碩士學位 請求論文

確率 및 確率變數의 理解와 指導를 위한 小考

指導教授 金 益 賛

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 美 辰

1987年度

確率 및 確率變數의 理解와 指導를 위한 小考

이를 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 金 美 辰

指導教授 金 益 賛

1987年 7月 日

金美辰의 碩士學位 論文을 認准함

濟州大學校 教育大學院

主 審 ㊞

副 審 ㊞

副 審 ㊞

1987年 7月 日

目 次

Ⅰ. 序 論 ······ 2

Ⅱ. 確率槪念의 理解 ······ 3

1. 고전確率과 그 限界性 ······ 3
2. 數學的 Model 과 確率Model ······ 6
3. 事件에 대한 數學的 Model —그實例 ······ 9
4. 基礎槪念 및 確率의 定義 ······ 11

(1) 實驗 (Random Experiment) ······ 11

(2) 標本空間 (Sample Space) ······ 11

(3) 事件 (Event) ······ 12

(4) 確率의 定義 ······ 21

Ⅲ. 確率變數 (Random Variable) ······ 24

1. 確率變數와 事件 ······ 24
2. 確率變數와 可測函數 ······ 28
3. 確率變數와 確率 ······ 32

Ⅳ. 指導上의 유의점 ······ 36

〈Abstract〉

Report for understanding and teaching of probability and random variable

Kim Mee - jin
Mathmatics Major
Graduate School of Education Cheju
National University Cheju Korea
Supervised by Professor Kim Ik - chan

Let (S, &) be a Sample space.

1 . A set function P defined on s is called a probability if it satisfies the following conditions ;

i) $P(A) \geq 0$ for all $A \in s$

ii) $P(S) = 1$

iii) Let $A_j \in s$, $j = 1, 2, \cdots\cdots,$ and $A_j \cap A_k = \phi$ for $j \neq k$

Then $P\left(\bigcup_{j=1} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$

2 . A finite, Single - Valued function which maps S into R^1 is called a randam variable if $X^{-1}(B) = \{ w : X(w) \in \mathcal{B} \} \in s$ for all $B \in \mathcal{B}$ where $\mathcal{B}$ is a Borel σ — field on R^1 .

Ⅰ. 序　　論

確率理論에 관한 認識과 그 應用이 급격히 增大되고 있는 視點에서 確率에 대한 指導는 中學과정에서부터 高校에 이르기까지 순열, 조합, 그리고 確率計算, 確率變數등 많은 분량에 걸쳐 指導되도록 중등교과과정은 명시하고 있다.

그러나 그 指導 內容 및 方案에 있어서는 초기 고전確率의 槪念과 상대돗수 理論에 의한 統計的 確率 및 그에 따른 일어날 가능성이 동등한 경우에 한한 단순한 경우만을 나열하고 순열과 조합을 도구로 한 기교적 計算 方法에 따라 確率計算 過程만을 重視함으로서 폭 넓은 確率 理論의 提示와 그 活用 方案을 指導하는데에는 많은 問題點이 있는 것으로 지적되고 있다.

특히 確率 槪念에 따른 數學的 모형과 實生活 問題上의 밀착된 연관성은 現實과 理論의 區分을 혼란케 함으로서 學生은 물론 指導敎師마저도 槪念의 理解를 토대로 한 學習指導에 混同과 착오를 불러 일으키는 사례가 빈번함을 알 수 있다.

本 論文에서는 이와같이 除限된 確率槪念을 擴張함으로서 指導하려는 立場에서 確率槪念의 定立過程 및 確率과 確率變數의 정확한 槪念을 提示하고 高校指導 過程에서의 限界成과 그 活用方案을 言及함으로서 中等敎育에서의 確率敎育의 방향과 유의점 및 確率 및 確率變數 槪念의 指導方案에 관하여 論하여 보려고 한다.

Ⅱ. 確 率 概 念

1. 고전確率과 그 限界成

確率의 數學的 理論의 시초는 대략 16세기 Gambler에 의한 Chance의 Game에서 유래되었다고 추측되고 있다.

즉 Gambler가 예견한 game에서의 기대돗수와 실제 觀察된 돗수 사이에서 나타난 차이에 대한 硏究는 우연성을 규명코자 하는 시도이며 이러한 시도는 確率槪念에 대한 다음과 같은 고전적 定義를 創出하고, 現行 高校교과서가 아직도 정의 자체를 그대로 지속하고 있음을 알 수 있다.[1)]

ㅇ 정의 1

N개의 일어날 가능성이 가능한 結果중의 한 結果가 나타나도록 하는 施行이 이루어 진다. 이 N개의 가능한 결과 가운데 사건 A가 일어나는 가능한 結果의 數가 N_A일때 사건 A가 일어날 확률 :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \qquad \cdots\cdots (1)$$

나타나게될 우연의 可能性을 豫測함에 있어서 game 자체가 위의

註 1) 박한식 : pp.370.

定義의 槪念에 부합된 成功的 예견이며 이러한 分析的인 성공은 이 理論을 현재까지 適用토록 만들고 있다. 실제 問題에 접하는 우리는 정의(1)에서 두가지 問題 즉, 可能한 結果 N의 값은 무엇인가와 事件 A의 發生에 있어서 可能한 結果 N_A의 값은 무엇인가의 解結에 의해 이들의 比에 따라서 確率을 決定된다.

다시 말하여 確率은 可能性의 計算問題이며 이에 대한 가장 기본적 도구는 순열과 조합의 理論과 適用인 셈이다.

한편 정의 I 이 만들어지게 된 動機로서

① 일어날 可能性이 同等한 結果라고 하는 직관적 사고

② 硏究되는 事件發生에 대한 상대돗수의 統計的 규칙성에 대한 經驗的 事實

의 두가지임을 觀察하게 된다.

그러나 이 고전적 理論은 많은 問題 解決에 있어서 몇가지 불식할 수 없는 제한을 받고 있다.

첫째가 可能한 結果들이 限定됨으로서 무한집합 또는 연속형 집합에 있어서는 이들 무한 또는 연속을 계산하는데 제한 받지 않는 model로의 확장이 要請되고 있는 點이며 두번째가 나타날 기대 程度가 동등해야 한다는 結果의 假說이다.

그러나 우리 주위는 이러한 동등한 기대 정도 이외에도 동등하지 않은 기대에 대한 수많은 類型을 찾아낼 수 있고, 더구나 이러한 경유에까지 통용될 수 있는 定義로 基本槪念을 擴大하려는 것이 確率論 發展의 母體라 할 것이다.

또 한가지 모순된 理論은, 예를 들어 하나의 주사위를 던지는 경우 나타날 기대 정도가 동등하기를 確認하기 위해서 그 주사위는 공평하다든가 완벽한 대칭이라 가정하게 된다.

이때 사용된 " equally likely "라는 개념은 바로 그 자체가 定義에 의해 우리가 진술코자 한 개념을 표현한 모순임을 발견한다.

o 정의 2. (통계적 確率)[2]

規定된 實驗이 매번 반복된다. 만일 事件 A가 a번 發生하면 사건 A의 確率 P(A)는 A의 發生의 상대돗수 $\frac{a}{n}$의 극한으로 定義된다.

즉 $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{n}$ ……………………………………………………………… (2)

정의 1의 equally likely의 개념을 一般化하여 보완한 槪念으로서의 상대돗수의 극한이라는 定義는 統計的規測性에 대한 說明으로서, 그리고 상대돗수 $\frac{a}{n}$에 대해서, 어떤 實驗的 事件에 確率을 對應시키기 위한 귀납적추출의 形態로서 定義한 것은 매우 자연스럽다.

그러나 定義 2에서의 $\frac{a}{n}$는 순수한 극한적 槪念 즉, 實際 施行이 이루어진 후 認識되는 現實 世界이며, 이러한 물리적 實驗에서의 $\frac{a}{n}$는 아무리 n이 크더라도, 또 아무리 근사적이라 하더라도 그 극한과 같을 수는 없다.

註 2) 박한식 : pp. 313.

앞에서 우리는 고전理論이 두가지 근본槪念 즉, equally likely 와 상대돗수의 統計的 規測性에 그 根本을 두었다고 觀察했다. 그러나 때때로 이 두가지 槪念은 동일한 定義를 규정짓지 못하는 사례가 發生한다. 즉, 어떤 주사위가 그 모양에서 대칭적이지 못할때 각변이 동일한 빈도를 나타난다고 기대할 수는 없다. 그러나 그 상대돗수는 統計的 규칙성을 보일 것임을 기대할 수 있고, 실상 수많은 實驗은 이것을 立證했다.

그러나 事件 發生에 대한 상대돗수라는 사고와 確率이란, 상대돗수의 극한으로 定義된다는 발상은 그 理論的 model과 經驗的 토대의 접근에 의한 基本 槪念의 樹立過程에서 數學的 model을 發展시키는데 중요한 역할을 하고 있음에 틀림없다.

따라서 중요한 것은 이러한 고전적 model의 基本 性質을 保有하면서 보다 폭 넓은 自然現狀을 수용할 수 있도록 자유로울 수 있는 방법으로 確率의 槪念을 一般化하는 것일 것이다.

2. 數學的 model과 確率 model

數學的 model은 어떤 다른 형태의 model과 共通된 특징을 공유한다. 예를 들어 自動車나 비행기의 設計에서 널리 使用되는 모델형태 즉, 실물크기의 모형을 생각하자. 이 모델들은 다양한 본질적 특징을, 즉 형태, 비례, 기계역학적 특징들을 보여 준다.

다른 특징, 예를 들어 무게, 소종 메카니즘, 사용된 特殊材料 등은

이 모델에는 들어있지 않을지도 모른다.

이러한 모델은 그것이 대표하는 전체상과는 일치하지 않는다. 그의 유용성은 그 모델이 그리고자하는 특징을 얼마나 잘 나타내었는가에 달려 있다. 즉 그 가치는 모델의 적절한 특징들이 모델로 된 "實生活" 狀況이 制度 혹은 전체상에 얼마나 성공적으로 연관지어 질 수 있는가에 , 달려 있다.

確率의 數學的 model을 발전시킴에 있어서 우리가 追求하여야 할 것은 槪念과 關係가 "實世界"에서의 적절한 槪念과 관계와 일치하는 數學的 체계인 것이다.

한편 모델의 硏究는 實世界에 대한 중요한 事實을 發見하는 데는 도움이 되지만 實世界에 대한 무언가를 證明하기 위하여 使用될 수는 없다. 모델은 眞이나 爲가 아니라 실생활 狀況에 적합하거나 적합하지 않거나인 것이다.

model은 有効하거나 有効하지 않거나 한 것이다.

model은 다음 세가지 조건이 만날때[3] 有効한 것으로 알려지고 있다.

1. 실세계에서의 問題와 狀況이 數學的 model에서의 問題와 狀況으로 解釋할 수 있을때
2. model이 實世界 問題의 解釋에 의해 공식화 되어진 model 問題의 해답을 얻기 위해 數學的 체계로서 硏究될 수 있을때

註 3) Pfiffer : pp.8.

3. model 問題의 해답은 對應되는 實世界 問題에 의하여 상호 관련될 수 있거나 說明될 수 있을때

數學的 모델은 모순없는 數學的 체계이어야 한다. 그런 것으로서만 model은 자신의 "生命力"을 소유한다. 그러나 이러한 數學的 체계, 즉 가장 성공적 model이라고 알려진 수많은 數學的 추상성을 특징으로 한 체계일지라도 더 나은 서술을 마련하는 새로운 數學的 理論이 構成되기 전까지만 타당하다.

따라서 우리는 그 마련된 表現을 가설이라 부름이 옳을 것이다. 確率論도 마찬가지로 우리의 直觀이나 物理的 實驗등의 경우와 관련되어 그 어떤 結果를 제안한다. 즉 직관과 경험이 事件에 대한 確率 배정이라는 結論으로 우리를 인도한다. 따라서 數學이 관련된 것과 같이 確率로 數學과 일치하는 法則에 따라져야 한다.

현재까지 알려진 確率에 관한 가장 成功的인 model은 A.N.Kolmogorov에 의해 기술된 假說的 체계이다. 그는 確率發展의 흐름을 한데 묶어 현대 數學의 槪念에 입각하여 數學的 可能性(確率)을 추상적 측도이론의 특수한 경우도 표현했다.

따라서 기존 槪念으로의 집합과 측도이론을 차용한 表現方式을 使用함으로서 그 槪念과 關係를 簡結化 하였다.

3. 事件에 대한 數學的 model —그 實例

고정 確率理論에서 처럼 Chance 의 game 을 생각하자. 이러한 game 에서 어떤 종류의 實驗 또는 試驗의 槪念은 基本的이다. 한 사람이 한 Card 묶음에서 한장 Card 를 뽑거나 한쌍의 주사위를 던지는 일, 또는 바구니에서 흰색의 공을 뽑는 실험을 시행한다. 그러한 시도는 간단할 수도 또는 복잡할 수도 있다. 그러나 어떤 경우든 거기에는 잘 정의된 시행과 可能한 結果의 집합이 있어야 한다.

예를 들어 동던던지기 實驗에서 동전은 앞도 아니며 뒤도 아니고 모로 설 수도 있다. 아니면 확인 불가능 할 수도 있다. 이러한 우발성이 동던던지기 實驗에서의 만족한 수행인가의 여부를 決定해야할 必要가 있는 것이다.

다시 한쌍의 주사위를 던지는 實驗을 생각하자. 주사위를 던진다는 數學的 model 은 바구니에서 공을 끄집어 낸다는 것과는 동일한 model 임을 인식할 수 있다. 다시 한 Card 묶음에서 연속해서 5개의 Card 를 끄집어 내는 시도와도 동일하다.

이제 실제적 實驗과 施行에서의 結果(outcome)과 사건(event) 을 추상 槪念化 해보자. 實驗에 의해 나타나는 모든 結果의 모임을 S라고 하자. "施行(trial)"이란 잘 정의된 實驗의 1회의 許容을 뜻한다.

이 施行으로 우리는 단 하나의 결과(outcome) w를 관찰한다.

즉, 結果란 數學的으로 S의 한 원소 w를 의미한다. 다시 事件과 事件發生의 意味를 생각하자. 하나의 동전을 두번 던지는 實驗에서 "표면의 수가 1보다 작거나 같다"라는 진술은 그 實驗의 施行에 의해 그러한 상태가 나타나든가 또는 그렇지 않든가 일 것이다. 따라서 그 實驗이 實行된 후 "表面의 數가 1이하인가?"의 질문은 yes 또는 no로 대답될 수 있다. yes에 對應하는 결과의 모임을 A라고 할때 A = { HH, HT, TH }가 될것이고 만일 한 시행의 結果가 HH이었다면 사건A가 발생하였다고 말한다.

즉 주어진 實驗에서의 事件이란 바라는 원소들로 이루어진 S의 부분집합으로 對應되며 "事件A가 實驗의 한 施行에서 發生할 것이다"라는 것은 그 施行의 結果가 A의 점들중 한점에 對應한다.(즉 A의 한 원소가 선택된다)로 추상화 하게 된다. 確率論에 있어서의 가장 基本的인 概念은 다음의 표에 의하여 확인될 수 있다.

실　　세　　계	수학적 model
1. 전 사 건 : S	표본공간 S
2. 불가능사건 : ϕ	공 집 합 ϕ
3. 여 사 건 : A^c	집합A의 여집합
4. 곱사건 : $A \cap B$ 즉, 한 시행에서 사건A와 B가 동시에 발생한다.	교집합 $A \cap B$ A와 B 양쪽에 속하는 원소의 집합
5. 배반사건 : 동시에는 발생할 수 없는 사건	$A \cap B = \phi$
6. 합사건 : $A \cup B$ 즉, 한 施行에서의 사건A 또는 B가 발생한다.	합집합 $A \cup B$
7. A의 발생은 B의 발생을 의미 즉 : $A \subset B$	집합A는 집합B의 부분집합 즉 $A \subset B$

4. 基礎概念 및 確率의 定義

우리가 그리고자한 "實世界" 實際物을 確認하고 이러한 특징이 確認된 후 우리는 적절한 數學的 對應을 찾게 된다. 이 數學的對應은 定義되거나 規定지어져야 하고 적절한 이름과 상징적 表現이 주어지는 槪念과 關係를 포함하게 된다. 確率의 경우 최초에 잘 定義된 實驗과 그 實驗의 可能한 結果가 열거될 수 있어야 한다는 것을 要請하게 된다.

確率 實驗의 槪念的 定義는 다음과 같다.

(1) 實驗 (Random Experiment)

i) 實驗의 모든 結果가 施行前에 미리 알려지고

ii) 實驗의 한 施行의 結果는 시행 전에는 미리 알 수 없으며

iii) 그 實驗은 동일한 條件하에서 반복이 가능한 경우

이 세가지 조건을 동시에 만족하는 경우를 우리는 確率이 適用되는 의미에서의 實驗이라고 할 것이다. iii) 에서 어떤 實驗이 반복되는 동일한 조건이란, 實驗의 進行에 따라 變更되는 要因들이 반복되는 이 實驗의 可能한 여러 結果의 可能性에 影響을 주지 않을 때라고 解釋할 수 있다.

(2) 표본공간 (Sample space)

표본공간은 실험의 가능한 모든 결과로 이루어진 集合으로서 空이 아닌 원소들로 이루어진 추상공간에 대응된다. 표본공간 S에

대하여 實驗의 한 施行의 結果와 S의 元素들중 꼭 한점이 반드시 對應하여야 한다. 確率과 關聯하여 우리는 空이 아닌 원소를 갖는 집합S의 존재성을 가정하고 理論을 展開하게 된다. 표본공간을 설정함에는 그 물리적 실험의 모든 가능한 結果들이 주의깊고 분명하게 서술되어야 하며 특히 그러한 可能한 結果는 오직 한가지 방법에 의해 표현되어야 한다. 한 實驗에서 일어난 결과를 어떻게 규정하느냐 하는 것은 자유이므로 한 實驗에 대한 표본공간은 오직 하나만 있는 것은 아니다. 따라서 同一한 實驗에 대한 표본공간이 서로 다른 의미를 가질때 우리는 완전히 별개의 確率을 다루게 되는바 표본공간은 나타내어지는 결과에 대한 타율적 의미가 아니라 완전히 그 정의에 의해 결정되는 것이다.

(3) 사건 (event)

確率의 중심槪念은 事件이다. 確率은 實驗의 어떤 結果에 관련지어지는 것이 아니라 事件에 관련된다. 事件에 대한 數學的 model에서 단순한 意味로 事件을 표본공간의 부분집합으로 規定하였으나 S의 모든 부분집합이 반드시 事件으로 간주할 수 없는 경우가 나타난다. 우리는 S의 한점 w에 對應하는 結果에 대한 情報를 측정하는데 실패하거나 또는 포기하게 되는 경우가 있다. 즉 S의 주어진 부분집합 A에 대하여 " w가 A의 한원소인가? "라는 물음에 대답이 가능하지 않는 경우가 있기 때문이다. 예를들어 하나의 동전을 5회 이상 던지는 實驗에서 우리는 최초의 3회던진 결과만을

기록하고 있을지 모른다.

만일 이 경우 $A = \{$적어도 4개의 표면이 나온다$\}$ 라고 할때 A는 측도 불가능일 것이다. 왜냐하면 A의 원소w는 w에 대해서 주어진 정보로 부터는 결정되어질 수 없기 때문이다. 또 $S = R^1$으로 주어진 경우 실수R^1의 모든 점의 부분집합을 그 방대성으로 인하여 事件으로 다룰 수는 없다.

事件을 定義하는 目的은 實驗의 結果 事件이 일어나는 可能性을 量的으로 表現하는 確率을 定義하기 위한 것이다. 따라서 確率을 定義할 수 없는 S의 부분집합은 관심의 대상이 될 수 없으며 S의 부분집합으로서 確率을 定義할 수 있음이 밝혀져야 한다.

따라서 사건(event)는 엄밀히 정의되어야 한다.

o <u>정의 3.</u>

집합 S의 부분집합으로 이루어진 집합족 $\mathcal{A}$에 대하여 ($\mathcal{A} \fallingdotseq \phi$)

1) 만일 $A_i \in \mathcal{A}$이면 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$이고, $A \in \mathcal{A}$ 일때 $A^c \in \mathcal{A}$이면 $\mathcal{A}$를 S의 體(field)라 한다.

2) $A_i \in \mathcal{A}$이고 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$되는 S의 體$\mathcal{A}$를 σ-體라고 한다.

정의에 의해 ϕ과 S는 $\mathcal{A}$의 元素이며 또 $\cap A_i = (\bigcup_i A_i^c)^c$이므로 집합 S의 體는 (σ-體의 경우도 마찬가지) 合과 곱 그리고 여집합의 연산하에서 내포되는 집합족으로서 바로 사건의 집합족에 대하여 요청되는 성질들인 것이다.

• 예 1 − 1

하나의 동전을 두번 던진다. 표본공간 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ 이고 S의 모든 부분집합으로 이루어진 집합족을 $\mathcal{A}$라 하면 $\mathcal{A}$는 하나의 體를 구성한다.

• 예 2 − 1

하나의 동전을 표면이 나올 때까지 던지는 실험을 생각하자.

$S = \{H, (T, H) (T, T, H), (T, T, T, H) \cdots\cdots\}$이고 S의 모든 부분집합으로 이루어진 집합족 $\mathcal{A}$는 하나의 σ −體를 구성한다. 만일 S를 H가 나타나는 횟수로 변환시켜 對應시키면 $R_x = \{1, 2, 3 \cdots\cdots\}$인 가산개의 이산형 표본공간으로, 또 R_x의 모든 부분집합의 집합족 s로 간소화된 σ −體를 구성한다.

한편 고전 定義 (1)와 (2)를 통하여 우리는 표본공간 S에 대하여 ① $P(s) = 1$, ② 서로 배반된 두집합 A, B에 대하여 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$임을 증명할 수 있다.

그리고 이러한 기본성질이 상대돗수를 確率槪念에로 擴張시킴에 유지되어진 근원적 특성으로서, 그 역활을 이루게한 배경이라고 할 것이다.

예 2에서 우리는 표본공간 S가 가산개인 경우에 대한 σ −體를 생각했다. 이제 S가 연속 또는 비가산의 경우에 대하여 예 3을 통하여 관찰하자.

• 예 3 − 1

바늘이 반경 r 인 원의 중심에서 그 둘레를 회전한다고 한다. 바늘이 정지되는 모든 점들이 선택될 가능성은 같다고 가정하자. 표본공간 S 는 반경 r 인 원둘레상의 모든 점들의 집합이다. 만일 이 모든 한 점 집합들 (Single point sets) 에 確率 a 를 對應시킨다고 하면 $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$인 성질에 의해 n-point set 에 確率 na 가 對應된다. 이제 $a > 0$ 이라면 $\frac{1}{a}$ 보다 더 큰 n 을 선택함으로서 이 집합은 1 보다 더 큰 確率을 만들게 됨으로 $P(S) = 1$ 에 모순된다. 따라서 모든 Singlc point set 에 確率 $a = 0$ 이 對應되어야 한다. 그런데 이때는 다른 부분집합의 確率을 만들어 낼 수가 없다. 즉 S 가 연속일때 그 모든 비가산의 Single point set 들에는 確率의 對應을 줄 수가 없다.

많은 確率 實驗에서 예 3 − 1 에서와 같이 표본공간 S 를 실수 R 또는 R 의 부분집합으로 나타나는 경우가 있다. 또 주어진 표본공간 S 상에 우리가 원하는 사건을 우리의 의도대로 만들고자 하는 요청이 있을 수 있다.

X 를 ϕ 이 아닌 임의의 집합이라고 하자. X 의 부분집합으로 이루어진 모든 σ − 體 (물론 그것들은 ϕ 이 아니다) 의 교집합은 분명히 X 의 한 σ − 體일 것이다.

이제 $\mathcal{B}$ 를 X 의 부분집합의 한 집합족이라고 하자. (B 는 體라고 하지 않았음). 이때 $\mathcal{B}$ 를 포함하는 최소의 體 $\mathcal{A}$ 를 $\mathcal{B}$ 에 의해 生成되는 X 의 體, $\mathcal{B}$ 를 포함하는 최소의 σ − 體를 $\mathcal{F}$ 를 $\mathcal{B}$ 에 의해 生

成되는 X의 σ —體라 하며 a(B)로 포기한다.

이제 F를 $F=\sigma(B)$ 즉 B을 포함하는 X상의 최소의 σ —體라고 하면 F는 ① B를 포함하는 X상의 σ —體로서 유일하게 존재하며 ② B를 포함하는 X상의 모든 σ —體는 F를 포함한다. 즉 F는 B를 포함하는 X상의 모든 σ —體를 최소의 σ —體라는 사실이 다음의 정리에 의해 밝혀진다.

o 정리 1.

B가 S의 부분집합의 한 집합족이면 B를 포함하는 최소의 體 A (또는 σ —體)가 존재한다. 즉 B를 포함하는 體(또는 σ —體) A가 존재하고 ζ가 B를 포함하는 임의의 體라고 하면(또는 σ —體) $A \subset \zeta$이다.

・증명 : B를 포함하는 S의 부분집합의 體 전체의 집합족을 F라고 하자. 즉 $F=\{\zeta \mid \zeta$는 집합의 體이고 $B \subset \zeta\}$

한편 S의 모든 부분집합으로 이루어진 집합족 $\zeta(2^s)$는 분명히 집합의 體이므로 $\zeta(2^s) \in F$

즉, $F \neq \phi$ (존재성의 증명)

이제 $A=\cap\{\zeta \mid \zeta \in F\}$로 두면

① $A \in A$이고 $B \in A \Rightarrow F$의 모든 원소 ζ에 대하여 $A \in \zeta, B \in \zeta$

또 ζ가 모든 집합의 체이므로 $A \cup B \in \zeta$, $\zeta \in F$

따라서 $A \cup B \in \cap\{\zeta \mid \zeta \in F\}=A$

② $A \in A$이면 $A \in \zeta$, $\zeta \in F$, 따라서 $A^c \in \zeta$, $\zeta \in F$ 그러

그러므로 $A^c \in A$

따라서 A는 집합의 體이다.

이제 ζ가 $B \subset \zeta$인 집합의 體이면 $\zeta \in F$

따라서 $A \subset \zeta$

예 4) 주사위를 던졌을 때의 표본공간 S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }에 대하여 S의 부분집합으로 된 집합족 B = { ϕ , Ω , {2, 4 , 6 }, { 1 , 3 , 5 }, { 1 } }이라고 하면 $\{1\}^c \notin B$ 이므로 B는 집합의 體는 아니다.

그러나 B에 적당한 S의 부분집합을 가함으로서 B를 포함하는 새로운 집합의 體를 만들어 낼 수 있다. 그것을 $A(B_0)$라 하자.

B_a = { ϕ , S , { 1 , 3 , 5 }, { 2 , 4 , 6 }, { 1 }, { 2 } }로 두면 마찬가지로 B_a는 집합의 體는 아니지만 B_a를 포함하는 집합의 體 B_1이 존재한다.

이제 이러한 모든 집합의 體를 B_1, B_2, ………, B_n이라 할때, $\bigcap_{i=0}^{n} B_i$는 바로 B를 포함하는 최소의 집합 體 A이다.

집합의 體에 의하여 우리는 주어진 표본공간 S상에서 우리가 원하는 부분집합을 體에 포함시킴으로서 원하는 사건을 우리의 의도대로 만들어 낼 수 있는 이론성을 제시한다.

이제 표본공간 S가 실수의 전구간 R^1과 동일한 경우로 확장하자

∘ 정의 4.

R^1의 開 分集合의 집합족에 의하여 生成된 R^1상의 σ – 體를 R^1에서의 Borel σ – 體 (Borel σ – field on R^1)이라 하고 $B(R^1)$으로 표기한다.

$B(R^1)$에 속하는 임의의 元들을 R^1에서의 Borel 집합이라고 한다.

실수 R^1 에 대한 Borel σ－體의 정의 및 다음의 정리는 표본 공간 S를 실수로 하였을때 그에 의해서 구성되는 σ－體의성 질을 분명히 함으로서 연속표본공간에 대한 확률배정의 난제를 해결하도록 하여주고 있다.

o 정리 2.

실수 R^1 의 Borel 집합의 σ－體 $\mathcal{B}(R^1)$은 다음의 각 집합족에 의하여 生成된다.

a) $\mathcal{B}_1$: R^1 의 모든 閉부분집합의 집합족

b) $\mathcal{B}_2$: $(-\infty, b]$ 형태의 R^1 의 모든 부분 구간의 집합족

c) $\mathcal{B}_3$: $(a, b]$ 형태의 R^1 의 모든 부분구간들의 집합족

o 증명

$\mathcal{B}(R^1)$은 R^1 의 閉집합의 집합족을 포함하고 또 σ－體이므로 각집합에 대한 여집합을 포함한다. 따라서 R^1 의 閉집합의 集合族을 포함한다. 따라서 R^1 의 폐부분집합에 의하여 생성된 σ－體 $\mathcal{B}_1$ 을 포함한다. 한편 $(-\infty, b]$형의 집합들이 내포내므로 $\sigma(-\infty, b] \in \mathcal{B}_1$ 즉$\mathcal{B}_2$

또$(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^C$이니 $(a, b]$형의 각집합은 $\mathcal{B}_2$에 속하고 따라서 $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$.

마지막으로 R^1 의 각 開부분구간은 $(a, b]$형의 집합의 수열의 합집합이고 R^1 의 각 開부분집합은 開區間들의 수열의 합집합이다.(뒤의 예 8에서 보여짐).

결국 R^1 의 開부분집합은 $\mathcal{B}_3$ 에 속하니 따라서 $\mathcal{B}(R^1) \subset \mathcal{B}_3$

한편 $\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$임을 감안하면 실수 R^1 의 Borel σ－體 $\mathcal{B}(R^1)$의 모든 Borel set 는 가산개의 점과 구간들의

합 및 교집합 그리고 그 차들로 얻어질 수 있다. 즉 모든 (a, b] 형의 集合族에 의해서 生成된 Borel σ-體는 모든 閉區間 및 半閉區間, 그리고 모든 가산개의 집합 및 그들의 여집합, 또 모든 開集合 및 閉集合을 포함한다.

다시 말하여 표본공간 S가 가산개의 점으로 이루어 질때 우리는 사건이 되기를 원하는 S의 부분집합(그것을 Basic event라 하자)에 대하여 S의 모든 부분집합으로 이루어지는 집합족 σ-體에 확률배정을 가능케 한다.

만일 S가 비가산 즉 R^1일때는 R^1의 모든 점(point)만으로 이루어진 σ-體는 그 비가산성 및 방대성으로 인하여 σ-體의 구성 및 확률배정을 불가능하게 한다. 이때 Basic event의 구간을 포함하는 최소의 Borel σ-體를 구성함으로서 비가산의 난제를 해결한다. 그러나 실제로 어떤 실험의 결과가 실수일때 $w \in B$라는 진술에서 B가 Borel 集合이 되지 않는 경우는 수학적인 예를 제시하려는 인위적인 조작일뿐 현실에서는 일어나지 않는 경우이므로 우리는 실수 R^1에 대하여 R^1의 임의의 부분집합(구간)에 의해 생성된 Borel σ-體를 σ-體로 잡으면 된다. 표본공간 S의 부분집합으로 이루어진 σ-體 F의 임의의 부분집합을 사건(event)라고 정의한다.

○ 정의 5

집합S의 부분집합으로 된 集合族의 하나를 $\mathscr{E}$라 하자.

一價의 實價함수, $\nu : \mathscr{E} \rightarrow R^1$

을 $\mathfrak{F}$ 상에서의 집합함수(Set function)이라고 한다.

각 $A \in \mathfrak{F}$에 대하여 $\nu(A) \geq 0$이면 ν는 陽(positive)라 하여 $\nu \geq 0$으로 표시하며 $A, B \in \mathfrak{F}$이고, $A \cap B = \phi$이면, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$일때 ν를 加法的(additive)라 한다.

예 5.

$\mathcal{B}(R^1)$을 R^1 상의 Borel σ — 體, $A \in \mathcal{B}(R^1)$이라 할때,

$\nu(A) = \int_A e^{-x}\, dx$로 정의하면 ν는 한 集合要素이다.

ㅇ 정의 6.

X를 임의집합 A를 X의 σ — 體라고 하자.

집합함수 $\mu : A \to [0, \infty]$가 A에 속하는 모든 서로素인 元 A_i ($A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$)에 대하여

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

즉 $\mu(\phi) = 0$이고, 陽이며 加算加法인 集合要素 μ를 A에서의 測度(measure)라 하고, (X, A, μ)를 測度空間, (X, A)를 前測空間(measurable space)라고 한다.

예 6.

半閉區間 $[a, b]$전체로 된 R^1의 부분집합의 집합족 $\mathcal{B}(R^1)$에 대하여 $(R^1, \mathcal{B}(R^1))$은 前測空間이다.

μ를 $\mathcal{B}(R^1)$ 상에서 정의된 집합함수로서 $\mu(c, d) = d - c$로 정의하면 μ는 $\mathcal{B}(R^1)$에서의 測度이다(단 $c, d \in R$).

4) 確率의 정의

S를 標本空間, $\mathcal{F}$를 S의 부분집합으로 이루어진 σ 一體라고하자. $\mathcal{F}$상에서 정의된 實量의 集合要素 P가 다음의 가설을 만족할 때 :

①모든 $A \in \mathcal{F}$에 대하여 $P(A) \geq 0$

② $P(S) = 1$

③ $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 2$, ………) 이고 $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ 일때

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

이때 P(A)를 사건 A의 확률, (S , F , P)를 확률空間이라고 한다. 가설①과 ③은 σ 一體상에서 정의되는 측도론의 성질이고 가설 ②는 그러한 측도중에서 확률을 특징짓는 조건이다. 즉 확률이란 표본공간에 의해 이루어진 σ 一體 위에서 정의된 측도중 S의 측도를 1로 제한한 특수한 경우이다. 가설③은 우리가 바라는 사건과 거기에 결부된 복합사건들에 대하여 확률배정을 가능하게 한다.

특히 ③에서 유한가법성이 加算加法性 보다도 自然스럽게 보일지 모르나 加算加法性이 거의 모든 數學的 응용을 충족시키며, 적분에서의 보다 유용한 理論을 제공하게 된다. 加算加法性이야 말로 數學的 特徵을 만족시키며 理論을 전개하 나갈 수 있는 가장 강력한 요청이라고 할 수 있다.

한편 여기서 강조되어야 할 점은 이 정의는 특수한 사건(ϕ과 S)를 제외하고는 사건에 대한 확률을 어떻게 결정해야 하는지에 대하여는 말하고 있지 않음을 주의해야 한다. 개개의 경우에 대하여

先驗的이든 경험적이든 구체적으로 어떤 確率을 준다는 問題에는 관계없이 確率이 지녀야 할 數學的인 모델을 作成한 것 뿐이라는 것이다.

이 정의는 표본공간과 그 위에서 주어진 確率이라는 모델이 어떤 구조를 가지고 어떤 數學的 決果를 나타내는 가에 限定되어 있으며 確率에 대한 數學的 모델이 現實의 표현으로 적합한가는 경험적 증거의 利用, 즉 통계학이 담당할 영역이라고 할 수 있다.

결국 우리는 事件에 對한 確率값을 얻기 위해서 그 어떤 方法으로 實驗을 유용성 있게 모델화 한 다음 모델화된 確率이 충분히 경험적으로 관찰된 發生의 貧度와 「알맞다」는 사실에 서로 동의될 수 있을때, 그 신뢰성에 의해 가정된 確率을 사용하게 된다. 그리고 그 確率의 기초위에서 더욱 더 發展되는 理論으로 進行시켜 나가게 된다고 할 수 있다.

앞의 세가지 예에 대하여

예 1 － 2 : $S = \{HH, HT, TH, TT\}$, $\mathcal{F} = 2^S = \{A \mid A \subset S\}$ 그리고 $A \epsilon \mathcal{F}$에 대하여 $P(A) = \sum_{W \epsilon A} P\{w\}$라고 두자. 그러면 $P\{w_j\} = \frac{1}{4}$, $j = 1, 2, 3, 4$ 즉 예 1 － 2는 고전정의 ①에서의 equally likely의 槪念을 나타낸다. 確率 $\frac{1}{4}$이란 4개중 1개를 맞춘다는 뜻이 아니라 맞출 가능성의 크기가 1이라는 전체양에서 $\frac{1}{4}$의 양으로 표시될 수 있음을 나타낸 것 뿐이다.

예 2 － 2 : $S = \{H, TH, TTH, \cdots\cdots\}$에 대하여 $R_x = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$으로 표본공간을 변환했을때 $\& = 2^{R_x} = \{A \mid A \subset R_x\}$

는 하나의 σ 一體를 구성한다.

이제 모든 $i \epsilon R_x$ 에 대하여

$P(\{i\}) = (\frac{1}{2})^i$, 단 $i = 1, 2, \cdots\cdots$, 로 정의하자.

그러면 V_i, $P(\{i\}) = (\frac{1}{2})^i \geq 0$, $P(R_x) = P(\sum_{i=1}^{\infty} k) = \sum_i (\frac{1}{2})^i$

$= \frac{1}{2} / 1 - \frac{1}{2} = 1$

한편, $A, B \epsilon$ &에 대하여 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 따라서

따라서 $(R_x$, &, $P)$는 하나의 확률공간이다.

예 3 - 2 : $S = \{ x \mid 0 \leq x < 2\pi r$: r은 원의 반경 $\}$에서 & =

$[0, 2\pi r)$의 부분집합으로 이루어진 Borel 一體로, $P[0, 2\pi a)$

$= \frac{a}{2\pi r}$ (a는 호의 길이)로 정의하면 (S, &, P)는 연속 표본공간상에서의 한 확률공간이다.

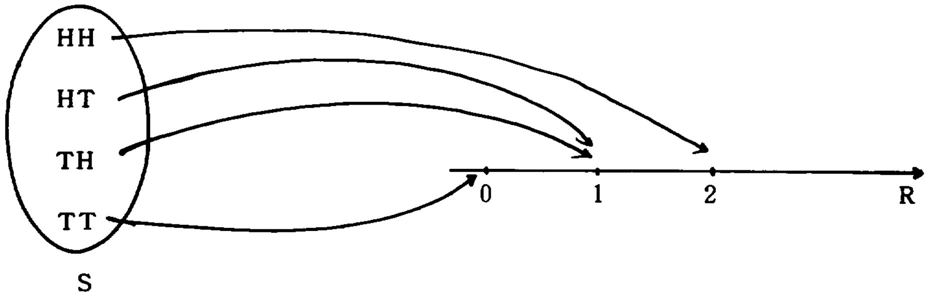
Ⅲ. 確率變數 (Random variable)

Ⅰ. 確率變數와 事件

어떤 確率實驗에 대한 確率모델은 標本空間에서의 元素에 의하여 特定化되어졌다고 할 수 있다. 즉 어떤 事件이 發生하는가, 아닌가는 관찰된 特定한 結果와 관련지어지는 지를 주시함으로써 決定된다. 대부분의 경우 관찰되는 特定値들은 數集合에서의 數値들로 表示되지만 그렇치 않게 되는 경우도 허다하다. 예를 들어 예 2에서와 같이 標本空間이 { HH, HT, TH, TT }로 주어지는 경우 또는 표본추출 등에서의 數値 아닌 結果를 그 元素로 하는 標本空間은 대단히 많다. 이 경우 우리는 그러한 標本空間에 의해서는 確率配定은 可能하지만 이러한 모집단에 의한 數値的 適應, 예를 들어 平均이나 分散 등 確率函數에 의한 數學的 特性을 硏究함이 불가능해진다. 따라서 이러한 標本空間을 數値化된 標本空間으로 變化시킴으로써 새로운 數値化된 현상에 대한 사고가 確率理論에서의 보다 강력한 解釋的 機能을 可能하도록 만들고 있다고 하겠다. 예를 들어, 標本空間이 { 男, 女 }로 되어 있을 경우 함수 X를 X(男)= 1 , X(女)= 0 으로 대응시킴으로써 標本空間 S를 X = { 1 , 0 }인 수치로 變化시킬 수 있다.

예 2에서 S = { HH, HT, TH, TT }인 때 함수 X를 나타나는 표면의 갯수라고 定義한다면 그 치역공간 R_x = { 0 , 1 , 2 }이고 따라서

X는 새로운 數値化된 標本空間을 유도한 셈이 된다.



즉 確率變數(Random Variable)란 標本空間上에서 定義된 실가함수이다. 여기서 Random이란 말이 사용된 이유는 特定한 단순사건이 나타날 것인지 어떤지, 그리고 함수값 X가 무엇인지를 미리 알 수 없기 때문에 쓰여진 것이다. 또 X는 여기서 분명히 함수임에도 變數라고 불리어졌다. 나중에 밝혀지겠지만 確率變數와 實價函數와의 근본적인 차이점은 관련된 分布의 차이 때문이며 X의 함수 g(X)에 대하여 X는 變數의 役割을 하기 때문에 “函數의 函數”라는 명칭을 피하기 위하여서도 確率變數라 부름이 적절한 것 같다. 確率變數를 처리함에 있어서는 確率이라는 진술을 할 수 있어야 한다. 그것은 확률변수 택하는 함수값의 치역을 안다고 하여 충분할 수는 없다. 주어지는 확률변수의 값들의 集合이 어떤 實數의 정해진 구간 가운데 있게 될 確率에 대하여 말할 수 있도록 함이 必要하다.

이제 標本空間 S의 각 元素 ξ에 실수 R의 부분집합 T의 한 원인 수t가 대응하는 함수 X를 생각하자. 즉, $X(\xi)=t$, $\xi \in S$,

$t \in T$이다.

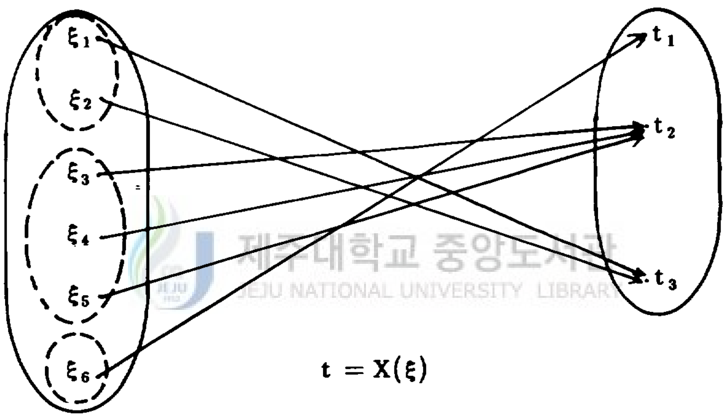
만일 ξ들의 집합을 $E \subset S$라 하고 E와 T의 부분집합인 t집합 M과의 대응관계를 생각한다면 E와 M집합은 集合 對 集合의 전단사 관계로서 $X^{-1}(M) = \{ \xi \mid X(\xi) \in M \}$이고 $E = M$이 되는 역함수 $X^{-1}(\cdot)$가 존재한다. 즉 $D = \{ \xi_i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, $T = \{ t_1, t_2, t_3 \}$이고 그림과 같은 대응 X가 주어진다면,

$X^{-1}(t_1) = \{ \xi_1, \xi_2 \}$, $X^{-1}(t_2) = \{ \xi_3, \xi_4, \xi_5 \}$, $X^{-1}(t_3) = \{ \xi_6 \}$

이고 만일 $M = \{ t_1, t_2, t_3 \}$이면 $X^{-1} = \{ \xi_i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

이다.

$\xi \in D$



$t \in T$

逆函數 $X^{-1}(\cdot)$에는 다음과 같은 집합연산이 보존되고 있다는 것은 중요한 사실이 아닐 수 없다.

정리 3. X를 집합 S에서 T로의 함수라 하고 T에 포함되는 모든 부분집합 M에 대하여 $X^{-1}(M) = \{ \xi \in S \mid X(\xi) \in M \}$ ……… @ 라고 定義하자. 그러면 T의 부분집합들인 M_1, M_2, M_3, ………에 대하여

1) $X^{-1}(\bigcup_i M_i) = \bigcup_i X^{-1}(M_i)$

2) $X^{-1}(\bigcap_i M_i) = \bigcap_i X^{-1}(M_i)$

3) $X^{-1}(M^c) = \{X^{-1}(M)\}^c$

4) $M_i \cap M_j = \phi \Rightarrow X^{-1}(M_i) \cap X^{-1}(M_j) = \phi$

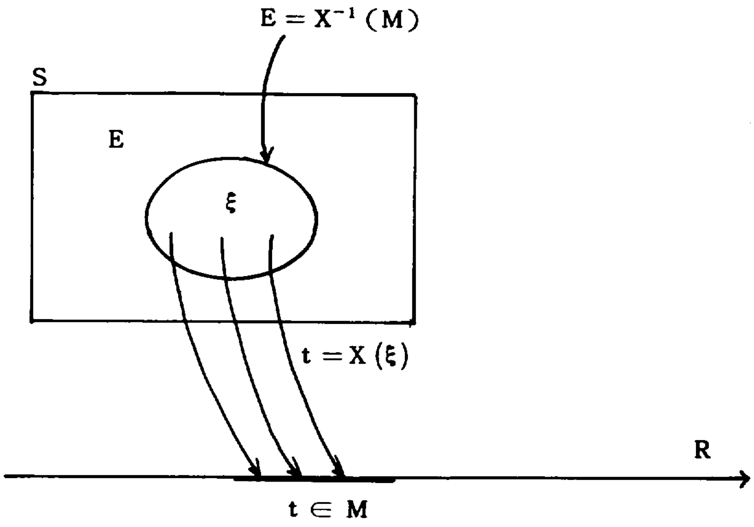
5) $M_i \subset M_j \Rightarrow X^{-1}(M_i) \subset X^{-1}(M_j)$

1), 2)은 T의 부분집합들의 合(또는 積)의 逆의 image는 T의 각 부분집합들의 逆의 image의 合(또는 積)임을 나타내고 3)은 T의 부분집합 M의 여집합의 逆의 image는 M의 逆의 image의 여집합임을 나타내고 있다. 4)와 5)는 T의 부분집합이 서로소일 때 그의 逆의 image도 역시 서로소이며 또 포함관계도 보존됨을 意味한다.

$X(\xi)$가 特定集合 M에 속한다는 條件은 ξ가 標本空間의 대응하는 부분집합 $X^{-1}(M)$에 속한다는 條件과 같다.

만일 M이 T집합의 적당한 집합족에 속한다면 $X^{-1}(M)$은 事件이 되도록 기대되어질 수 있으며, 따라서 確率配定이 可能하게 된다. 즉 $E = X^{-1}(M)$의 점들이 집합M에 대응된다면,「원소 ξ가 집합(즉 사건) E에 속한다. $\Longleftrightarrow$ $X(\xi) = t$는 집합 M내의 한 실수이다」임을

意味한다.



$$\xi \in E \iff X(\xi) \in M$$

다시 말하여「사건 E가 발생한다. $\iff$ 確率變數 $X(\cdot)$의 값이 數集合 M에 속한다」와 같은 의미이다.

Ⅱ. 確率變數와 可測函數

앞에서 可測空間에 대하여 언급되었다. 이제 (X, A)를 可測空間, A를 $\mathcal{A}$에 속하는 X의 한 부분집합이라고 하자.

함수 $f : A \to [-\infty, \infty]$가 주어질 때

1) $t \in R$에 대하여 $\{ x \in A \mid f(x) \leq t \} \in \mathcal{A}$

2) $t \in R$에 대하여 $\{ x \in A \mid f(x) < t \} \in \mathcal{A}$

예 1 − 3 . 標本空間 $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$, $\mathcal{F} = 2^S = \{ A \mid A \subset S \}$ 라 하고 X를 X(w) = w안에 있는 H의 갯수 로 정의하자.

그러면 $X(HH) = 2$, $X(HT) = X(TH) = 1$, $X(TT) = 0$

따라서
$$X^{-1}[-\infty, x] = \begin{cases} \phi & : x < 0 \\ \{TT\} & : 0 \le x < 1 \\ \{TT, HT, TH\} & : 1 \le x < 2 \\ S & : 2 \le x \end{cases}$$

이고 임의의 x에 대하여 $E_x = X^{-1}[-\infty, x]$는 $\mathcal{F}$의 元 즉 사건이므로 한 확률변수이다.

다음의 예는 實數의 부분집합인 모든 구간은 사건이 됨을 보이고 있다.

예 8 . X(·)를 임의의 확률변수이라고 하자.

$E_t = \{ \xi \mid X(\xi) \le t \}$로 두면 다음 X(·)에 대하여 정의된 집합들은 사건들이다.

① $\{ \xi \mid X(\xi) \in (a, b] \} = E_t E_a^c \in \mathcal{F}$

($\Rightarrow$) $X(\xi) \in (a, b] \Leftrightarrow X(\xi) \le b$ and $X(\xi) > a$

$\Rightarrow \{ \xi \mid X(\xi) \in (a, b] \} = \{ \xi \mid X(\xi) \le b \} \cap \{ \xi \mid X(\xi) > a \}$

그런데 $\{ \xi \mid X(\xi) > a \} = \{ \xi \mid X(\xi) \le a \}^c = E_a^c$

② $\{ \xi \mid X(\xi) \in [a, b] \} \in \mathcal{F}$

($\Rightarrow$) $t \ge a \Leftrightarrow t > a - \frac{1}{n}$ (n은 임의의 양의 정수)이므로

$\{ \xi \mid X(\xi) \in [a, b] \} = \{ \xi \mid a \le X(\xi) \le b \}$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \xi \mid a - \frac{1}{n} < X(\xi) \le b \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_b E_{a-\frac{1}{n}}^c \in \mathcal{F}$$

3) $t \in R$에 대하여 $\{ x \in A \mid f(x) \geq t \} \in \mathcal{A}$

4) $t \in R$에 대하여 $\{ x \in A \mid f(x) > t \} \in \mathcal{A}$

일 때 이들 條件들은 모두 동치이다.

왜냐하면 $\{ x \in A \mid f(x) < t \} = \bigcup_n \{ x \in A \mid f(x) \leq t - \frac{1}{n} \} : n \in N$ 으로 表示될 수 있기 때문이다.

정의 7. $(X, \mathcal{A})$를 可測空間, 그리고 $A \subset X \in \mathcal{A}$라 하자.

만일 $f : A \to [-\infty, \infty]$일 때 $\forall t \in R$에 대하여 $\{ x \in A \mid f(x) \leq t \} \in \mathcal{A}$일 때 함수 f를 $\mathcal{A}$에 대한 可測函數 또는 $\mathcal{A}$ - measurable 라고 한다.

만일 $X = R$이면 f를 Borel 체 $\mathcal{B}(R^1)$에 관한 가측함수 또는 Borel 可測 (Borel measurable)라 한다. 다시 말하여 함수 f가 可測이라는 것은 $f : S \to T$에서 ε을 S의 σ -體라고 할 때 각 Borel 집합 M에 대하여 $f^{-1}(M) \in \varepsilon$ 임을 뜻하는 것이다.

한편 앞에서 우리는 t 집합 M이 그의 역상 $X^{-1}(M)$이 事件이 되기를 기대할 수 있는 그러한 집합족에 속해야 한다고 언급했다. 다시 말하여 要求되는 t 집합의 집합족은 수직선상의 Borel σ -體 $\mathcal{B}(R)$이면 되는 것이다.

따라서 만일 t 집합 M에 대하여 $M \in \mathcal{B}(R^1)$이기만 하면 $X^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ (단 $\mathcal{F}$는 사건들의 class 즉 S의 부분집합의 σ -體이다)가 성립하게 된다.

정리 4. 만일 함수 $X(\cdot)$가 모든 實數 t에 대하여 $\{ \xi \mid X(\xi) \leq t \}$가

한 사건이 되는 그러한 함수라면 $X^{-1}(M)$은 각 Borel 집합 M에 대하여 사건이 된다.

정의 7. S를 標本空間, F를 S상에서의 σ-體라 하자.

함수 $X : S \to R$에 대하여

1) $X(\cdot)$가 확률변수라는 것은 임의의 $t \in R$에 대하여 $\{ \xi \mid X(\xi) \le t \} \in F$, 즉 $\{ \xi \mid X(\xi) \le t \}$는 사건일 때를 말한다.

또는 2) 모든 구간 $I \in R$에 대하여 $\{ \xi \mid X(\xi) \in I \} \in F$일 때이다.

정의와 정리에서 확률변수 X는 可測함수의 한 특수한 경우로 밝혀졌다.

예 7. $I_E(\cdot)$를 사건 E에 대한 지표함수라 하자.

즉 $\{ \xi \mid I_E(\xi) = 1 \} = E$

$\{ \xi \mid I_E(\xi) = 0 \} = E^c$

따라서 $\{ \xi \mid I_E(\xi) \in M \} = \begin{cases} \phi : 0 \notin M,\ 1 \in M \\ E : 0 \notin M,\ 1 \in M \\ E^c : 0 \in M,\ 1 \notin M \\ S : 0 \in M,\ 1 \in M \end{cases}$

또는 $\{ \xi \mid I_E(\xi) \le t \} = \begin{cases} \phi : t < 0 \\ E^c : 0 \le t < 1 \\ S : t \ge 1 \end{cases}$

따라서 $I_E^{-1}(M)$은 임의의 t집합 M에 대하여 사건이므로 $I_E(\cdot)$는 확률변수이다.

③ $\{\ \xi \mid X(\xi) = a\ \} = \{\ \xi \mid X(\xi) \in [a, a] = \cap E_a E^c_{a-\frac{1}{n}} \in F$

④ $\{\ \xi \mid X(\xi) = -\infty\ \} = \cap E_{-n} \in F$

⑤ $\{\ \xi \mid X(\xi) = \infty\ \} = \cap E^c_n \in F$

이제 X(·)를 수직선상의 Borel 집합의 집합족 $B(R^1)$상에서의 확률변수라고 하자. 그러면 σ−體 $\varepsilon(X) = X^{-1}(B(R^1))$은 X(·)에 의해 생성된 σ−體라 불리워진다.

따라서 분명히 X(·)가 確率變數일 필요충분조건은 $\varepsilon(X) \subset F$가 된다. 한편 Borel 집합의 역상이 사건의 어떤 subclass에 포함되는지를 안다는 것은 중요하다.

정의 8. 만일 ε_σ를 사건의 σ−體라고 하자. 즉 사건의 집합족 ε의 sub σ−field이다. X(·)가 ε_0−축도가능이란 $\varepsilon(X) \subset \varepsilon_0$이고 확률변수 X(·)가 확률변수 Y(·)에 관하여 可測이라는 것은 $E(X) \in E(Y)$임을 말한다.

Ⅲ. 確率變數와 確率

함수로서 확률변수 X(·)는 標本空間 S상의 각 점 ξ를 수직선 R상의 점 t로 관련지었다. 우리는 이러한 대응관계에서 確率크기의 變換으로서 함수관계를 생각하자.

X(·)의 치역 내의 각 점 t에 대하여 그 주어진 t에 대응하는 ξ의 집합의 크기 모두를 變換시킨다.

즉, 만일 M을 임의의 t의 집합, E를 M에 대응된 $(E = X^{-1}(M))$

S의 점들의 집합이라면 $E \subset S$에 관련된 確率크기는 $M \subset R$에 연관 되어져야 한다.

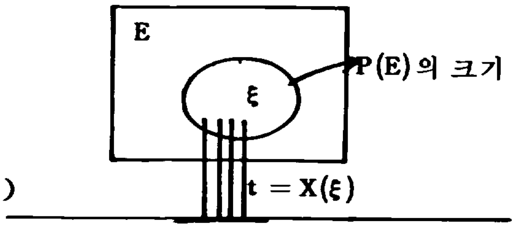
정리 5. M을 Borel 집합,

그리고 $P(\{\xi \mid X(\xi) \in M\})$

을 $P(X \in M)$으로 표기하자.

즉, $P(X \in M) = P(\{\xi \mid X(\xi) \in M\})$

$= P[X^{-1}(M)]$



$P(E) = P_x(M)$의 크기

각 Borel set M에 대하여 $P_x(M) = P(X^{-1}(M))$으로 정리하면 $X^{-1}(R) = S$ 또 $X^{-1}(\bigcup_i M_i) = \bigcup X^{-1}(M_i)$ (단 $X_i \cap X_j = \phi$) 이므로

$$\begin{cases} 1)\ P_x(R) = 1 \\ 2)\ P_x(M) \geq 0 \\ 3)\ P_x(\bigcup_i M_i) = \sum_{i=1} P_x(M_i) \end{cases}$$

가 성립한다. 다시 말하여 $(S, B(R^1), P_x(\cdot))$는 하나의 確率空間을 이루고 이 때 $P_x(\cdot)$를 확률변수 $X(\cdot)$에 의해 유도된 確率測度라 한다.

예 9. (S, *F*, P)를 임의의 確率空間, E를 임의의 事件, $I_E(\cdot)$를 E에 대한 지표함수라 하자.

1) 만일 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$을 서로 배반인 사건들이라 하고 確率變數 X를

$$X(\xi) = \sum_{k=1}^{n} k I_{E_k}(\xi)$$

로 두면 나타나는 사건 A_i 들의 지표가 계산된다.

따라서 $P_x(X=k) = P(\{\xi \mid X(\xi)=k\})$

$$= P(\{\xi \mid I_{E_k}(\xi)=1\})$$

$$= P(E_k) \quad \text{단} \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

이다.

2) $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$이라 할 때 k번째 표면에 수 k가 표기된 n개의 면을 가진 균형잡힌 주사위를 생각하자.

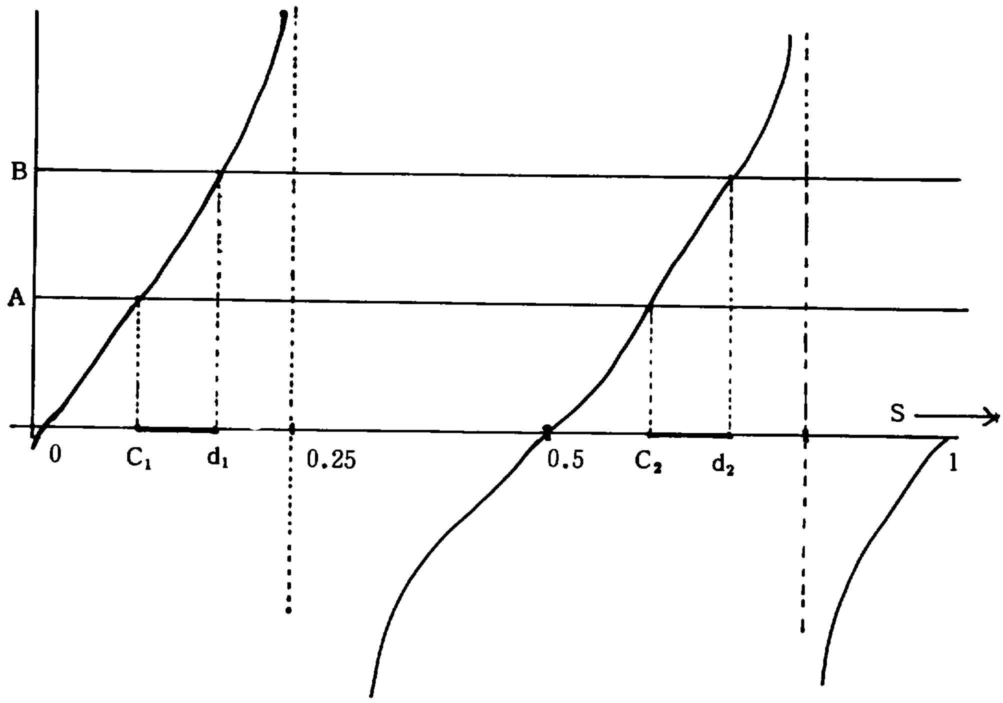
표면 k가 나타나는 사건을 E_k, 그리고 確率變數 X를

$$X = \sum_{k=1}^{n} kI_{E_k} \quad \text{로 두면}$$

$P_x(X=k) = P(E_k)$이고 $P_x(X=k) = \frac{1}{n}$로 두면 equally likely 로서의 정의 1을 確率變數에 의해 유도한 確率測度로 나타낸 경우가 된다.

예 10. 단위구간 $S = [0, 1]$로부터 임의추출한 한 점이 구간 $I \subset S$에 놓이게 될 確率 $P(I) = I$의 길이로 정의된 實驗을 생각해 보자. $s \in S$에 대해서 $X(S) = \text{Tan}\,2\pi S$로 정의하면 $0 < a < b < \infty$인 a, b에 대하여 $a < X \le b$일 사건 ; $\{s \in S \mid a < X(s) \le b\} = (C_1, d_1] \cup (C_2, d_2]$이고 정의에 의해

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}\text{Tan}^{-1} a, \quad d_1 = \frac{1}{2\pi}\text{Tan}^{-1} b, \text{ 또 } C_2 = C_1 + \frac{1}{2}, \quad d_2 = C_2 + \frac{1}{2}$$



따라서 $P_x(a < X \le b) = P((C_1, d_1]) + P((C_2, d_2])$

$$= (d_1 - C_1) + (d_2 - C_2)$$

$$= \frac{1}{\pi}(\mathrm{Tan}^{-1} b - \mathrm{Tan}^{-1} a) \qquad (\text{단 } a < b)$$

이 때 $M = X(0, 1] = [0, 2\pi)$로 變換된다.

$P_x(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$로 f를 정의하면 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$;

$-\infty < x < \infty$인 Cauchy 밀도함수를 유도한다.

Ⅳ. 指導上의 유의점

確率이 우연성만에서 생기는 結果인 어떤 事件의 確實性에 관한 理論으로서 20세기 들어와서 理論的인 구성하에서 數學的 model 에 의해 推象化된 순수 現代數學의 한 분야임을 앞에서 밝혔다.

高等學校에서의 確率指導는 주로 數學的 確率을 中心으로 確率의 概念과 통계에의 응용방법을 理解시키는 한도내에서 이루어지고 있는 실정인바, 무한집합의 豫算, 가산가법상, 집합함수, Lebesque 적분등 指導上의 제약을 감수할 수 밖에 없다고 하더라도, 그 순수수학의 理論性과 概念에 대한 적용범위의 확대 및 多様한 사용력의 신장을 위하여서라도 Kolmogorov의 概念은 제한적이나마 지도되어야 한다고 본다. 기초개념의 정립과 確率의 뜻을 理解한다는 입장에서,

1. 確率實驗에 대한 직관적인 理解와 그에 대한 數學的 모델의 構成을 自然스럽게 지도함으로서 數學의 推像化에 대한 學門的 수월성을 講調한다. 實生活과 推像化 概念의 혼동과 착오가 배제되도록 特히 주의되어야 할 것이다.

2. 確率實驗이 分明하게 서술되도록 유의하면서 표본空間에 대한 確實한 定義를 주지시켜야 할 것이다. 特히 同一한 實驗에 대하여 定義되는 표본공간이 유일하지 않다는 사고의 指導는 確率배경에 따른 혼란을 제거시키는데 알맞은 指導方法이 될 것으로 본다. 한편 確率指導의 擴長을 爲하여 그 표본공간을 무한의 경우로 擴長함이

指導上의 순리이다. 의도적 지도보다는 본문 예2－1과 예3의 경우처럼 연속공간으로 自然스럽게 擴長함으로서 무한에 대한 저항감과 그 연산에 대한 의구심을 自然스럽게 해소시키는데 주력해야 하리라고 본다.

3. 事件을 理解시킴에 있어 高校과정일지라도 체의 指導가 가능하며 또한 요청된다고 본다. 즉 주어진 표본공간에 대하여 그 부분집합으로 이루어진 집합족이 합집합과 곱집합 그리고 여집합에 대하여 닫혀있음을 주지한다. 이 集合足의 임의의 원을 事件으로 指導함으로서 事件 成立果定과 形成되는 모든 事件에 대한 理解력을 높일 수 있다. 표본공간이 유한인 경우 모든 부분집합으로 이루어진 체의 構成을 생각하고 무한일 경우에는 유한개의 構間과 특수한 點으로 形成되는 부분집합으로 유도한 뒤, 역시 유한공간에서 처럼 하나의 체인 집합족을 構成하도록 한다. 事件이 표본공간의 원소가 아니라 하나의 집합으로 이루어진다는 것이 自然스럽게 理解될 수 있을 것이다.

4. 집합함수 및 표본공간 S의 모든 부분집합으로 이루어진 F를 정의역으로 하는 함수 P가,

$P(S) = 1$

모든 $A \in F$에 대해 $P(A) \geq 0$ 그리고 서로 배반인 임의의 두

사건 A, B에 대해 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

를 만족하는 집합함수일 때 P를 사건 A의 確率로 定義한다.

이 정의가 P(A)의 結果와는 무관하다는 사실과 함께 표본공간의

모든 원소에 Weight를 줌으로서 事件 A에 배정된 Weight의 합을 그 事件의 確率로 하는 equally likely가 아닌 경우에서 응용에도 적절히 이용될 수 있음을 상기시킨다. 연속형 표본공간에 있어서는 確率측도와 관련된 분포함수의 존재성에 理解를 주력시키고 연속함수인 경우만을 다룸으로서 그 측도를 Riemann 적분으로 한정한다.

5. 확률변수의 理解를 爲하여 가측함수 및 함수 X에 의한 Borel Set의 역함수가 체에 속하여야 한다는 정의의 지도는 사실상 불가능하게 보인다.

그러나 표본공간 S상에서 정의된 함수 X와 임의의 $B \subset R_x$에 대하여 $A = \{ \xi \mid X(\xi) \in B \}$일때 A와 B를 동일한 사건으로 정의하고 $P(A) = P(B)$를 규정함으로서 표본공간 S를 수치화된 새로운 표본공간 R_X로 변환한 확률변수의 유용성은 충분히 강조되어야 할 것이다.
高校과정에서는 1차의 선형변환 정도로 확률변수의 함수를 변환시킬 수 있는 능력의 배양으로 충분하리라 본다.

參 考 文 獻

Bhattacharyya, G.K & Johnson. R.A. 1977. Statistical Concepts and Methods. John Wiley & Sons, Inc.

Cohn, D.L. 1980. Measure Theory BIRKHÄUSER.

Halmos, P.R. 1974. Measure Theory. Springer - Verlag New York, Inc.

Pfiffer. V.K. 1978. Concepts of Probability Theory. Dover Publication Inc. New York.

Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc.

Woodroofe, M. 1975. Probability With Applications. McGraw - Hill, Inc.

金應泰, 金年植, 1984. 數學教育 一數材論一 二友出版社.

金益贊, 1985. 確率概念의 理解와 指導를 爲하여 濟州大 師大. 數學教育 第2巻.

朴漢植, 具光祖, 1986. 教學科 教授法. 教學社.

우정호, 1985. 高等學校 數學Ⅱ－2. 지학사.

趙泰根, 1981. 實解析學. 塔出版社.