碩士學位論文

행렬을 이용한 함수의 지도와 점화식의 풀이에의 적용

指導敎授 宋 錫 準

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

吳 京 勛

2000年 8月

행렬을 이용한 함수의 지도와 점화식의 풀이에의 적용

指導敎授 宋 錫 準

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2000年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 吳 京 勛

吳京勛의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2000年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

<抄錄>

행렬을 이용한 함수의 지도와 점화식의 풀이에의 적용

吳 京 勛

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 宋 錫 準

본 연구는 현행 고등학교 공통수학에서 선수 학습한 선형분수함수의 합성을 수학 I 의 행렬 단원의 지도 과정에 선형분수함수의 집합과 2차 정사각행렬의 집합이 준동형임을 이용하여 지도하고, 수학 I 의 수열 단원의 점화식의 풀이를 함수의 합성으로 해결할 수 있도록 지도함으로써 교과서에 의한 일반적인 방법으로 지도한 경우와 그 결과를 비교하였다. 현행 고등학교 수학과 교육과정상 행렬은 역행렬을 이용하여 연립방정식을 풀 수 있음을 보여, 그 필요성을 인식시키는 데 그치고 있으나 행렬 연산을 이용하여 다른 단원의 문제 해결에 쉽게 이용할 수 있음을 알게 하는 계기가 될 것이다.

목　차

표 목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

2000년대의 미래 사회는 정보화 사회로 특징지어지고, 수학 교육 또한 여기에 공헌하지 않을 수 없다. 정보화란 각종 정보를 수집, 분석하고, 종합, 판단함으로써 문제 해결에 많은 비중을 두는 것을 말한다.

수학과 교수·학습에서는 학생들의 구체적인 경험에 근거하여 사물의 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적인 추상화 단계로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해한다 또, 수학적 문제를 해결할 때에는 먼저 문제를 분명히 이해한 후, 문제 해결을 위한 합리적이고 창의적인 해결 계획을 작성하여 실행한 나음, 반성 과정을 거치는 사고 태도를 거치도록 한다.

이에 발맞추어 본 연구는 고등학교에서 학습하는 역함수와 합성함수를 행렬을 이용하여 지도하고, 이를 수열의 점화식의 풀이에 적용함으로써 학생들이 보다 다양하고, 신속 정확하게 문제를 해결할 수 있도록 도움을 주는데 주안점을 두었다.

2. 연구의 내용

본 연구의 내용은 다음과 같다.

첫째, 현행 고등학교 수학과 교육과정상 수학Ⅰ의 행렬 단원을 학습할 때에 행렬의 곱셈과 공통수학에서 선수 학습한 선형분수함수의 합성이 동형임을 문헌 연구를 통하여 알아본다

둘째, 현행 고등학교 교과서에 나오는 수열의 점화식이 대부분 선형임에 비추어 함수의 합성, 곧 행렬의 곱셈으로 해결할 수 있음을 살펴본다.

셋째, 수열의 점화식을 해결할 때에 교과서에 의한 일반적인 방법으로 지도한 학급과 행렬을 이용한 방법으로 지도한 학급의 성적을 비교 분석하고 검증한다.

3. 연구의 제한점

본 연구는 비교반 30명, 실험반 30명을 대상으로, 연구자가 제작 또는 선정한 문제로 과제 학습시키고, 평가를 실시하였으므로 일반화에는 다소 어려움이 따른다.

4. 선행연구의 분석

본 연구를 위하여 지금까지 이 연구와 관련된 선행연구들에 대하여 자료를 조사하여 분석하여 보면 다음과 같다.

<표1> 선행연구의 조사

연도	연구자	연구주제
1991	이승준	행렬과 복소수의 연계지도에 관한 연구
1992	김오규	행렬을 이용한 역함수와 합성함수의 지도에 관한 연구
1992	한성희	고등학교 수학에서의 행렬과 그 지도내용에 관한 연구
1992	박윤식	점화식의 일반해법에 관한 연구
1999	이동남	수열의 유한합 · 극한에 대한 기하학적 접근과 오일러의 수열

<표1>의 선행연구를 살펴보면, 이승준은 "행렬과 복소수의 연계지도에 관한 연구"에서 복소수 전체의 집합과 2차 정사각행렬의 부분집합 $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$이 동형임을 이용하여 복소수를 행렬로 정의함으로써

복소수의 구조를 이해할 수 있게 하여 논리적으로 사고하는 태도와 적용력, 응용력을 기를 수 있을 뿐만 아니라 행렬의 중요성을 알고 활용할 수 있는 능력을 키워 수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 할 수 있다고 하였으며, 김오균은 "행렬을 이용한 역함수와 합성함수의 지도에 관한 연구"에서 선형분수함수의 집합 $\left\{f \mid f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, ad \neq bc\right\}$와 역행렬을 갖는 2차 정사각행렬의 집합이 준동형임을 이용하여, 함수의 합성과 역함수를 지도하는 과정에 행렬을 이용하면 매우 신속 정확하게 이해함을 알 수 있다고 하였다.

한성희는 "고등학교 수학에서의 행렬과 그 지도에 관한 연구"에서 행렬의 지도에 앞서 함수에 대한 기본 개념의 학습이 선행되어야 하며, 행렬의 필요성과 다른 단원과의 연관에 중점을 두어야 한다고 하였으며, 박윤식은 "점화식의 일반해법에 관한 연구"에서 특성 방정식을 이용한 점화식의 해법을 소개하고 있다. 이동남은 "수열의 유한합·극한에 대한 기하학적 접근과 오일러의 수열"에서 학생들이 자주 접하는 여러 가지 점화식의 문제를 유형별로 정리하여 이들의 일반항을 유도하는 방법을 정리하였다.

수학교과의 효과적인 지도를 위하여 탐구활동이 필요하며, 학생들이 어렵게 학습하는 내용을 미리 배운 지식과 관련지어 쉽게 학습하도록 하고, 다양한 방법으로 문제를 해결해 봄으로써 문제 해결력 신장에 도움이 된다고 하고 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 행렬과 선형분수함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수, 유리식일 때 이 함수를 유리함수라고 한다.

또, $y=f(x)$에서 $f(x)$를 기약분수식으로 고쳤을 때, 분모가 상수가 아니면 이 함수를 분수함수라고 한다. 이를테면, $y=2x+1$, $y=x^2-1$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x+3}{2x-1}$ 등은 모두 유리함수이고, 이 중에서 $y=2x+1$, $y=x^2-1$은 다항함수, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x+3}{2x-1}$은 분수함수이다.

여기서는 선형분수함수, 줄여서 분수함수라는 것은 실수에서 실수로 가는 함수로서 관계식이 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$로 주어지는 것을 말한다. 이 함수는 $f(x)=\frac{a}{c}+\frac{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b}{cx+d}$로 고쳐 쓸 수 있기 때문에 정의역은 $R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$이고 치역은 $R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$이 된다. 이 때 $ad-bc=0$이면 이 분수함수는 상수함수로서 역함수가 없고 $ad-bc\neq 0$인 경우에만 역함수 $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$이 존재한다. 이제 역함수를 갖는 분수함수들의 모임 $F=\left\{f:R\rightarrow R \mid f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\ ad-bc\neq 0\right\}$을 생각하고 이 집합에 함수의 합성연산을 주면 F는 군이 된다. 즉 F는 함수의 합성연산에 대하여 닫혀 있고 결합법칙을 만족하며 항등원이 있고 각 원소의 역원이 존재한다.

다음으로 생각할 대상은 2차 정사각행렬 중 역행렬이 존재하는 행렬들의

집합이다. 그런데 여기서 한 행렬을 실수배한 행렬은 원래의 행렬과 같다고 생각하자. 즉, A와 kA는 $k\neq 0$이면 같은 원소로 보는 것이다. 기호로는 $A\sim kA$로 나타내자. 이와 같은 이유는 뒤에서 다룰 것이다. 따라서 약간 복잡하기는 하지만 이러한 행렬들의 모임을 M이라 하자. 이 집합 M에 행렬의 곱셈연산을 주면 이 집합 M 역시 군이 된다. 즉 M은 곱셈연산에 대하여 닫혀 있고 결합법칙을 만족하며 항등원이 존재하고 각 원소의 역원이 존재한다.

지금까지 두 군 F와 M을 정의하였다. 이제 이 두 군이 서로 같다고 증명하기 위해서는 M에서 F로 가는 일대일 대응함수를 생각해서 각 원소의 이름을 바꾸고 대응하는 원소끼리의 연산이 이 함수에 의해 잘 보존된다는 것을 보여야 한다. 그러면 이 두 군은 같다고 볼 수 있다. 이제 이름을 바꾸어 주는 함수 $H:M\to F$를 $H\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$로 정의하자.

이것은 잘 정의된 함수이다. 왜냐하면 $H\left(k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\dfrac{kax+kb}{kcx+kd}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$이기 때문이다. 일대일 함수임을 보이기 전에 먼저 대응하는 원소끼리의 연산이 잘 보존됨을 보이자.

즉 M의 두 원소 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$에 대하여 $H(AB)=H(A)\circ H(B)$인을 보이자. 이와 같이 연산이 보존되는 함수를 군준동형사상(group homomorphism)이라고 한다. 따라서, H가 군준동형사상인 경우 행렬에서의 곱셈연산과 분수함수의 합성연산은 같은 연산이라고 할 수 있다. 우선 $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$이므로

$H(AB)=\dfrac{(aa'+bc')x+(ab'+bd')}{(ca'+dc')x+(cb'+dd')}$이다.

그리고

$$
\begin{aligned}
H(A)\circ H(B) &= \frac{aH(B)+b}{cH(B)+d} \\
&= \frac{a\cdot\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+b}{c\cdot\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+d} \\
&= \frac{(aa'+bc')x+(ab'+bd')}{(ca'+dc')x+(cb'+dd')}
\end{aligned}
$$

이 성립하므로 H는 군준동형사상이다. 이제 H가 일대일 대응함수임을 보이자. H가 F위로의 함수임은 당연하다. 따라서 H가 일대일 함수인 것만 확인하면 된다. 군준동형사상인 경우에는 공역의 항등원에 대한 역상의 집합인 핵(kernel)이 정의역의 항등원만으로 이루어진 집합인 경우 일대일 대응이 된다. H의 핵은 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in F \mid H\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=x\right\}$이고 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$는 x에 관한 항등식이므로 $a=d$이고 $b=c=0$을 얻는다. 따라서 핵은 $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$이므로 함수 H는 일대일 함수이다. 이처럼 일대일 대응인 군준동형사상을 군동형사상이라 한다. 즉, H는 군동형사상이다.

지금까지 역함수를 갖는 선형분수함수들의 군 F와 역행렬을 가지며 상수배를 무시한 2차 정사각행렬들의 군 M은 서로 같은(동형인) 군임을 살펴보았다. 따라서 행렬에서 이야기되는 것을 분수함수로 바꿔 놓을 수 있고, 또 그 반대의 경우도 생각할 수 있다. 그러나 행렬의 계산이 분수함수의 합성보다 더 능률적이므로 여기서는 분수함수의 문제를 행렬로 바꾸어 푸는, 즉 H의 역함수를 이용하는 몇 가지 예를 살펴보도록 하겠다.

2차 정사각행렬의 거듭제곱을 계산할 때 잘 쓰이는 공식으로 케일리-해밀턴의 공식이 있다. 이것은

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{에 대해 } A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\text{(영행렬)}$$

이 항상 성립한다는 식이다. 케일리-해밀턴의 공식으로 행렬의 거듭제곱을 아주 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 분수함수를 여러 번 합성하는 경우 이

것을 행렬의 거듭제곱으로 고치면 쉽게 계산할 수도 있다.

예제 1. 함수 $f(x)=\frac{1}{-x+2}$ 에 대하여 $f^{30}(5)$의 값을 구하시오.

[풀이] $f(x)$의 H에 의한 역상은 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$이다. 여기에 케일리-해밀턴의 공식을 쓰면 $A^2-2A+E=O$

이것을 이용하여 $A^2=2A-E$, $A^3=2A^2-A=3A-2E$, $\cdots$

$A^{30}=30A-29E=\begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

따라서, $f^{30}(x)$는 $H\begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}=\frac{-29x+30}{-30x+31}$이고

$f^{30}(5)=\frac{-145+30}{-150+31}=\frac{115}{119}$가 된다.

예제 2. 함수 $f(x)=\frac{x}{x+1}$에 대하여 $f^{2000}(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

[풀이] $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$로 놓고 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$을 이용하면 $A^{2000}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix}$임을 알 수 있다. 따라서 $f^{2000}(x)=\frac{x}{2000x+1}=1$을 풀면 $2000x+1=x$에서 $x=-\frac{1}{1999}$을 얻는다.

2. 수열의 점화식

자연수 전체의 집합 N을 정의역, 실수 전체의 집합 R을 공역으로 하는 N에서 R로의 함수 $f: N \to R$를 수열이라고 한다.

이 때, 각 함수값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(n)$, $\cdots$을 이 수열의 항이라 하고, $f(1)$을 첫째항, $f(2)$를 둘째항, $f(3)$을 셋째항, $\cdots$, $f(n)$

을 n째항 또는 일반항이라고 하고, 기호 a_n으로 나타낸다.

이를테면, 수열 $f: N \to R$, $f(x) = 2x$에서 첫째항은 $f(1) = 2$, 둘째항은 $f(2) = 4$, 셋째항은 $f(3) = 6$, $\cdot\cdot\cdot$, n째항은 $f(n) = 2n$이다.

수열은 위에서 함수 $f: N \to R$이지만, 항들을 사용하여 보통

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdot\cdot\cdot$, $f(n)$, $\cdot\cdot\cdot$ 또는 간단히 $\{f(n)\}$으로 나타낸다.

따라서, $f: N \to R$, $f(n) = a_n$일 때에는

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_n,\ \cdot\cdot\cdot \text{ 또는 간단히 } \{a_n\}$$

을 수열이라고 한다

일반항 a_n이 직접 n의 식으로 주어져 있지 않을 때에도, 첫째항의 값 a_1과 a_n에서 a_{n+1}을 구할 수 있는 규칙을 나타낸 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$이 정해진다.

일반으로, 수열 $\{a_n\}$을

[1] 첫째항 a_1의 값

[2] 두 항 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 하고, 그 관계식을 수열의 점화식이라 한다.

점화식은 몇 개의 항과 서로 이웃하는 일반항들 사이의 관계식으로 주어진다. 여기서는 점화식으로 표현된 수열의 일반항을 구하는 방법으로 행렬의 거듭제곱을 활용하고자 한다.

이제부터 $f = f^1$, $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$, $\cdot\cdot\cdot$으로 나타낸다.

PⅠ. a, d가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdot\cdot\cdot) \cdot\cdot$ (PⅠ)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a + d(n-1)$으로 주어진다.

[증명] 선형분수함수 $f(x) = \dfrac{x+d}{0x+1}$를 이용한다.

즉, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, $a_4 = f(a_3) = f(f(f(a_1)))$, · · · · · ·, $a_n = f^{n-1}(a_1)$이므로 $A = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 구하면 된다.

실제, $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & d(n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $a_n = a + d(n-1)$

PⅡ. a, r가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = ra_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) · · · (PⅡ)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$으로 주어진다.

[증명] 선형분수함수 $f(x) = \dfrac{rx+0}{0x+1}$를 이용한다.

즉, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, $a_4 = f(a_3) = f(f(f(a_1)))$, · · · · · ·, $a_n = f^{n-1}(a_1)$이므로 $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 구하면 된다.

실제, $A^{n-1} = \begin{pmatrix} r^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $a_n = r^{n-1}a = ar^{n-1}$

PⅢ. a가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + f(n)$($n = 1, 2, 3, \cdots$) · (PⅢ)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$으로 주어진다.

[증명] 주어진 점화식 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ · · · · · (PⅢ)을 변형하면

$a_{n+1} - a_n = f(n)$이므로

$$a_2 - a_1 = f(1)$$

$$a_3 - a_2 = f(2)$$

$$a_4 - a_3 = f(3)$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1)$$

이들을 변변 더하여 주면 $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

즉, $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

따라서, $a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

다른 방법으로, $g(n+1) = g(n) + f(n)$ $\cdots\cdots$(F3)을 만족하는 하나의 함수 $g(n)$이 적어도 하나 존재하면,

(PⅢ)-(F3)에서 $a_{n+1} - g(n+1) = a_n - g(n)$이므로

$a_n - g(n) = a_1 - g(1) = a - g(1)$

따라서, $a_n = a + g(n) - g(1)$

※ $f(n)$이 상수, 즉 $f(n) = d$이면 PⅠ과 같다.

PⅣ. a가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(n)a_n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(PⅣ)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a \times \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$으로 주어진다.

[증명] 주어진 점화식 $a_{n+1} = f(n)a_n$에서 n에 $n-1$, $n-2$, $\cdots$, 1을 대입하여

$a_n = f(n-1)a_{n-1}$, $a_{n-1} = f(n-2)a_{n-2}$, $\cdots$, $a_n = f(1)a_1$

이 식들을 차례로 대입하여

$$
\begin{aligned}
a_n &= f(n-1)a_{n-1} \\
&= f(n-1)f(n-2)a_{n-2} \\
&\cdots\cdots \\
&= f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)a_1 \\
&= af(1)f(2)\cdots f(n-1) \\
&= a \times \prod_{k=1}^{n-1}
\end{aligned}
$$

※ $f(n)$이 상수, 즉 $f(n)=r$이면 PⅡ과 같다.

PV. a, p, q가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = pa_n + q\ (n=1, 2, 3, \cdots) \cdots\cdots$(PV)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \frac{q}{1-p} + \left(a - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$으로 주어진다.

[증명] (1) $p=1$일 때, 점화식 (PV)은 점화식 (PⅠ)과 같은 꼴이다.

(2) $q=0$일 때, 점화식 (PV)은 점화식 (PⅡ)과 같은 꼴이다.

(3) $p \neq 1$, $q \neq 0$일 때,

선형분수함수 $f(x) = \frac{px+q}{0x+1}$을 이용한다.

즉, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, $a_4 = f(a_3) = f(f(f(a_1)))$,

$\cdots\cdots$, $a_n = f^{n-1}(a_1)$이므로 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 구하면 된다.

케일리-해밀턴의 공식에 의해 $A^2 - (p+1)A + pE = O$

$A^2 - pA = A - pE$로 변형하면

$$
\begin{aligned}
A^3 - pA^2 &= A(A^2 - pA) \\
&= A(A - pE) \\
&= A^2 - pA \\
&= A - pE
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^4 - pA^3 &= A(A^3 - pA^2) \\
&= A(A - pE) \\
&= A^2 - pA \\
&= A - pE
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} A^n - pA^{n-1} &= A(A^{n-1} - pA^{n-2}) \\ &= A(A - pE) \\ &= A^2 - pA \\ &= A - pE \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdot ①$$

$A^2 - A = p(A - E)$로 변형하면

$$\begin{aligned} A^3 - A^2 &= A(A^2 - A) \\ &= A(p(A - E)) \\ &= p(A^2 - A) \\ &= p^2(A - E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 - A^3 &= A(A^3 - A^2) \\ &= A(p^2(A - E)) \\ &= p^2(A^2 - A) \\ &= p^3(A - E) \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdot$$

$$\begin{aligned} A^n - A^{n-1} &= A(A^{n-1} - A^{n-2}) \\ &= A(p^{n-2}(A - E)) \\ &= p^{n-2}(A^2 - pA) \\ &= p^{n-1}(A - E) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdot ②$$

②-①에서

$$(p-1)A^{n-1} = (p^{n-1} - 1)A + (p - p^{n-1})E$$

$$A^{n-1} = \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} A + \frac{p - p^{n-1}}{p-1} E = \begin{pmatrix} p^{n-1} & \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} \cdot q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$a_n = p^{n-1} a + \frac{p^{n-1} - 1}{p-1} \cdot q = \frac{q}{1-p} + \left(a - \frac{q}{1-p}\right) p^{n-1}$$

PⅥ. a, p가 상수일 때,

점화식이 $a_1 = a$, $a_{n+1} = pa_n + f(n)$($n = 1, 2, 3, \cdots$)$\cdot\cdot$(PⅥ)

인 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = ap^{n-1} + p^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{p^k}$ 으로 주어진다.

[증명] (1) $p = 0$일 때, $a_{n+1} = f(n)$에서 $a_n = f(n-1)$이다.

(2) $p \neq 0$일 때, 양변을 p^{n+1}로 나누어서

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$$

이제 $\frac{a_n}{p^n}=b_n$, $\frac{f(n)}{p^{n+1}}=g(n)$이라 두면

$b_{n+1}=b_n+g(n)$이 되어 PⅢ과 같다.

따라서, $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}g(k)$

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{p^{k+1}}$$

$$a_n=ap^{n-1}+p^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{p^k}$$

※ $p=1$일 때, $a_{n+1}=a_n+f(n)$이므로 PⅢ과 같다.

PⅦ. a, p, q, r, s가 상수이고 $ps-qr\neq 0$일 때,

점화식이 $a_1=a$, $a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (PⅦ)

인 수열의 일반항은, 행렬 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$의 고유값을 α, β라고 할 때,

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{\{a(p-\beta)+q\}\alpha^{n-1}-\{a(p-\alpha)+q\}\beta^{n-1}}{(ar+s-\beta)\alpha^{n-1}-(ar+s-\alpha)\beta^{n-1}} & \text{if } \alpha\neq\beta \\ \dfrac{\{a(p-\alpha)+q\}n+a\alpha}{\{ar+(s-\alpha)\}n+\alpha} & \text{if } \alpha=\beta \end{cases}$$ 으로 주어진다.

[증명] 선형분수함수 $f(x)=\frac{px+q}{rx+s}$를 이용한다.

즉, $a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)=f(f(a_1))$, $a_4=f(a_3)=f(f(f(a_1)))$, $\cdots\cdots$, $a_n=f^{n-1}(a_1)$이므로 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 구하면 된다.

케일리-헤밀턴의 공식에 의해 $A^2-(p+s)A+(ps-qr)E=O$

행렬 A의 고유방정식 $t^2-(p+s)t+(ps-qr)=0$의 두 근을 α, β라

두면

$\alpha \neq \beta$일 때, $A^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} A + \dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} E$이므로

$$a_n = \frac{\{a(p-\beta)+q\}\alpha^{n-1} - \{a(p-\alpha)+q\}\beta^{n-1}}{(ar+s-\beta)\alpha^{n-1} - (ar+s-\alpha)\beta^{n-1}}$$

$\alpha = \beta$일 때, $A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E$이므로

$$a_n = \frac{\{a(p-\alpha)+q\}n + a\alpha}{\{ar+(s-\alpha)\}n + \alpha}$$

PⅧ. a, b, p, q, r, s가 상수일 때,

점화식 $\begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b' \end{cases}$ $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ . . . . (PⅧ)

으로 정의된 수열의 일반항은, 행렬 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$의 고유값을 α, β라고 할 때,

$\alpha \neq \beta$이면 $\begin{cases} a_n = \dfrac{\{a(p-\beta)+bq\}\alpha^{n-1} - \{a(p-\alpha)+bq\}\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ b_n = \dfrac{\{ar + b(s-\beta)\}\alpha^{n-1} - \{ar + b(s-\alpha)\}\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{cases}$,

$\alpha = \beta$이면 $\begin{cases} a_n = (ap+bq)(n-1)\alpha^{n-2} - a(n-2)\alpha^{n-1} \\ b_n = (ar+bs)(n-1)\alpha^{n-2} - b(n-2)\alpha^{n-2} \end{cases}$으로 주어진다.

[증명] $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 두면 이 점화식은 $X_{n+1} = AX_n$으로 변형되어 PⅡ와 같은 꼴이 되어 A^n을 구하면 된다.

케일리-해밀턴의 공식에 의해 $A^2 - (p+s)A + (ps-qr)E = O$

행렬 A의 고유방정식 $t^2 - (p+s)t + (ps-qr) = 0$의 두 근을 α, β라 두면

$\alpha \neq \beta$일 때, $A^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} A + \dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} E$이므로

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\{a(p-\beta)+bq\}\alpha^{n-1} - \{a(p-\alpha)+bq\}\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \\ b_n = \dfrac{\{ar+b(s-\beta)\}\alpha^{n-1} - \{ar+b(s-\alpha)\}\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \end{cases}$$

$\alpha=\beta$일 때, $A^n = n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^n E$이므로

$$\begin{cases} a_n = (ap+bq)(n-1)\alpha^{n-2} - a(n-2)\alpha^{n-1} \\ b_n = (ar+bs)(n-1)\alpha^{n-2} - b(n-2)\alpha^{n-2} \end{cases}$$

PIX. a, b, p, q, r, s, t, u가 상수일 때,

점화식 $\begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b' \end{cases}$ $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n + r \cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n + t \cdots ② \end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (PIX)

인 수열의 일반항은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

[풀이] 연립방정식 $\begin{cases} x = px+qy+r \\ y = sx+ty+u \end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

의 해 $x=k$, $y=l$이 존재하면, 즉

$k = pk+ql+r \cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

$l = sk+tl+u \cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

①-④에서 $a_{n+1}-k = p(a_n-k)+q(b_n-l)$

②-⑤에서 $b_{n+1}-l = s(a_n-k)+t(b_n-l)$이므로

$a_n-k=c_n$, $b_n-l=d_n$이라 놓으면, 점화식 (PIX)은

$\begin{cases} c_1 = a-k \\ d_1 = b-l' \end{cases}$ $\begin{cases} c_{n+1} = pc_n + qd_n \\ d_{n+1} = sc_n + td_n \end{cases}$으로 변형되어 점화식 (PVIII)과 같은 꼴이 된다.

PX. a, b, p, q가 상수일 때,

점화식 $a_1=a$, $a_2=b$, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (PX)

으로 정의된 수열의 일반항은, 행렬 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$의 고유값을 α, β라고 할

때,

$\alpha \neq \beta$이면 $a_n = \dfrac{(b+a\beta)\alpha^{n-1}-(b+a\alpha)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$

$\alpha = \beta$이면 $a_n = a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}$으로 주어진다.

[증명] 이 점화식은 $\begin{cases} a_2 = b \\ a_1 = a \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \\ a_{n+1} = 1a_{n+1} + 0a_n \end{cases}$으로 생각하여

$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$으로 바꿔 쓰고, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = X_n$, $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

라 두면

$X_{n+1} = AX_n$이므로 (PII)와 같은 꼴이 되어 행렬 A의 거듭제곱을 구하는 것으로 귀착된다.

케일리-헤밀턴의 공식에 의해 $A^2 - pA - qE = O$

행렬 A의 고유방정식 $t^2 - pt - q = 0$의 두 근을 α, β라 두면

근과 계수의 관계로부터 $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$이고,

$\alpha \neq \beta$일 때, $A^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}E$이므로

$$a_n = \frac{(b+a\beta)\alpha^{n-1}-(b+a\alpha)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$\alpha = \beta$일 때, $A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E$이므로

$$a_n = a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}$$

Ⅲ. 연구방법

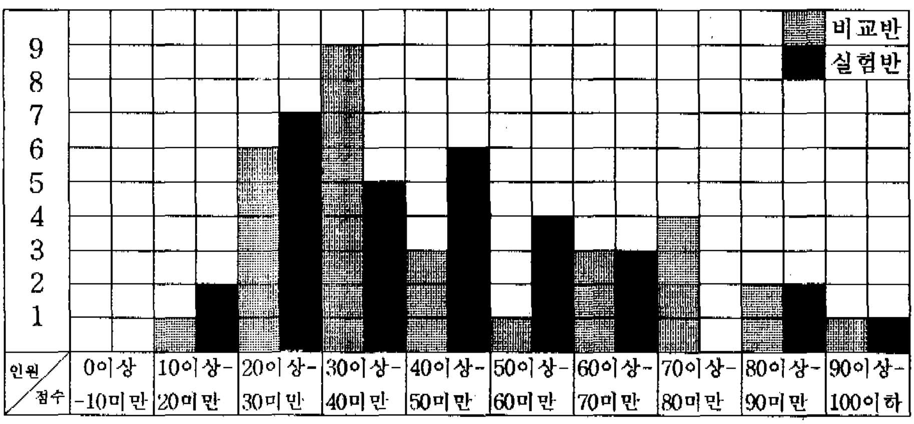
1. 연구대상

농어촌에 위치한 일반계 여자고등학교 2학년 4개 반의 1학년 2학기 공통수학 성적을 통계패키지인 SPSS\PC+를 이용하여 두 개 반의 평균의 차이의 T-검정을 실시한 결과 가장 차이가 작은 것으로 인정되는 2개 반 - A반(비교반), B반(실험반)을 대상으로 하였고, 각 반은 30명으로 구성되어 있으며, 두 학급의 1학년 2학기 공통수학 성적의 T-검정 결과는 다음 <표2>와 같고, 그 분포는 <표3>과 같다.

<표2> 비교반, 실험반의 1학년 2학기 공통수학 성적의 평균차의 검정

	평균	표준편차	T값	df	sig
A반(비교반)	46.23	23.39	0.349	58	0.728
B반(실험반)	44.27	20.14			

<표3> 비교반, 실험반 1학년 2학기 공통수학 성적 분포표



2. 연구방법

함수의 합성은 공통수학에서 선수 학습한 내용이므로 행렬을 학습하는 동안 주 3시간의 수업을 활용하여 확인 학습시키기에는 교과 진도에 지장을 주므로 연구자가 직접 제작하거나 학습지에서 선정한 문제를 주 2회 과제로 부여하여 학습할 수 있게 하고, 그 결과물을 제출토록 하였으며 그 내용은 <표4>과 같다. 그러나, 선다형 문항에 익숙해 있는 학생들이라 주관식으로 부여된 과제에 대하여 상당히 부담을 가지고 있었으며 지정된 기일에 제출하는 학생은 과반수를 조금 넘었다. 수행평가에 반영한다고 하여 기일이 지나더라도 반드시 제출하도록 하였지만 몇몇 학생은 여전히 제출하지 않는 어려움이 따랐다.

<표4> 행렬의 학습 내용과 관련된 과제 내용

소단원명	지도내용	과제내용	과제명
행렬과 그 연산	행렬의 뜻	집합의 상등	1-1
		무리수의 상등	1-2
		복소수의 상등	1-3
	행렬의 덧셈, 뺄셈	다항식의 덧셈, 뺄셈	2-1
		복소수의 덧셈, 뺄셈	2-2 3-1,2
	행렬의 실수배	다항식의 덧셈, 뺄셈	2-1
		복소수의 덧셈, 뺄셈	2-2 3-1
	행렬의 곱셈	복소수의 곱셈	3-1
		다항식의 나눗셈	4-1
		일차함수의 합성	5-1,2,3 6-1 7-1 7-5
		분수함수의 합성	7-3 8-1
역행렬과 연립 일차방정식	역행렬	일차함수의 역함수	9-1 10-1
		분수함수의 역함수	9-2 10-3
	연립일차방정식과 행렬		

수열의 점화식은, 비교반은 교과서에 의한 일반적인 방법으로, 실험반은 함수의 합성과 행렬의 곱셈을 이용한 방법으로 지도하였다. 지도 자료는 <표5>와 같다.

<표5> 점화식의 유형과 학습지도 자료 목록

유형 I	$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$	지도자료1
유형 II	$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$	지도자료2
유형 III	$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+f(n)$	지도자료3
유형 IV	$a_1=a,\ a_{n+1}=f(n)a_n$	지도자료4
유형 V	$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+q$	지도자료5
유형 VI	$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+f(n)$	지도자료6
유형 VII	$a_1=a,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$	지도자료7
유형 VIII	$a_1=a,\ a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$	지도자료8
유형 IX	$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$	지도자료9
유형 X	$\begin{cases} a_1=a \\ b_1=b \end{cases},\ \begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$	지도자료10

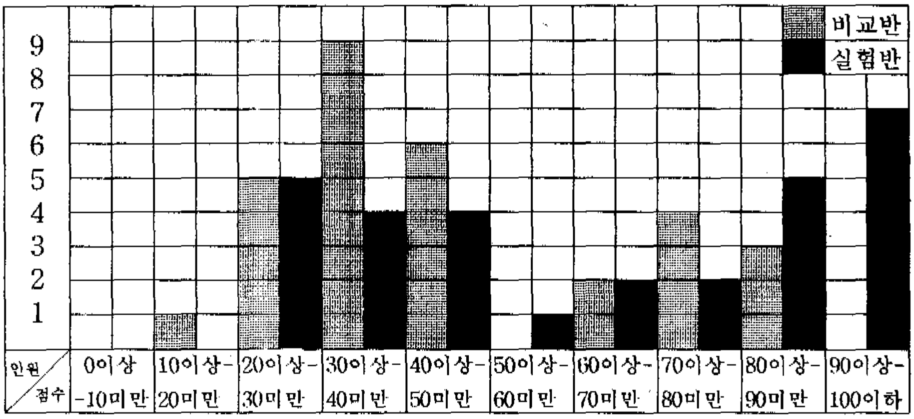
위와 같이 비교반과 실험반에 지도 자료를 차등 적용한 뒤에, 연구자가 제작한 검사지를 이용하여 학력 진단 검사를 실시한 결과를 통계패키지인 SPSS\PC+를 이용하여 전산처리하였다. 그 결과는 다음과 같다.

<표6> 학력 진단 검사 결과

	평균	표준편차	T값	df	sig
A반(비교반)	44.67	21.45	2.398	58	.020
B반(실험반)	60.50	29.11			

* $p<0.05$

<표7> 학력 진단 검사 성적분포



위의 <표6>에 의하면 학력 진단 검사 결과에서는 실험반의 평균값이 비교반의 평균값보다 15.83만큼 높은 것으로 나타났고, 실험반의 표준편차는 비교반의 표준편차보다 7.66이 높게 나타났는데, 이에 대해 자세한 것은 다른 연구가 있어야 하겠으나, 비교적 학습에 열심히 참여하는, 성적이 중상위권 학생에게는 본 지도 방법이 학력 향상에 기여한 바가 있으나, 기초학습이 부족한 학생들에게는 별로 도움이 되지 않은 것으로 판단된다.

Ⅳ. 결론

이상의 본 연구 결과를 종합하면 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1. 함수와 행렬, 수열의 점화식은 그 학습 시기가 다르므로 행렬을 학습하는 동안 선수 학습한 함수와의 연계지도가, 수열의 점화식을 학습하는 동안 함수의 합성과의 연계지도가 이루어지지 않으면 본 연구의 적용은 어려운 것으로 여겨진다.

2. 함수의 합성을 시도하는 과정에 행렬의 곱셈을 이용하여 지도함으로써 다항식의 나눗셈도 복습하게 되며, 함수의 반복 합성을 쉽사리 구할 수 있다.

3. 수열의 점화식의 풀이에 함수의 합성과 행렬의 거듭제곱을 적용함으로써, 귀납적 유추가 어려운 학생들에게는 연역적인 풀이 방법으로 제시할 수 있을 것이다.

4. 성적이 중상위권 학생에게는 효과가 있는 것으로 미루어 요즈음 교육현장에서 실시하고 있는 수준별 이동수업의 경우, 기초반이 아닌 보통반이나 심화반을 대상으로 본 연구를 적용하면 좋은 결과가 있을 것으로 기대된다.

5. 문제 해결의 다양한 접근과 다른 단원과의 연계지도의 한 방안으로 제시할 수 있으나 교과 진도 상의 문제, 기초 학력이 부족한 학생들에 대한 해결 방법 등에 관한 또 다른 연구가 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

교육부(1992), 「고등학교 수학과 교육과정 해설」

교육부(1997), 「수학과 교육과정」

김연식 · 김홍기(1996), 「고등학교 공통수학」, 두산동아

김연식 · 김홍기(1996), 「고등학교 수학 I」, 두산동아

윤옥경 외(1996), 「고등학교 공통수학」, (주)중앙교육진흥연구소

윤옥경 외(1996), 「고등학교 수학 I」, (주)중앙교육진흥연구소

수학사랑(2000), 수학사랑 통권19호, 수학사랑

宮原 繁(1975), 點化式, 日本 : 科學新興社

유대근 · 권영식(1999), 통계분석을 위한 SPSSWIN 8.0, 도서출판 기한재

김오균(1992), "행렬을 이용한 역함수와 합성함수의 지도에 관한 연구", 석사학위논문, 계명대학교

박윤식(1992), "點化式의 一般 解法에 관한 硏究", 석사학위논문, 단국대학교

이동남(1999), "數列의 有限合 · 極限에 대한 幾何學的 接近과 오일러의 數列", 석사학위논문, 제주대학교

이승준(1991), "행렬과 복소수의 연계지도에 관한 연구", 석사학위논문, 홍익대학교

한성희(1992), "高等學校 數學에서의 行列과 그 指導內容에 관한 硏究", 석사학위논문, 충남대학교

<Abstract>

The Guidance of function using matrix and the application to the recurrence formula in sequences.

Oh, Kyung-Hoon

Mathematic Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Song, Seok-Zun

In this thesis, we studied the set of the linear fractional function by matrix method and applied to the teaching recurrence formula of sequences. We compared two groups of students in a same High School at Cheju-Do. One group was taught by the method in the text book and the other group was taught by the matrix method. After then, we took some tests, and analyzed the results by statistics method.

Thus we concluded that the matrix method was more helpful for the study of recurrence formula to the middle or higher ranking students.

※ A thesis submitted to Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Education in August, 2000

<부록1 : 과제학습자료>

[과제01]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　　)

1. 두 집합 $A=\{2, 4, 8\}$, $B=\{4x, 7x^2+1, x+1\}$에 대하여 $A=B$일 때, x의 값을 구하여라.

2. 두 유리수 p, q에 대하여 $(1+2\sqrt{2})p+(-1+\sqrt{2})q=5+7\sqrt{2}$가 성립할 때, $p+q$의 값을 구하여라.

3. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$(x+2yi)+(-x+yi)i=1+i$$

4. 실수 x, y가 $|3x-2y+4|+|-x+2y-2|=0$을 만족시킬 때, $x+y$의 값을 구하여라.

5. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$(2x-y+1)^2+(x+y+2)^2=0$$

6. 다음 등식을 만족시키는 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

[과제02]

제 ( ) 학년 ( ) 반 ( ) 번 이름( )

1. 두 다항식 $P=2x+4y$, $Q=3x-5y$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $P+Q$를 x, y로 나타내어라.

(2) $P-Q$를 x, y로 나타내어라.

(3) $2P+3Q$를 x, y로 나타내어라.

2. 두 복소수 $z_1=1+3i$, $z_2=2+4i$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) z_1+z_2를 계산하여라.

(2) z_1-z_2를 계산하여라.

(3) $2z_1-3z_2$를 계산하여라.

3. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) $A+B$를 구하여라.

(2) $A-B$를 구하여라.

(3) $2A+3B$를 구하여라.

[과제03]

제 (　) 학년 (　) 반 (　) 번 이름(　　　　　　)

1. 두 복소수 $z_1=1-2i$, $z_2=2+i$ 일 때, 다음을 계산하여라.

(1) z_1+z_2

(2) z_1-z_2

(3) z_1z_2

(4) $\frac{z_1}{z_2}$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) AB

(4) AB^{-1}

[과제04]

제 (　) 학년 (　) 반 (　) 번 이름(　　　　　)

1. x^{10}을 x^2-2x+2로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

2. $x=1+i$일 때, x^2-2x+2의 값을 구하여라.

3. 위의 두 문제의 결과를 이용하여, $x=1+i$일 때 x^{10}의 값을 구하여라.

※ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$일 때, 다음에 답하여라.

4. $A^2-2A+2E$를 계산하여라.

5. A^{10}을 계산하여라.

[과제05]

제 ( ) 학년 ( ) 반 ( ) 번 이름( )

※ 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=3x-2$에 대하여,

1. $f \circ g$와 $g \circ f$를 구하여라.

2. $f \circ f$와 $g \circ g$를 구하여라.

3. f^3과 g^3을 구하여라. 단, $f^3 = f \circ f \circ f$를 나타낸다.

※ 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

4. AB와 BA를 구하여라.

5. A^2와 B^2를 구하여라.

6. A^3과 B^3을 구하여라.

[과제06]

제 ( ) 학년 ( ) 반 ( ) 번 이름(   )

1. 두 일차함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$에 대하여 $f\circ g$, $g\circ f$를 구하여라.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 AB, BA를 계산하여라.

3. 위의 문제의 풀이를 이용하여, $f(x)=2x+1$일 때, $(\overbrace{f\circ f\circ \cdot\cdot\cdot\cdot\circ f}^{10\text{개}})(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$라 하고

(1) $A^2-3A+2E$를 구하여라.

(2) x^{10}을 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 놓으면, $x^{10}=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$라 쓸 수 있다. $ax+b$를 구하여라.

(3) (2)에 의해, $A^{10}=(A^2-3A+2E)Q(A)+aA+bE=aA+bE$가 된다. 이 사실을 이용하여 A^{10}을 구하여라.

(4) (3)에 의해 $A^{10}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $f^{10}(x)=\alpha x+\beta$가 된다. $f^{10}(x)$를 구하여라.

[과제07]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　　)

1. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 두 함수 f, g가 $f(x)=2x-1$, $g(x)=3x+4$일 때, 합성함수 $(f \circ g)(x)$와 $(g \circ f)(x)$를 각각 구하여라.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 AB와 BA를 구하여라.

3. 분수함수 $f(x)=\dfrac{3x-8}{x-3}$에 대하여 $f^2=f \circ f$, $f^3=f \circ f^2$, $\cdots$, $f^{n+1}=f \circ f^n$($n=1,2,3,\cdots$)으로 정의할 때, $f^{1998}(x)=f^{1999}(x)$를 만족하는 x의 값의 합을 구하여라.

4. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 A^{20}을 구하여라.

5. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$일 때, $(\overbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}^{k\text{개}})(x)=ax+b$이다. 이 때, $2a+b$의 값을 구하여라.

[과제08]

제 ( ) 학년 ( ) 반 ( ) 번 이름( )

1. 두 분수함수 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $g(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$에 대하여 $f\circ g$를 구하여라.

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$에 대하여 AB를 계산하여라.

[과제09]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　　)

1. 함수 $f(x)=2x-4$의 역함수 f^{-1}을 구하여라.

2. 함수 $g(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$의 역함수 g^{-1}를 구하여라.

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}을 구하여라.

4. 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$의 역행렬 B^{-1}을 구하여라.

[과제10]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　　　)

1. 일차함수 $f(x)=ax+b$ (단, $a\neq 0$)의 역함수를 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.(단, $a\neq 0$)

3. 분수함수 $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수를 구하여라.(단, $ad-bc\neq 0$)

4. 행렬 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.(단, $ad-bc\neq 0$)

[과제11]

제 (   ) 학년 (   ) 반 (   ) 번 이름(   )

1. x^3+3x^2+ax+b를 x^2+3x+2로 나누었을 때, 나머지가 $10x+7$이 되도록 상수 a, b를 정하고자 한다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

2. 두 함수 $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$, $g(x)=2x-2$에 대하여 $(g^{-1}\circ f)(4)$의 값은? (단, g^{-1}은 g의 역함수이다.)

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^{10}의 모든 성분의 합은?

4. 함수 $f(x)=x+1$일 때, $f^{10}(x)$는? (단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$, n은 자연수)

5. 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$에 대하여 $f^{1999}(\frac{1}{2})$의 값은?

6. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}$가 $A^2=2A$를 만족할 때, $a+b$의 값은?

[과제12]

제 (　) 학년 (　) 반 (　) 번 이름(　　　　)

1. 함수 $f(x)=x+2$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{9\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) A^2-2A+E를 간단히 하여라.

(2) x^9을 x^2-2x+1로 나누었을 때, 그 나머지를 구하여라.

(3) 위의 (2)를 이용하여 A^9을 계산하여라.

[과제13]

제 (　) 학년 (　) 반 (　) 번 이름(　　　　)

1. 함수 $f(x)=2x$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{10\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $A^2-3A+2E$를 간단히 하여라.

(2) x^{10}을 x^2-3x+2로 나누었을 때, 그 나머지를 구하여라.

(3) 위의 (2)를 이용하여 A^{10}을 계산하여라.

[과제14]

제 ( ) 학년 ( ) 반 ( ) 번 이름( )

1. 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{10\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $A^2-3A+2E$를 간단히 하여라.

(2) x^{10}을 x^2-3x+2로 나누었을 때, 그 나머지를 구하여라.

(3) 위의 (2)를 이용하여 A^{10}을 계산하여라.

[과제15]

제 (   ) 학년 (   ) 반 (   ) 번 이름(   )

1. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ 에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdot\cdot\cdot\cdot\circ f}^{10\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) A^2-2A+E를 간단히 하여라.

(2) x^{10}을 x^2-2x+1로 나누었을 때, 그 나머지를 구하여라.

(3) 위의 (2)를 이용하여 A^{10}을 계산하여라.

[과제16]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　　　)

1. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ \cdots \circ f}^{10\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $A^2-2A-3E$를 간단히 하여라.

(2) x^{10}을 x^2-2x-3로 나누었을 때, 그 나머지를 구하여라.

(3) 위의 (2)를 이용하여 A^{10}을 계산하여라.

[과제17]

제 (　　) 학년 (　　) 반 (　　) 번 이름(　　　　　　)

1. 함수 $f(x)=x+2$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

2. 함수 $f(x)=2x$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

3. 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

4. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

5. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$에 대하여 $(\overbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{개}})(1)$의 값을 구하여라.

<부록2 : 학습지도자료>

<지도자료1>

$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3\quad (n=1,2,3,\cdots)$에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n째항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어진 점화식에서 n에 차례로 1, 2, 3, ···을 대입하면

$a_2=a_1+3=2+3$

$a_3=a_2+3=(2+3)+3=2+(3+3)$

$a_4=a_3+3=\{2+(3+3)\}+3=2+(3+3+3)$

· · · · · · ·

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$a_n=2+(3+3+3+\cdots+3)=2+3(n-1)=3n-1$

[실험반] $f(x)=x+3$라 놓으면, $a_{n+1}=f(a_n)$이 된다.

$a_{n+1}=f(a_n)$에서 n에 차례로 1, 2, 3, ···을 대입하면

$a_2=f(a_1)=f(2)$

$a_3=f(a_2)=f(f(a_1))=f^2(a_1)=f^2(2)$

$a_4=f(a_3)=f(f^2(a_1))=f^3(a_1)=f^3(2)$

· · · · · · ·

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$a_n=f^{n-1}(a_1)=f^{n-1}(2)$

한편,

$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$에서 $A^{n-1}=\begin{pmatrix}1&3(n-1)\\0&1\end{pmatrix}$이므로 $f^{n-1}(x)=x+3(n-1)$이다. 결국, $a_n=2+3(n-1)=3n-1$을 얻는다.

<지도자료2>

$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n째항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어진 점화식에서 n에 차례로 1, 2, 3, $\cdot\cdot\cdot$을 대입하면

$a_2=2a_1=2\cdot 3$

$a_3=2a_2=2(2\cdot 3)=(2\cdot 2)\cdot 3=2^2\cdot 3$

$a_4=2a_3=2(2^2\cdot 3)=2^3\cdot 3$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$a_n=2^{n-1}\cdot 3\ (n\geq 2)$

또, 위의 식은 $n=1$일 때에도 성립한다.

[실험반] $f(x)=2x$라 놓으면, $a_{n+1}=f(a_n)$에서 n에 차례로 1, 2, 3, $\cdot\cdot\cdot$을 대입하면

$a_2=f(a_1)=f(3)$

$a_3=f(a_2)=f(f(2))=f^2(3)$

$a_4=f(a_3)=f(f^2(3))=f^3(3)$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$a_n=f^{n-1}(a_1)=f^{n-1}(2)$

한편, $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$에서 $A^{n-1}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로 $f^{n-1}(x)=2^{n-1}x$이다.

결국, $a_n=f^{n-1}(3)=2^{n-1}\cdot 3$을 얻는다.

<지도자료3>

$a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n+n\quad (n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어진 점화식에서 n에 차례로 1, 2, 3, $\cdot\cdot\cdot$을 대입하면

$a_2=a_1+1=3+1$

$a_3=a_2+2=(3+1)+2=3+(1+2)$

$a_4=a_3+3=\{3+(1+2)\}+3=3+(1+2+3)$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$a_n=3+\{1+2+3+\cdot\cdot\cdot+(n-1)\}=3+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+6}{2}$$

[실험반] 먼저, $f(n+1)=f(n)+n\quad\cdot\cdot\cdot$ ①를 만족하는 하나의 다항식 $f(n)$을 찾는다.

실제, $f(n)=an^2+bn+c$라 놓으면 ①은 $2an+a+b=n$가 되므로

$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=0$이면 충분하다.

주어진 점화식에서 ①을 빼면, $a_{n+1}-f(n+1)=a_n-f(n)$

여기서, $a_n-f(n)=b_n$이라 놓으면 $b_{n+1}=b_n$이 된다.

<지도자료1> 또는 <지도자료2>에 의해, $b_n=b_1$이 되고, 이 식은

$a_n-f(n)=a_1-f(1)$이 되므로

$$a_n=a_1+f(n)-f(1)=3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n^2-n+6}{2}$$

<지도자료4>

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ ($n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot$)에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어신 점화식에서 n에 차례로 1, 2, 3, $\cdot\cdot\cdot$을 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$a_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2n}$$

[실험반] 먼저, $f(n+1)=\frac{n}{n+1}f(n)$ $\cdots$ ①를 만족하는 하나의 다항식 $f(n)$을 찾는다. 여기서는 $f(n)=\frac{1}{n}$ 이면 충분하다.

주어진 점화식을 ①로 나누면, $\frac{a_{n+1}}{f(n+1)}=\frac{a_n}{f(n)}$

$\frac{a_n}{f(n)}=b_n$ 이라 두면, $b_{n+1}=b_n$ 이 된다

<지도자료1> 또는 <지도자료2>에 의해, $b_n=b_1$이 되고, 이 식은

$\frac{a_n}{f(n)}=\frac{a_1}{f(1)}$ 이 되므로 $a_n=\frac{f(n)}{f(1)}a_1=\frac{1}{2n}$

<지도자료5>

$a_1=5,\quad a_{n+1}=2a_n+3 \quad (n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어진 점화식에서 n에 차례로 1, 2, 3, · · · 을 대입하면

$a_2=2a_1+3=2\cdot5+3$

$a_3=2a_2+3=2(2\cdot5+3)+3=2^2\cdot5+3(1+2)$

$a_4=2a_3+3=2\{2^2\cdot5+3(1+2)\}+3=2^3\cdot5+3(1+2+2^2)$

· · · · · · ·

따라서, a_n은 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1}\cdot5+3(1+2+2^2+\cdot\cdot\cdot+2^{n-2}) \\ &= 2^{n-1}\cdot5+3(2^{n-1}-1) \\ &= 8\cdot2^{n-1}-3 \\ &= 2^{n+2}-3 \end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=2^{n+2}-3 \ (n\geq2)$

또, 위의 식은 $n=1$일 때에도 성립한다.

[실험반] $f(x)=2x+3$라 놓으면, $a_{n+1}=f(a_n)$에서

$a_n=f(a_{n-1})=f(f^{n-2}(a_1))=f^{n-1}(a_1)$이고,

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$으로부터 Hamilton-Cayley의 공식을 이용하면

$A^2-3A+2E=O$

$A^{n+1}-A^n=2^{n-1}(A-E),\ A^{n+1}-2A^n=1^{n-1}(A-2E)$

이 두 식의 차로부터 $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)E=\begin{pmatrix}2^n & 3\cdot2^n-3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$f^{n-1}(x)=2^{n-1}x+3\cdot2^{n-1}-3$이다.

결국, $a_n=2^{n-1}\cdot5+3\cdot2^{n-1}-3=2^{n+2}-3$을 얻는다.

<지도자료6>

$a_1=1$, $a_{n+1}=-a_n+n$ ($n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot$)에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어진 점화식의 양변을 $(-1)^{n+1}$로 나누면,

$(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^n a_n+n(-1)^{n+1}$

$(-1)^n a_n=b_n$ 이라 두면, $b_{n+1}=b_n+n(-1)^{n+1}$이 되므로

<지도자료3>에 의해,

$$b_n=b_1+1(-1)^2+2(-1)^3+3(-1)^4+\cdot\cdot\cdot+(n-1)(-1)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (-1)^n a_n &=(-1)+(-1)^2+2(-1)^3+3(-1)^4+\cdot\cdot\cdot+(n-1)(-1)^n\\ &=\frac{(2n-1)(-1)^{n-1}-3}{4}\end{aligned}$$

따라서, $a_n=\dfrac{2n-1}{4}-\dfrac{3}{4}(-1)^n$

[실험반] 먼저, $f(n+1)=-f(n)+n$ $\cdot\cdot\cdot$ ①을 만족하는 하나의 다항식 $f(n)$을 찾는다.

실제, $f(n)=an+b$라 놓으면, ①은 $2an+a+b=n$가 되므로 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{4}$이면 충분하다.

주어진 점화식에서 ①을 빼면, $a_{n+1}-f(n+1)=-a_n+f(n)$이므로

$a_n-f(n)=b_n$이라 두면, $b_{n+1}=-b_n$ 이 된다.

<지도자료2>에 의해, $b_n=(-1)^{n-1}b_1$이 되고, 이 식으로부터

$$a_n=\frac{2n-1}{4}-\frac{3}{4}(-1)^n$$

<지도자료7>

$a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ $(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어신 점화식의 n에 차례로 1, 2, 3, $\cdot\cdot\cdot$을 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$$

$$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{4}$$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

따라서, $a_n=\dfrac{1}{n}$으로 추정할 수 있다.

[실험반] $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$라 놓으면, $a_{n+1}=f(a_n)$이 된다.

$a_n=f(a_{n-1})=f(f^{n-2}(a_1))=f^{n-1}(a_1)$이고, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$로부터

$A^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}$이므로 $f^{n-1}(x)=\dfrac{x}{(n-1)x+1}$이다.

따라서, $a_n=\dfrac{1}{(n-1)+1}=\dfrac{1}{n}$

<지도자료8>

$a_1=4,\quad a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$ ($n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot$)에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라.

[비교반] 주어신 점화식의 특성방정식 $x=\dfrac{3x+2}{x+4}$의 해가 $x=1,-2$이므로, $a_{n+1}-1=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}-1=2\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+4}\ \cdot\cdot\cdot$ ①

마찬가지로, $a_{n+1}+2=5\cdot\dfrac{a_n+2}{a_n+4}\ \cdot\cdot\cdot$ ②

①÷② ; $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$

여기서, $\dfrac{a_n-1}{a_n+2}=b_n$ 이라 두면 $b_{n+1}=\dfrac{2}{5}b_n$이므로

<지도자료2>에 의해, $b_n=b_1\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$가 되고, $a_n=\dfrac{5^{n-1}+2^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-2}}$

[실험반] $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$이라 두면, $a_{n+1}=f(a_n)$이 되어 $a_n=f^{n-1}(a_1)$

$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$으로부터 Hamilton-Cayley의 공식을 이용하면

$A^2-7A+10E=O$이므로

$$\begin{aligned}A^{n-1}&=\frac{5^{n-1}-2^{n-1}}{3}A+\frac{5\times2^{n-1}-2\times5^{n-1}}{3}E\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(5^{n-1}+2\cdot2^{n-1})&(2\cdot5^{n-1}-2\cdot2^{n-1})\\(5^{n-1}-2^{n-1})&(2\cdot5^{n-1}+2^{n-1})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$f^{n-1}(x)=\frac{(5^{n-1}+2\cdot2^{n-1})x+(2\cdot5^{n-1}-2\cdot2^{n-1})}{(5^{n-1}-2^{n-1})x+(2\cdot5^{n-1}+2^{n-1})}$$

$$a_n=f^{n-1}(a_1)=f^{n-1}(4)=\frac{5^{n-1}+2^{n-1}}{5^{n-1}-2^{n-2}}$$

<지도자료9>

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ ($n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot$)에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$의 n제항 a_n을 구하여라

[비교반] 주어진 점화식은 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$으로 변형되므로

$a_{n+1}-a_n=b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1}=2b_n$ 이 되므로

<지도자료2>에 의해, $b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$가 되어, $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$이 된다.

<지도자료3>에 의해,

$a_2=1$

$a_3=a_2+2^1=1+2$

$a_4=a_3+2^2=(1+2)+2^2=1+2+2^2$

$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

따라서, $a_n=1+2+2^2+2^3+\cdot\cdot\cdot+2^{n-2}=2^{n-1}-1$ $(n\geq 2)$으로 추정할 수 있다. 또, 위의 식은 $n=1$일 때에도 성립한다.

[실험반] $a_{n+1}=1\cdot a_{n+1}+0\cdot a_n$임을 이용하여

$\begin{cases} a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \\ a_{n+1}=1a_{n+1}+0a_n \end{cases}$을 행렬을 써서 나타내면 $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$

$X_n=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이라 놓으면, $X_{n+1}=AX_n$ 이 되어 <지도자료2>를 적용할 수 있다

즉, $X_n=A^{n-1}X_1$이다.

$A^{n-1}=\begin{pmatrix} 3(2^{n-1}-1) & 2(1-2^{n-1}) \\ (2^{n-1}-1) & (2-2^{n-1}) \end{pmatrix}$이므로 $X_n=\begin{pmatrix} 3(2^{n-1}-1) \\ (2^{n-1}-1) \end{pmatrix}$이 된다.

따라서, $a_n=2^{n-1}-1$

<지도자료10>

$\begin{cases} a_1=0 \\ b_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+2b_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=a_n+3b_n & \cdots ② \end{cases}$ ($n=1,2,3,\cdots$)에 의하여 정해지는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항을 구하여라.

[비교반] ①$+x\times$②를 계산하여

$$a_{n+1}+xb_{n+1}=(4+x)a_n+(2+3x)b_n=(4+x)\left\{a_n+\left(\frac{2+3x}{4+x}\right)b_n\right\}$$ 에서

$x=\dfrac{2+3x}{4+x}$라 두면, $x=1$ 또는 $x=-2$이므로 위의 식은

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$ $\quad$ $a_{n+1}-2b_{n+1}=2(a_n-2b_n)$으로 변형되고, <지도자료2>에 의해

$a_n+b_n=5^{n-1}$ $\quad$ $a_n-2b_n=-2^n$ 이 된다.

따라서, $a_n=\dfrac{2\cdot5^{n-1}-2^n}{3}$, $b_n=\dfrac{5^{n-1}+2^n}{3}$

[실험반] 주어진 점화식을 행렬을 써서 나타내면 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$X_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$이라 놓으면, $X_{n+1}=AX_n$이 되어 <지도자료2>를 적용할 수 있다.

즉, $X_n=A^{n-1}X_1$이다

$$3A^{n-1}=\begin{pmatrix} 2\times5^{n-1}+2^{n-1} & 2\times5^{n-1}-2\times2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2\times2^{n-1} \end{pmatrix}$$ 이므로

$$3X_n=\begin{pmatrix} 2\times5^{n-1}-2^n \\ 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix}$$

따라서, $a_n=\dfrac{2\cdot5^{n-1}-2^n}{3}$, $b_n=\dfrac{5^{n-1}+2^n}{3}$

<부록3 . 학력진단 평가지>

※ 다음과 같이 정의된 6개의 함수에 대하여 다음 물음에 답하여라.(1-5)

$f_0(x)=x$,	$f_1(x)=-x+1$,	$f_2(x)=\frac{1}{x}$
$f_3(x)=\frac{1}{-x+1}$,	$f_4(x)=\frac{x}{x-1}$,	$f_5(x)=\frac{x-1}{x}$

1. $f_4 \circ f_5$와 같은 함수는?

① f_1 ② f_2 ③ f_3 ④ f_4 ⑤ f_5

2. f_5의 역함수는?

① f_0 ② f_1 ③ f_2 ④ f_3 ⑤ f_4

3. $f_5 \circ f_5 \circ f_5$와 같은 함수는?

① f_0 ② f_1 ③ f_2 ④ f_3 ⑤ f_4

4. $h \circ f_3 = f_5$를 만족하는 h와 같은 함수는?

① f_1 ② f_2 ③ f_3 ④ f_4 ⑤ f_5

5. $(f_4 \circ f_4 \circ f_4 \circ f_4 \circ f_4)(100)$의 값은?

① 99 ② 100 ③ -100 ④ $\frac{100}{99}$ ⑤ $\frac{99}{100}$

6. 등식 $\begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} u & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ v & 3 \end{pmatrix}$이 성립할 때, $xyuv$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 등식 $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$이 성립할 때, $x+y+u+v$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

8. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X를 구하면?

① $\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

9. 임의의 2차 정사각행렬 A, B와 2차 단위행렬 E, 영행렬 O에 대하여 다음 중 항상 참인 것은?

① $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ② $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

③ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ④ $AB = O$이면 $A = O$ 또는 $B = O$

⑤ $(A+E)(A+2E) = A^2 + 3A + 6E$

10. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & a-1 \\ 4 & a+1 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않을 때, a의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

11. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$의 역행렬을 A^{-1}라 할 때, 행렬 $A + A^{-1}$의 모든 성분의 합은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

12. 다음은 연립방정식 $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$을 행렬을 이용하여 푸는 과정이다. **<u>틀린</u>** 곳은?

[풀이] 주어진 연립방정식을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdot ①$$

또한, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$가 역행렬 A^{-1}를 가지므로 $\cdots\cdots\cdot$ ②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{③}{=} A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{④}{=} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{⑤}{=} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$일 때, A^{100}을 구하면?

① $-E$ ② O ③ E ④ A ⑤ $2A$

14. 다항식 x^5을 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $31x-30$　　② $30x-31$　　③ $32x-31$

④ $31x-32$　　⑤ $33x-32$

15. 다항식 x^5을 $(x-1)^2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $4x-5$　　② $5x-4$　　③ $5x-6$

④ $6x-5$　　⑤ $5x-5$

16. $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 제10항을 구하면?

① 511　② 512　③ 513　④ 1023　⑤ 1025

17. $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+2a_n}(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 제100항을 구하면?

① $\dfrac{1}{99}$　② $\dfrac{1}{100}$　③ $\dfrac{1}{101}$　④ $\dfrac{1}{199}$　⑤ $\dfrac{1}{201}$

18. $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

19. $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n(n=1,2,3,\cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

20. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$, $a_2=4$이고,

$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n(n=1,2,3,\cdots)$인 관계가 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.