碩士學位論文

함수를 중심으로 한 학습지도 방향 탐색 및 프로그램 제시

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

金　禮　恩

2008 年 6 月

함수를 중심으로 한 학습지도 방향 탐색 및 프로그램 제시

指導敎授 박 진 원

金 禮 恩

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2008年 8月

趙升彬의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 ______________ 印

委 員 ______________ 印

委 員 ______________ 印

濟州大學校 敎育大學院

2008年 8月

<차 례>

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적 ······ 1
2. 연구방법 ······ 1
3. 연구의 제한점 ······ 2
4. 수학교육에서 함수의 중요성과 그 역할 ······ 2

Ⅱ. 함수개념의 역사적 변천 및 교과개정에 따른 함수

1. 함수개념의 역사적 변천 ······ 4
2. 제7차 교육과정 수정 고시안 ······ 6
3. 교과개정에 따른 함수 ······ 10

Ⅲ. 함수지도

1. 함수지도의 의의 ······ 14
2. 초등교육에서의 함수와 중등교육에서의 함수 ······ 15
3. 교과서에서 다루는 함수 ······ 18
4. 함수를 어려워하는 이유와 해결방법 ······ 31
5. 문제해결 전략 ······ 34
6. 실생활의 접목 ······ 39

Ⅳ. 다양한 프로그램

1. 그룹을 통한 함수 ······ 44
2. 패턴활동으로 구성된 함수단원 개발 ······ 45
3. 그래픽 계산기를 이용한 함수 ······ 47

Ⅴ. 결 론 ······ 51

* 참고문헌 ······ 53

[표 1] 제7차 교육과정의 수정 고시안에서의 영역명 변화 7

[표 2] 교과과정에 따른 함수단원의 지도 내용 12

[표 3] 교과서에 다루는 실생활 문제 31

[표 4] 신문지 접는 횟수와 두께 41

[표 5] 42

[표 6] 42

[표 7] 43

[그림 1] 20

[그림 2] 23

[그림 3] 40

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

함수는 학교수학의 전반에 걸쳐 많은 부분을 차지한다. 학교수학에서의 함수 영역은 통합적 사고를 향상시키고 다양한 수학적 표현을 통해 수학의 아름다움과 가치를 인식할 수 있는 중요한 단원이다. 함수에 대한 학습은 수학적 기호체계를 사용하여 복잡한 사회 현상을 논리적으로 이해하거나 서로 다른 현상을 이해시키기 위한 수학의 기초 단계의 학습이다. 또한 실생활과 매우 밀접한 관련이 있고 다양한 학문 분야에 응용되고 있어 학교수학에서 매우 중요한 영역이라고 볼 수 있다. 이에 본 연구의 목적은 학교에서 다루고 있는 함수의 정의와 실생활에 관련된 문제를 살펴보고 학습자들이 함수를 어려워하는 이유와 그 해결방안을 제시함으로써 함수에 대한 학습자들의 수학적 문제해결력을 향상시키고자 한다.

2. 연구방법

제7차 수학과 교육과정 수정 고시안에서 제시하는 함수와 그 이전 교과과정에서 제시하는 함수의 차이점과 현 교과서에서 다루는 함수의 개념 및 영역을 알아보고 실생활에서의 예제를 제시하고 분석하여 학생들에게 어떤 방향으로 함수를 지도해야 하는지 그 방향성을 제시한다. 또한, 함수 학습을 위한 다양한 프로그램을 제시함으로써 교수학습에 적용할 수 있도록 한다.

3. 연구의 제한점

본 연구는 함수가 수학에서 차지하는 영역 및 중요도가 매우 높음에도 불구하고 학습자가 어려워하는 본질적인 이유를 직접설문을 통한 연구가 아니라 여러 자료를 바탕으로 조사하는바 어느 정도의 제한점이 발생할 수 있으리라 본다. 또한 내년(2009년)부터 2011년까지 제7차 교육과정 수정고시안이 점진적으로 적용되므로 그에 따라 지금과는 다른 결과가 초래 될 수 있다. 때문에 현 시점에서는 두 교육개정안을 비교 분석하면서 현재 적용되고 있는 제7차 교육과정에 입각하여 문제점을 제시하고 개선안을 모색하고자 한다.

4. 수학교육에서 함수의 중요성과 그 역할

21세기 정보화 및 지식기반사회를 맞이하여 우리가 평소에 관심을 갖는 사회현상 및 자연현상 등은 점점 더 수학적으로 설명가능해지고 계량화되고 체계화되고 있으며 이러한 추세에 맞추어 수학에 대한 사회의 기대, 적용 및 의존도는 더욱 증가하고 있다.

수학은 구체적 현상을 식으로 표현하고 그것을 해결하여 답을 얻고 그로부터 객관적 사실을 얻어내며 그 실용적인 가치를 획득하고 그것을 이용하여 좀 더 일반적이고 고차원의 추상적 결론까지도 얻어 낼 수 있는 학문이라 할 수 있다. 수천년간의 인류 역사 속에서 얻어지는 추론의 과정들은 인간의 사고력을 신장시키고 인간에게 동물과는 다른 힘을 부여하게 되었다. 이러한 수학을 학생들에게 전수하는 학교수학의 임무는 막중하다고 할 수 있다. 한편 현대수학에서의 근본이라 할 수 있는 함수 개념은 수학 대부분의 중요개념의 기본 출발점이며 그 중요성은 수학전반에 걸쳐 큰 비중을 차지하고 있다.

독일의 에를랑겐 프로그램 등에서 수학교육의 근대화를 주장한 클라인(Felix Klein 1894-1925)은 수학교육에서 "함수적 사고"를 중심으로 학교수학이 재구성

되어야 하고, "수학교육의 목표는 함수개념의 함양에 있다"고 까지 주장하였다.[1]

1) 박대연, 고안상, 유홍상, 김윤배, 2001

Ⅱ. 함수개념의 역사적 변천 및 교과개정에 따른 함수

1. 함수개념의 역사적 변천

1) 함수의 역사적 개관

함수라는 말은 1692년 독일의 수학자 라이프니츠(G.W.Leibniz.:1646~1716)가 자신의 논문에서 처음 사용하였던 것에서 비롯된다.

그러나 함수의 개념은 수학의 다른 개념과 마찬가지로 오랜 세월에 걸쳐 발달하여 왔다.

(1) 라이프니츠의 함수 개념

라이프니츠는 기하학적인 대상에서 변량-예를 들면, 곡선 위의 점 P에 대하여 정해지는 양, 즉 접선, 법선 또는 그 길이 등--을 일반화하여 'function'이라고 하였다.

(2) 오일러의 함수 개념

라이프니츠의 함수의 개념을 더욱 분명히 한 사람은 오일러(L.Euler.:1707~1783)이다. 그는 [무한해석 서설(Introduction analysis infinitorum, 1748)]에서 일변수의 함수란 그 변수와 몇 개의 상수로 만들어진 해석적인 식이라고 하여 곡선과 함수의 개념을 분리하려고 하였다. 또, 그는 함수를 다항함수, 유리함수 등의 대수함수와 로그함수, 지수함수, 삼각함수 등의 초월함수로 구별하였다.

(3) 코시의 함수 개념

코시(A.L.Cauchy.:1789~1857)는 [해석학 강의(Cour d'Analyse, 1821)]에서 여러 변수 가운데 하나에 어떤 값을 주면 그에 따라 다른 변수의 값이 정해지는 관계가 있을 때, 처음 변수를 '독립변수', 그 밖의 다른 변수를 '종속변수'라 하고, 이

것을 그 독립변수의 함수라고 정의하여 변수 사이의 관계로 함수를 정의하였다. 이러한 정의는 함수의 개념을 각 x의 값에 대하여 y의 값이 정해지는 하나의 규칙으로 파악하게 되는 동기가 되었다.

(4) 디리클레의 함수 개념

디리클레(P.Dirichlet.:1805~1859)는 함수를 '어느 구간 내의 어떤 변량 x의 각각의 값에 대하여 y의 값이 각각 정해질 때 y를 x의 함수라고 한다.'고 정의하였다. 이 때, y가 x의 하나의 법칙에 따를 필요도 없고, 또 종속변수가 수학적 연산에 의하여 나타내어질 필요가 없다고 하였다.

이것은 이전의 함수를 해석적인 식에서 출발시키려는 태도를 완전히 바꾸어서 두 집합 사이의 일대일 대응 관계에 의하여 함수를 정의하려는 생각이다. 그리고 이러한 정의는 표현 방법이나 그 배경에 놓인 원인을 주고 결과를 얻는 인과법칙과는 무관하게 대응 관계의 함수로 정의한 것이며 집합론에 입각한 함수의 일반화된 정의를 암시하였다.

그 후 함수의 개념은 칸토어(G.Cantor.:1845~1918)의 집합론에 근거하여 바이어슈트라스(K.T.Weierstrass. :1815~1897)의 함수론, 데데킨트(J.W.R.Dedekind. :1831~1916)의 대수적 정수론에서 영향을 받아 오늘날과 같은 함수의 이론으로 발전하게 된 것이다.

2) 함수의 현대적 정의

(1) 대응에 의한 정의

두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x에 어떤 규칙에 의하여 Y의 원소 y가 단 하나 정해질 때, 이 대응 규칙을 함수라고 한다.

(2) 순서쌍에 의한 정의

두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x와 집합 Y의 원소 중 x에 대응하는 오직 하나의 원소 y를 택하여 만든 순서쌍 (x,y)들의 집합을 함수라고 한다. 즉,

$$\forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ (x,y) \in f$$

$(x,y),\ (x,z) \in f$이면 $y=z$

를 만족하면 f를 X에서 Y로의 함수라고 한다.

3) 이론적 배경

변수(variable)는 수 집합의 임의의 원소를 나타낸다. 함수는 두 개 또는 그 이상의 변수 사이의 결합으로서 독립변수(independent variable) x에 따라 정해지는 종속변수(dependent variable) y사이의 관계이다.

Map, Mapping, Operator, Transformation 등은 함수의 다른 이름들이다.

한 변수 x에 대한 함수는 $f(x)$로 나타낸다. 이와 마찬가지로 몇 개의 변수에 대한 함수, 즉 다변수함수는

$$f(x,\ y,\ z, \ldots)$$

로 나타낸다.

라틴 문자나 그리스 문자는 함수를 표현하는데 쓰인다.

예를 들어, $f,\ F,\ g,\ G,\ h,\ H,\ \phi,\ \psi$등은 보통 사용되는 문자들이다. 보통 종속변수 y는 $y=x+1$또는 $f(x)=x+1$와 같이 방정식의 왼쪽에 쓴다.

2. 제7차 수학과 교육과정 수정 고시안

제7차 교육과정의 수정 고시안은 2006년 8월 25일 발표되었다. 이 수정 고시안은 2009년 초등학교 1, 2학년, 중학교 1학년, 고등학교 1학년을 시작으로 2010년에는 초등학교 3, 4학년, 중학교 2학년, 고등학교 2학년, 2011년에는 초등학교 5, 6학년, 중학교 3학년, 고등학교 3학년의 순서로 점진적으로 적용될 예정이다.

본론에서는 제7차 교육과정 수정 고시안 중 대표적인 특징과 함수 부분을 토대로 어떻게 수정・보완 되었는지 소개하고자 한다.

1) 제7차 교육과정 수정 고시안의 특징

(1) 문서 체제의 변화

제7차 교육과정에서 수학과에 적용되던 '단계형'교육과정을 더 이상 유지하지 않게 됨에 따라 교육과정 문서에서도 '단계' 대신 '학년'과 '학기'라는 용어를 부활시켰다.

제7차 교육과정에서는 10년에 걸친 거시적 목표를 제시하고 학교급별로 초·중·고등학교의 목표를 제시하지 않았으나, 수정 고시안에서는 각 학교급에서 가르치고자 하는 내용의 범위와 수준을 구체화하기 위해 학교급별 목표를 진술하였다. 한편 제7차 교육과정에서는 단계별로 목표를 제시하였으나 이는 학습 내용과 중복되는 경향이 있고, 다른 교과의 교육과정에는 단계별 목표가 포함되어 있지 않기 때문에 일관성을 갖추기 위하여 단계별 목표를 삭제하였다.

한편 각 단계의 영역마다 제시했던 심화 과정을 대부분 삭제하였다. 삭제된 심화 과정의 예로는 '다면체에서 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수 사이의 관계를 알아본다(7-나 단계)', '임의의 두 실수 사이에 존재하는 실수를 찾는 방법에 대하여 알아본다(9-나 단계)' 등이 있다.

(2) 영역 구분의 변경

제7차 교육과정에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 10개 학년을 하나로 통합하여 1-가 단계부터 10-나 단계에 공통적으로 적용되는 6개의 내용 영역을 설정하였으나, 수정 고시안에서는 학교급별 특성을 고려하여 초등학교와 중·고등학교 각각 5개의 영역으로 구분하였다.

<table>
<tr><th colspan="2">제7차 교육과정</th><th colspan="4">제7차 교육과정 수정 고시안</th></tr>
<tr><td rowspan="6">초·중·고등학교</td><td>수와 연산</td><td rowspan="6">초등학교</td><td>수와 연산</td><td rowspan="6">중·고등학교</td><td>수와 연산</td></tr>
<tr><td>도형</td><td>도형</td><td rowspan="2">기하</td></tr>
<tr><td>측정</td><td>측정</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>확률과 통계</td><td>확률과 통계</td></tr>
<tr><td>문자와 식</td><td></td><td>문자와 식</td></tr>
<tr><td>규칙성과 함수</td><td>규칙성과 문제해결</td><td>함수</td></tr>
</table>

[표 1] 제7차 교육과정의 수정 고시안에서의 영역명 변화

(3) 교수·학습 방법 및 평가 항목의 추가 및 삭제

제7차 교육과정의 수정 고시안에서는 교수・학습 방법에서 수준별 수업 운영 방안 및 다양한 수업 방법을 제시하고, 의사소통 능력 신장, 수학적 사고와 추론 능력 신장에 대한 항목을 추가하였으며, 기존에 있던 문제해결력 신장과 관련하여 '문제 만들기'를 추가하였다.

평가는 '의사소통 능력'의 평가를 제시하여 의사소통 능력을 언급한 목표 및 교수・학습과 일관성을 유지하고자 했다. 또한 교수・학습 방법에서 공학적 도구의 활용을 언급하고 있는 만큼, 평가에서도 공학적 도구와 교구를 이용한 평가 기회를 갖도록 권장하고 있다. 한편 제7차 교육과정에서 사용되던 '수학적 성향'의 평가를 수정 고시안에서는 보다 적절한 표현인 '정의적 영역'에 대한 평가로 바꾸었다. 그리고 제7차 교육과정에서 제시했던 상・중・하 평가 기준은 국가 수준에서 근거로 제시하기는 부적절하며 자율적으로 수준을 구분하는 것이 더 적절하다는 판단 하에 삭제하였다.

(4) 학년별 내용의 변화

학년별 내용의 변화는 학습 부담을 경감시키기 위해 학습 내용을 적정화하고, 학년별 내용 분량을 조정하는 가운데 이루어졌다. 수정 고시안에서 초등학교에서 중학교 1학년까지 대표적인 내용 변화를 살펴보면 다음과 같다.

① 초등학교

첫째, 다른 교과의 학습을 고려하여 수학의 일부 주제를 제6차 교육과정과 비슷한 시기에 도입하도록 조정하였다. 예를 들어, 무게 개념과 초 단위의 시간을 초등학교 4학년에서 3학년으로, 비와 비율을 초등학교 6학년에서 5학년으로, 정비례와 반비례를 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 도입 시기를 조정함으로써 수학이 과학과 사회 과목의 학습에 도움을 주는 도구 교과로서의 기능을 충분히 할 수 있도록 하였다.

둘째, 여러 가지 측면을 가진 개념을 점진적으로 도입함으로써 보다 의미 있는 학습이 이루어지도록 하였다. 제7차 교육과정에서는 초등학교 3학년에 연속량과 이산량의 등분할을 통해 분수 개념을 도입하고 있지만, 수정 고시안에서는 2학년에서 연속량의 등분할, 3학년에서 이산량의 등분할, 5학년에서 비로서의 분수와

몫으로서의 분수 다루도록 함으로써, 분수의 다양한 측면에 충분히 드러날 수 있도록 하였다.

② 중학교 1학년

첫째, 학습량 감축을 위하여 이진법의 덧셈과 뺄셈을 삭제하였다.

둘째, 대학교 및 국제 표준 기호를 따라 부등호 ≦, ≧를 각각 ≤, ≥로 수정하고, 필수적인 기호만 엄선한다는 의미에서 직각 기호 $\angle R$을 삭제하였다.

셋째, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동하고, '두 원의 위치 관계'를 고등학교 1학년에서 중학교 1학년으로 이동하여 해석기학적인 방법이 아닌 직관적인 수준으로 간단하게 다룬다.

넷째, 제7차 교육과정에서와 같이 함수 개념을 비례 관계의 맥락에서만 도입하게 되면 추후 일차함수와 이차함수를 이해하는 데 어려움이 따를 수 있기 때문에 보다 보편적인 맥락에서 함수 개념을 도입할 필요가 있다는 의견이 제기되어 왔다. 이에 수정 고시안에서는 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응'으로 수정하였다.[1)]

우리는 여기서 함수의 개념이 교과개정에 따라 어떻게 변화되었는지 주의를 기울일 필요가 있다. 학년별 내용의 변화 중 중학교 1학년 부분 함수의 개념을 제7차 교육과정에서 비례관계의 맥락에서 도입한 부분을 보다 보편적인 맥락에서 함수를 도입할 필요가 있음에 따라 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응으로 수정함으로써 제6차 교육과정과 비슷하게 조정' 됨을 알 수 있다. 이 부분은 다음 단원 '교과개정에 따른 함수'부분에서 자세히 설명하겠다.

제7차 교육과정 수정안에서 강조되는 몇 가지 사항을 요약해보면 다음과 같다.

① 단계별 수준별 교육과정에서 학교급별 교육과정으로

② 심화과정의 삭제로 난이도를 하향조정하여 학습량을 감축

③ 수학의 가치 제고와 정의적 측면을 강조

---

1) 황혜정 외 5인, 2008, 수학교육학신론, 문음사

3. 교과개정에 따른 함수

본론에서는 교과개정에 따라 함수의 개념이 어떻게 변화되었는지 제6차, 제7차, 제7차 교육개정안을 중심으로 살펴보고자 한다. 또한 현재 교과서에서 제시하는 함수의 학습목표 및 지도상의 유의점도 함께 비교해 보도록 한다.

1) 교과 개정에 따른 함수의 정의 변천과정

함수의 본질은 크게 두 가지 즉, '종속성' 과 '대응관계'로 볼 수 있다. 학교수학에서 함수를 도입하는 방법은 함수의 본질을 무엇으로 보느냐에 따라 달라져 왔다. 우리나라에서는 '새 수학'운동의 영향을 받은 제3차 수학과 교육과정(이후 교육과정)이후 제6차 교육과정에 이르기까지 함수를 대응관계로 정의해 왔다. 두 집합 사이의 일가성을 갖는 임의의 대응관계로서의 함수 개념을 화살표 벤다이어그램이나 함수기계로 설명하고 있다. 제7차 교육과정에서는 대응을 강조한 제6차 교육과정과는 달리 종속으로서의 함수의 본질을 강조하여 함수 개념을 변화하는 두 양 사이의 관계라는 관점에서 도입(7-가 단계)하고 있다.

함수 개념은 계층 구조가 복잡하고 관련된 하위 개념이 존재하기 때문에 이해하기가 쉽지 않다. 함수의 정의 방식을 바꾼다고 해서 모든 것이 해결되는 것은 아니다. 학생들이 함수를 역동적으로 생각하고 함수 개념의 본질을 이해할 수 있다는 가정을 실현하는 데는 여러 가지 어려움이 따른다. 무엇보다도 함수와 관련된 모든 개념들을 새로운 정의 방식에 따라 조정하기가 어려우며, 교과서의 제시방법이나 교사의 수업방법 또한 수정하기가 쉽지 않다. 따라서 제7차 교육과정에서의 함수 도입방법에 따르더라도 학생들은 여전히 함수 개념을 어려워 할 것이라고 예측할 수 있다. 변화하는 양 사이의 관계를 이해하는 데는 도움이 되지만 함수 개념을 구조화하고 대상화하는 데는 어려움이 따를 수 있다. 일상생활에서 접하는 여러 가지 종속적인 관계 특히, 정비례와 반비례 같은 규칙적인 변화로 표현될 수 있는 현상을 토대로 함수 개념을 도입함에 따라 학생들은 함수 개념을 구조화하고 형식화하는데 어려움이 생길 수 있다. 더욱이 정의역과 공역, 치

역의 개념이 바탕에 깔려있는 집합 개념을 무시함으로써 이러한 개념들을 애매하게 만들기도 한다. 이러한 부분은 함수 개념을 이해하는데 장애가 될 수 있다. 함수 개념은 문맥에 따라 역동적인 변화 현상 가운데의 종속 관계를 기술하고 해석하고 예언하기 위한 수단으로서의 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식 표현과 그래프 표현 그리고 다양한 대응 관계적 측면을 포괄하는 수학 내적 외적인 제 현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용할 때에만 그 진정한 개념적인 힘을 발휘 할 수 있는 것이다. 따라서 집합 사이의 대응이란 관계적 측면을 무시하고 변수사이의 종속 관계만을 너무 강조하거나 변수측면을 무시하고 관계적 측면만을 강조하는 것 모두 문제가 된다.[1]

이러한 문제점으로 인해 제7차 교육과정 수정 고시안에서는 다시 제6차 교육과정에서 제시된 함수의 대응관계로 정의하였다. 이는 현재 10-나에서 다루고 있는 함수의 개념과 같이함으로써 학습자로 하여금 개념상의 괴리감을 줄이기 위함이며 교사는 어느 한쪽면을 강조하기보다 대응과 종속 관계 모두 함수의 개념으로 학습자에게 이해시키는 것이 중요하다고 본다.

2) 교과개정에 따른 함수단원의 지도 내용

아래 표에서 보는 바와 같이 정비례·반비례 부분이 제6차 교육과정의 6학년 과정에서 제7차 교육과정의 중학교 1학년 과정으로 제7차 교육과정 수정고시안에서는 다시 6학년과정으로 옮겨졌다.

또한, 제7차 교육과정에서 학습해야 할 내용이 다른 교육과정보다 월등히 많음을 알 수 있다. 이는 개념을 새롭게 학습하는 중요한 시기에 학습자로 하여금 부담을 줄 수 있다. 제7차 교육과정 수정 고시안에서는 학습 내용을 적정화함으로써 학습 부담을 경감시키고 있다. 심화과정을 삭제한 것도 이러한 이유에서 이다.

[1] 조완영, 양재식, 2003

	제6차 교육과정	제7차 교육과정	제7차 교육과정 수정고시안
중1	· 대응과 함수 · 함숫값의 변화 · 순서쌍과 좌표 · 함수의 그래프	· 정비례 반비례 · 함수의 개념 · 순서쌍과 좌표 · 함수의 그래프 · 함수의 활용	· 함수의 개념 · 순서쌍과 좌표 · 함수를 표, 식, 그래프로 나타내기 · 함수의 활용
중2	· 일차함수와 그래프 · 일차함수의 활용	· 일차함수의 뜻과 그래프의 성질 · 일차함수와 일차방정식과의 관계 · 그래프를 통한 연립일차방정식의 해의 이해 · 일차함수의 활용	· 일차함수의 뜻과 그래프 · 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계 · 일차함수의 활용
중3	· 이차함수와 그 그래프 · 이차방정식과 이차함수의 관계	· 이차함수의 뜻과 그래프 · 이차함수의 그래프의 성질	· 이차함수의 뜻 · 이차함수의 그래프의 성질

[표 2] 교과과정에 따른 함수단원의 지도 내용

3) 제7차 교육과정과 제7차 교육과정 수정 고시안에 제시된 함수

(1) 제7차 교육과정에 제시된 함수(중학교 1학년)

<학습목표>

(가) 함수와 그 그래프

① 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

② 함수의 개념을 이해한다.

③ 순서쌍과 좌표를 이해한다.

④ 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

(나) 함수의 활용

① 함수를 실생활 문제에 활용할 수 있다.

<용어와 기호> 정비례, 반비례, 함수, 정의역, 공역, 함숫값, 치역, 변수, 좌표, 순서쌍, x좌표, y좌표, 원점, 좌표축, x축, y축, 좌표평면, 제 1, 2, 3, 4사분면

면, 함수의 그래프, $y=f(x)$

<심화과정> 실생활의 다양한 소재에서 함수 관계가 있는 것을 찾아보고, 이를 식으로 나타낼 수 있다.

<학습 지도상의 유의점>

① 생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례 관계를 이해하게 한다.

② 함수 개념의 도입은 비례 관계를 이용한다.

(2) 제7차 교육과정 수정 고시안에 제시된 함수(중학교 1학년)

<학습 목표>

(가) 함수와 그래프

① 함수의 개념을 이해한다.

② 순서쌍과 좌표를 이해한다.

③ 함수를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.

(나) 함수의 활용

① 함수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

<용어와 기호> 변수, 함수, 정의역, 공역, 함숫값, 치역, 좌표, 순서쌍, x좌표, y좌표, 원점, 좌표축, x축, y축, 좌표평면, 제 1, 2, 3, 4사분면, 함수의 그래프, $f(x)$, $y=f(x)$

<교수·학습상의 유의점>

① 함수 개념은 실생활에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다.

② 함수 개념의 지도에서 대응의 의미는 직관적인 수준에서 다룬다.

Ⅲ. 함수지도

1. 함수지도의 의의

함수는 20세기 초 수학교육 개혁 운동의 핵심 인물 중 한 사람인 독일의 Klein(1968)에 의해 학교 수학의 한 분야로 자리 잡게 되었다. Klein은 함수적 사고의 중요성은 응용을 포함하여 수학 전체를 통합하는 데 있다고 보았다. 즉, 함수는 수학의 여러 영역을 통합하기 위해서나 현실 세계의 상황을 이해하기 위해서나 아주 중요한 내용이라는 것이다.

함수를 통해 현실 세계의 상황을 이해한다는 것은 현실 세계의 상황을 적절한 함수로 표현하고 이러한 상황에서 해결해야 할 문제를 수학적으로 접근한 후에 이를 다시 상황에 맞게 재해석하는 모델링의 과정을 통해서 이루어진다고 할 수 있다. 예를 들면, 역사적으로 오래된 태양의 운동과 달의 운동을 분석하여 주기적 변화를 인식하고 이를 이용하여 한 달의 시작을 처음으로 초승달이 보이는 날로, 하루는 일출부터 다음 일출까지로 정하였다. 그리고 달의 운동에 따른 썰물과 밀물의 주기적 현상을 관찰하거나 행성의 위치 관찰을 통한 행성 궤도의 예측 등과 같은 모델링에서부터 함수에 대한 연구가 본격화된 시기에 공을 던졌을 때 볼 수 있는 포물선과 같이 물체의 운동에 대한 모델링, 인구 증가, 속도 변화, 주식 변화, 건축 설계, 환경오염과 관련된 모델링에 이르기까지 많은 상황을 생각할 수 있다. 이와 같이 함수는 변화하는 현상을 관찰하고 설명하며 예측하는 데 많은 도움이 된다. 그러나 좀 더 근본적으로 보면 사람들, 더 나아가서는 인류가 알게 된 사물에 이름을 부여하는 행동, 전화나 휴대폰에 번호를 부여하는 행동, 사진을 통해 원래의 대상을 인식하는 행동, 퍼즐 조각을 맞추는 행동, 과자나 사탕을 나누어주는 행동, 시간에 따른 온도의 변화, 시간에 따라 나이가 증가하는 현상, 시간에 따른 키나 몸무게의 성장 등 보통 의식은 못하지만 우리가 살아가는 현실 세계는 많은 함수 상황을 포함하고 있다.

한편 함수가 수학적으로도 중요한 이유는 수학의 발전이나 통합에 핵심적인 역할을 해왔다는 것이다. 원래 수학은 이전에는 대수와 기하라는 두 개의 분야로 발전해왔다. 이 두 분야의 통합을 가능하게 한 것이 함수이다. 기하에서 다루는 도형을 공간에서의 정적인 대상으로부터 공간상에서의 연속적으로 변화하는 대상으로 보고 도형의 방정식을 고려하면서 좌표 평면 위에서 다룸으로써 기하와 대수를 통합하는 것이 가능할 뿐만 아니라 함수 그래프를 통해서 대수와 무한소 계산을 함수의 내용으로 취급함으로써 대수와 함수의 결합을 가능하게 하였다. 이 외에도 함수는 수학의 여러 영역에서 중요한 역할을 한다. 예를 들면, 덧셈·뺄셈·곱셈·나눗셈 등의 이항 연산을 포함한 다양한 연산, 삼각형·직사각형·정사각형·사다리꼴·평행사변형 등 기본 도형의 넓이·둘레·대각선의 수를 구하는 것도 함수이다. 즉, 함수는 우리가 수학을 학습하는 아주 이른 시기부터 기초 개념이 될 뿐만 아니라 추상적인 수학을 발전시키는 원동력이다.[1)]

이와 같이 함수는 현실 세계의 상황을 좀 더 이해할 수 있는 도구가 될 뿐만 아니라 수학의 분야를 통합할 수 있다는 점에서 중요하다고 할 수 있다. 따라서 우리가 학생들에게 함수를 통해 지도해야 할 것은 현실 세계의 물리적·사회적·정신적·수학적 현상 속에서의 변화를 인식하고, 변하는 대상간의 연관성이나 종속성을 기술하고 해석하고 예측할 수 있는 정신적 능력뿐만 아니라 수학 내적으로도 함수의 수학적 본질을 인식하고 그런 본질에 따라 수학적 내용을 다룰 수 있는 능력을 의미하는 함수적 사고 능력이라고 할 수 있다.

2. 초등교육에서의 함수와 중등교육에서의 함수

1) 초등학교에서의 함수

(1) 대응관계의 표현

함수를 생각하는 데는 대응이 기초가 되며 이는 함수를 결정해 주는 근본적인 생각으로 대응관계를 가장 올바르게 나타내는 것은 식이다. 합이 일정한 경우,

---

1) Davis, 1982; Selden Selden, 1992

이를테면 $x+y=5$, 몫이 일정한 경우, 이를테면 $\frac{y}{x}=5$등이다. 그러나 변화하는 상태를 구체적으로 파악하는 데는 표로 나타내는 것이 가장 적절하다. 또 직관적으로 수량의 대응법칙의 특징을 구별하기 쉬운 것은 그래프이다.

(2) 함수 관계

초등학교에서 취급하는 함수에는, 합이 일정한 것 : $x+y=5$, 몫이 일정한 것 : $\frac{y}{x}=5$, 그리고 곱이 일정한 것 : $x\times y=5$ 등이 기본적인 함수이다. 몫이 일정한 것은 비례관계, 곱이 일정한 것은 반비례관계를 나타내는 함수이다. 초등학교에서 취급하는 것으로 이 밖에 일차함수 $y=ax+b$도 있다.

(3) 함수 지도

초등수학에 있어서의 함수의 지도는 함수 그 자체를 지도하는 것이 주된 목표가 아니고 함수적인 사고를 기르는 것이 목표이다. 함수의 개념의 양성은 특정한 학년에서 지도함으로써 이루어지는 것이 아니고 어린이의 발달에 따라서 계속적, 발전적으로 해 나가야 한다. 즉, 초등학교의 전 학년을 통해서 하는 것이 좋다. 그리고 함수적인 생각을 수학교재의 전반에 통해서 지도하는데 그 지도과정에서 주가 되는 것은 다음과 같다.

① '따라서 변하는 변량'에 대한 인식을 가질 수 있게 한다. 그러기 위해서는 '한 양(수)이 변하면 다른 한 양(수)이 변하고, 전자가 정해지면 후자도 정해진다.'라는 것을 이해할 수 있게 하여야 한다.

② 2개의 집합 M, N에 대해서 서로 대응하는 원소를 발견할 수 있도록 한다. 즉, 집합 M의 요소 x에 대응하는 집합 N의 y를 찾을 수 있게 한다.

③ 변하는 것에 대한 인식을 가질 수 있게 한다. 두 변량(수)x, y가 있어서 독립변수 x는 정의역에 속하는 여러 가지 값의 대표로 볼 때 그것에 대응하는 함숫값 y는 치역에 속하는 여러 가지 값의 대표로 볼 수 있게 한다.

④ 대응의 규칙성을 발견할 수 있게 한다. 즉, 집합 M의 원소와 그것에 대한 집합 N의 원소사이에 일반적으로 어떤 관계가 존재하는가를 발견할 수 있

게 한다.

⑤ 대응관계를 식, 표, 그래프로 나타낼 수 있게 한다. 대응관계를 합일정, 차일정, 비일정, 곱일정 등의 식으로 나타내 보게 한다.

⑥ 공식 중의 요소를 변량으로 생각하고 공식을 변량간의 관계로 볼 수 있도록 한다. 즉, 공식을 함수관계로 보고 문제를 해결할 수 있게 한다.

⑦ 함수적인 관찰에 의해서 문제를 풀 수 있게 한다. 즉, 문장제로부터 함수표를 만들고 일정한 함수관계를 발견하여 문장제를 해결할 수 있게 한다.

위에서도 언급한 것처럼 초등학교 수학과에서는 함수 그 자체를 정의하기 보다는 함수적인 사고를 기르는 것이 주된 목표이다. 수학교육의 현대화를 내면적으로 보면 기능면은 주로 기계에 맡기는 시대에 와 있으므로, 기능면 보다는 오히려 수학적인 관찰과 사고를 중시하게 된다. 함수적인 관찰과 사고의 지도는 이와 같이 수학교육의 현대화의 방향으로 보아서 중시되어 왔다.

일반적으로 변하는 두 양이 있을 때, 한편이 정해지면 이에 따라서 다른 쪽이 어떻게 정해지는가 그 법칙을 발견하는 일, 지식의 기초를 이루고 있는 일반적이고 보편적이 법칙을 발견하고 이용하는 일이 함수지도의 목표이다. 저학년의 학생일수록 함수 경험이 중요한데 특히 초등학생의 경우는 일반적인 주변 현상을 다루게 한다. 문자와 기호의 사용은 학생들이 후에 변수를 사용 할 수 있게 해준다.

2) 중등학교에서의 함수

(1) 규칙, 대응이라는 용어를 사용하여 함수를 정의하였다.

두 집합 X, Y가 주어졌을 때, X의 원소에 주어진 어떤 관계를 만족하는 Y의 원소를 찾아 화살표로 잇는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 하고 집합 X에서 집합 Y로의 대응 중에서, X의 모든 원소 각각에 Y의 원소가 단 한 개씩 대응 되는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 정의하고 기호로는 $f : X \to Y$로 나타내었다.

(2) 함수 $f : X \to Y$ 가 주어졌을 때, 정의역의 원소 x와 그것에 대응하는 함수값 $f(x)$의 전체의 집합을 함수 f의 그래프라고 한다.

이와 같은 뜻에서 함수와 그 그래프를 동일시하기도 한다.

보통 $y=f(x)$라고 부르는 것도 이와 비슷한 의미에서 비롯된 것이다. 이러한 의미에서 함수는 관계나 대응의 특별한 경우로 볼 수 있다. 다시 말하여 A에서 B에로의 관계나 대응이라고 하여 모두 함수라고는 말할 수 없으나 위처럼 함수를 정의 했을 때 A에서 B로의 함수이기 위한 필요조건이 되는 셈이다. 함수의 그래프 표현은 관계-상호 관계를 직관적으로 해석하는 것을 배우지 못한 학생들에게는 내적 의미를 주지 못한다. 그래서 그래프는 함수를 단순히 설명하는 것이 아니라 함수에 의미를 추가하는 것이다. 그래프의 도움으로 관련된 변수들의 함수적 대응을 쉽게 이해할 수 있다. 함수는 그래프에 의해 시각화되고 그래프는 함수로 해석된다.[1)]

3. 교과서에서 다루는 함수(7-가 단계)

이제 중학교 1학년이 배우고 있는 7-가 교과서를 분석해 볼 필요가 있겠다. 현재 제주도에서 가장 많이 사용되고 있는 (주)중앙교육진흥연구소에서 출판한 교과서 이외에 두 종류를 더 예를 들어 비교해 보도록 한다. 먼저, 함수 지도 목표와 지도 유의점 및 개념 그리고 가장 중요시 여기는 실생활에서의 예제를 어떻게 구성했는지 알아보도록 한다.

1) (주)중앙교육진흥연구소

(1) 지도 목표

(가) 함수

① 정비례와 반비례 관계를 이해하고 그 관계를 식으로 나타낼 수 있게 한다.

② 함수의 뜻을 이해하고, 간단한 함수의 식을 구할 수 있게 한다.

③ 함숫값의 변화를 조사하고, 이를 표로 나타낼 수 있게 한다.

④ 함수의 치역을 구할 수 있게 한다.

1) 최창우, 남형채, 1997

(나) 함수의 그래프

① 좌표, 좌표축, 좌표평면의 뜻을 알게 한다.

② 평면 위의 점을 좌표로 나타내고, 좌표가 주어진 점을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

③ 좌표평면에서 사분면의 뜻을 이해하고, 사분면 위의 점의 특징을 알게 한다.

④ 함수의 그래프의 뜻을 알고, 여러 가지 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

⑤ 함수의 $y=ax(a\neq0)$와 $y=\frac{a}{x}(a\neq0)$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

(2) 지도상의 유의점

① 생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례관계를 이해하게 한다.

② '비례'라는 용어는 정비례와 반비례를 포괄하는 개념으로 다룬다.

③ 함수의 개념은 비례 관계를 이용하여 도입하고, 곧바로 변화 관계(변수 개념)로 전개해 나가도록 한다.

④ 함수의 그래프는 처음에는 정의역이 유한집합인 경우를 다루고, 점차 정의역을 수 전체의 집합으로 하여 함수 $y=ax(a\neq0)$, $y=\frac{a}{x}(a\neq0)$의 그래프가 직선, 쌍곡선이 됨을 직관적으로 이해하도록 한다. 이 때, '쌍곡선'이라는 용어는 사용하지 않는다.

⑤ 직선 $y=ax(a\neq0)$의 그래프에서 '기울기'라는 용어는 사용하지 않는다.

⑥ 함수를 변화 관계로 보고 있으므로 '공역'을 강조하여 지도하지 않도록 한다.

(3) 이 교과서에서의 함수의 정의

변화하는 두 양 x, y에 대하여 변수 x의 값이 하나 정해지면 그에 따라 변수 y의 값이 하나씩 정해지는 관계가 있을 때, 이 관계를 y는 x의 함수라고 하며,

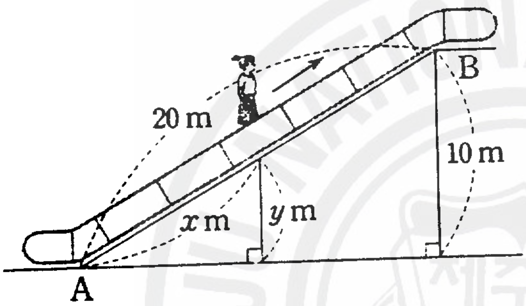
이것을 기호로

$$y=f(x)$$

와 같이 나타낸다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 변수 x의 값을 나타내는 수 전체의 집합을 정의역이라 하고, 변수 y의 값을 나타내는 수 전체의 집합을 공역이라고 한다. 또한, 함수 $y=f(x)$의 주어진 정의역에서의 함숫값 전체의 집합을 그 함수의 치역이라고 한다.

(4) 함수의 실생활 문제



[그림 1]

[탐구활동] 어느 건물에 설치된 에스컬레이터는 아래 그림과 같이 A지점에서 B지점까지 20m움직이면 바닥면에서 10m높아진다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자

1 에스컬레이터가 A지점에서 x m 움직이면 바닥면에서 ym 높아진다고 할 때, x와 y사이의 관계식을 구하여 보자

2 에스컬레이터가 A지점에서 8m움직이면 바닥면에서 얼마나 높아지는지 구하여 보자

3 에스컬레이터가 바닥면에서 7m높아질 때, 에스컬레이터가 움직인 거리를 구하여 보자.

[풀 이] 위의 활동에서 x와 y사이에는 정비례 관계가 있고, $x=20$일 때 $y=10$이므로 $y=ax$에서 $a=\frac{1}{2}$이다. 따라서, x와 y사이의 관계식은

$y=\frac{1}{2}x$이다.

여기서, $x=8$일 때, $y=4$ $y=7$일 때, $x=14$이므로 에스컬레이터가 A지점에서 8m움직이면 바닥면에서 4m높아지고, 바닥면에서 7m높아지면 에스컬레이터가 움직인 거리는 14m가 된다.

이와 같이 주어진 조건에 따라 y를 x의 식으로 나타내고, 이를 이용하여 실생활 속에서 나타나는 문제를 해결할 수 있다.

[예제1] 바닥에 x개의 타일을 이어 붙였을 때, 그 넓이는 y㎠라 한다. 타일 한 개의 넓이가 9㎠일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(2) 10개의 타일을 이어붙일 때, 그 넓이를 구하여라.

[풀 이] (1) $y=ax$에서 $x=1$일 때, $y=9$이므로 $a=9$이다.

따라서 구하는 식은 $y=9x$

(2) x에 10을 대입하면

$y=9\times10=90$(㎠)

[문제1] 깊이가 60㎝인 원기둥 모양의 물통에 물을 넣을 때, 수면의 높이가 매분 3㎝씩 올라간다. 물을 넣기 시작하여 x분 후의 수면의 높이를 y㎝라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(2) 물통에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간을 구하여라.

[문제2] 온도가 일정할 때, 기체의 부피 y는 압력 x에 반비례한다. 어떤 기체의 부피가 10㎠일 때, 이 기체의 압력은 2기압이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(2) 압력이 5기압일 때, 이 기체의 부피를 구하여라.

[문제3] 톱니의 수가 각각 16개, 32개인 톱니바퀴 A, B가 서로 맞물려 돌고 있다. A가 x번 회전할 때, B는 y번 회전한다고 한다. x와 y사이의 관계식을 구하고 그 그래프를 그려라.

[심화과정1] 실생활에서 함수 관계가 있는 것을 찾아보고, 이를 식으로 나타내

보자. 우리 생활 주변에는 서로 관계를 가지고 변화하는 두 양, 즉 함수에 관련된 것들이 많다. 이들 사이의 관계를 함수의 식으로 나타내면 실생활의 문제를 해결할 수 있다. 다음은 어느 광고지에 실린 CD할인 판매 안내문이다.

<CD 선착순 할인 판매>

우리 가게에서는 개업 10주년을 맞이하여 8일 오전 11시부터 CD를 선착순을 할인 판매하기로 하였습니다.

한 장의 정가가 5000원인 CD를 선착순으로 100원, 200원, 300원, …에 판매합니다. 단, 한 분에게 한 장씩만 팔며 5000원 미만으로 살 수 있을 때까지 이 행사가 진행됩니다. 빨리 오셔서 행운의 기회를 잡으시기 바랍니다.

[풀 이] 여기서, x번째 고객이 사는 CD의 가격을 y원이라고 할 때, y가 x의 함수인지 알아보고, x와 y사이의 관계식을 구하여 보자.

위에서 x의 값이 1, 2, 3, …, 49로 정해지면 y의 값이 100, 200, 300, …, 4900으로 하나씩 정해지므로 y는 x의 함수이고, 그 관계식은

$$y = 100x$$

이다. 이 함수의 식에 $x = 23$을 대입하면 $y = 2300$이므로 23번째 고객이 사는 CD의 가격은 2300원이다.

[활용] 위의 안내문을 보고 다음 물음에 답하여라.

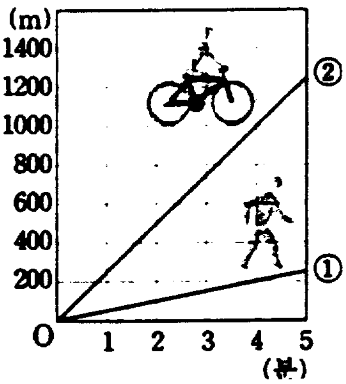
(1) 10번째 고객이 사는 CD의 가격을 구하여라.

(2) 선착순 할인 판매 행사가 진행되는 동안 가장 비싼 가격으로 CD를 사는 고객은 몇 번째 고객인가?

[심화과정2] 변화하는 두 양의 관계를 나타낸 그래프를 이용하여 실생활 문제를 해결하여 보자.

- 관계식으로 나타내어진 함수를 표나 그래프로 나타낼 수 있다.
- 함수를 그래프로 나타내면 두 양의 변화 관계를 쉽게 알아볼 수 있고 이를 이용하면 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있다.

동주는 집에서 2km 떨어진 학교까지 가는데 걸어서 갈 때와 자전거를 타고 갈 때가 있다. 오른쪽 그림은 각 경우에 대하여 시간과 거리 사이의 관계를 그래



[그림 2]

프 ①, ②로 나타낸 것이다.

그래프 ①, ②의 식을 구하고, 각 경우에 집에서 학교까지 갈 때 걸리는 시간을 구하여 비교하여 보자.

[풀 이] 동주가 집에서 출발하여 x분 동안 간 거리를 ym 라 하자.

그래프 ①은 점(4, 200)을 지나므로 $y=ax$에 $x=4$, $y=200$을 대입하면 $a=50$이다. 즉, 그래프 ①의 식은 $y=50x$이다.

마찬가지로, 그래프 ②의 식을 구하면 $y=250x$이다.

그런데, 집에서 학교까지의 거리가 2000m 이므로, $y=2000$을 $y=50x$, $y=250x$에 각각 대입하면 $x=40$과 $x=8$을 얻는다.

따라서, 집에서 학교까지 가는데 걸어서 갈 때는 40분, 자전거를 타고 갈 때는 8분 걸리므로 32분의 차이가 생긴다.

[활용] 위의 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.

(1) 동주가 5분 동안 자전거를 타고 간 거리는 걸어서 간 거리보다 몇 m를 더 갈 수 있는가?

(2) 위의 그래프를 이용하여 여러 가지 문제를 각자 만들고 풀어라.[1]

2) (주)금성출판사

(1) 지도목표

① 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

② 정비례와 반비례를 이용하여 함수의 개념을 이해한다.

③ 순서쌍과 좌표를 이해한다.

④ 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

⑤ 함수를 실생활 문제에 활용할 수 있다.

---

1) 강행고 외 9인, 2000

(2) 지도상의 유의점

① 실생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례 관계, 반비례 관계를 이해하게 한다.

② '함수의 개념'은 비례 관계를 이용하여 도입하고, 곧바로 변화 관계(변수 개념)로 전개해 나가도록 한다.

③ 평면 위에 있는 점의 위치는 기준점을 잡고 그 점에서 직교하는 2개의 수직선을 좌표축으로 정하여, 그 평면 위의 점에 순서쌍을 대응시킴으로써 나타낼 수 있게 하고, 이 때 나오는 용어의 뜻을 알게 한다.

④ 좌표가 주어졌을 때 그 점을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 하고, 좌표평면 위의 점이 주어졌을 때 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

⑤ '함수의 그래프'는 처음에는 정의역이 유한집합인 경우를 다루고, 점차 정의역을 수 전체의 집합으로 하여 함수 $y=ax$, $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 직선, 곡선이 됨을 직관적으로 이해시킨다.

⑥ 직선 $y=ax$의 그래프에서 '기울기'라는 용어는 사용하지 않는다.

⑦ 실생활의 간단한 소재로 함수를 활용할 수 있게 한다.

(3) 이 교과서에서의 함수의 정의

두 양 x, y에 대하여 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩만 정해질 때, y를 x의 함수라고 한다. 이 때, x가 취할 수 있는 값들의 집합 X를 이 함수의 정의역, y의 값이 속하는 집합 Y를 이 함수의 공역이라 하고, x, y와 같이 어떤 집합에 속하면서 여러 값을 가지며 변하는 문자를 변수라고 한다.

(4) 함수의 실생활 문제

[탐구활동] 고속도로를 달리고 있는 어떤 자동차가 5L의 휘발유로 60km의 거리를 달릴 수 있다고 한다. 이 자동차가 30L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리를 다음 순서에 따라 풀어 보자.

1단계 1L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리는 (　)km이다.

2단계 xL의 휘발유로 달릴 수 있는 거리를 $y$km라고 할 때, y=( )x이다.

3단계 30L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리는 ( )×30=( )(km)이다.

[풀 이] 위에서 자동차는 5L의 휘발유로 60km의 거리를 달릴 수 있으므로

(1L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리)×5=60(km)

이다. 이 때, 1L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리를 $a$km라고 하면

$$a \times 5 = 60\text{에서 } a = 12$$

한편, 이 자동차가 xL의 휘발유로 $y$km를 달릴 수 있다면

$$y = 12x$$

인 관계식이 성립하고, 이것은 정비례 관계를 나타내는 함수이다.

그리고 함수 $y = 12x$에서 $x = 30$일 때의 함숫값이

$$12 \times 30 = 360$$

이므로, 30L의 휘발유로 달릴 수 있는 거리는 360km이다.

[문제1] 에스컬레이터로 5m내려갈 때마다 높이가 2m씩 낮아진다고 한다.

(1) 에스컬레이터로 xm내려가면 높이가 ym낮아진다고 할 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) 에스컬레이터로 30m내려가면 높이는 몇 m낮아지는가?

[예제] 지선이의 자전거에는 큰 톱니바퀴와 작은 톱니바퀴가 체인으로 연결되어 있다. 톱니가 60개인 큰 톱니바퀴가 1번 회전할 때, 톱니가 x개인 작은 톱니바퀴는 y번 회전한다고 한다.

(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) 큰 톱니바퀴가 1번 회전할 때 톱니가 20개인 작은 톱니바퀴는 몇 번 회전하는가?

[풀 이] (1) 톱니가 60개인 큰 톱니바퀴가 1번 회전할 때, 톱니가 x개인 작은 톱니바퀴가 y번 회전한다면 체인을 지나가는 톱니 수는 같아야 하므로

$$60 \times 1 = xy\text{에서 } y = \frac{60}{x}$$

(2) $y=\frac{60}{x}$에 $x=20$을 대입하면 $y=\frac{60}{20}=3$

따라서, 작은 톱니바퀴는 3번 회전한다.

[문제2] 상민이는 여름 방학을 이용하여 수학 교과서 150쪽 분량을 복습할 계획을 세워 보았다. 공부할 수 있는 날짜는 x이라고, 하루에 y쪽씩 복습하려고 한다.

(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) 공부할 수 있는 날짜가 30일이면 하루에 몇 쪽씩 복습하여야 하는가?

[심화과정1] 용수철에 xg의 물체를 매달면 $y$cm가 늘어난다고 할 때, y는 x에 정비례한다고 한다. 이 용수철에 50g의 물체를 매달았더니, 용수철은 2cm가 늘어났을 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

[풀 이] ① $x=50$일 때, $y=2$이다.

② 1g의 물체를 용수철에 매달았을 때, 용수철은 $\frac{y}{x}=\frac{2}{50}=0.04$cm 늘어난다.

③ y를 x에 관한 식으로 나타내면 $y=0.04x$이다.

[문제] 자동차 A와 자동차 B는 30L의 휘발유로 각각 620km, 440km를 주행할 수 있다고 한다. xL의 휘발유로 두 자동차가 주행할 수 있는 거리의 차를 $y$km라 할 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

[문제] 어느 회사에서는 200개의 물건을 팔면 30만원의 이익을 얻는다고 한다. x개의 물건을 팔아서 얻는 이익을 y원이라고 할 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

[심화과정2] 길이가 일정한 진자가 1회 왕복하는 데 걸리는 시간은 일정하다고

한다. 1회 왕복하는 데 $\frac{5}{6}$초 걸리는 진자 A가 72회 왕복하는 동안에 1회 왕복하는 데 x초 걸리는 진자 B는 y회 왕복한다. 이 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

[풀 이] ① 진자 A가 72회 왕복하는데 걸리는 시간은 $72\times\frac{5}{6}=60$초이다.

② 진자 B가 y회 왕복하는 데 걸리는 시간은 xy초이다.

③ ①, ②에서 구한 값이 같음을 이용하여 y를 x에 관한 식으로 나타내면 $y=\frac{60}{x}$이다.

[문제] 어느 공장에서 8명이 15일 걸려서 완성할 수 있는 일을 x명이 완성하려면 y일 걸린다고 할 때, y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

[문제] 모를 심는 기계인 이양기 200대로 6일 걸려서 모를 심을 수 있는 논이 있다. 이 논에 이양기 x대로 모를 심으려면 y일 걸린다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(2) 300대의 이양기로는 며칠이 걸리겠는가?[1]

3) 한서출판사

(1) 지도목표

① 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.

② 함수의 뜻을 이해하게 하고 간단한 함수의 식을 구하게 한다.

③ 함숫값의 변화를 조사하고 이를 표로 만들 수 있게 한다.

④ 평면 위에서의 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있게 한다.

⑤ 좌표가 주어졌을 때 그 점을 좌표평면에 나타낼 수 있게 하고, 좌표평면 위의 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

1) 양승갑 외 6인, 2000

⑥ 그래프의 뜻을 이해하고 그래프를 그릴 수 있게 한다.

⑦ 함수를 실생활 문제에 활용할 수 있게 한다.

(2) 지도상의 유의점

① 실생활 소재를 이용한 문제들을 도입하고 개념 이해에 중점을 두도록 지도 한다.

② 비례관계를 이용하여 변화하는 두 양의 관계로서 함수의 개념을 이해하도록 한다.

③ 좌표평면에서 x축, y축 위의 점은 어느 사분면에도 속하지 않음을 알게 하고, 순서쌍(a, b)와 (b, a)가 같지 않음을 유의하도록 한다.

④ 함수의 그래프를 그릴 때 너무 복잡한 계산이 되지 않도록 유의하다. 특히, 반비례 함수에서 a값이 클 경우 좌표평면을 융통성 있게 그릴 수 있도록 지도한다.

⑤ 지나치게 상세한 그래프를 학생들에게 요구하다 보면 그래프가 너무 귀찮고 어려워지므로 주의한다.

(3) 이 교과서에서의 함수의 정의

함께 변하는 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지고 그에 대응하는 y의 값이 하나로 결정될 때, y는 x의 함수라고 한다. y가 x의 함수일 때, 두 변수 x, y 사이의 관계를 나타내는 식은

$$y = (x\text{에 관한 식})$$

의 꼴이다. 이 x에 관한 식을 $f(x)$라 하고, x, y사이의 관계가 $y=f(x)$인 함수를 간단히 함수

$$y=f(x)$$

라고 말하기도 한다.

이때, 변수 x가 값을 취하는 범위를 그 함수의 정의역이라고 하며, y가 값을 취할 수 있도록 잡은 범위를 공역이라고 한다. 또한, 함수 $y=f(x)$에 대하여 x가 정의역이 모든 값을 취하면서 변할 때, 식 $f(x)$가 취하는 값, 즉 함숫값의 범위

를 치역이라고 한다.

(4) 함수의 실생활 문제

[생각열기] 어느 주유소에서 1L의 가격은 1312원이다. 자동차에 휘발유를 30L, 40L씩 넣을 때, 휘발유 요금은 각각 얼마씩일까?

[풀 이] ① 휘발유의 양을 xL, 그에 해당하는 요금을 y원이라 하고, x, y사이의 관계식을 세운다.

1L에 1312원이므로 $y=1312x$

② 여기에 $x=30$, $x=40$을 대입하여 y의 값을 구한다.

$x=30$일 때, $y=1312\times 30=39360$
$x=40$일 때, $y=1312\times 40=52480$

[예제] 10원짜리 동전 1개의 무게는 약 4.5g이다. 비어 있을 때의 무게가 100g인 저금통에 10원짜리를 넣어 통째로 단 무게가 937g이 되었다고 할 때, 저금통 속에 들어 있는 돈은 모두 얼마인가?

[풀 이] ① 동전의 무게를 xg, 그에 해당하는 금액을 y원이라고 하고, x, y사이의 관계식을 세운다.

xg은 $\frac{x}{4.5}$개의 무게이므로 $y=10\times\frac{x}{4.5}$, 즉

$$y=\frac{20}{9}x$$

② 동전의 무게는 937g에서 빈 저금통의 무게 100g을 빼고 구한다.

$$x=937-100=837$$

③ $x=837$을 ①의 등식에 대입하여 y의 값을 구한다.

$$y=\frac{20}{9}\times 837=1860$$

[예제] 자동차의 연비가 16.5km/L라는 것은 1L의 휘발유로 16.5km를 달린다는 뜻이다. 연비가 각각 16.5km/L, 18km/L인 두 자동차가 500km를 달리는 데 필요한 휘발유의 양을 각각 구하여라.

[풀 이] ① 연비를 $x$km/L, 500km를 달리는 데 필요한 휘발유의 양을 yL라 하고, x, y사이의 관계식을 세운다.

1L의 휘발유로 $x$km를 달리므로 $xy=500$, 즉

$$y=\frac{500}{x}$$

② 여기에 $x=16.5$, $x=18$을 각각 대입하여 y의 값을 구한다.

$$x=16.5\text{일 때, } y=\frac{500}{16.5}=30.3030\cdots$$
$$x=18\text{일 때, } y=\frac{500}{18}=27.777\cdots$$

[심화문제1] 우리 생활 주변에는 함수 관계가 있는 여러 가지 양들이 있다. 이러한 양들을 찾아 식으로 나타내어 보자.

▶ x인치의 길이가 $y$cm라고 할 때, $y=2.54x$

▶ x마일의 거리가 $y$km라고 할 때, $y=1.6x$

▶ x근의 무게가 yg이라고 할 때, $y=600x$

▶ 인터넷에서 용량이 3000Kb인 파일을 1초당 xKb의 속도로 다운로드하는데 y초가 걸린다고 하면 $y=\frac{3000}{x}$

[심화문제2] 남극의 어느 지역에 있는 펭귄이 수를 알아보기 위하여 생태학자들이 400마리의 펭귄을 잡아 꼬리표를 붙이고 놓아 주었다. 며칠 후 100마리의 펭귄을 잡아 본 결과 그 중 꼬리표가 붙어 있는 펭귄이 수가 x마리 일때, 그 지역에는 몇 마리 정도의 펭귄이 살고 있다고 할 수 있는가?

[탐구활동] 옛날 선비들은 향을 피워서 그 향이 타 들어간 길이를 보고 시간을 재었다고 한다. 시계와 향으로 다음을 조사하여 보자.

① 향에 1cm간격으로 눈금을 표시한 다음 불을 붙인다. 향이 1cm 타 들어가는 데 실제로 몇 분이 걸리는지 시간을 재어 보자.

② 2cm, 5cm, 10cm타는 데는 각각 몇 분이 걸리는지를 조사하여 보자.

③ 앞의 ①, ②에서 알아본 결과를 이용하여 향이 $x$cm타는 데 y분 걸린다고 하고, x, y사이의 관계식을 구하여 보자.

④ 한 시간 동안 향을 피우기 위해 필요한 향의 길이는 얼마 이상이어야 하는가?[1)]

	중앙교육진흥연구소	금성출판사	한서출판사
실생활문제	-에스컬레이터의 이동과 높이 -바닥 타일 수와 넓이 -물통의 시간과 높이 -부피와 압력 -톱니의 수와 회전수 -CD할인과 판매 수 -걷기와 자전거와의 시간차	-휘발유 소비와 거리 -에스컬레이터의 이동과 높이 -톱니의 수와 회전수 -하루에 읽는 책 쪽수와 기간 -용수철의 추와 길이 -물건의 판매수와 이익 -진자의 왕복수와 시간 -공장인부 수와 기한 -이야기 수와 모심기	-휘발유 양과 요금 -동전의 무게와 수 -휘발유 소비와 거리 -생활에서의 단위 -펭귄의 표본수와 전체수 -향이 타는 길이와 시간

[표 3] 교과서에 다루는 실생활 문제

위에서 살펴본 바와 같이 현재 사용되고 있는 7-가 교과서는 제7차 교육과정에서 제시된 사항인 만큼 함수 지도 목표와 유의점 및 함수의 개념은 대동소이하다. 또한 위의 표를 살펴보면, 제7차 교육과정에서 중요시 여기는 실생활 예제도 다양하게 제시되어 있다. 다만, 대부분 제시되어 있는 예제 또한 비슷했으며 대부분 정비례 반비례에 관한 문제였다. 무엇보다 학생들이 흥미를 유발할 수 있는 예제가 부족해 보인다. 단순히 칠판과 공책에서 풀 수 있는 그런 문제보다 보다 활동적으로 참여할 수 있는 예제의 필요성을 느낀다.

4. 함수를 어려워하는 이유와 해결방법

1) 황석근, 이재돈, 2000

함수를 어려워하는 이유에는 여러 가지가 있을 것이나, 여기에서는 수학에 대한 고정관념, 함수의 개념을 도입하는 시기, 접근방식을 살펴보고자 한다.

1) 고정관념(수학에 대한 거부반응)

고정관념이란 '이것에는 저것'과 같은 식으로 공식화되어 있는 것을 말한다. 사람이나 장소에 따라 가변적인 것이 아니라 상황과 무관하게 이미 결정되어 있는 것이라는 말이다. 고정되어 있는 것은 진부해지기 쉽다. 따라서 고정관념의 타파야말로 수학적 사고를 기를 수 있는 첫걸음일 것이다. 흔히, 학생들은 수학은 숫자만 잔뜩 있는 복잡한 계산만을 생각한다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 제외하고는 우리의 생활에 거의 필요 없는 것으로 생각한다. 하지만 그 외의 많은 공식과 사실들이 일상생활을 살아가면서 얼마나 많이 사용되어지고 있고 또 스며들어 있는지 학생들은 잘 알지 못한다. 그래서 무엇보다 필요한 것은 '수학은 지겹고 어렵다'라는 고정관념을 깨는 것이다. 즉, 수학이 바로 생활이라는 것을 느끼게 해 주어야 한다.[1)]

수학이 싫은 원인을 김바야시는 그의 저서 『수학공부 이렇게 하는거야』에 이렇게 수록하고 있다.

① 수학의 어려움. 이해할 수 없다. 잘 할 수 없다

② 수학을 잘 하지 못하는 것은 자기의 머리가 나쁘기 때문이라고 생각하는 열등감, 음습한 감정, 노력을 해도 무의미하다고 하는 무력감

③ 수학이 현실과 동떨어져 있음. 추상성. 논리적 엄밀성. 무의미감, 재미없음

즉, 수학을 싫어하는 원인은 수학이라고 하는 교과의 성격, 수학교육의 본연의 모습에 있다고 지적하고 있다.

또한 세키네히로시의 저서 『수학기피증의 진찰실』에서는 수학을 잘하기 위해서 다음과 같은 처방전을 내 놓았다.

① 주저함의 원인을 알자

② 반복하며 기초를 배우자

③ 기호의 의미나 약속사항을 익히자

1) 조용욱, 신수미, 2001

④ 왜 싫어하게 되는가를 생각하자.

요약하면, 먼저 수학을 싫어하게 되는 근본적인 원인을 찾고 그에 따른 처방전을 내 놓아야 할 것이다. 수학과목 자체의 문제가 될 수도 있지만 그것을 가르치는 선생님과의 교류가 원인이 될 수도 있기 때문이다. 그런 후에 수학을 공부하는 것이 즐겁고 재미있는 것이라는 경험을 하게 하는 것이 우선이 되어야 할 것이다. 그러기 위해서는 먼저 수학의 법칙이나 공식이 처음 유도될 때, 그것이 생겨나게 된 동기나 역사를 이야기로 설명하여 호기심을 유발케 하고 천천히 반복적으로 가르칠 필요가 있다. 이는 수학이 배울만한 가치가 있다는 동기의식을 불러 일으킬 뿐 아니라 수학이라는 한 교과를 넘어 다른 과목에서도 자신감을 갖게 할 것이다.

2) 함수를 접하는 시기

현 교육과정은 초등학교 1학년에서부터 고등학교 1학년까지 10단계에 걸쳐 함수를 다루고 있다. 그 중 1단계부터 6단계까지는 규칙성과 함수에 관해 수의 규칙적인 배열과 규칙적인 무늬 만들기, 비례식을 통해 대응까지 다양하게 다루고 있다. 그리고 7-가 단계에서 비로소 정비례 반비례를 통해 함수의 개념을 배우게 된다. 하지만 학습자들은 그동안의 함수의 내용을 배웠음에도 함수의 개념을 도입하면서 이전 학습과는 별개로 생각한다. 이는 새로이 등장하는 여러 가지 용어와 수식에 대해 어려움을 느끼면서 뿐 아니라 집합과 수와 식, 방정식을 배우고 난 후 함수를 접하는 시기가 1학기 기말고사 즈음이나 그 이후라는 점에서 학습자들이 많이 소홀할 수밖에 없기 때문이다. 때문에 기호나 수식을 많이 도입하는 1학기에서는 방정식을 위주로 한 문제해결능력을 충분히 향상시키고 2학기에 들어서 함수부분을 도입한다면 학습자들이 보다 집중할 수 있으며 수학에서의 중요한 부분을 충분히 익힐 수 있을 것이라 본다. 이 부분은 분명 보완되어야 할 것이다.

3) 접근방식

현대수학의 분야 중에 중요한 비중을 차지하고 있는 함수의 지도는 초등의 경우 간단한 대응규칙을 학습하고, 중학교 교과과정에서 앞서 배운 대응을 통해 함

수를 정의하고 또한 그래프로 나타내고 있다. 그러나 현재 중학교에서 학습하고 있는 함수의 개념은 먼저, 관계의 개념을 파악해야만 하며 관계와 함수의 연관성이 실제 학습에 있어서 저학년 때부터 관계개념을 정확히 이해시킨다는 점은 중요하면서도 매우 어려운 과정이다. 따라서 수학을 관계 또는 함수라는 개념을 통하여 통일적으로 다루기 위해서는 많은 실례를 들고 그래프의 기호적 표현 등에 예비적인 기초를 지도함으로써 집합 개념이 올바르게 이해 되도록 두 집합 사이의 대응관계로서 지도되어야 한다.[1)]

5. 문제해결 전략

미국의 NCTM[2)]의 결의 사항에서도 나타났듯이 앞으로의 수학교육의 초점은 문제 해결에 두어야 함을 많은 수학 교육자들이 인정하고 있다. 1975년대부터 수학교육 현대화를 보완하기 위하여 학문위주의 수학교육에서 생활수학을 폭넓게 적용하는 즉, '수학을 얼마만큼 알고 있는가' 하는 문제보다는 수학을 얼마나 할 수 있는가' 하는 추상적 사고에 의한 문제해결의 능력을 중요시하고 있다.[3)]

문제해결 전략이란 문제해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견이 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크루릭과 루드닉(1984)은 문제해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제해결 전략을 구분하였다.

이상과 같이 문재해결 전략은 여러 가지로 구분하는데, 그 중 대표적인 문제해결 전략을 예를 통해 살펴보면 다음과 같다.[4)]

1) 박한식, 1982, 수학교육사, p206
2) 수학교사협의회(National Council of Teachers Mathematics)
3) 하디, 김인수 옮김, 1955, 어느 수학자의 변명, 민음사, p1-27
4) 신성균 외, 1994a, 1994b, 1994c

1) 예상과 확인

예상과 확인은 문제의 답을 미리 예상해 보고 그 답이 문제의 조건에 맞는지 확인해 보는 과정을 반복하여 문제를 해결해 나아가는 전략이다. 예상과 확인 방법으로 문제를 해결할 때는 다음과 같은 순서를 밟는다.

① 문제에서 구하고자 하는 답을 예상한다.

② 예상의 결과가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

③ 조건에 맞지 않으면 새로운 예상을 한다.

④ 옳은 답이 나올 때까지 이 과정을 계속한다.

2) 표 만들기

문제에 주어진 자료를 표로 나타내게 되면 문제를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 대개의 경우 해결 방법을 모색하기 위한 보조 전략으로 사용될 수 있다. 표는 우선 문제를 잘 나타내 줄 수 있는 틀을 생각한 후에 문제에서 주어진 것부터 차례로 기재하고, 계산할 수 있는 것은 계산하여 칸을 채우고, 채울 수 없는 곳에 문자를 사용하면 문제를 풀 수 있는 식이 나오게 된다. 문제의 유형에 따라 표 만들기 방법을 사용하여 직접 답을 구할 수 있는 경우도 있다.

3) 그림 그리기

그림을 그리면 문제를 전체적으로 이해하기 쉽고 그림을 정확하게 그리면 답이 어떻게 되는지를 알 수 있는 경우도 있으며, 때에 따라서는 대강 그려도 문제를 풀기 위한 생각이 떠오르기도 한다. 따라서 그림을 그릴 때에는 문제에 주어진 것과 구해야 할 것이 모두 나타나도록 하여야 그 관계를 파악하는 데 도움이 된다.

4) 식 세우기

식 세우기 방법은 수학 문제를 풀기 위하여 가장 보편적으로 사용되는 전략으로, 일단 식을 옳게 세우면 그 다음 단계들은 거의 기계적으로 진행되어 답을 구할 수 있다. 그런 의미에서 식 세우기 전략은 거의 모든 수학 문제에서 수반되는

문제해결 전략이다.

5) 규칙성 찾기

규칙성 찾기는 문제에 주어진 조건이나 관계에서 분석하여 어떤 규칙성을 찾아내고 이 규칙성을 확대하여 적용해 감으로써 문제를 해결하는 전략이다.

6) 거꾸로 풀기

문제의 구성을 가정과 결론으로 나눌 때 가정에 찾고자 하는 요소가 있는 경우 이용할 수 있는 방법으로, 결론에서 출발하여 가정으로 사고를 진행시키는 것이 필요하다. 즉 거꾸로 풀기는 주어진 것을 이용하여 미지인 것을 구하는 방법과는 달리, 문제 목표나 증명해야 할 사실로부터 시작하여 무엇을 말할 수 있는가를 생각해 나가는 방법이다.

7) 단순화하기

어떤 문제는 변수가 많거나 문제 상황이 복잡하여 문제해결 방법을 찾기 어려울 때가 있다. 이러한 경우 변수의 개수를 줄이거나 주어진 문제보다 좀 더 익숙하고 단순한 문제 상황으로 바꾸어 해결하고, 이 해결 과정을 본 문제에 적용하거나 원래의 문제를 몇 개의 부분적인 문제로 나누어 그들을 해결함으로써 원래의 문제를 쉽게 해결하는 방법을 단순화하기라고 한다. 단순화하기는 규칙성 찾기와 관련되는 경우가 많다.

8) 특수화하기

일반적인 경우에 대한 문제가 주어졌을 때, 문제에서 구하려는 것이 무엇인가를 파악하고 구하려는 대상에 포함되는 특수한 대상을 선택하여 이에 대한 고찰을 통해 문제를 해결하는 방법을 특수화하기라고 한다.

9) 유추하기

제시된 문제를 해결할 때 보다 단순하고 유사한 문제의 풀이 방법이나 그 결과를 이용하여 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 받을 수 있다. 이를테면 평면

에서 성립하는 성질로부터 유추에 의해 공간에서 성립하는 성질을 추측하여 발견할 수 있다.

10) 간접 증명법

일반적으로 어떤 정리를 증명할 때 가정에서 직접 결론을 증명하게 된다. 그러나 직접적으로 정리를 증명하는 것이 곤란할 때 간접적으로 증명하게 되는데 귀류법, 분할법, 동일법 등이 있다. 우선 귀류법은 결론을 부정하였을 때 부정된 결론으로부터 가정과 모순되는 사실을 유도함으로써 결론이 참이어야 함을 보이는 방법이다. 분할법은 가능한 경우를 여러 개로 나누어 그 일부가 모순이 됨을 보임으로써 그 외의 것이 참임을 보이는 방법이다. 동일법은 어떤 조건을 만족하는 대상이 두 개 있다고 가정하고 그로부터 그 두 대상이 같게 됨을 보이는 방법이다.

이 중 함수에 관한 문제 해결 예를 들어보면,

[규칙성 찾기]

예) 경민이는 생일 파티에 친구 8명을 초대하였다. 경민이를 포함한 9명의 어린이가 서로 악수를 한다면 모두 몇 번의 악수가 이루어지겠는가?

<해설> 두 명의 어린이가 악수하는 상황에서 시작하여, 세 명, 네 명 등 계속하여 악수한 경우의 수를 구해보면 규칙성을 발견할 수 있다. 이 문제를 풀기 위해 고등학교 계차수열을 이용하겠지만, 초등학생이나 중학생의 경우는 수의 배열, 1, 3, 6, 10, 15, …에서 연이은 두수의 차이가 2, 3, 4, 5, …로 1씩 증가한다는 규칙성을 이용하여 해결할 수 있다. 이런 규칙성을 확장하면 경민이를 포함하여 총 9명의 어린이가 악수하게 되는 경우는 36번임을 알 수 있다.

[거꾸로 풀기]

예) 기온은 지면에서 100m당 0.55℃씩 낮아진다고 한다. 그리고 기온이 0℃일 때의 소리의 속도는 초속 331m라고 하며, 온도가 1℃ 오를 때마다 소리의 속도는 매초 0.6m씩 증가한다고 한다. 지면으로부터 높이가 2000m인 상공에서의 소

리의 속도가 초속 338.8m일 때, 지면의 기온은 몇 도인가?

<풀이> 주어진 문제를 분석해 보면 다음과 같다.

① 기온은 지면에서 100m씩 높아질 때마다 0.55℃씩 낮아진다.

② 기온이 0℃일 때의 소리의 속도는 초속 331m이다.

③ 온도가 1℃오를 때마다 소리의 속도는 매초 0.6m씩 증가한다.

④ 지면으로부터의 높이가 2000m인 상공에서의 소리의 속도가 초속 338.8m이다.

⑤ 지면의 기온은 몇 도인가?

여기서 구하고자 하는 것은 ⑤이고, 주어진 것은 ①, ②, ③, ④이다.

이 문제에서는 지면의 기온을 구하는 것이므로, 다음과 같이 거꾸로 생각한다.

2000m상공의 소리의 속도	→	2000m상공의 기온	→	지면의 기온

a) 2000m 상공에서의 소리의 속도는 0℃일 때의 소리의 속도보다 338.8-331=7.8(m)이 증가되었다.

b) 온도가 1℃ 오를 때마다 소리의 속도는 매초 0.6m씩 증가하므로 7.8÷0.6=13(℃)만큼 증가한 것이다. 따라서, 2000m 상공의 기온은 13℃이다.

c) 기온은 지면에서 100m씩 높아질 때마다 0.55℃씩 낮아지므로, 2000m 상공의 기온은 지면의 기온보다 0.55×2000÷100=11(℃)만큼 낮아진다.

d) 따라서, 지면의 기온은 13+11=24(℃)이다.

이외에도 표를 이용하거나 그림(그래프)를 이용하여 함수를 해결하는 사례가 많이 있다. 문제 해결 방법은 이렇게 다양하게 제시되어 있고 또한 함수뿐만 아니라 여러 가지 수학 문제를 해결함에 있어 여러 방법들을 유동적으로 학습자에게 소개 및 적용 시킬 필요가 있다. 한 가지 방법만을 고수·고집하는 것은 학습자로 하여금 수학을 어렵게 하는 또 하나의 요인이 될 것이다.

6. 실생활의 접목

실질적으로 함수지도에서 가장 많은 부분을 차지하고 학습자로 하여금 쉽게 다가갈 수 있는 부분이 실생활에 접목된 예제일 것이다. 현 교과서를 비롯하여 많은 참고 도서에 소개되어 있는 예제들 또한 가장 쉬우면서도 일상생활에 가까운 문제임에도 불구하고 학생들은 흥미를 갖지 못한다. 중학교 1학년 함수단원에서 다룬 영역이 단순 비례부분이라 다양한 예제를 제시하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 여기에서는 교과서에 국한되어 있지 않으면서 조금이라도 쉽고 재미있게 접근할 수 있는 예를 통해 학습자로 하여금 흥미유발에 도움이 되고자 한다.

1) 사다리 타기의 비밀

사다리타기를 통한 일대일 대응은 함수의 일종이다.

(1) 사다리 타기의 규칙

사다리 타기는 일을 분담할 때, 벌칙을 주거나 돈 낼 사람을 정할 때, 혹은 짝짓기를 할 때 자주 동원하는 방법이다. 사다리타기를 할 때에는 위쪽과 아래쪽에 동일한 개수의 항목을 적어 놓고 세로줄과 가로줄을 그린 뒤, 다음 두 가지 규칙을 따라 짝을 짓는다.

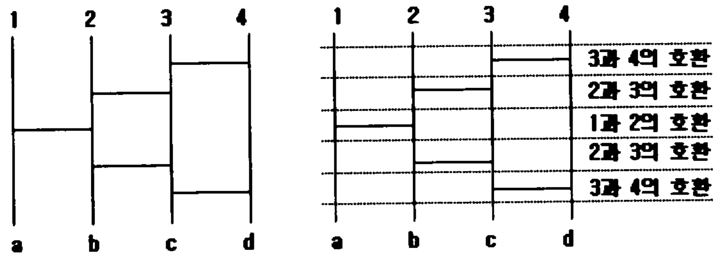
첫째, 세로줄을 짜라 위에서 아래로 진행한다.

둘째, 가다가 가로줄을 만나면 그 가로줄을 따라 바로 옆의 세로줄로 이동하고 다시 아래로 진행한다.

(2) 반드시 하나씩만 연결되는 사다리타기

사다리타기를 할 때 그림의 모양이 복잡해지면 혹시 술래로 두 사람이 나오거나 혹은 아무것과도 연결되지 않는 '꽝'이 나올지 모른다는 생각이 들기도 한다. 그러나 예상과 달리 어떤 모양으로 사다리를 그려도 각기 하나씩만 짝지어진다는 사실에는 변함이 없다. 이런 이유로 사다리 타기는 반드시 한 항목씩만 연결

되어야 하는 상황에 이용된다.



[그림 3]

1, 2, 3, 4와 a, b, c, d를 짝짓기 위하여 그림과 같이 사다리타기를 한다고 가정해 보자. 앞의 규칙에 따라 이동을 하면 1은 b와 c를 거쳐 d로 연결된다. 또 2는 c를 거쳐 b로 연결되며, 3은 d를 거쳐 c로, 4는 c와 b를 거쳐 a로 연결된다.

왜 하나씩만 연결될까?

위의 그림과 같이 직선을 따라 사다리를 단계별로 나누어 보면 하나의 세로선은 옆의 세로선과 연결되어 있다. 이를 통해 바로 옆의 것과 자리바꿈을 하는데, 수학적으로 이것은 '호환(transposition)'이라고 한다.

이러한 자리바꿈을 여러 번 반복하여도 서로 하나씩 맞바꾼다는 점에는 변화가 없다. 수학적으로 표현하면 '호환'을 '합성'하여도 서로 하나씩만 대응되는 '일대일 대응'이 된다. 따라서 처음에 일대일 대응으로 시작하면 아무리 복잡한 사다리를 거치더라도 그 결과는 일대일 대응이 된다.[1)]

2) 신문지 접기

신문지 접기는 지수함수의 예이다. 중학수학 범위에서 벗어난 내용이지만 함수를 이해하는데 어렵지 않은 예가 될 것이다.

신문지를 반으로 접어보자. 이것을 또 반으로 접고, 이렇게 20번 되풀이하면 신문의 두께는 어느 정도가 될까?
① 1cm ② 10cm ③ 1m ④ 10m ⑤ 100m ⑥ 1km ⑦ 10km

사실 신문지를 7번 정도 접으면 더 이상 접을 수 없을 정도의 두께가 되기 때

1) 박경미, 2004, 생각을 키우는 수학나무, 랜덤하우스 중앙

문에, 접는 대신에 가위나 칼로 잘라서 겹치게 한다. 처음에는 간단히 진행되는 작업이 횟수가 거듭됨에 따라 힘들어진다. 정확히 둘로 자르는 작업도 힘들지만, 그것이 뿔뿔이 흩어져 날아가지 않도록 신경을 써야한다. 15회 정도 자르면 글자의 1자 반 정도의 크기가 된다. 열 번 정도면 종이 조각은 $2^{10}=1024$장이 된다. 이 다발의 구께는 약 8cm이다. 따라서 한 장의 두께는 약 0.1mm가 채 되지 않는다. 이쯤 되면 20회 잘라서 겹치면 약 100m가 되는 것을 이해할 수 있다.

횟수	두께
15	3m
16	6m
17	12m
18	24m
19	48m
20	96m

[표 4] 신문지 접는 횟수와 두께

이론상으로 이와 관련하여 30회가 되면 두께는 약 100km, 40회 반복하면 약 10만km가 되고, 42회로는 지구에서 달까지의 거리를 넘게 된다. 100번이면 상상을 초월하는 길이가 될 것이며, 이것은 150~200억 광년이라는 우주의 크기를 훨씬 넘을 것이다.[1] 물론 현실적으로 그만큼의 횟수를 접을 수 없지만 2의 거듭제곱이 얼마만큼 큰 수인지 몸으로 체험할 수 있는 좋은 기회가 될 것이며 학생들이 함께 참여하면서 함수를 이해하는 좋은 예가 될 것이다.

3) 패턴에 관한 함수

수학에서 중요한 주제 중 하나는 패턴에 대한 학습이다. 패턴이란 어떤 규칙으로 배열된 수, 무늬, 도형, 현상, 행동 등을 말한다. 변화하는 여러 현상에서 일정한 규칙을 찾는 것은 매우 중요한 수학의 한 능력이며, 수학을 잘할 수 있는 방법이다. 다음의 예를 이용하여 패턴을 찾고 나아가 함수를 이해해 보자.

1) 수학교육협의회 · 김바야시, 2001 수학공부 이렇게 하는거야, 경문사

복도를 따라 길게 한 줄로 놓인 10개의 사물함들이 모두 닫혀 있습니다. 10명의 학생이 사물함을 따라 일렬로 통과하면서, 다음의 지시대로 사물함의 문을 닫거나 엽니다.
첫 번째 학생은 모든 사물함의 문을 엽니다. 두 번째 학생은 2번 사물함부터 시작해서 2의 배수 번째의 사물함을 닫습니다. 세 번째 학생은 3번 사물함부터 시작해서 3의 배수 번째의 사물함을 반대로 합니다. 즉, 닫혀 있으면 열고, 열려 있으면 닫습니다. 네 번째, 다섯 번째, …열 번째 학생도 각각 같은 방법으로 합니다.
10명의 학생이 사물함을 따라 모두 통과했을 때, 열려 있는 사물함과 닫혀있는 사물함을 찾으시오.

사물함번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
처음상태	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1번상태	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2번상태	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
3번상태	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○
4번상태	×	○	○	×	×	×	×	×	○	○
5번상태	×	○	○	×	○	×	×	×	○	×
6번상태	×	○	○	×	○	○	×	×	○	×
7번상태	×	○	○	×	○	○	○	×	○	×
8번상태	×	○	○	×	○	○	○	○	○	×
9번상태	×	○	○	×	○	○	○	○	×	×
10번상태	×	○	○	×	○	○	○	○	×	○

[표 5]

사물함번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
처음상태	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
1번상태	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2번상태		○		○		○		○	×	○
3번상태			○			×			○	
4번상태				×				×		
5번상태					○					×
6번상태						○				
7번상태							○			
8번상태								○		
9번상태									×	
10번상태										○

[표 6]

물함번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
사물함을 거쳐간 학생번호	1	1,2	1,3	1,2, 4	1,5	1,2, 3,6,	1,7	1,2 ,4,8	1,3, 9	1,2, 5,10

[표 7]

위의 문제를 해결하기 위해서 표를 이용하였다. 첫 번째 표는 ○표는 문이 열린상태이고 ×표는 닫힌상태로 모든 상태를 기호로 표시하였다. 두 번째 표는 바뀐 부분만을 기호로 표시하여 첫 번째 표보다는 보기 편하다. 마지막 표는 사물함을 거쳐간 학생의 번호만을 표시하여 앞의 두 표보다 훨씬 직관적이고 알기 편하게 되어 있다. 이렇듯 문제를 해결함에 있어 여러 가지 제안이 가능하며 나아가 100명의 사물함을 100명의 학생이 열고 닫기를 시행하는 문제로 확장이 가능하다.[1)]

위와 같은 문제를 해결하기 위해서 어떤 방법이 적절한지 학생들로 하여금 그룹화 하여 방법을 이끌어 내고 그들만의 토의를 통해 결과를 발표하는 방식으로 학습한다면 참여도를 높힐 뿐 아니라 흥미와 함께 함수를 이해하는데 많은 도움이 될 것이다. 이렇듯 함수는 대응관계와 함께 규칙성을 찾고 문제를 해결함으로써 매우 다양한 영역으로 확대가 가능하다.

1) 구광조 외 3인, 2005, 창의력 향상을 위한 수학 산책, 경문사

Ⅳ. 다양한 프로그램

본론에서는 함수를 보다 쉽고 재미있게 학습자에게 전달하고자 하는 것이 궁극적인 목적인 이유로, 다양한 프로그램을 제시함으로써 학습자로 하여금 폭넓은 경험을 할 수 있도록 한다. 먼저, 일방적인 일제식 수업이 아닌 학생들이 '주'가 되는 그룹을 통한 학습방법과 규칙성과 함수의 근간이 되며 사실상 수학의 대부분을 차지하는 패턴을 이용한 함수, 그리고 정보화 사회를 이끄는 컴퓨터를 이용한 함수의 활용방법을 소개한다.

1. 그룹을 통한 함수

'수학에서의 토론식 수업'은 한 가지 주제를 놓고 각각의 학생들이 자신의 주장이나 풀이를 내세우는 것이 아니다. 그것은 하나의 문제를 여러 개의 소그룹으로 나누어서 각자 그 문제에 대하여 생각해 본 후에 그룹별로 다시 그 문제의 풀이법을 토론한 후, 각 그룹의 대표가 나와서 전체에게 설명을 하는 방법을 일컫는다.

이러한 방법은 학생들이 자신의 수준에 맞는 언어와 표현으로 문제 상황을 서로에게 이해시키는 과정에서, 교사가 제시해주는 설명보다 더 효과적으로 문제 상황을 인식할 수 있다.

또한 획일적으로 교사에 의해 제시되는 풀이가 아니라 각 그룹별로 다양한 풀이가 나오는 것이 가능하기 때문에 학생들은 수준에 맞는 문제 해결법을 습득하게 된다.

물론 토론식 수업의 경우에도 각 그룹에서 주도권을 갖게 되는 학생이 그 그룹의 분위기를 일괄적으로 이끄는 경우가 일어날 수 있다. 그러나 이와 같은 경우에도 각 그룹은 자연스럽게 수준에 맞는 여러 개의 소그룹으로 나누어져서 다

시 재 토론을 하게 된다.

그룹을 통한 함수 학습에 몇 가지 보완해야 할 점을 들어보면,

첫째, 학생의 수준에 맞는 문제가 제시되어야 한다.

둘째, 학생들이 문제를 처음 접하고 나서 문제의 의미를 생각해 볼 시간과 각 그룹이 그 문제에 대해 올바로 토론할 수 있는 시간이 충분히 확보되어야 한다.

셋째, 효과를 보다 더 높이려면 학생 개개인의 수학적 성취도에 따라 상, 중, 하의 세 그룹 정도로 분류할 수 있다.

마지막으로 수학은 개별 학습이 우선되어야 하기 때문에 이와 같은 토론식의 수업은 각 단원의 마지막 시간에 시행해 보는 것이 좋겠다.[1]

2. 패턴활동으로 구성된 함수단원 개발

1) 수학과 패턴

수학은 역사가 흐르면서 여러 차례 바뀌었다. 기원전 수에 대한 연구로부터 시작하여 그리스 시대의 수와 형태에 대한 연구, 17세기부터의 운동, 변화, 공간에 대한 연구, 18세기의 수학적인 도구에 대한 연구를 거쳐 20세기는 패턴에 연구라고 Devlin은 주장한다. 수학자들이 연구하는 패턴은 수치적 패턴, 형태의 패턴, 운동의 패턴, 행동의 패턴 등이다.

"수학의 진정한 힘이란 표면적으로 서로 다른 상황 아래서 일관하는 패턴을 찾아내어, 이를 조직화하여 새로운 문제를 해결하는데 적용할 수 있는 것"이란 현대의 수학자들의 공통된 의견에 주목할 필요가 있다(이용률 외, 1994).

학생들은 학교 수학이 단순한 계산이나 암기의 과목이라는 부정적인 인식을 벗어버릴 수 있는 학습 기회를 가져야 하며, 패턴의 탐구는 이러한 기회를 제공하는 하나의 주제가 될 수 있다. 패턴을 탐구함으로써 다양한 해가 가능한 탐구 상황에서 수학적인 관계 및 규칙성에 집중함으로써 학생의 능동적인 참여를 촉구하며 수학의 다양한 면을 경험하게 한다. 수학에서의 패턴들은 역동적인 수학

[1] 여태경, 1995

의 모습을 보여주며, 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 기회를 제공한다.

2) 패턴과 관계

NCTM의 수학교육의 구체적인 목표와 방법론을 제시한 'Curriculum and Evaluation Standards for Mathematics'에서는 패턴은 초등학교 및 중학교의 수학 교육과정에 포함되어야 할 하나의 주제로서 다루고 있다. 패턴의 탐구는 패턴을 인식하고 기술하고 일반화하며, 관찰된 패턴을 나타내는 수학적 모델을 요구한다. 수학 전반에 패턴이 존재하며, 이러한 패턴에서 관계를 찾는 것이 무엇보다 중요하다. 이러한 관계를 찾아 수학적으로 표현하고, 기술할 수 있어야 한다고 강조했다.

Addenda series에서 패턴의 연구는 수학에서만큼 기본적인 분야가 없다고 하고, 수학자들은 패턴의 관찰을 통해 이 패턴들을 추측하고, 검사하고, 논의하고, 언어화하고, 일반화한다. 이 과정을 통해 그들은 패턴의 현저한 특징을 발견하고 관계에 대한 이해들을 구성한다. 패턴을 조사하는 것은 학생들이 다음과 같은 것들을 하도록 한다.

① 문제 해결하기

② 중요한 수학적 개념과 관계들에 대한 이해를 발달하기

③ 패턴에 있는 양(변수)들 사이의 관계를 조사하기

④ 단어 또는 변수들을 사용하여 패턴을 일반화하기

⑤ 패턴을 확장하고 연결하기

⑥ 함수에 대한 이해를 구성하기

3) 패턴과 함수

수학교육은 1990년대에는 이전에 소홀하게 여겨졌던 주제들 중에서 몇 몇 주제들에 더 많은 관심을 가지게 될 것이며, 이들 중 가장 흥미롭고 중요한 것이 패턴, 관계, 함수이다(Geer, 1992). 이는 수학교육에서 더 많은 관심이 필요한 부분이라 할 수 있다. 미국교사 협의회(NCTM)에서는 중학교 수학 교육과정에서 다루어야 할 주제로서 규칙성과 함수에 대해서 다음과 같은 규준을 제시하고 있다.

① 매우 다양한 규칙을 인식하고, 확장하고, 분석하고, 창조할 수 있어야 한다.

② 도표와 그래프와 법칙을 사용하여 관계성을 기술하고 나타낼 수 있어야 한다.

③ 한 양에서의 변화가 다른 양에서의 변화를 어떻게 야기하는가를 설명하기 위해 관계를 분석할 수 있어야 한다.

④ 문제를 표현하고 해결하기 위해 규칙성과 함수를 사용할 수 있어야 한다.

또한 수학에서 중심적인 주제 중의 하나는 규칙성과 함수에 대한 탐구이다. 이 탐구는 규칙성을 인지하고, 기술하고, 일반화하고, 관찰된 규칙성을 띄는 실세계의 움직임을 예측할 수 있는 수학적 모델을 만들 것을 요구한다. 광범위하게 발생하고 있는, 규칙적이면서 무질서하게 보이는 패턴은 규칙성과 함수의 탐구를 중요하게 만든다.

전평국(1998)은 패턴에 대한 광범위한 관점이 취해진다면 지도를 위한 가능성을 많이 개발할 수 있다고 강조한다. 패턴은 아동이 수학에서의 많은 아이디어를 연결하고 다양한 방법에서 수학을 사용하는 방법을 제공한다.

예를 들면, 아동이 한 패턴을 보고, "각 수는 앞의 것 보다 2가 더 크다."로 표현했다면, 그들은 n 다음의 수를 n+2로 나타낼 수 있을 것이다.

따라서 패턴과 관계는 함수에 대한 이해와 대수를 유도하는 자연스런 방법이 될 수 있다고 강조한다.[1)]

3. 그래픽 계산기를 이용한 함수

최근 들어 첨단산업 기술의 발전으로 컴퓨터의 대중화가 가속화되고 있으며, 이에 현대사회의 거의 모든 분야에서 컴퓨터가 활용되고 있다. 컴퓨터의 보급이 보편화되면서 수학의 교수-학습에 활용하려는 사회적인 요구와 필요성 때문에 학교수학에 컴퓨터를 도입하자는 구체적인 논의가 이루어지고 있다. 컴퓨터를 사

1) 김택현, 전평국, 1999

용하면 학생들이 수학에 대한 흥미와 관심을 새로운 측면에서 도울 뿐만 아니라 문제 해결과정의 체계적인 분석, 해답의 타당성 분석. 오류 분석 등의 과정을 통하여 수학적 사고력을 보다 강화시킬 수 있다는 장점을 가지고 있다.

그러나, 현재 우리나라의 수학교육계에서는 학습도구로서의 컴퓨터가 능률적이고 효과적인 학습 환경을 제공하고 있다는 점을 인식하고 있지만 현장교사들이 실제로 현장에서 수학 교수-학습에 이를 활용할 수 있을 만한 교육환경이 마련되어 있지 못하다. 실제로 컴퓨터는 많은 사람들이 기대한 만큼 수학과 교수-학습에 영향을 주지 못하고 있다. 그 이유로는 우선 많은 컴퓨터를 확보하고 있지 못하는 점과, 교사들이 상용할 수 있는 소프트웨어가 충분하지 못하다는 점이다. 또한 Mathematica, Maple, Derive 등 좋은 소프트웨어가 있으나 구입하기에는 가격이 비싼 단점이 있다.

그래픽계산기(graphic calucator)는 컴퓨터가 가지고 있는 장점을 살리면서 중등수학교육에 활용할 수 있는 대안적 도구라 할 수 있다. 그래픽계산기 휴대의 간편성은 학생들이 수학시간에 컴퓨터를 이용하기 위해서 컴퓨터 교실로 이동해야 하는 번거로움을 피할 수 있게 해 줄뿐더러 그 가격 면에서도 컴퓨터 한대의 가격으로 한 학급이 사용할 수 있는 그래픽계산기를 구입할 수 있을 만큼 저렴하다. 그래픽계산기는 프로그래밍(BASIC 언어와 유사), 그래픽 등 컴퓨터에 준하는 대부분의 기능을 갖추고 있는 소위 “포켓 컴퓨터(pocket computer)”라 할 수 있다(Demana & Waits, 1987).

함수 개념은 수학에서 가장 중요한 개념의 하나이며, 그 추상성은 가르치기 어려운 개념이기도 하다. 특히 학생들은 함수를 그래프로 표현하여 시각화하는 것에 어려움을 겪고 있다. 현재 대부분의 교과서는 지필만을 가지고 몇 개의 순서쌍의 점들을 연결해서 함수의 그래프를 그리는 교수방법을 보여주고 있다. 그러나 이런 방법은 그래프를 그리는데 드는 시간 낭비를 초래할 뿐만 아니라 몇 개의 점을 이산적으로 구한 다음 연속적으로 연결하기 때문에 엄밀하게 말하자면 정확한 과정이 아니라고 할 수 있다(Heid, 1988). 함수의 그래프는 두 변수 사이의 복잡한 정보를 시각적으로 보여준다. 지필로 그래프를 그리는 경우 몇 개의 점을 찾아 점을 찍는 과정에서 그래프를 그리는 그 자체가 학습의 목적이 되어 그래프를 그리는 원래의 목적 즉, 두 변수 사이의 특별한 관계(함수)를 이해하는

것을 잃게 된다(Demana & Waits, 1988; Heid, 1988; Foley, 1990). 더욱이, 실제적인 자료(realistic data)에 근거한 함수의 응용문제는 흥미롭고 유용하지만 지필로 풀기에는 계산이 복잡하기 때문에 가르치기 어려운 경향이 있다(Dumana & Waits, 1997; heid, 1990; Fey, 1989). 특히 이차함수, 지수함수, 삼각함수, 로그함수의 그래프에 대한 이해에서 학생들은 어려움을 겪고 있으며, 함수와 그 함수의 그래프의 연관성을 이해하지 못하는 경향이 있다는 연구결과들도 보고되고 있다. 예를 들면, 적지 않은 학생들이 연립일차방정식의 해가 그래프의 교점에 해당된다는 사실을 알지 못하고 있다(Foley, 1990).

컴퓨터 기능에 필적할 만한 그래픽계산기의 등장은 함수의 교수-학습을 신장시킬 수 있는 잠재력을 가지고 있다(Demana & Waits, 1990; Jones, 1995). 그래픽계산기는 여러 가지 종류의 함수의 그래프를 그릴 수 있다는 기본적인 기능 외에 다양한 방법으로 빠르고 융통성 있게 그래프의 변형을 할 수 있다는 장점을 가지고 있다. Vonder Embse(1988)는 1년간 수학수업에서 다루는 함수를 그래픽계산기를 이용할 때에는 3시간이면 그릴 수 있다고 지적하였다. 일반적으로 수업시간에 지필을 이용하여 그래프를 그리므로 기껏해야 한 두 개의 그래프를 그리고 그 성질을 조사하게 된다. 따라서 복잡한 함수가 주어졌을 때 원하는 그래프를 정확하게 그리기 위한 충분한 정보, 예를 들면, 극값, x절편, y절편 등을 계산하기는 매우 어려운 일이다. 이러한 정보가 바로 교사가 교실에서 학생들과 의사소통(communication)하고자 하는 내용이다. 그러나 그래픽계산기를 이용하면 그 그래프를 그려 낼 뿐만 아니라 그래픽계산기의 여러 가지 기능을 통해 지필로 함수를 그릴 경우에 알아내야 하는 정보도 쉽게 얻을 수 있다. 따라서 학교수학에서 그래픽계산기의 사용이 함수의 학습지도에 혁신적인 방법이 될 수 있으며, 실제로 NCTM의 "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics"(NCTM, 1989)에서는 중등학교 수학교육에서 그래픽 계산기의 활용을 권장하고 있다.[1)]

또한 제7차 교육과정 수정 고시안에 제시된 바와 같이 교수학습 방법에서 공학적 도구를 활용할 뿐 아리나 평가에서도 공학적 도구를 이용한 평가기회를 갖도록 권장하고 있다. 다만, 중학교 1학년에서는 함수의 개념을 처음으로 도입하

1) 권오남, 박경미, 1997

는 시기이므로, 직접 그래프를 그려봄으로써 이해하고 함수와 그래프의 연관성을 충분히 파악한 후 컴퓨터를 이용하여 다양한 그래프를 접해보는 것이 바람직하다고 본다.

V. 결 론

함수는 역사적으로 여러 측면이 있고 학생들이 어떻게 이해하는가를 고려한다면 더 다양한 측면이 있을 수 있다. 때문에 학생들에게 함수를 도입할 때, 어떤 측면을 강조할 것인지는 중요한 문제다. 앞에서 살펴본 바와 같이 함수를 도입할 때 종속성을 강조할 것인가, 대응을 강조할 것인가를 정하기는 매우 어려운 부분이 아닐 수 없다. 이는 교과과정이 바뀌면서 대응관계가 종속관계로 그리고 다시 대응관계를 도입하는 것을 봐도 알 수 있다.

중학교 교육과정 해설서에 제시되어 있는 함수 지도 의의는 다음과 같다.[1)]

함수의 개념은 수학에서 아주 중요한 통합적 아이디어의 하나이다. 두 집합의 원소 사이의 특수한 대응 관계인 함수는 대수, 해석에서 기하, 확률에 이르기까지 교육 과정 전체의 공통된 주제일 뿐만 아니라, 실생활에서 찾아볼 수 있는 많은 투입과 산출 상황의 수학적 표상이기도 하다.

이렇듯, 함수의 개념을 설명할 때에는 함수를 크게 대응관계로 보면서 그 안에 일정한 규칙을 중심으로 한 종속개념을 포함하여 지도할 필요가 있겠다. 또한 함수를 표현하는 방법은 기존의 그래프뿐만 아니라 표, 벤다이어그램, 입구와 출구가 있는 상자(이는 초등학교 과정에서 많이 다루는 그림)등 다양한 방법으로 접근할 필요가 있다.

실생활의 예제를 접할 때에는 기존의 획일적인 문제보다 학생들이 참여할 수 있는 문제로의 전환이 필요하겠다. 기존 교과서에서 다루는 문제는 정비례와 반비례에 국한된 문제만을 다루었다. 이는 초등학교 때 배웠던 규칙성과 함수라는 단원과 별개의 단원이라는 오해를 불러일으킬 뿐 아니라 함수를 어렵게 하는 궁극적인 이유가 되므로 초등과정과 연관이 있는 예를 통해 중학교 함수단원이 그 연장선에 있음을 알게 한다면 함수를 쉽게 이해하는데 많은 도움이 될 것이다.

이를 위해서는 앞에서 제시한 바와 같이 소그룹을 통한 학습방법이 효과적일 것이다. 더불어 고등수학에서 사용되는 예도 중학수학에서 연관 지어 소개하고

---

1) 교육부, 1997

해결해 나간다면 초·중·고 전반에 걸친 함수의 개념과 연관성을 이해하고 보다 심도 있게 학습할 수 있을 것이다.

현 시대에서의 함수의 가치는 실생활, 자연현상, 사회현상을 수학적으로 이해하고 특히 과학의 발전과 나아가 미래현상까지도 유추할 수 있는데 있다.

이러한 함수 교육을 통해 수학이 아름다움과 매력을 학습자에게 전달하는 것이 교사의 사명이고 해결해야 할 숙제일 것이다.

* 참고문헌

W.Rudin(1978), Principle of Mathematical Analysis, McGraw-Hill

Davis(1982); Selden Selden(1992)

E. T. Bell, 안재구 역(1993), 수학을 만든 사람들, 미래사

김응태 · 김연식(1992), 수학 교육 교재론, 경문사

김응태 · 박승안(1993), 현대대수학, 경문사

강행고 외 9인(2000), 수학 7-가, (주)중앙교육진흥연구소

양승갑 외 6인(2000), 수학 7-가, (주)금성출판사

황석근 · 이재돈(2000), 수학 7-가, (주)한서출판사

황혜정 외 6인(2008), 수학교육학신론, 문음사

박경미(2004), 생각을 키우는 수학나무, 랜덤하우스 중앙

김남희 외 6인(2007), 수학교육과정과 교재연구, 경문사

수학교육협의회 · 김바야시(2001), 수학공부 이렇게 하는 거야, 경문사

구광조 외 3인(2005), 창의력 향상을 위한 수학 산책, 경문사

권오남 · 박경미(1997.6.), 그래픽 계산기를 이용한 함수지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A 제36권 제1호 35-48

여태경(1995.9), 그룹 토론을 통한 함수 문제 해결, 우리교육

다락수학교육연구회 · 구광조 외 9인(1997.7.), 중학교에서의 패턴과 함수 지도, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 프로시딩> 제6집 145-156

조완영 · 양재식(2003.1.), 중학교 1, 2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 제15집 147-152

김택현 · 전평국(1999.1.), 패턴활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용 효과 분석, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집> 제8집 231-245

박대연 외 4인(2001.2.), 제7차 교육과정에 따른 함수 영역의 수준별 문항 개발 및 평가방법, 전주대학교 사범대학 교육문제 연구소 제3회 공동학술연구논문집 p151-183

최창우 · 남형채(1997), 초 · 중등학교에서의 함수의 개념에 관한 비교고찰, Rcs Sci. Math. Educ. Vol. 20:27-47

조용욱 · 신수미(2001), 함수적 관계를 이용한 창의성 개발에 관한 연구, 신라대학교 자연과학연구소 논문집 제9집