다(한가지 예외가 있다. - 찾을 수 있는가?). 그러므로 우리는 다음과 같이 결론을 끌어낼 수 있다.

임의의 소수인 피보나치 수는 소수인 첨자를 가져야 한다.(한 가지 예외를 제외하고 - 찾을 수 있는가?)

불행히도, 역은 항상 참은 아니다. (즉, '첨자가 소수이면 피보나치수도 소수이다.'라는 명제는 참이 아니다.). 이것의 첫 번째 예는 19번째 위치인 $F(19)$이다. 4181=113×37이므로 $F(19) = 4181$은 소수가 아니다.

3) 파스칼 삼각형에서 피보나치 수

각각의 수는 그 수의 바로 위와 위의 왼쪽 수의 합이다. 예를 들면, 6은 3+3이다. 왼쪽 삼각형에서 각각의 수들은 바로 윗 행의 양쪽에 있는 두 수

의 합이다. 빈칸은 0으로 생각해서 각 행은 '1'로 시작한다.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
       ...
```

	열	0	1	2	3	4
행	0	1				
	1	1	1			
	2	1	2	1		
	3	1	3	3	1	
	4	1	4	6	4	1
	…			…		

파스칼(Pascal)의 삼각형은 다음에서 매우 유용하다.

(1) 확률계산

만약 n개의 동전을 임의로 탁자 위에 던지면, 그 중에서 H개의 앞면을 얻을 확률은 n번째 행, H번째 열의 수를 2^n으로 나눈 것이다. 예를 들면, 3개의 동전이면, n=3이므로 3번째 행을 이용해서

3개의 앞면 : H=3은 한 가지 방법 (HHH)

2개의 앞면 : H=2은 세 가지 방법 (HHT, HTH, THH)

1개의 앞면 : H=1은 세 가지 방법 (HTT, THT, TTH)

0개의 앞면 : H=0(즉, 모두 뒷면)은 한가지 가능한 방법이다. (TTT)

(2) 이항 전개에서의 계수 찾기 : $(a+b)^n$

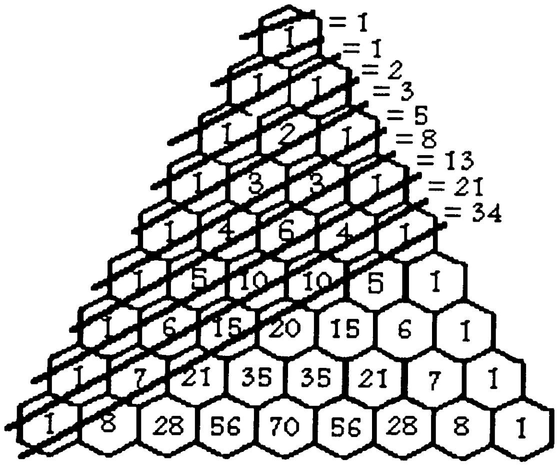
예) $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

파스칼의 삼각형에서 피보나치 수를 찾을 수 있겠는가? 해답은 [4장 1절 성질3]에 의하여 다음의 공식을 얻는다.

$$Fib(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$$

여기서 기호 ( )는 파스칼의 삼각형에 나타나는 n-k-1 번째 행, k번째 열의 수이다. 같은 공식은 $Fib(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$이다.

만약 여전히 도움이 안 되면, 다음 그림을 보라.



[그림 5] 파스칼의 삼각형

(3) 왜 대각선의 합은 피보나치수가 되는가?

파스칼(Pascal)의 삼각형에서 각각의 수는 바로 윗 행의 두 수의 합임을 기억하면 (예를 들어, 6은 윗 열의 두 개의 3의 합), 대각선의 합이 정말로 피보나치 수가 됨을 쉽게 볼 수 있다.

	행	0	1	2	3	4	5	6
열	0	1						
	1	1	1					
	2	1	2	1				
	3	1	3	3	1			
	4	1	4	6	4	1		
	5	1	5	10	10	5	1	
	6	1	6	16	20	15	6	1
	…				…			

각각의 수는 그 수위의 수와 바로 위 왼쪽 수의 합이다. 따라서 임의의 대각선 열의 수는 앞의 두 대각선 열의 수를 더해서 얻어진다. 다음에 나오는 그림을 보자. 모든 빈칸은 0이고, 0으로만 된 열을 첨가했다. 이 Zero열은 나중에 사용된 것이다.

	행	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1				◉	◈	▣
	1	0	1	1					
	2	0	1	2	1				
	3	0	1	3	3	1			
열	4	0	1	4	6	4	1		
	5	0	1	5	10	10	5	1	
	6	0	1	6	16	20	15	6	1
	7	0				…			
	…				…				

대각선 ◉의 수들은 대각선 위에 있다. 그리고 대각선 ◈와 ▣의 수들도 그 다음 대각선 위에 있다. 대각선 ◉의 수들의 합은 5이고, 대각선 ◈의 수들의 합은 8이다.

파스칼의 삼각형에 있는 수들은 모두 같은 방법으로 만들어지기 때문에(바로 위의 수와 위의 왼쪽 수를 더하는 방법), 대각선 ▣의 수는 대각선 ◉와 대각선 ◈의 수들의 합임을 알 수 있고, 모든 대각선 ◉와 대각선 ◈의 수들을 사용해서 모든 대각선 ▣의 수들을 만들 수 있음을 알 수 있다.

4) 10진 소수로서의 피보나치 수열

다음과 같은 소수의 특징을 살펴보자.

0.0112359550561…

이 소수는 피보나치 수 0, 1, 1, 2, 3, 5로 시작하는 것처럼 보인다. 이것을 다음과 같이 표현해 보면 정말로 그렇다.

0.0 +

1 +

1 +

2

3

5

8

13

21

…

0.011235955056179…

이 소수의 값은 얼마인가? 이 소수는 다음과 같이 표현될 수도 있다.

$$F(0)/10^1 + F(1)/10^2 + F(2)/10^3 + \cdots + F(n)/10^{n+1} + \cdots$$

이 값을 알기 위하여 10을 x로 치환한 일반식을 조사해 보자. P(x)를 피보나치 수를 계수로 하는 x의 다항식이라 하자.

$$P(x) = 0 + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \cdots$$

또는

$$P(x) = F(0)x + F(1)x^2 + F(2)x^3 + \cdots + F(n-1)x^n + \cdots \qquad (①)$$

소수 0.011234955…의 값은

$$0/10 + 1/100 + 1/1000 + 2/10^4 + + 3/10^5 + \cdots + F(n)/10^{n+1} + \cdots$$

이므로 $P(\frac{1}{10})$이 된다.

이제 $xP(x)$와 $x^2P(x)$를 정리하면

$$xP(x) = F(0)x^2 + F(1)x^3 + F(2)x^4 + \cdots + F(n-2)x^n + \cdots \qquad (②)$$

$$x^2P(x) = F(0)x^3 + F(1)x^4 + F(2)x^5 + \cdots + F(n-3)x^n + \cdots \qquad (③)$$

첫 번째 방정식(①)에서 마지막 두 방정식(②)와 (③)을 빼고, 우변은 간단히 정리하면 $P(x)$는 단지 x만으로 표시할 수 있다.

$$P(x) = F(0)x + F(1)x^2 + F(2)x^3 + F(3)x^4 + \cdots + F(n-1)x^n + \cdots$$

$$xP(x) = F(0)x^2 + F(1)x^3 + F(2)x^4 + \cdots + F(n-2)x^n + \cdots$$

$$x^2P(x) = F(0)x^3 + F(1)x^4 + \cdots + F(n-3)x^n + \cdots$$

$$(1-x-x^2)P(x) = F(0)x + \{F(1)-F(0)\}x^2 + \{F(2)-F(1)-F(0)\}x^3 + \cdots$$

처음 두 항을 제외하고, x^n의 계수인 일반항은 $F(n)-F(n-1)-F(n-2)$이 된다. $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ 이므로, 처음 두 항을 제외한 모든 항은 0이 된다. 이것은 우리가 $xP(x)$와 $x^2P(x)$를 사용한 이유이다. 따라서

$$(1-x-x^2)P(x) = 0 + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots + 0x^n + \cdots$$

$$(1-x-x^2)P(x) = x^2$$

즉, $P(x) = \dfrac{x^2}{1-x-x^2} = \dfrac{1}{x^{-2}-x^{-1}-1}$

그러므로 이제 우리가 구하는 소수는 $P(\frac{1}{10})$이므로, 우변에서 그 정확한 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{100-10-1} = \frac{1}{89} = 0.0112358\cdots$$

P(x)에 대한 식으로부터 다음의 결론을 끌어낼 수 있다.

$$\frac{10}{89} = 0.112359550561\cdots$$

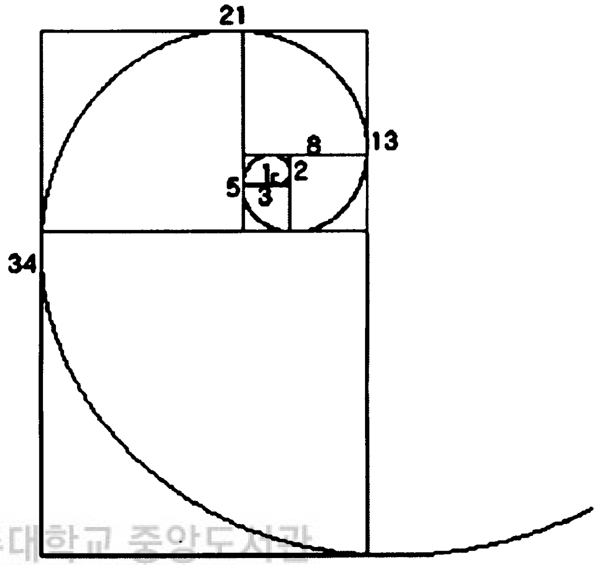
만약 $x = \frac{1}{100}$ 이면,

$$P(\frac{1}{100}) = 0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ \cdots = \frac{1}{10000-100-1} = \frac{1}{9899}$$

그리고 $\frac{100}{9899} = 0.010102030508132134 55\cdots$ 기타 등등...

5) 피보나치 나선형 곡선

피보나치 정사각형과 나선형을 살펴보자. 어디에서 멈추든, 항상 직사각형을 얻게 된다. 왜냐하면 더해질 다음 정사각형은 현재 직사각형의 가장 긴 변에 의해 결정되기 때문이다. 또한 그런 가장 긴 변은 이전에 더해진 두 정사각형의 변의 길이의 합이다. 각 변의 길이가 1인 두 정사각형으로 시작했으므로 왜 정사각형의 변의 길이가 피보나치 수가 되는지 알 수 있다(그 다음은 이전 두 변의 합이다.).



[그림 6] 등각나선

◆등각 나선을 작도하는 방법

①한 변의 길이가 1인 정사각형으로 시작한다.

②한 변의 길이가 1인 또 다른 정사각형을 그 위쪽에 그린다.

③한 변의 길이가 2인 정사각형을 그 왼쪽에 그린다.

④한 변의 길이가 3인 정사각형을 그 아래쪽에 그린다.

⑤이와 같이 한 변의 길이가 5, 8, 13, 21, 34인 정사각형들을 시계 반대 방향으로 차례로 그린다.

지면이 허락하는 데까지 정확하게 필요한 크기의 정사각형들을 그린 다음, [그림6]처럼 각 정사각형의 한 변을 반지름으로 하는 사분원을 차례로 그려 준다.

만들어지는 것은 등각 나선 또는 대수형 나선이라고 불려지는 거의 완벽

에 가까운 아름다운 곡선이다. 즉, 시각적으로 길고 완만한 나선이라고 할 수 있다. 이 특유한 나선을 이루는 정사각형의 변의 길이가 피보나치 수열을 이룬다. 이것이 등각 나선이라고 불리는 이유는 그것의 중심으로부터 나온 반지름은 이 나선을 똑같은 각도로 자르기 때문이다.

또한, 각 직사각형은 이전의 정사각형들로 만들어져 직사각형을 만드는 조각그림 맞추기 놀이이다. 모든 정사각형과 직사각형들은 길이가 피보나치 수인 변을 갖는다. 이런 정사각형과 직사각형들의 형태에서 보여지는 수학적인 관계는 무엇인가? 직사각형의 넓이는 이를 구성하는 모든 정사각형의 넓이들의 총합으로 표현할 수 있다. 그림에서 보듯이

$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2=13\times21$

또한 작은 직사각형들의 면적도

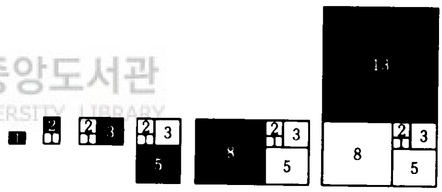
$1^2+1^2=1\times2$

$1^2+1^2+2^2=2\times3$

$1^2+1^2+2^2+3^3=3\times5$

$1^2+1^2+2^2+3^3+5^2=5\times8$

$1^2+1^2+2^2+3^3+5^2+8^2=8\times13$



[그림 7] 직사각형의 면적

이 그림은 실제로, 피보나치 수의 제곱을 얼마만큼이든지 더할 때에도 성립한다는 사실이 납득할만한 증명이다. 그것은 항상 제곱의 합에 쓰여진 가장 큰 피보나치 수에 다음 피보나치 수를 곱한 값이다. 이 관계를 수학적인 언어로 표현하는 것이 더 좋을 것이다.[4장 1절 성질10]

$1^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+u_n^2=u_n u_{n+1}$ [$n\geq1$인 모든 n에 대하여 성립]

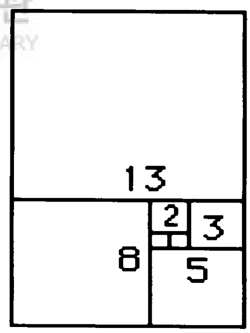
Ⅴ. 피보나치 수열과 황금비

1. 황금직사각형과 황금비

황금직사각형(Golden rectangle)과 피보나치 수열의 황금비(golden ratio) [또는 황금평균(Golden mean)]·황금분할의 관계에 대해 논하고자 한다.

황금직사각형은 가로와 세로의 비가 황금률인 직사각형이다. 다시 말하면, 황금직사각형(Golden rectangle)의 세로가 2피트(ft)이면, 가로의 길이는 대략 $2\times(1.62)=3.24$(ft)이다.

[그림8]에서 보는 것처럼 황금직사각형이 있으면, 정사각형을 잘라내어 남는 것이 직사각형이 되도록 할 수 있다. 남아 있는 직사각형은 여전히 황금직사각형이 될 것이다. 이런 정사각형들을 계속 잘라 내면서 더욱 더 작은 황금직사각형 들을 만들 수 있다.



[그림 8] 황금직사각형

피보나치 수열을 가지고 황금직사각형에서 했던 것을 반대로 할 수도 있다. 하나의 정사각형으로 시작해 보자. 같은 크기의 정사각형을 붙여서 새로운 직사각형을 만든다. 직사각형의 긴 변의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 계속해서 붙여 나간다. 긴 변의 길이는 항상 연속되는 피보나치 수가 된다. 결국, 큰 직사각형은 황금직사각형처럼 보일 것이다. 더 오래 계속하면 할수록, 더 황금직사각형에 가까워진다.

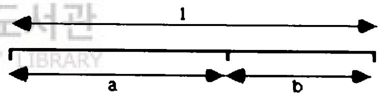
피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...에서 오른쪽으로 가면 갈수록(항이 커질수록) 한 항의 그 전 항에 대한 비는 황금비에 접근해 간다.[제4장 1절 성질21]

이때, 선분을 황금비로 나누는 것을 황금분할(또는 파이)이라 한다. 다시 말하면 [그림 9]처럼 평면기하에서, 한 선분을 2부분으로 나눌 때에 전체에 대한 큰 부분의 비와 큰 부분에 대한 작은 부분의 비가 같게 되는 분할을 말한다.

황금비는 약 1.6180339887498948482인 특별한 수이다. π와 같이 황금비의 소수점 자릿수는 반복되지 않고 무한히 계속된다.

[그림 9]에서 전체 길이 1을 한 점에 의하여 두 부분으로 나눌 때, 긴 길이를 a, 짧은 길이를 $b(=1-a)$라 하고

(전체길이) : (긴 길이) = (긴 길이) : (짧은 길이)의 관계를 만족하는 분할을 황금분할이라 한다. 이때, (긴 길이) : (짧은 길이)를 황금비(golden ratio)라 한다.



[그림 9] 황금분할

여기서

$a^2=1-a$ 즉, $a^2+a-1=0$으로부터 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이고, a는 양의 값을 가지므로 음의 값을 버리면 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(=0.618\cdots)$를 얻는다. 따라서 황금비는

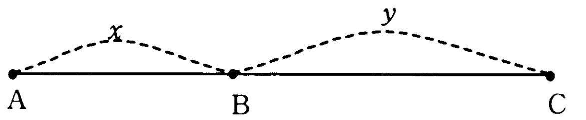
$$a : b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2}=1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=1 : 0.618\cdots$$

또는 짧은 길이 : 긴 길이$=b : a=1 : 1.618\cdots$이다.

또한 황금비를 어떤 값 x의 역수 $\dfrac{1}{x}$과 x에서 1을 뺀 값 $x-1$이 같은 값이라 말하기도 한다. 즉, $\dfrac{1}{x}=x-1$로부터 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$를 구할 수 있다.

선분을 긋고 양 끝점을 A와 C로 표시하자. 짧은 선분 AB와 긴 선분 BC

의 비가 긴 선분 BC와 전체 선분 AC의 비와 같도록 점 B를 찍는다.

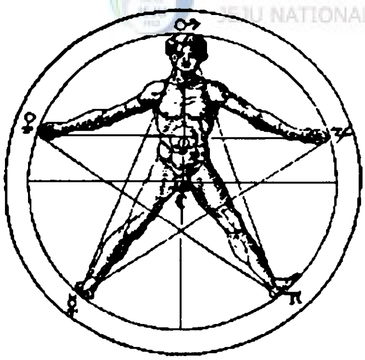


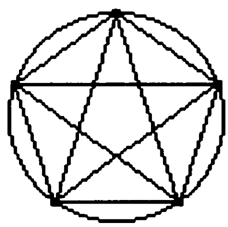
이 선분의 두 부분의 길이의 비는 황금률이 된다.

식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

황금비는 $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$일 때, y와 x 사이의 비이다. 이 식은 위의 식과 같다는 것을 알 수 있다. 사실, AB 대신 x를, BC 대신 y를 대입한 것이다. 위의 식에서 x를 1이라 하자. 그러면, $\frac{1}{y} = \frac{y}{y+1}$이다. y에 관한 이 방정식을 풀면, 해는 위에서 주어진 값이다. 즉, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.62$이다.



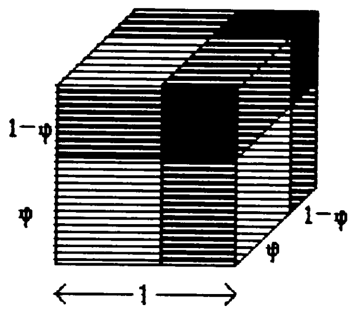


우리는 황금비(Golden Ratio) 또는 황금수(Golden number)를 뒤에서 그리스 문자 Phi(Φ)로 부를 것이다. 몇몇의 수학자들은 다른 그리스 문자 tau(τ)를 쓰기도 한다. 우리는 또한 소문자 phi(ϕ)를 황금률과 매우 관련이 되는 값을 표시하기 위해 사용할 것이다.

2. 파이(Phi)의 약사와 개념

1) 파이(Phi)의 약사

기원 전 약 365년에서 기원 전 300년까지 살았던 그리스의 수학자 유클리드(Euclid)는 <기하학 원론(Elements)>을 저술했다. 이것은 기하학에 관한 13권의 책의 집합이다. 초급 과정에서 기하학을 가르칠 때에 이 책은 금세기까지도 가장 중요한 수학 저작이다. 또한 수학에도 큰 영향을 끼쳐 왔다. 이 책은 공리(axiom) 혹은 공준(postulate)이라고 불리는 기본 정의들로부터 출발한다. 한 가지 예는 다음의 다섯 번째 공리(평행선의 공리)이다.

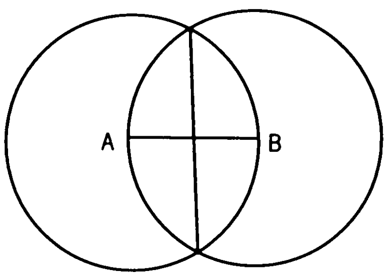


[그림 14] 황금비

주어진 점을 지나면서 다른 직선에 평행한 직선은 오직 하나뿐이다.

이것으로부터 유클리드는 기하학에 대한 더 많은 정리(proposition)라고 불리는 결과들을 발전시켰다. 그는 정리들을 순전히 공리와 이전에 증명된 정리들에 근거해 논리만을 사용해 증명했다. 그 정리들은 직선과 원을 그릴 수 있는 자와 컴퍼스만을 사용해 기하학적 도형을 그리는 것을 포함한다.

예를 들어, 1권의 정리 10은 선분 AB의 중점을 찾는 방법을 설명한다.



[그림 14] 중점

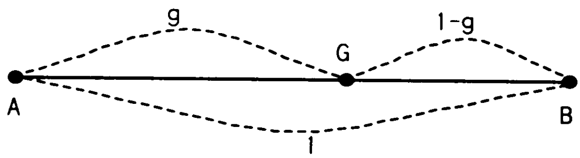
①컴퍼스의 한 끝을 선분의 한 끝 A에 놓는다.

②컴퍼스의 다른 쪽 끝을 선분의 다른 쪽 끝 B에 위치시키고, 원을 그린다.

③컴퍼스의 위치를 바꿔서 또 다른 원을 마찬가지 방법으로 그린다.

④이렇게 하면 두 원이 만나는 두 개의 점이 생긴다. 두 점을 연결한 선분은 원래의 선분 AB을 수직 이등분한다.

6권의 정리 30에서 유클리드는 직선을 평균비(mean ratio)와 극대비(extreme ratio)로 나누는 방법(우리는 선분에서 황금분할점(golden section point) G를 찾는 방법이라고 부른다.)을 보여주고 있다.



[그림 15] 황금분할점

유클리드가 사용한 이 용어의 의미는 선분에서 작은 부분 GB와 긴 부분 AG와의 비(즉, GB/AG)는 긴 부분 AG와 전체 선분 AB와의 비(즉, AG/AB)와 같다는 것이다. 만약 AB의 길이를 단위 길이 1로 하고, AG의 길이를 g라고 두면(그러면 GB의 길이는 1-g가 된다.), 위의 정의는 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{GB}{AG}=\frac{AG}{AB} \text{ 또는 } \frac{1-g}{g}=\frac{g}{1}.$$

따라서 $1-g=g^2$이다.

이전에 $\Phi^2=\Phi+1$로 정의한 것에 유의하라. 여기서는 $g^2=1-g$ 또는 $g^2+g=1$이다. 이 방정식을 풀면 다음의 해를 얻을 수 있다.

$$g=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } g=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

그러므로 제곱한 수와 그 자신을 더해서 1이 되는 수는 2개가 있다. 우리의 기하학적 문제에서는 g가 양수이어야 하므로 첫 번째 값이 우리가 원하는 해이다. 이 값은 또한 우리가 phi라고 명명했던 Phi-1과 같다.

2) 파이(Phi)의 개념

(1) 제곱을 이용한 정의

제곱해서 그대로 남아 있는 수는 0과 1 두 개가 있다. 다른 수들은 제곱했을 때 커지거나 작아진다.

Phi의 개념을 정의하면 다음과 같다.

제곱한 값이 1을 더한 값과 같은 수 또는 수학적으로는 $\Phi^2=\Phi+1$이다. 사실, 이 성질을 만족시키는 수는 두 개가 있다. 하나는 Phi이고, 다른 하나는 소수점 이하 자릿수들을 써보면 Phi와 밀접하게 관련되어 있다. 이 두 값을 계산해 보면 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$와 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$가 나온다. 계산기를 사용하여 이 두 수를 계산해 보면 1.6180339887... 과 -0.6180339887... 임을 알 수 있다.

이 두 수의 소수점 이하 수들이 동일하다는 것을 알 수 있는가?

우리는 첫 번째 값을 Phi(Φ)라 부르고, 두 번째 수는 -phi($-\phi$)라 부르기로 하자. 큰 값 1.618...을 원할 때는 대문자를 사용할 것이고, 작은 값 0.618...을 사용할 때는 소문자(ϕ)를 사용할 것이다. Phi는 1+phi임을 알 수 있다. 위의 관계식을 사용하면, phi(ϕ)에 Phi(Φ)를 곱하면 정확히 1임을 보일 수 있다. 따라서 우리는 Phi와 phi의 세 가지 성질을 증명할 수 있다. 이 세 가지 성질들은 우리가 이미 사용했으며 앞으로 유용하게 쓰일 것임을 알게 될 것이다.

$$\Phi=1+\phi,\quad \Phi=1/\phi,\quad \phi=1/\Phi$$

(2) 역수를 이용한 정의

우리는 Phi를 다음 방정식의 해 중의 한 값으로 정의할 수도 있다.

$$\Phi^2=\Phi+1$$

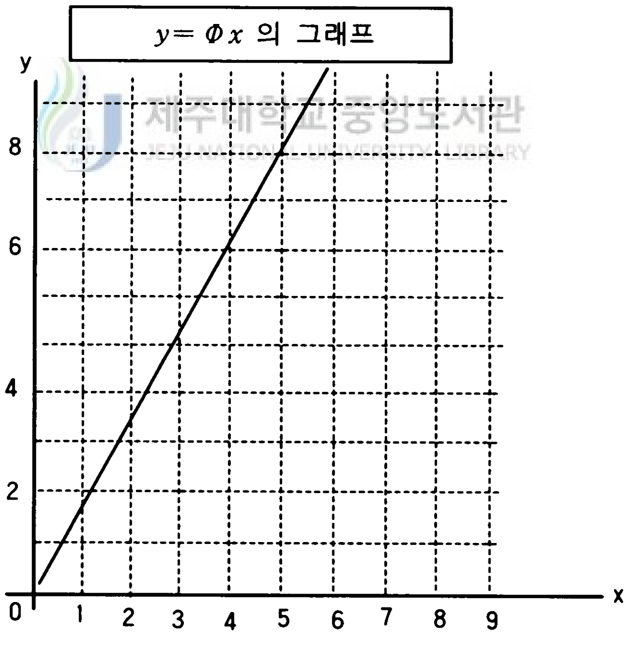
이 방정식의 양변을 Phi(Φ)로 나누면 $\Phi=1+1/\Phi$이다. 이것이 Phi의 또

다른 정의이다. 즉, 자신의 역수에 1을 더한 수가 자기 자신과 같아지는 수를 Phi로 정의할 수 있다.(역수란 1을 자기 자신으로 나눈 수를 말한다. 예를 들면, 2의 역수는 1/2이고 9의 역수는 1/9이다.)

3) Phi와 피보나치 수

<피보나치와 자연(Fibonacci and Nature)>에서 우리는 연속하는 피보나치 수의 비가 Phi에 접근함을 보았다. 여기서 다른 방법으로 그 연관성을 찾을 수 있다. 즉, Phi로부터 피보나치 수를 발견할 수 있을 것이다. 아래의 그래프는 기울기가 Phi인 직선이다. 즉, 직선의 방정식은

$y = 1.6180339\cdots \times x$



[그림 16] Phi의 그래프

Phi는 어떤 두 정수의 비로도 쓸 수 없으므로, 그래프는 절대로 (i, j) 형태의 점을 지날 수 없다(여기서 i와 j는 모두 0보다 큰 정수이다.). 그러므로 우리는 다음과 같은 질문을 할 수 있다.

이 Phi직선에 가장 가까운 정수 좌표 점은 어디인가?

원점에서 시작해서 직선을 따라 올라가 보도록 하자. 첫 번째 점은 물론 (0, 0)이다. 정확히 직선 위의 점(i, j)를 만드는 두 정수 i=0과 j=0이 있다. 사실상 모든 직선 y=kx는 원점을 지나므로 이 두 값을 무시할 수 있다.

두 번째 점은 (0, 1)처럼 보인다. 물론 (1, 2)가 더 가까워 보인다. 다음으로 더 가까운 점은 직선에 더 근접해 보인다: (2, 3), (3, 5)는 직선에 더 근접해 있다. 지금까지의 'Phi 직선에 가까운 정수 좌표'를 정리해 보면 다음과 같다: (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5,8), (8,13), …

다음으로 가장 가까운 점은 어느 것인가? 이 결과가 놀라운가? 이런 점의 좌표들은 연속하는 피보나치 수들이다. 이런 점들은 피보나치 점들이라고 부르자. 각각의 피보나치 점들에 대한 y/x의 비는 Phi=1.618...에 점점 가까워진다. 하지만 이 그래프에서 우리가 볼 수 있는 흥미로운 점은 피보나치 점들은 Phi 직선에 가장 가까운 점들이라는 것이다.

4) phi의 특성

(1) 연분수를 이용한 Phi(Φ)의 식

마지막의 방정식을 다시 한 번 살펴보자.

$$\Phi = 1 + 1/\Phi$$

이것은 Phi가 있는 곳에는 어느 곳이나 (1+1/Phi)를 대입할 수 있다는 것을 의미한다. 윗 식의 우변에서 Phi 대신 (1+1/Phi)를 대입하면

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}$$

사실, 우리는 이런 식의 대입을 계속 반복할 수 있고, 그러면 다음을 얻는다.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

이 이상한 표현을 연분수(continued fraction)라고 부른다. 왜냐하면 분수 밑에 분수를 계속해서 만들고, 그 분수 밑에 또 분수를 계속해서 만들고 있기 때문이다.

(2) Phi의 유리수적 근사값

Phi에 대한 연속 분수를 여러 위치에서 멈춘다면, Phi에 대한 근사값을 얻을 수 있다.

Phi = 1

Phi = 1 + 1/1 = 2

Phi = 1 + 1/(1 + 1/1) = 1 + 1/2 = 3/2

Phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1)) = 1 + 1/(3/2) = 1 + 2/3 = 5/3

...

이 수열이 연속하는 피보나치 수들의 비임을 알겠는가? 놀랍지 않은가?

또한 다음의 근사값을 얻기 위해서는 단지 이전 근사값의 역수에 1을 더하면 된다. 수학적인 용어로, 이 값들은 Phi에 수렴한다. 수렴하는 수열은

1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 13/8, 21/13, ...

(3) 피보나치 수들은 왜 수렴하는가?

여기서 우리는 위에서 구한 근사값들에서 왜 피보나치 수들이 나타나는지를 정확히 보일 것이다.

위 수열은 1/1로 시작한다. 이것은 $\frac{u_2}{u_1} = \frac{F(2)}{F(1)}$이다. 여기서 $u_n = F(n)$은 n번째 피보나치 수을 뜻한다.

다음에 나타나는 분수를 얻기 위해서는 처음 분수의 역수를 취해서 거기에 1을 더해주면 된다. 그러므로 F(2)/F(1) 다음에 나타나는 것은

$$1+\frac{1}{F(2)/F(1)}=1+\frac{F(1)}{F(2)}=\frac{F(2)+F(1)}{F(2)}=\frac{F(3)}{F(2)}$$

그러므로 처음 두 개의 피보나치 수의 비로 시작하면 Phi의 다음 근사값은 다음 두 개의 피보나치 수의 비가 된다. 이것은 항상 성립한다.

만약 F(n)/F(n-1)이 Phi의 근사값이라면, 다음 항의 근사값도 F(n+1)/F(n)이다.

우리는 연속하는 두 피보나치 수의 모든 비들로써 Phi값에 더욱 근접해지는 근사값을 얻을 수 있다.

5) 2000자리까지 Phi의 값

Phi의 값은 $(\sqrt{5}+1)/2$이고, phi의 값은 $(\sqrt{5}-1)/2$이다. 두 수 모두 소수점 이하의 수들은 동일하다. 또한 둘 다 무리수이다. 즉, 두 수는

①어떤 정수 M과 N으로도 M/N으로 나타낼 수 없다.

②소수점 이하의 자릿수들은 결코 반복되지 않는다. 유리수처럼 일정한 주기로 반복되지 않는다.

여기에 소수점 이하 2000자리까지의 Phi의 값이 있다. phi의 값은, 1.6으로 시작하는 것 대신 0.6으로 시작하는 것 외에는 Phi의 값과 동일하다.

6) 계산기를 이용한 Phi의 값

계산기를 이용한 Phi의 값은 다음과 같은 방법으로도 가능하다.

(1) 역수를 이용한 계산 방법

계산기에 1을 누른다. 역수를 취하고, 1을 더한다. 위 수의 역수를 취하고, 1을 더한다. 다시 위의 역수를 취하고, 1을 더한다.

이 두 연산을 계속하면 곧 그 값이 크게 변하지 않음을 알게 된다. 그 값은 한 특별한 값 1.62803...에 수렴해 갈 것이다. 사실, 0을 제외한 어떤 수로 시작해도 그 값은 언제나 똑같은 값 Phi로 수렴해 갈 것이다. 왜 그럴까?

공식 $\Phi=1+1/\Phi$는 두 연산이 어디서 왔는지를 보여준다.

위에서 연분수의 가장 간단한 근사값을 1로 시작했음에 주의하라. 처음 추정한 값이 어떤 값이라도 결국은 같은 값으로 수렴한다는 것을 보이는 것은 약간 더 어렵다.

(2) 제곱근을 이용한 계산방법

계산기를 이용해 Phi를 얻는 또 다른 방법이 있다.

임의의 수(정수나 분수)를 입력하라. 단, 그 수는 -1보다는 커야 한다.

1을 더하라. 그 결과의 제곱근을 구하라.

이 두 연산을 반복하면 그 값 역시 Phi로 수렴함을 알게 될 것이다. 왜? 이것은 Phi의 다른 정의식을 사용했다.

$$\Phi^2=\Phi+1$$

또는 양변에 제곱근을 취하면 $\Phi=\sqrt{\Phi+1}$이다. 왜 우리가 -1보다 큰 수로 시작해야만 했는지를 알겠는가?

3. 피보나치 수와 황금수

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ……에서 이웃하는 항의 비로 구성되는 다음 수열 $\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\}$의 극한은 어떻게 되겠는가?

$$\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\}=\{\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{5}{3}=1.\dot{6},\ \frac{8}{5}=1.6,\ \cdots\}$$

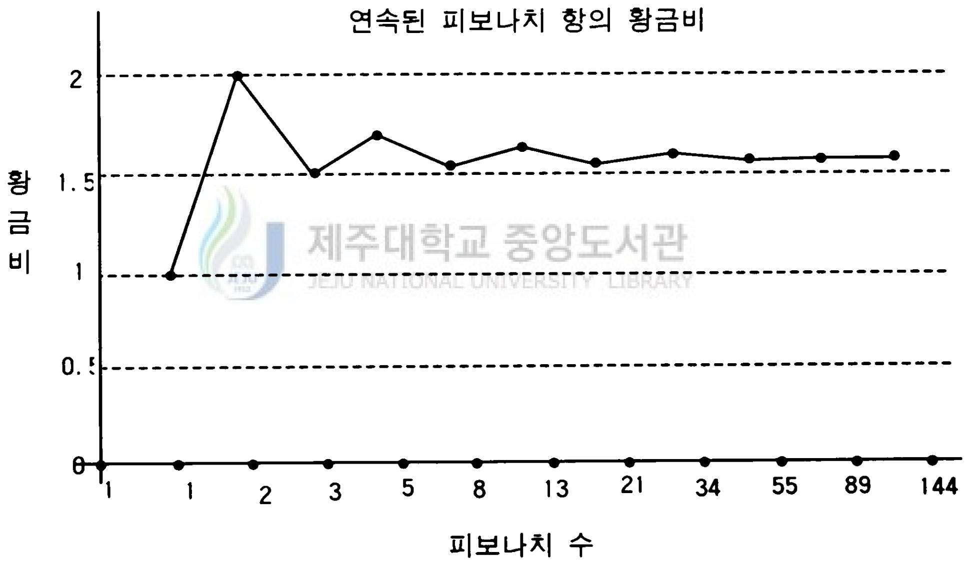
이 수열의 극한은 황금비 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로 이와 관련된 자연 현상과 건축· 예술 분야 등에서 흥미 있게 많이 응용되고 있다.

각 항을 바로 전 항으로 나누면 다음과 같은 수들의 수열을 얻게 된다.

$\frac{1}{1}=1.000000$	(+)	$\frac{1}{1}=1.000000$	(−)
$\frac{1}{2}=0.500000$	(−)	$\frac{2}{1}=2.000000$	(+)
$\frac{2}{3}=0.666666$	(+)	$\frac{3}{2}=1.500000$	(−)
$\frac{3}{5}=0.600000$	(−)	$\frac{5}{3}=1.666666$	(+)
$\frac{5}{8}=0.625000$	(+)	$\frac{8}{5}=1.600000$	(−)
$\frac{8}{13}=0.615384$	(−)	$\frac{13}{8}=1.615384$	(+)
$\frac{13}{21}=0.619047$	(+)	$\frac{21}{13}=1.615384$	(−)
$\frac{21}{34}=0.617647$	(−)	$\frac{34}{21}=1.619047$	(+)
$\frac{34}{55}=0.618181$	(+)	$\frac{55}{34}=1.617647$	(−)
$\frac{55}{89}=0.617977$	(−)	$\frac{89}{55}=1.618181$	(+)
$\frac{89}{144}=0.618044$	(+)	$\frac{144}{89}=1.617977$	(−)
$\frac{144}{233}=0.618025$	(−)	$\frac{233}{144}=1.618055$	(+)
$\frac{233}{377}=0.618037$	(+)	$\frac{377}{233}=1.6180285$	(−)

이로부터 '피보나치 비는 무리수 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$로 나타낼 수 있는 황금비로 수렴한다.'고 말한다. 이 특수한 수를 보통 '파이(phi)'라 부르는데, 기호로는 ϕ로 나타낸다. 어떠한 무리수도 소수 형태로 그 정확한 값을 나타낼 수는 없지만, 실용성을 고려하여 보통 0.618 정도의 값을 이 수에 대한 정확한 값으로 여긴다. $\frac{5}{8}$(≒0.625)라는 간단한 값도 ϕ의 한 근사치로 많이 사용되는데, 물론 $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$,⋯ 등의 값은 더욱 정확한 근사값이 된다.

이것을 그래프로 그려보면 보다 쉽게 알 수 있다.



[그림 17] 피보나치 수와 황금비

피보나치 수열에서 연속된 두 수의 비들은 특별한 값으로 접근해 가는 것처럼 보인다. 이 값을 황금률(golden ratio) 또는 황금수(golden number)라 부른다. 그 값은 약 1.61804이다.

황금률 1.618034는 또한 황금분할(golden section), 황금평균(golden mean), 또는 단순히 황금수(golden number)라고도 불린다. 황금률은 종종 그리스 문자 Phi(대문자) Φ로 표시된다. 이 값과 밀접한 관계가 있는 것으

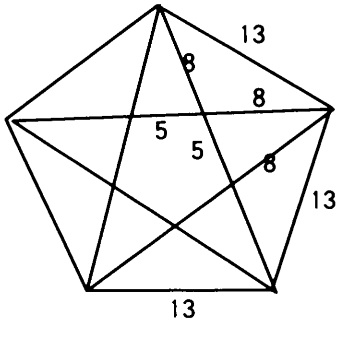
로는 보통 그리스 문자 phi(소문자) ϕ로 표시하는 값이 있다. 이것은 Phi에서 소수 부분만을 취한 값으로 약 0.618034이다.

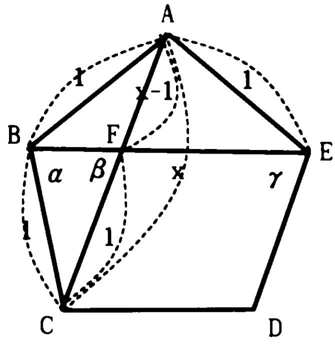
4. 정오각형과 황금비

1) 정오각형의 신비

우주의 상징(symbol)으로 정12면체를 중요시한 피타고라스는 이 동형의 각 면이 모두 같은 크기의 정오각형으로 되어 있다는 사실에 주목했다. 그런데 정오각형의 각 변을 연장하면 소위 펜타그램(pentagram)이라는 별 모양의 5각형이 생기는데, 피타고라스는 그 아름다움에 어찌나 감동했던지 그것으로 자기 학교 아카데미의 표상으로 삼았을 정도였다.

오각형의 변의 길이의 비는 대개 이웃하는 두 피보나치 수의 비를 나타내며 변의 길이가 크면 클수록 이 법칙은 더 정확해 진다. 예를 들면, 정오각형의 한 변의 길이가 피보나치 수이면 대각선의 길이는 피보나치 수열에서 그 다음의 수이다. 또한 이러한 정오각형의 변과 대각선의 길이는 피보나치 수열의 이웃하는 두 수로 짝을 이룬다. 이러한 원리는 피보나치의 수 55, 89, 144로 보여준다.





[그림 18] 정오각형와 황금비

한 변의 길이가 1인 정오각형ABCDE에서 두 대각선이 만나는 점을 F라고 하자.

그러면 $\angle\alpha=\angle\gamma$, $\angle BAC=\angle BCA=\angle ABE=\angle AEB=36^\circ$,

$\angle\alpha=\angle\gamma=72^\circ$, $\angle ABF+\angle BAC=\angle BFC=72^\circ$,

$\angle\beta=\angle\gamma$ 이므로 $AC \parallel ED$ 이고 $\angle\alpha=\angle\beta$ 즉, $\triangle BCF$는 이등변삼각형이다. 따라서 $CB=CF=1$이다.

그런데 $\triangle ABC$와 $\triangle BFA$는 각이 모두 같기 때문에 서로 닮은 이등변삼각형이다. 닮은 삼각형끼리 같은 각에 대한 변의 비는 같기 때문에

$$\frac{FA}{BC}=\frac{AB}{CA} \text{ 즉, } \frac{FA}{CF}=\frac{AB}{CA}$$

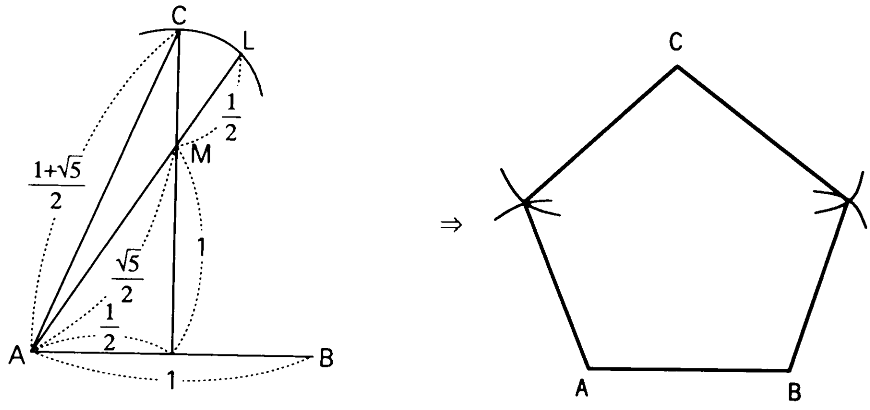
$FA=x-1$, $CF=AB=1$, $CA=x$를 위 식에 대입하면

$$\frac{x-1}{1}=\frac{1}{x} \text{ 즉, } x^2-x-1=0$$

여기서 x의 두 값 중에서 양수를 택하면 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이 된다. 이것이 한 변의 길이를 1이라고 할 때의 정오각형의 대각선의 길이다.

2) 정오각형 작도와 황금비

위의 사실를 발판으로 하여 피타고라스(또는 피타고라스학파)는 다음과 같이 정오각형을 작도했다.



[그림 19] 정오각형의 작도

먼저 선분 AB의 길이를 1로 잡고, 그 중점을 지나는 수직선 위에 1만큼의 거리에 점 M을 정하면, 직각삼각형의 빗변 AM의 길이는 피타고라스의 정리에 의해서

$$AM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{이다 .}$$

AM을 더 연장시켜서 그 위에 ML의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되도록 점 L을 잡으면

$$AL=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

즉, AL은 한 변의 길이 1인 정오각형의 대각선이 된다. 점 A를 중심으로, 그리고 대각선의 길이 AL을 반지름으로 하여 원을 그려보고 아까의 수직선과 만난 점을 C라고 하면 이 C는 정오각형의 한 꼭지점이다. 이제 남은 것은 그 밖의 두 꼭지점을 정하는 일이다. 그것은 A, C를 중심으로 해서 반지름 1인 원을 그리고, 또 마찬가지로 B, C를 중심으로 원을 그려서 만난 점을 각각 찾아내면 된다.

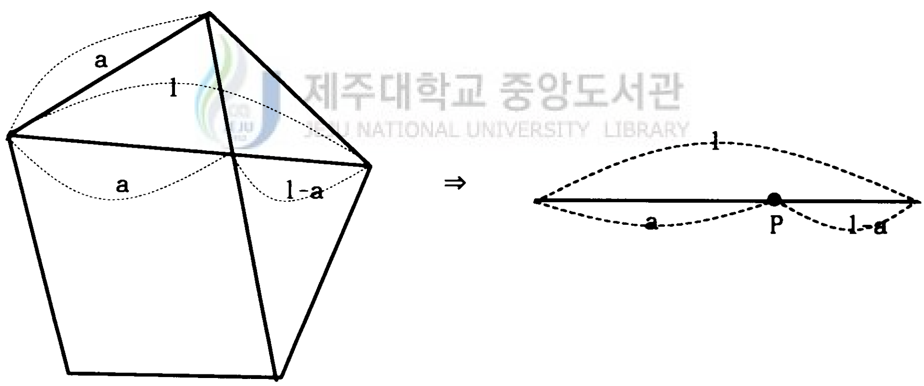
정오각형을 작도하는 열쇠를 쥐고 있는 것은 대각선의 길이라는 것을 알았다. 그리고 그 길이는 다음과 같이 구할 수 있었다.

"정오각형의 대각선의 길이는 한 변의 길이와 그 반(半)인 선분을 각각 높이, 밑변으로 하는 직각3각형의 빗변에 반변(半邊)을 더한 선분의 길이와 같다."

여기서 얻은 성과는 미술분야에도 대단히 큰 영향을 주었다. 미리 결론부터 이야기한다면 어떤 선분이 정해져 있을 때

$$a : l = (l-a) : a \quad \text{즉,} \quad a^2 = l(l-a)$$

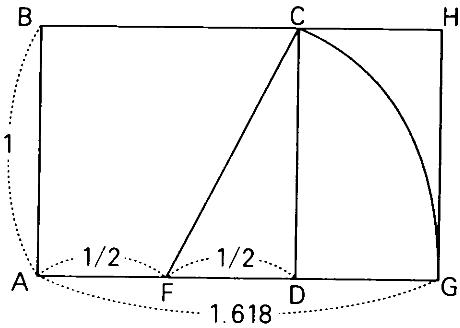
라는 식을 성립시키는 점을 잡는 것을 "선분을 그 점에서 황금분할(黃金分割)한다."고 한다.



[그림 20] 정오각형과 황금분할

지금 위의 비례식에서 $a=1$이라고 하면 $1=l(l-1)$ 즉, $l^2-l-1=0$

이 2차 방정식의 양의 근은 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다. 그런데 $\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236$이기 때문에 l 의 길이는 약 1.618이 된다. 바꿔 말하면, 황금분할은 선분의 길이를 약 1 : 1.618의 비(比)로 나눈다는 것을 뜻한다.



[그림 21] 황금직사각형의 작도

이 관계가 [그림21]처럼 가로와 세로의 비로 나타날 때 직사각형은 가장 아름다운 모양을 지니게 된다는 사실을 피타고라스가 수학적으로 밝혀낸 것이다.

Ⅳ. 피보나치 수열의 여러 현상

1. 피보나치 수열과 자연현상

1) 꿀벌 가계도와 피보나치 수열

꿀벌 가계도는 피보나치 수들을 보여준다. 첫째로 꿀벌의 예에서는 다음과 같은 독특한 면이 있다.

①꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다.

②벌떼 중에는 여왕이라 불리는 특별한 암컷이 있다.

③암컷이기는 하지만 여왕벌과는 다른 많은 일벌들이 있다. 그들은 알은 낳지 못한다.

④일을 하지 않는 수펄들이 있다.

수펄들은 여왕의 수정되지 않은 알에서 태어난다. 그래서 수펄은 어미만 있고 아비는 없다.

⑤모든 암펄은 여왕이 수펄과 짝을 지었을 때 태어난다. 그래서 두 명의 부모를 갖는다. 암펄은 보통 일벌이 되나, 몇몇은 ‘로얄제리’라 불리는 특별한 물질로 키워져서 여왕벌로 자라게 된다. 그들은 집을 떠나 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다. 그러므로 암펄은 2명의 부모, 즉 수펄과 암펄 부모를 갖는 데 반하여, 수펄은 단지 한 명의 암펄 부모만을 갖는다.

여기서 우리는 부모가 그들의 자식들 위에 나타나는 가계도의 관습을 따르고, 그래서 가장 마지막의 세대는 제일 밑에 있게 된다. 위로 갈수록 더 나이 든 세대가 있다. 그런 가계도는 바닥에 있는 사람의 모든 조상을 보여준다. 한 사람의 모든 후손들을 나열하면 매우 다른 가계도를 얻을 수 있을

것이다. 우리가 토끼 문제에서 그렸던 것처럼 처음 쌍의 모든 후손들을 얻을 수 있다.

일하지 않는 수펄의 가계도를 살펴보자.

①그는 1명의 암컷 부모를 갖는다.

②그는 2명의 조부모를 갖는다. 왜냐하면 그의 어미는 2명의 부모, 암컷과 수컷 부모를 갖기 때문이다.

③그는 3명의 증조부모를 갖는다. 그의 할머니가 2명의 부모를 가져야 하고, 그의 할아버지는 1명의 부모만을 가져야 한다.

④그는 얼마나 많은 고조부모를 갖겠는가?

[그림 22] 꿀벌 가계도

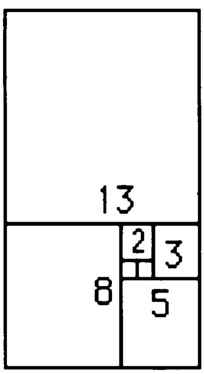
2) 피보나치 직사각형과 조개의 나선형

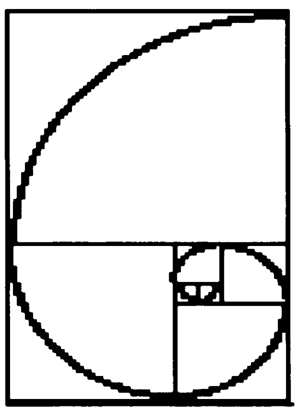
피보나치 수 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...가 나타나는 또 다른 그림을 만들어 볼 수 있다. 한 변의 길이가 1인 두 정사각형을 옆으로 나란히 붙인다. 이 위에 한 변의 길이가 2(= 1 + 1)인 정사각형을 그린다. 이제 단위 정사각형과 한 변의 길이가 2인 정사각형 모두에 접하는 새로운 정사각형을 그리자. 그러면 한 변의 길이가 3인 정사각형을 얻는다. 다음에는 마지막의 두 정사각형(한 변의 길이가 각각 2와 3이었던 정사각형)에 모두 접하도록

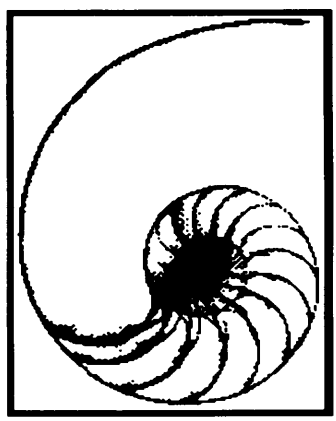
또 다른 정사각형을 그린다. 이것은 한 변의 길이가 5가 된다. 이런 방법으로 계속해서 정사각형을 그려 나갈 수 있다. 새롭게 얻어지는 정사각형의 한 변의 길이는 가장 마지막 두 정사각형의 변의 길이의 합이 된다. 이 직사각형들의 집합은 두 변의 길이가 연속하는 피보나치 수가 되며, 한 변의 길이가 피보나치 수인 정사각형들로 이루어져 있다. 이 직사각형들의 집합을 피보나치 직사각형이라 부른다.

다음 그림에서 볼 수 있듯이, 각각의 정사각형 안에 사분 원을 그려 넣어서 나선형을 그릴 수 있다. 이것이 피보나치 나선(Fibonacci Spiral)이다. 이와 유사한 곡선은 자연에서도 존재한다. 그 예를 달팽이 껍질의 모양이나 바다 조개 껍질 모양에서 찾을 수 있다. 피보나치 직사각형에서의 나선형은 1/4 회전할 때마다 Phi(1.618...)배 만큼씩 크기가 증가한다(즉, 곡선 상에서 1/4 회전(90)만큼 떨어져 있는 점은 중심에서 1.618...배만큼 더 멀리 있다. 이것은 곡선 위의 모든 점에 적용된다.). 반면에 앵무조개(Nautilus) 나선형 곡선은 1회전할 때마다 1.618...배만큼씩 중심에서 멀어지게 된다.

이런 나선형 모양들은 등각(equiangular)나선 또는 대수적인 나선형(logarithmic spiral)이라고 불린다.







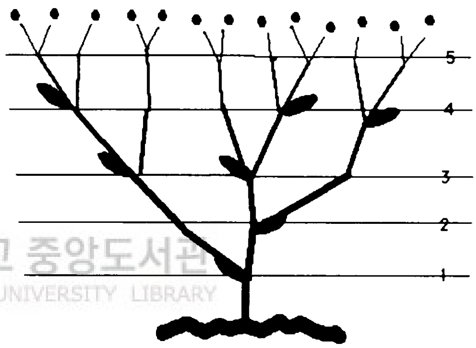
[그림 23] 황금직사각형. [그림 24] 등각나선. [그림 25] 앵무조개

3) 피보나치 수와 식물

(1) 식물의 가지

특별히 한 식물에서 생장점의 수는 피보나치 수가 된다. 식물이 새로운 가지를 뻗을 때 그 가지는 두 달을 자라야 분지를 지탱할 만큼 충분히 강해진다고 가정하자. 그 후로는 매달 생장점에서 가지를 뻗는다고 가정하면, 여기에서 보여지는 것과 같은 그림을 얻게 된다.

처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 난 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 것은 나뉘어지지 않고 있다. 하나가 가지를 나누면 다른 가지는 쉬는, 이러한 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치의 수를 이루고 있다. 이와 매우 비슷하게 자라는 식물이 'sneezewort'이다 : Achillea ptarmica



[그림 26] 식물의 가지

(2) 꽃잎

많은 꽃들은 그들의 싹이나 씨뿐만 아니라 꽃잎의 수에 있어서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개, 또는 5개의 솔잎으로 된 송이로 자라는 경향이 있다. 미나리-아재비는 5개의 꽃잎이 있고, 백합과 붓꽃은 3개의 꽃잎을 갖는다. 참-제비고깔은 꽃잎이 8개이다. 금잔화는 13개의 꽃잎을 가지며, 애스터는 꽃잎이 21개이다. 데이지는 13개, 21개 또는 34개, 55개 또는 89개의 꽃잎을 가지고 있는 것을 볼 수 있다.

몇 가지 종의 식물들, 예를 들어 미나리-아재비는 매우 정확한 꽃잎의 수

를 갖는다. 그리고 다른 종들도 정확하지는 않지만 위에서 나열한 것과 매우 비슷한 수의 꽃잎을 갖고 있다. 다른 많은 꽃들의 꽃잎의 수를 평균적으로 세면 다음 표와 같은 피보나치의 수가 나타나고 있음을 알 수 있다.

꽃잎의 수	식 물 들
2	마법의 가지과의 식물
3	백합꽃, 붓꽃
5	도로가의 상추, 미나리아재비, 야생의 장미, 참제비고깔속 참매발톱꽃
8	코스모스, 참제비고깔, 뿌리가 붉은 양귀비과 식물
13	금불초, 금잔화, 시네라리아, 이중 참제비고깔
21	애스터, 검은 눈의 수산, 치커리
34	야생 데이지, 질경이, 제충국
55	아프리카 데이지, 갯개미취
89	갯개미취

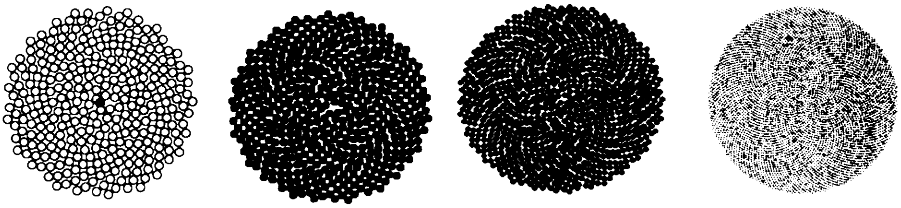
[표 4] 꽃잎과 피보나치 수

(3) 꽃씨의 배열

꽃술에서 씨의 배열을 통하여서도 피보나치 수를 볼 수 있다. 여기에 큰 해바라기나 데이지를 확대할 때의 그림이 있다. 중심은 검은 점으로 표시되어 있다.

씨들이 왼쪽과 오른쪽으로 곡선을 그리는 나선형 모양으로 배치된 것처럼 보일 것이다. 그림의 끝에서 오른쪽으로 나선형을 그리는 곡선의 수를 세어 보면 34개가된다. 왼쪽으로 나선형을 그리는 곡선의 수는 얼마인가?
그 개수는 피보나치 수열에서 연속하는 두 수임을 알게 될 것이다.

자연에 존재하는 실제의 씨앗에서도 같은 형태가 나타난다. 씨앗들은 모두 같은 크기이며, 중심에서 더 밀집해 있거나 가장자리에서 드물게 모이거나 하지 않는다. 그 이유는 씨앗들이 크기에 상관없이 균일하게 쌓이는 데

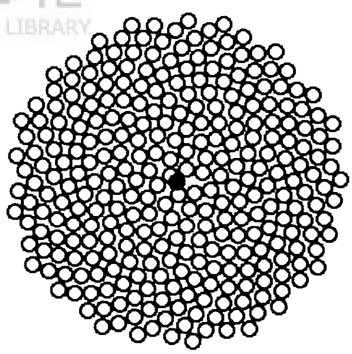


[그림27]

최적의 형태인 때문인 것으로 보인다.

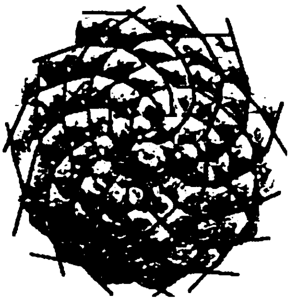
중심 근처의 나선의 수를 세 보면, 양쪽 방향으로 모두 피보나치 수가 될 것이다. 그 나선형은 눈이 보는 형태이다. 중심 근처에서는 더 굽어 있고, 더 멀리 나갈수록 더 평평한 나선(그리고 더 많은 나선들)이 나타날 것이다. 위의 [그림27]은 500, 1000, 5000개의 씨앗들의 그림들이다.

해바라기는 독특한 방법으로 피보나치 수를 보여준다. 성숙한 해바라기 꽃의 중앙을 보면, 씨들의 다른 두 나선형을 분명히 볼 수 있다. [그림28]은 일상적으로 볼 수 있는 해바라기 씨다. 하나는 시계 방향으로 89개의 나선형, 다른 하나는 시계 반대 방향으로 55개의 나선형을 형성하고 있다. 커다란 해바라기 꽃들은 55개와 89개를 가지고 있다고 보고되어 있다. 물론 이런 모든 수들은 인접한 피보나치의 수들이다. 가끔씩 예외가 나타나기도 하지만 조사 결과들은 해바라기의 나선형의 수가 압도적으로 피보나치의 수들로 나타나고 있음을 보여주고 있다. 때로는 피보나치 수의 두 배로 나타나기도 한다. 예를 들면, 34, 55보다는 68, 110이 되는 경우이다.

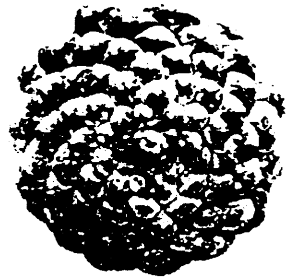


[그림 28] 해바라기 꽃씨

(4) 솔방울



[그림 29]
솔방울의 나선형



[그림 30] 솔방울

솔방울은 피보나치 나선형을 분명히 보여준다. 여기에 [그림29]와 [그림30]과 같은 두 개의 솔방울이 있다. 왼쪽 솔방울 그림은 나선을 강조해서 나타낸 것이다. 시계 반대 방향의 나선과 시계 방향의 나선은 각각 같은 방향으로의 나선들을 나타내고 있다. 얼마나 많은 시계 반대 방향 나선들이 있는가? 시계 방향 나선의 수는?

솔방울의 특성을 나타내는 나선형들은 피보나치 비율의 보다 명백한 예가 되곤 한다. 솔방울의 표면을 덮고 있는 잎들은 서로 압축되어 개조된 잎들로 생각할 수 있다. 그것들은 줄기에 둘러 있는 잎들처럼 솔방울을 나선형으로 둘러싸고 있다. 그러나 [그림 29]에서 좀더 자세히 조사해 보면 두 종류의 나선형을 볼 수 있다. 왼쪽 솔방울은 시계방향으로 8개의 나선이 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 대각선 방향으로 천천히 가고, 시계 반대 방향으로 13개의 나선이 오른쪽 아래에서 왼쪽 위로 대각선 방향으로 보다 급하게 가로질러 가고 있다.

하나의 솔방울에서, 완급에 따른 나선형의 숫자는 항상 피보나치의 수열에 나타난 수들과 거의 근접해 있다. 어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것들은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한 나선형을 가지고 있거나, 또는 완만한 것 8개와 급한 것 13개를

가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치의 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 어떤 종류의 솔방울에서는 어느 한 가지가 지배적일지라도 두 가지 이상의 나선형의 잎들의 숫자들(예를 들면, 한 솔방울에 3-5와 5-8)을 가질 수 있다. 많은 연구 결과, 솔방울들의 나선형 수에서 99% 정도는 피보나치 수열에 나타난 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다.

(5) 잎의 배열

또한 많은 식물들의 줄기 주위에 있는 잎들의 배치에서도 피보나치 수를 발견할 수 있다. 식물을 위에서 내려다보면 잎들은 종종 아래의 잎을 가리지 않도록 배열되어 있다. 이것은 각각의 잎들이 다 햇빛을 잘 받고, 가장 많은 수분을 받아내어, 잎과 줄기를 따라 뿌리로 보내도록 하기 위한 배치임을 의미한다.

① 회전마다 잎의 수

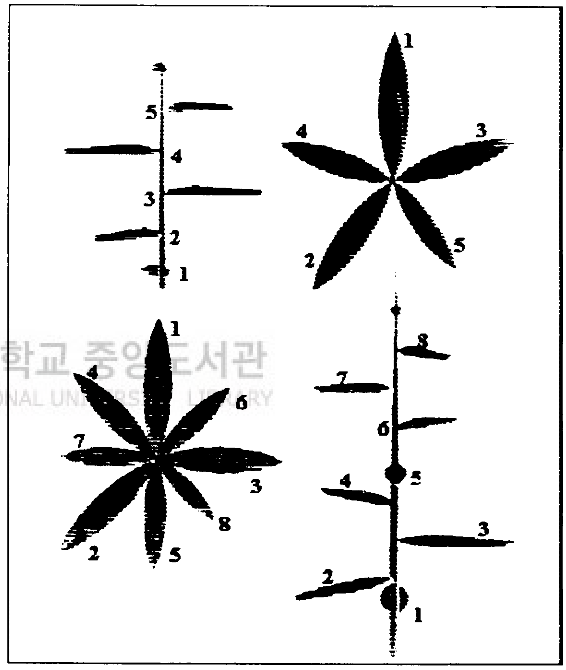
잎에서 잎으로 가면서 줄기 주위를 돌아가는 수를 셀 때, 그리고 시작점의 잎의 바로 위에 위치하는 잎을 만날 때까지의 잎의 수를 셀 때에도 피보나치 수가 나타나게 된다.

만약 다른 방향으로 수를 세게 되면 같은 수의 잎에 대해서 다른 수의 회전 수를 얻게 될 것이다.

각 방향으로의 회전 수와 만나게 되는 잎들의 수는 세 개의 연속되는 피보나치 수이다. 예를 들어, [그림31]의 식물을 살펴보자. 처음 위치의 바로 위에 있는 잎을 만날 때까지 3번 시계 방향으로 회전해야 하고, 5개의 잎을 지난다. 만약 시계 반대 방향으로 회전을 하게 되면, 2번만 돌면 된다. 2, 3, 5는 연속된 세 개의 피보나치 수이다.

[그림31]의 식물을 보면, 시계 방향으로 5번 돌면서, 8개의 잎을 지나게 되고, 시계 반대 방향으로는 3번만 회전하면 된다. 이번에도 3, 5, 8은 피보나치 수열에서 연속되는 세 개의 수들이다. [그림31]의 식물에서는 잎 하나당 3/5회전(시계 반대 방향으로는 2/5회전)으로 나타낼 수 있다. 이 그림의 식물에 있어서 잎 하나의 회전수는 5/8(시계 반대 방향으로는 3/8)이다.

② 식물의 잎 배열



[그림 31] 잎의 배열

[그림31]은 컴퓨터로 그린 식물이지만, 실제의 식물에서도 같은 것을 볼 수 있다. 한 추정 자료에 의하면, 모든 식물의 90%에서 피보나치 수와 관계된 이런 형태의 잎의 배치를 보인다고 한다.

몇 가지 흔한 나무들의 피보나치 잎 배열 수는 다음과 같다 :

1/2

1/3

2/5

3/8

5/13

여기서 n/t은 t회전 당 n개의 잎이 있음을 의미한다. 즉, 1회전 당 n/t개의 잎이 있다는 것이다.

선인장의 가시들에서도 이미 우리가 솔방울과 꽃잎, 나뭇잎 배열에서 보았던 것과 같은 나선형을 볼 수 있다.

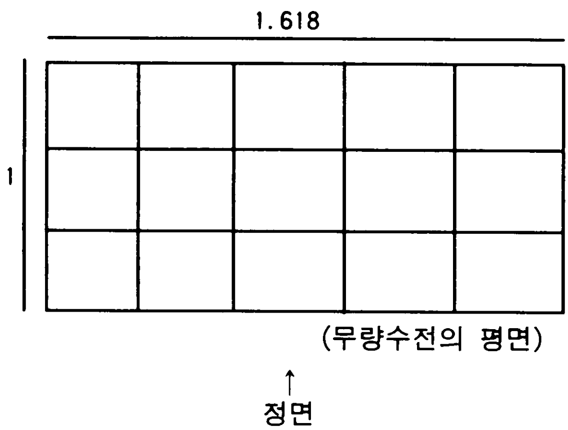
2. 피보나치 수열의 응용

1) 건축과 황금비

황금분할은 이름 그대로 가장 아름다운 선분의 분할방법으로서 건축, 회화, 조각 등에서 이용되어 왔다. 비근한 예로는 액자를 비롯해서 책, 심지어는 담배나 성냥갑마저도 대부분 가로, 세로의 길이가 황금분할의 비와 같게 만들어지고 있다. 그러나 '황금분할'이라든지 '황금비'라는 이름은 처음부터 그렇게 불리워진 것은 아니었다. '황금비'라고 부르게 된 것은 지난 19세기 때부터였다.

우리 나라에는 '배흘림 기둥'으로 된 전통 건축 양식이 있는데, 그리스 신전에 쓰인 엔터시스 양식의 기둥과 같다. '배흘림 기둥'으로 유명한 대표적인 건물은 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전인데, 평면에는 1 : 1.618의 황금비가 적용되어 아름다움을 자아낸다. 또, 무위사의 극락전, 화엄사의 대웅전 등에서도 이런 기둥을 볼 수 있다. 무량수전은 겉에서 보면 정면 5칸, 측면 3칸으로 지어져 있는데, 균형이 잘 잡힌 3 : 5의 비율임을 알 수 있다. 건물의 실제 비율은 1 : 1.618의 황금비이다.

무량수전의 황금비

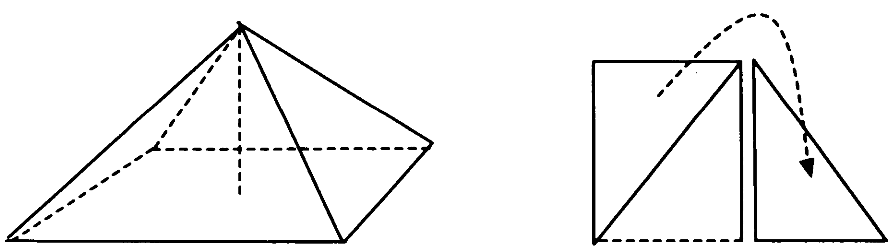


[그림 32] 무량수전의 평면구도

그림을 그릴 때는 연습 과정에서 구도(構圖, composition)라고 부르는 수학적인 도형의 연구를 많이 한다.

중·고등학교의 미술 교과서 속에는 반드시 여러 가지 작도법이 소개되어 있고, 심지어는 이것만을 다루는 도학(圖學)이라는 연구 분야까지 따로 마련되어 있다. 그러나 이 많은 작도법 중에서 오로지 황금분할의 법칙만 있으면 나머지는 필요 없다고 잘라 말하는 화가가 있을 정도이다. [예를 들면, 펜터곤(pentagon, 5각형)이라는 이름으로 불리는 미국 국방성의 건물, 컴퓨터를 사용하는 현대적인 전쟁게임 연구의 총본산, 5각형은 수학적인 연구심을 자극하는 신비적인 힘이 있는 모양이다.]

B.C. 2,600년경에 세워진 이집트의 기자(Gizeh) 마을에 있는 거대한 피라미드는 건축에 있어서 황금비를 사용한 최초의 예로 알려져 있다. 이 피라미드에서 높이와 정사각형 밑면의 한 변에 대한 비는 5 : 8 또는 0.625이다. 더욱이 피라미드의 옆면 삼각형은 황금사각형을 대각선을 따라 자른 후 다시 이 사각형의 긴 변을 겹쳐 결합시킨 삼각형이다([그림33] 참조).



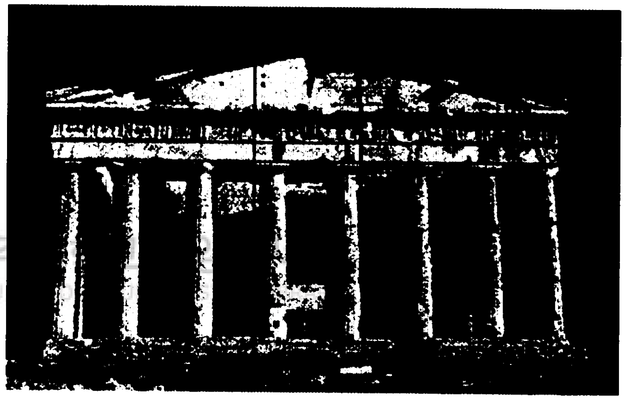
[그림33] 가자마을의 피라미드와 옆면의 삼각형

피라미드에 관한 흥미를 가중시킬 만한 사실이 어느 학술 보고서에 나타나 있는데, 인치(inch) 단위를 사용했던 이집트인들은 처음에 이 피라미드를 5, 813인치(여기서 5, 8, 13은 피보나치 수이다.)의 높이로 건조했다는 것이다. 그런데 이 사실은 피라미드의 상단 부분이 부스러져서 실제로 확인하는 것은 어렵다고 한다. 흥미롭게도 오늘날 이 피라미드의 밑면의 넓이는

13헥타르 또는 8에이커로 알려져 있는데, '헥타르'와 '에이커'는 오늘날 가장 널리 사용되는 땅 넓이 측량 단위 중 하나다.

B.C 400년경에 건조된 아테네의 파르테논 신전에서 외부 규격(치수)은 정확히 황금사각형을 나타내고 있는데, 다른 여러 구조 속에서 황금비가 잘 나타나고 있다.

그리이스 사람들은 B.C 5세기경 시작되었던 그리스 고전주의 시대 이후 의식적으로든 무의식적으로든 이 황금비의 영향을 많이 받아왔다. 그리스의 동상이나 꽃병, 주전자 등 고형물을 기하학적으로 분석한 결과 이들이 황금비를 사용하고 있었다는 것이 분명히 드러났다.



[그림 34] 파르테논 신전의 황금직사각형

황금비를 '피(phi)'라고 부르는 것은 그리스의 가장 유명한 조각가였던 피디아스(Phidias) 때문인데, 이 황금비는 아테네의 파라테논 신전의 기둥들의 위 부분에 있는 일련의 조각품을 포함하여 그의 여러 작품들 속에서 풍부하게 나타나고 있다.[그림34]

르네상스 시대의 예술과 건축은 그리스의 미와 비율에 대한 감각에서 영감을 받아 이루어졌다. 대량 생산의 시대에 쏟아져 나왔던 그 많은 건물, 동상, 무덤과 같은 것들이 황금비를 특징적으로 나타내고 있다는 점은 놀라운 일이 아니다. 물론 복도, 바닥 기초 공사, 창문, 문 등 거의 모든 곳에서 이 비를 발견할 수 있다.

오늘날 여러 건축물에서 황금비가 나타나는 것 또한 우연이 아니다. 20세기의 유명한 건축가인 Le Corbusier는 그의 작품에서 황금비를 애용했다. 그의 영향은 프랑스의 개인 빌라에서부터 뉴욕의 유엔빌딩에 이르기까지

광범위하게 나타난다. 물론 황금비를 사용한 것은 그 혼자가 아니며, 정도의 차이는 있지만 다른 건축가들도 이 비를 사용했다.

레오나르도 다빈치가 '신의 비'라 이름을 붙인 황금비는 여러 명화에서도 흔히 볼 수 있는데, 황금사각형 그 자체가 그림 속에서 자주 발견된다.

황금비는 다른 형태로도 나타나는데, 단순한 그림 외곽의 규격이나 바탕그림의 구도(grid) 등이 그러한 예이다. 이런 특성을 지닌 일련의 그림들은 고대의 대가에서 현대의 예술가에 이르기까지 그들이 지향하는 전통성과 스타일에 있어서 대표적인 것이다.

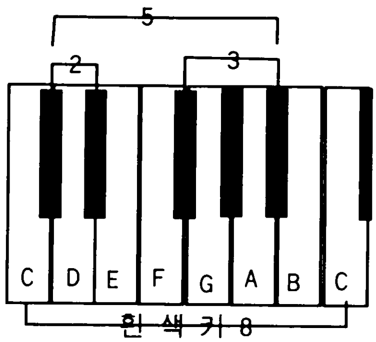
19세기 후반의 프랑스 이상주의 예술가인 슈레트(Seurat)는 그의 모든 화폭을 황금사각형으로 구성했다는 평을 받았고, Durer와 Mondrian 그리고 Bellows는 그들의 작품에 의도적으로 황금비를 활용한 예술가로 알려져 있다.

황금비의 사용은 세계 여러 곳에서 쉽게 발견되는데, 3세기경 만들어진 부처님 좌상의 외곽 치수는 황금비를 나타내며, 중국 청왕조의 자취를 담은 그릇에서도 황금비가 나타난다.

시리아 고대 사원의 바닥 모자이크에서도 황금비가 나타나는데, 모자이크 예술가들은 정확히 똑같은 모양의 모자이크를 반복적으로 사용해야 했고, 이를 위해서는 분명 어떤 장치가 있었던 것으로 보인다.

2) 음악과 피보나치 수열

피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 연관 관계는 피아노의 건반에서 가장 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져 있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있는데, 이것들을 종합해 보면 [그림35] 처럼 피보나치 수열의 수가 나타남을 알 수 있다.



1 옥타브 키 13

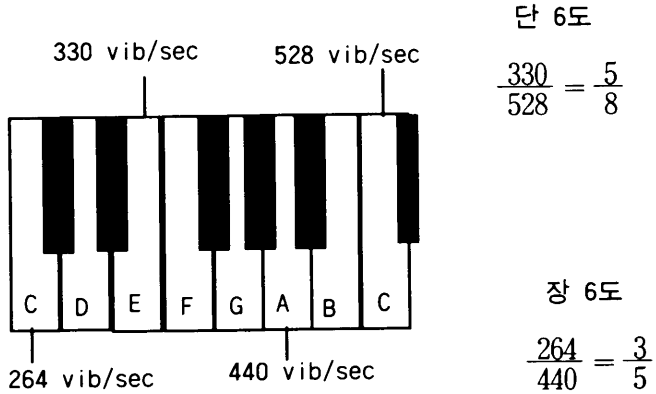
[그림 35] 피아노의 건반

음 계	5 음계	8 음계	13 음계
노래 제목	아리랑 정선아리랑 한오백년 도라지	나뭇잎 배 파란마음 하얀마음 님이 오시는지 산들바람	그리운 금강산 로망스 사랑으로 산들바람

[표 5] 음계와 노래 제목

13개의 키는 반음계(chromatic scale)를 이루는데, 반음계는 서양 음악에서 가장 완전한 음계로 알려져 있다. 최초의 음계는 5개의 키로 이루어진 5음계(pentatonic scale)였고, 그 이후에는 흔히 옥타브로 더 잘 알려진 8개의 키의 온음계(diatonic scale)가 발달하였다. 5음계는 초기 유럽 음악에 쓰였었고, 현재는 미국에서 아동을 위한 코다이식(Kodaly method) 음악 교육의 기초가 되고 있다. 피아노 건반에서 계속 이어지는 어떠한 5개의 검은 키들도 5음계를 이룰 수 있다. 유명한 미국 동요 중 여러 곡은 그 건반들만을 이용해서 연주할 수 있다. 한편, 우리 나라에서는 우리의 고유 음계인 '중(솔), 임(라), 무(도), 황(레), 태(미)'를 사용하는 대다수의 민요가 여기에 해당된다. 여러 다른 음계들이 존재했지만 5음계 (5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 서양 음악의 발전 과정에서 대부분을 차지하고 있다. 많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도로 알려져 있다. 장6도 음정

의 예를 들면, [그림36]에서 1초에 약 264번 진동하는 C음과 1초에 약 440번 진동하는 A음으로 이루어진다.



음정을 나타내는 피보나치의 비

[그림 36] 피아노의 건반

$\frac{264}{440}$의 비를 약분하면, 피보나치의 비인 $\frac{3}{5}$이 된다. 단6도 음정의 한 예는 1초에 약 330번 진동하는 E음과 1초에 약 528번 진동하는 C음이 있는데, $\frac{330}{528}$의 비를 약분하면 그 다음 피보나치의 비인 $\frac{5}{8}$가 된다. 어떤 6도 음정의 진동 수의 비도 비슷한 비로 약분이 된다.

이런 것들로 인해 피보나치의 수들이 눈에 아름답게 보이는 것뿐만 아니라, 귀에도 아름답게 들리는 자연적인 조화의 일부로 알려져 있다.

아마도 이러한 이유 때문에 작곡가들은 의식적으로든 무의식적으로든, 그들의 작품에 피보나치의 수들과 비를 이용해 왔을 것이다. 그레고리안 성가와 바하의 푸가, 바로토크의 소나타를 포함하는 음악의 각 장르를 연구해 보면 그것이 사실임을 알 수 있다.

피보나치 수들은 음악 작곡에 있어서 매우 다양한 기능을 한다. 그 기능 중 가장 중요한 것은 아마도 곡의 연주 시간을 피보나치 수의 비율을 이루는 단계로 나누는 것이다. 어떤 화가가 빈 이젤을 앞에 두고 수평선과 나무

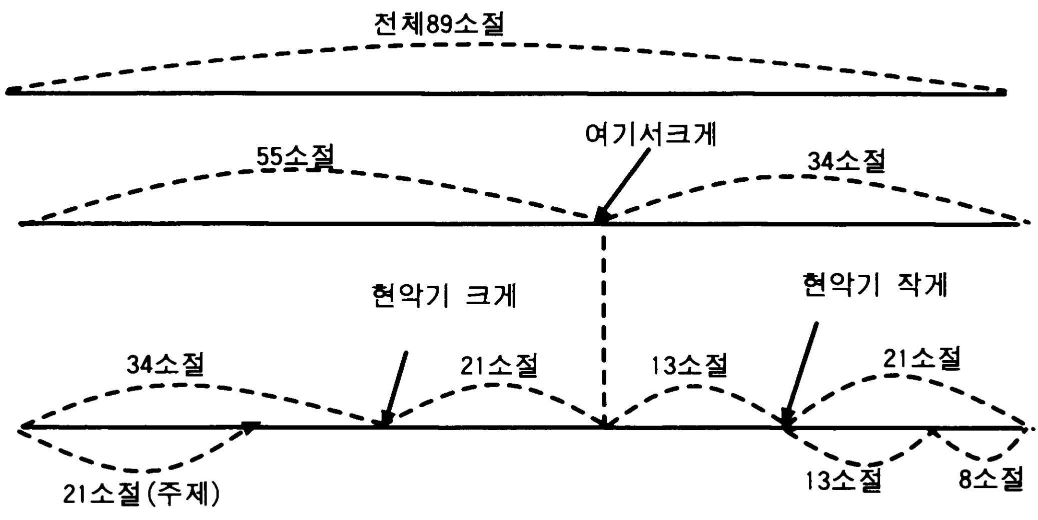
들의 위치 등을 결정하기 위해 그 공간을 황금비로 나누듯이, 작곡가는 곡 중 소주제의 시작과 끝, 분위기와 느낌을 결정하기 위하여 곡의 각 단계의 길이를 피보나치의 비로 나누어 준다. 이것을 하는 한 가지 방법은 박자들을 묶는 데 피보나치 수들을 이용하는 것이다.

전곡

34소절	55소절	34소절
주제가(추선율)	느리고, 부드럽게	빠르고, 크게

[표 6] 음악의 연주 시간에 적용된 황금비

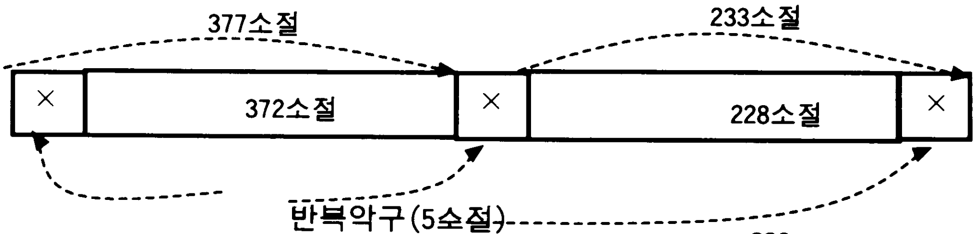
이 기법은 초기 교회 음악에서 현대 음악까지, 팔레스트리나(Palestrina), 바흐, 베토벤, 그리고 바르토크을 포함하는 여러 작곡가들의 작품에 나타나 있다. 음악의 연주 시간을 피보나치의 비로 나눈 한 예는 바로토크의 현악기, 타악기, 그리고 첼레스타(Celeste, 피아노와 비슷한 종소리를 내는 악기)를 위한 음악의 첫 악장으로 다음 [그림37]에 도표화되어 있다.



[그림 37]

베토벤은 그의 유명한 5번 교향곡에서 중요한 위치에 잘 알려진 주제 구를 삽입함으로써 황금비를 맞추는데 성공하였다.

주제구의 첫 악장에 크게 3번 나타나는데, 그 위치는 그 악장을 황금분할로 나누어준다. 중간에 나타나는 주제 구는 처음과 끝의 주제 구와 함께 전체 악장을 피보나치의 비율로 나누어준다.



$$\frac{228}{372}=0.613$$

$$\frac{233}{377}=0.618$$

[그림 38]

또한 피보나치의 수들은 몇몇의 작곡가에 의해 멜로디의 흐름을 발전시키는 데 기여하였다.

1930년에 콜롬비아 대학의 수학 교수이자 음악 교수였던 조셉 실링거(Joseph Shillinger)는, 피보나치 수열로 음정이 이루어진 멜로디는 마치 해바라기 씨앗이나 줄기에 붙은 나뭇잎의 성장 모형처럼 자연스럽다고 믿었다. 그리고 작곡 체계는, 한 멜로디의 연속적인 음이 그 이전의 음보다 피보나치 수만큼 높거나 낮은 음 또는 피보나치 수의 색다른 변형 음정으로 이루어진다고 주장하였다.

3) 피보나치 수와 손가락

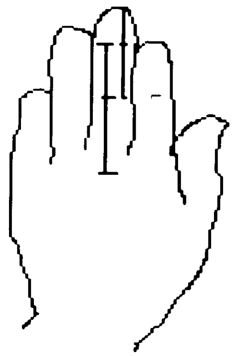
우리들의 손[그림 39],[그림 40]을 살펴보면

①2개의 손을 가지고 있다.

②한 손에는 5개의 손가락이 있고,

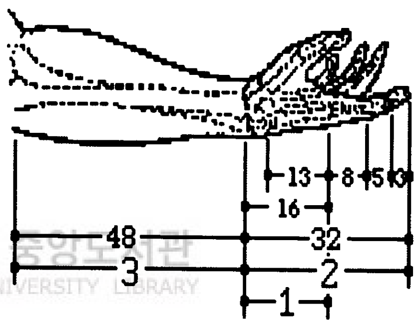
③손가락 하나는 3개의 부분으로 나뉘어져 있다.

④이 3개의 부분은 2개의 손가락 관절로 이어져 있다.



[그림 39] 손가락

이것은 단지 우연의 일치인가, 그렇지 않은가? 당신의 손가락 뼈 길이를 측정한다면(뼈의 길이는 손가락을 살짝 굽혀야 잘 볼 수 있다), 손가락에서 가장 긴 뼈와 중간 길이의 뼈의 비가 황금률 Phi처럼 보이지 않는가? 중간 길이의 뼈와 가장 짧은 길이의 뼈(손가락 끝에 있는 뼈)의 비는 어떤가. 다시 Phi가 되는가? Phi처럼 보이는 손가락의 길이에서의 다른 비들을 찾을 수 있겠는가? 또는 그것이 다른 비슷한 비처럼 보이는가? 여러분 친구들의 손을 측정해서 통계 자료를 모아 보는 것은 어떨까?



[그림 40]

4) 토큰 교환과 피보나치 수열

피보나치 수를 찾기 어려울 것 같은 오락실에서, 오락을 위한 토큰을 파는 기계를 가정해 보자. 그 기계는 50원짜리나 100원짜리 동전만 넣을 수 있고, 거스름돈 없이 정확한 가격으로 50원짜리 토큰을 판매한다고 가정하면, 다음과 같이 지불할 수 있는 경우의 수를 생각할 수 있다.([표7] 참조)

토큰 1개를 살 때,

그것을 지불할 수 있는 방법은 1가지가 있다.

50원짜리 동전 1개 (a)

토큰 2개를 살 때,

그것을 지불할 수 있는 방법은 2가지가 있다.

50원짜리 동전 2개 (aa)

100원짜리 동전 1개 (b)

토큰 3개를 살 때,

그것을 지불할 수 있는 방법은 3가지가 있다.

50원짜리 동전 3개 (aaa)

100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개 (ba)

50원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 1개 (ab)

여기까지 따지면, 토큰을 사기 위해 지불할 수 있는 방법의 수는 사고자 하는 토큰의 수와 같아 보일 수 있다. 하지만, 4개의 토큰을 사게 되면 살 수 있는 방법이 5가지 (aaaa) (bb) (aba) (baa) (aab)가 있다.

토큰을 5개 사면 8가지 방법 (baaa) (bba) (abaa) (aaab) (aaba) (bab) (abb) (aaaaa)가 있다. 토큰을 6개 사면 13가지 방법(aaaaaa) (bbaa) (baba) (abab) (aaaab) (aaaba) (aabaa) (abaaa) (baaaa) (baab) (abba) (aabb) (bbb)가 있다.

토큰을 7개 살 때 그것들을 사기 위해 지불할 수 있는 방법은 21가지가 된다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

주문된 토큰의 수	1	2	3	4	5	6	7	·	·	·
지불할 수 있는 방법의 수	1	2	3	5	8	13	21	·	·	·

[표 7] 토큰의 수와 피보나치 수

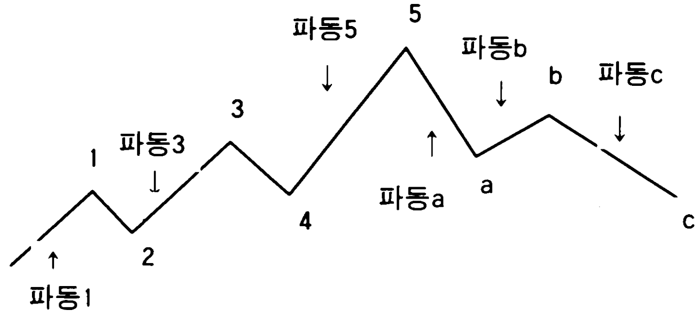
결론적으로 피보나치 수들은 예에서와 같은 기계를 만들기 위해 나와야 할 토큰의 수에 알맞은 돈을 받기 위해 몇 개의 방법으로 프로그램이 되어야 하는지 예상하는 데 도움을 줄 수 있다.

5) 피보나치 수열과 증권파동

피보나치 수열로 나타나는 흥미로운 예 중의 하나는 주식 시장의 변화이다. 1930년대 중반 미국이 대공황에서 빠져나가기 시작할 무렵, 랄프 넬슨 엘리엇(Ralph Nelson Elliot)은 다우존스 주가지수의 역사와 변화를 연구하였는데, 주식 시장은 어떤 규칙을 가지고 움직이는 경향이 있다는 것에 대해 동의했다. 일반적으로 주식 시장의 변화는 인간의 낙천주의와 비관주의의 일정한 변화에 의해 생긴다고 생각된다. 어떻게 보면 산업 주기는 인간의 행동 기능이다. 그것은 원형을 따르는 경향이 있다. 그리고 이 원형들은 결국에는 증권 시장에서 반영된다.

엘리엇의 관찰들은 '엘리엇 파동(Elliot Wove) 원리'로 요약된다. 그것은 오늘날 투자 산업에서 증권 시장의 변화를 예측하는데 이용되는 원리 중의 하나이다. 엘리엇은 시장이 [그림41]과 같이 8개의 파동으로 완전한 주기를 형성하면서 전개된다는 것을 알아챘다.

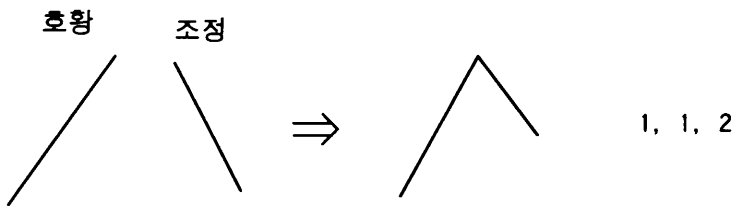
그 주기는 대체로 5개의 파동이 올라가고, 3개의 파동이 내려가는 기초 원형을 따른다. 번호를 매긴, 올라가는 5개의 파동들은 실제로 내려가는 파동을 2개 포함하는데, 올라가는 파동들은 경기 호황(낙천주의)이며 내려가는 파동들은 조정 국면(비관주의)이다.



[그림 41] 엘리엇 파동

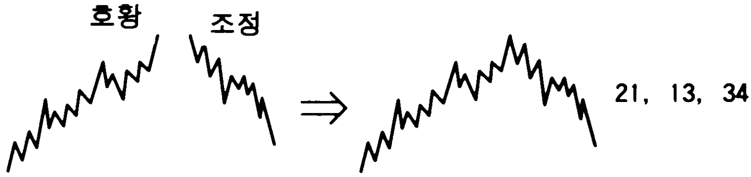
[그림42], [그림43], [그림44]과 같이, 파동은 더 세분될 수 있거나 더 큰 파동의 부분이 될 수 있다. 파동은 늘어나거나 줄어들 수 있다. 그리고 그것은 다양한 변칙들로 앞에 있는 것을 뒤집어엎기도 한다. 그러나 기초가 되는 원형은 일정하다.

다양한 파동의 밀도를 분석하면 모든 단계에서 피보나치 수로 나타난다. 이러한 원형과 그것이 나타내는 피보나치 수들은 무한정으로 계속된다.



[그림 42]

[그림 43]



[그림 44]

엘리엇은 피보나치 수열이 군중 심리학의 문제를 해결하는 실마리라고 믿었다. 오늘날 증권 시장 전문가들 중에는 '엘리엇 파동 원리'를 시장의 동향을 예측하는 데 이용하기도 한다.

VI. 결 론

본 논문에서는 고등학교 수학 교과내용을 분석하고, 피보나치 수열의 특성과 황금비를 중심으로 살펴보았다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 고등학교 수학Ⅰ교과서 및 참고서를 중심으로 분석한 결과, 피보나치 수열은 단편적인 개념 또는 연구과제 정도로 다뤄지고 있는 실정이다.

둘째, 피보나치의 학문적인 업적은 인도와 아라비아 수학에 대한 유럽 최초의 연구서인 《산반서》로 대표된다. 이 저서는 유럽 각국에 널리 보급되어 수학발전에 큰 영향을 끼쳤다.

셋째, 피보나치 수열의 일반적 성질과 그것을 일반화시킨 특성을 체계적으로 정리·증명하였다.

넷째, 피보나치 수열과 황금비의 관계, 황금비(또는 파이)의 개념과 특성, 약사(略史)를 서술하였다.

다섯째, 꿀벌의 가계도, 조개의 나선형, 식물 등 자연 현상과 건축·예술 분야 등에 나타난 피보나치 수열을 체계적으로 조사·분석하였다.

본 논문은 피보나치 수열에 대한 여러 가지 성질들을 체계적으로 정리·증명하였으며 일반화시킴으로서 고등학교 수학교과 수열 단원의 참고자료로서의 가치를 지닐 수 있고, 수학적 귀납법과 점화식의 내용뿐만 아니라 수열 분야, 확률 분야 등의 내용을 풍부하게 할 수 있도록 하였다. 이를 통하여 고등학교 학생들의 사고력, 문제 해결 능력을 신장시키는 데 도움이 되고 중등 수학교육 연구나 교사들의 지침서가 될 것이다.

※참고 문헌

김용운 · 김용국, 유클레이데스에서 토폴로지까지, <공간의역사>, 전파 과학사, 1990.

동아일보사, <과학동아> 1999년 5월호, 62p.

박한식, 수학Ⅰ, 지학사, 74p, 1996.

박배훈외 5인, 수학Ⅰ, 교학사, 83p, 1996

브리태니커 세계대백과사전 6권, 동아일보 공동출판, 136p, 1993

브리태니커 세계대백과사전 24권, 동아일보 공동출판, 181p, 1993

수학대사전, 박을용외 6인, 한국사전연구사, 737p, 777~778p, 1998

수학사, 이우영 · 신항균 옮김, 경문사, 210p, 229~232p, 1996,

수학사랑 통권 제10호 (22p~29p), 1998

수학사랑 통권 제11호 (20p~25p), 1998

수학사랑 통권 제12호 (20p~24p), 1998

수학사랑 통권 제13호 (16p~19p), 1998

양승갑외 2인, 수학 I, 금성교과서(주), 76~77p, 1995.

조승제, 수학Ⅰ, 재능교육, 72p, 1995.

A. F. Horadam, A Generalized Fibonacci sequence, Amer. Math. Soc. Monthly 68 (1961), pp.455-459.

David M. Burton, Elementary number theory, Allyn & Bacon Inc. 1980.

L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, vol 1. New York, 1952, pp. 393-407.

Dustan Everman, A. E. Danese, K. Venkannayah, Problem E 1396, Amer. Math. Soc. Monthly, vol. 67, 1960. pp. 81-82 ; solution, vol. 67, 1960. pp. 694.

K. Subba Rao, Some properties of Fibonacci numbers, Amer. Math. Soc. Monthly, 60(1953), pp. 680-684.

Sam E. Ganis, Notes on the Fibonacci sequence, Amer. Math. Soc. Monthly, vol. 66, 1959, pp. 129-130.

J. Guest, A Variant to Fibonacci's sequence, Austral. Math. Teacher, vol. 16, 1960, pp. 11-15.

V. F. Ivanoff, Problem E 1347, Amer. Math. Soc. Monthly, vol. 66, 1959, p. 61 ; solution, vol. 66, 1959, pp 592-593.

<Abstract>

A Study on Fibonacci Sequence and Golden Ratio

Oh Si-Bong

Major in Mathematic Education

Graduate School of Education, Cheju National University

Cjeju, Korea

Supervised by Professor Yang Young-Oh

Fibonacci sequence, the simple and significant theory in Middle age, is not handled much in the current high school mathematics curriculum. But it appears in only some of the high school text books partially.

The object of this thesis is to prove and demonstrate the characteristics and properties of Fibonacci sequence and generalized Fibonacci sequence, then define the concepts of golden section and golden ratio, finding out the examples of golden ratio in our nature and daily life.

This thesis has a meaning in providing the guideline and teaching-learning materials for the teachers and researchers who study Fibonacci sequence systematically and constantly.

---

*A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education, August, 1999

감사의 글

엊그제 입학한 것 같은데 이제 대학원과정을 마치게 되었습니다.

본 논문이 완성되기까지 바쁘신 가운데도 많은 시간을 할애하여 지도하여 주신 지도교수 양영오 박사님과 5학기 동안 지도 조언을 아낌없이 하여주신 수학교육과, 수학과 모든 교수님께 진심으로 감사를 드립니다.

또한 대학원과정을 마칠 수 있도록 많은 격려와 용기를 주신 제주학생문화원 오수신 원장님, 강창현 전 원장님을 비롯하여 같이 근무하는 모든 선생님, 대학원과정을 함께한 동료 선생님, 나를 아는 주위의 모든 분들께 깊은 고마운 마음을 전하고 싶습니다.

그리고 많은 어려움 속에서도 "테레비 보지 마랑 혼적 강 글 헙써게" 라고 말하며 인내와 사랑으로 꾸준히 내조하여준 아내와 자식들을 위해 항상 헌신적으로 보살펴 주시는 어머님, 장인, 장모님, 그리고 정훈, 정민, 치훈, 우리가족에게 고마움을 표하며 이 조그마한 기쁨을 함께 나누고자 합니다.

끝으로 이 논문을 아버님 영전에 올립니다.

감사합니다.

1999년 8월

오 시 봉 드림