碩士學位 論文

극한 개념을 사용하지 않는 멱급수의 도함수

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

李 나 라

2013年 8月

석사학위 논문

극한 개념을 사용하지 않는 멱급수의 도함수

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

이 나 라

2013년 8월

극한 개념을 사용하지 않는 멱급수의 도함수

指導教授 高 鳳 秀

李 나 라

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

2013年 8月

李나라의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

審查委員長 ________________ 印

委 員 ________________ 印

委 員 ________________ 印

濟州大學校 教育大學院

2013 年 8月

목 차

<국문초록>

극한개념을 사용하지 않는 멱급수의 도함수

이 나 라

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 봉 수

차수가 무한대인 다항식으로 생각할 수 있는 멱급수에 대한 도함수의 정의를 극한 개념을 사용하지 않고 유도한다. 그 정의로부터 단순히 대수 방정식의 전개를 이용한 인수분해 및 중근의 성질 등 중학교 수학내용의 지식들만 가지고 초월 함수들에 대한 도함수를 유도하여 극한을 사용하여 얻을 수 있는 도함수와 비교하여 같음을 증명한다.

I. 서　　론

고등학교 수학교육에 있어서 중심이 되는 미분법은 극한개념을 도입하여 그 이론을 전개하고 있기 때문에 학생들이 미분법을 이해하기 위해서는 먼저 극한개념에 대한 학습이 선행이 되어야 한다. 그러나 교육현장에서 수학교과 이외의 일부 다른 교과 예를 들면, 우리 생활에서 거리와 시간의 관계를 따지는 문제를 포함한 거의 대부분의 물리 문제는 모두 미적분에 관한 문제가 되었고, 화학에서도 사용된다. 이를 테면 두 물질의 화학 반응률이나 기체의 압축률 등은 모두 미적분을 이용하여 해결하는 문제이다. 생물학에서도 미적분은 예외 없이 이용이 되고 있다. 어떤 생물체의 성장률이나 인간의 몸에 흐르는 혈액의 속도와 혈압 등은 모두 미적분을 이용하여 그 변화를 알 수 있는데 이것은 수학교과에서 미분법을 학습하기 전에 미분법이 필요로 하는 경우가 된다. 또한 물리학, 생물학 등과 같은 자연과학 분야뿐만 아니라, 공학 분야, 그리고 경제학, 심리학을 비롯한 사회과학 분야에도 널리 사용이 되고 있다. 경제학에서는 어떤 상품의 한계비용을 계산한다든지 한계이익, 수요함수, 소득함수, 이익함수의 최대와 최소 등을 구하는데 반드시 필요한 것이 미적분이고 심리학에서는 학습곡선을 이용하여 성취에 대한 호전비율을 구하고자 하는 데에도 사용이 되는 기본적인 도구적 지식으로써 이들 분야에 입문하기 위한 필수 과정이 되어 있지만 대부분의 인문계열 학생들은 극한개념에 대한 학습이 제대로 이루어 지지 않은 채 미분법을 이용해야 하는 어려움이 있고, 이해를 하지 못 하고 스캠프의 도구적 이해에 따라 기계적인 절차로 문제를 푸는 것에만 익숙해져 있다. 따라서 극한개념을 사용하지 않는 미분법 연구는 연구대상으로 충분한 가치가 있다.

본 논문의 연구의 목적은 극한개념을 사용하지 않는 다항식의 도함수 정의와 성질들의 개념을 포함하고 일반화 하는 연구로서, 차수가 무한대인 다항식으로 생각할 수 있는 멱급수들 까지 확장하는데 있다. 멱급수에 대한 도함수는 극한개념을 도입하지 않고 단순히 대수 방정식의 전개를 이용한 인수분해 및 중근의 성질 등 중학교 수학내용의 지식들만 가지고 유도한다.

본 논문의 본론 제 1부에서는 다항식의 도함수들을 극한개념 없이 연구된 선행연구 결과들을 요약한다. 본 논문의 제 2부에서는 선행 연구의 결과를 토대로 하여 멱급수의 정의 및 도함수, 간단한 초월 함수들에 대한 미분공식을 유도하며 그 결과들은 극한을 사용하여 얻을 수 있는 미분공식들의 결과들과 같음을 증명한다.

Ⅱ. 본 론

1. 제 1 부 다항식의 도함수 및 그 성질

1부에서 언급되는 다항식에 대한 도함수의 정의 및 정리들은 논문 “극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의 및 성질들의 연구”(참고문헌2)에서 유도 및 증명되었다.

정의 1-1. $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 방정식 $f(x)=0$가 $x=x_0$에서 중근을 갖는다는 의미는

$$f(x)=(x-x_0)^n\,Q(x)\,(n\geq 2\text{인 자연수})$$

의 형태로 바꿀 수 있다는 것이다. 여기서 $Q(x)$는 다항식이다.

정의 1-2. $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 방정식

$$f(x)-ax-b=0$$

가 $x=x_0$에서 중근을 갖도록 하는 상수 a,b가 존재하면, “함수 $y=f(x)$는 $x=x_0$에서 미분가능하다”고 하며 “a를 $y=f(x)$의 $x=x_0$에서 변화율”이라고 하고 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$a=f'(x_0),\quad a=y'_{x=x_0},\quad a=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$$

정의 1-3. 상수함수 $y=f(x)=c$ 와 일차함수 $y=g(x)=ax+b$들에 관한 도함수는 $f'(x_0)=0,\ g'(x_0)=a$ 로 정의한다.

정리 1-1. 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능하면

[1] $\{C\cdot f(x_0)\}' = Cf'(x_0)$ (C : 상수)

[2] $\{f(x_0)\pm g(x_0)\}' = f'(x_0)\pm g'(x_0)$ (복호동순)

[3] $\{f(x_0)\cdot x\}' = f'(x_0)\cdot x + f(x_0)$

계. 함수 $f(x)$가 미분가능 하다고 하면

① $(x^2)' = (x\cdot x)'$

$=(x)'x + x$ ([3]에 의해)

$=2x$

$(x^3)' = (x^2\cdot x)'$

$=(x^2)'x + x^2$ ([3]에 의해)

$=3x^2$

② 임의의 다항함수

$f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$에 대해

$f'(x)=(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)'$

([2]에 의해)

$=(a_0)' + a_1(x)' + a_2(x^2)' + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1})' + a_n(x^n)'$

([1]에 의해)

$=a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$

위의 (계)로부터 임의의 다항함수는 미분가능하고 그 도함수는 쉽게 계산된다.

2. 제 2 부 멱급수의 도함수 및 그 성질

제 2부에서는 차수가 무한대인 다항식으로 생각할 수 있는 멱급수들에 대한 도함수의 개념을 극한개념을 사용하지 않고, 단지 대수방정식의 중근의 개념을 이용하여 도함수를 정의하고 초월함수에 대한 도함수를 얻는다.

정의 2-1. $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$이 상수일 때.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_0 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

을 x의 멱급수라고 한다. 또한,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots$$

을 a 에 관한 멱급수라고 한다.

정의 2-2. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 가 x_0에서 미분가능하다는 의미는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 멱급수 $Q(x)$가 유일하게 존재하며 다음 조건을 만족하는 경우라고 정의한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - ax - b = (x - x_0)^2 Q(x)$$

이때, a을 $x = x_0$에서 멱급수의 도함수라 하고

$$a = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \right]'$$

으로 표시한다.

정리 2-1. 다항식 $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ 이 점 $x=x_0$에서 미분 가능할 때,

도함수 $a=\sum_{k=0}^{n} k\, c_k\, x_0^{k-1}$, 상수 $b=-\sum_{k=0}^{n}(k-1)c_k x_0^k$이다.

또한, 다항식 $Q(x)=\sum_{k=0}^{n-2} d_k x^k$ 이라 두면

$d_0=\sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2}$, $d_1=\sum_{i=3}^{n}(i-2)c_i x_0^{i-3}$,⋯, $d_{n-2}=\sum_{i=n}^{n}(i-(n-1))c_i x_0^{i-n}$

으로 나타낼 수 있다.

증명. 다항식 $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$가 미분가능 함을 보이기 위하여

(1)
$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 한 구간에서 정의된 $Q(x)$을 찾는다. $Q(x)=\sum_{k=0}^{n-2} d_k x^k$ 이라 두면,

(2)
$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k - ax - b = (x-x_0)^2 \sum_{k=0}^{n-2} d_k x^k$$

으로 나타낼 수 있다.

(2)식의 양변을 전개하고 동류항으로 정리하여 나타내면

$(c_0-b)+(c_1-a)x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$

$=d_0x_0^2+(d_1x_0^2-2d_0x_0)x+\sum_{n=2}^{n-2}\left[(d_nx_0^2-2d_{n-1}x_0+d_{n-2})x^n\right]+(-2d_{n-2}x_0+d_{n-3})x^{n-1}+d_{n-2}x^n$

따라서 위 식의 양변의 계수를 비교하여 보면

$$c_0 - b = d_0 x_0^2$$

$$c_1 - a = d_1 x_0^2 - 2d_0 x_0$$

그리고,

$$\begin{aligned}
c_2 &= d_2 x_0^2 - 2d_1 x_0 + d_0 \\
&\vdots \\
c_{n-2} &= d_{n-2} x_0^2 - 2d_{n-3} x_0 + d_{n-4} \\
c_{n-1} &= \qquad\quad -2d_{n-2} x_0 + d_{n-3} \\
c_n &= \qquad\qquad\qquad\quad d_{n-2}
\end{aligned}$$

즉, 위의 식들을 이항하면

$$d_{n-2} = c_n = \sum_{i=n}^{n} (i-(n-1)) c_i x_0^{i-n}$$

$$d_{n-3} = c_{n-1} + 2c_n x_0 = \sum_{i=n-1}^{n} (i-(n-2)) c_i x_0^{i-(n-1)}$$

$$d_{n-4} = c_{n-2} + 2c_{n-1} x_0 + 3c_n x_0^2 = \sum_{i=n-2}^{n} (i-(n-3)) c_i x_0^{i-(n-2)}$$

$$\vdots$$

$$d_2 = c_4 + 2c_5 x_0 + 3c_6 x_0^2 + \cdots + (n-3) c_n x_0^{n-4} = \sum_{i=4}^{n} (i-3) c_i x_0^{i-4}$$

$$d_1 = c_3 + 2c_4 x_0 + 3c_5 x_0^2 + \cdots + (n-2) c_n x_0^{n-3} = \sum_{i=3}^{n} (i-2) c_i x_0^{i-3}$$

$$d_0 = c_2 + 2c_3 x_0 + 3c_4 x_0^2 + \cdots + (n-1) c_n x_0^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} (i-1) c_i x_0^{i-2}$$

으로 나타나는 것을 알 수 있다.

이 때, $a = c_1 - d_1 x_0^2 + 2d_0 x_0$ 이므로, $d_1 = \sum_{i=3}^{n}(i-2)c_i x_0^{i-3}$, $d_0 = \sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2}$ 을 대입을 하면,

$$\begin{aligned} a &= c_1 - (\sum_{i=3}^{n}(i-2)c_i x_0^{i-3})x_0^2 + 2(\sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2})x_0 \\ &= c_1 + 2c_2 x_0 + 3c_3 x_0^2 + 4c_4 x_0^3 + 5c_5 x_0^4 + \cdots + nc_n x_0^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} kc_k x_0^{k-1} \end{aligned}$$

또한, $b = c_0 - d_0 x_0^2$ 이므로 $d_0 = \sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2}$ 을 대입하여 나타내면,

$$\begin{aligned} b &= c_0 - (\sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2})x_0^2 \\ &= c_0 - c_2 x_0^2 - 2c_3 x_0^3 - 3c_4 x_0^4 - \cdots - (n-1)c_n x_0^n \\ &= -\sum_{k=0}^{n}(k-1)c_k x_0^k \end{aligned}$$

따라서 (1) 식에 $a, b, Q(x)$을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} c_k x^k - (\sum_{k=0}^{n} kc_k x_0^{k-1})x + \sum_{k=0}^{n}(k-1)c_k x_0^k \\ &= (x-x_0)^2\left[\sum_{i=2}^{n}(i-1)c_i x_0^{i-2} + (\sum_{i=3}^{n}(i-2)c_i x_0^{i-3})x + \cdots + (\sum_{i=n}^{n}(i-(n-1))c_i x_0^{i-n})x^{n-2}\right] \end{aligned}$$

가 성립 한다.

예제 2-1. $x = x_0$에서 미분가능 할 때, $\sum_{n=0}^{4} c_n x^n$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left[\sum_{n=0}^{4} c_n x^n\right]' = \sum_{n=0}^{4} nc_n x_0^{n-1}$$

풀이. 다항식 $\sum_{n=0}^{4} c_n x^n$가 미분가능 함을 보이기 위하여

(1) $$\sum_{n=0}^{4} c_n x^n - ax - b = (x - x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 한 구간에서 정의된 $Q(x)$을 찾는다.

정리 2-1에 의하여

$$a = \sum_{n=0}^{4} n\, c_n\, x_0^{n-1} = c_1 + 2c_2 x_0 + 3c_3 x_0^2 + 4c_4 x_0^3$$

$$b = -\sum_{n=0}^{4} (n-1) c_n x_0^n = c_0 - c_2 x_0^2 - 2c_3 x_0^3 - 3c_4 x_0^4$$

임을 알 수 있다.

또한, $Q(x) = \sum_{n=0}^{2} d_n x^n$ 이라 두면

$$d_0 = \sum_{i=2}^{4} (i-1) c_i x_0^{i-2} = c_2 + 2c_3 x_0 + 3c_4 x_0^2$$

$$d_1 = \sum_{i=3}^{4} (i-2) c_i x_0^{i-3} = c_3 + 2c_4 x_0$$

$$d_2 = \sum_{i=4}^{4} (i-3) c_i x_0^{i-4} = c_4$$

으로 나타난다.

(1)식에 $a, b, Q(x)$을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{4} c_n x^n - \Big(\sum_{n=0}^{4} n\, c_n\, x_0^{n-1}\Big)x + \sum_{n=0}^{4} (n-1) c_n x_0^n \\ &= (x - x_0)^2 \left[\sum_{i=2}^{4} (i-1) c_i x_0^{i-2} + \Big(\sum_{i=3}^{4} (i-2) c_i x_0^{i-3}\Big)x + \Big(\sum_{i=4}^{4} (i-3) c_i x_0^{i-4}\Big)x^2\right]\end{aligned}$$

$$\therefore \left[\sum_{n=0}^{4} c_n x^n\right]' = \sum_{n=0}^{4} n c_n x_0^{n-1}$$

예제 2-2. $x=x_0$에서 미분가능 할 때, $\sum_{n=0}^{5} c_n x^n$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left[\sum_{n=0}^{5} c_n x^n\right]' = \sum_{n=0}^{5} n c_n x_0^{n-1}$$

풀이. 다항식 $\sum_{n=0}^{5} c_n x^n$가 미분가능 함을 보이기 위하여

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{5} c_n x^n - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 한 구간에서 정의된 $Q(x)$을 찾는다.

정리 2-1에 의하여

$$a = \sum_{n=0}^{5} n\, c_n\, x_0^{n-1} = c_1 + 2c_2 x_0 + 3c_3 x_0^2 + 4c_4 x_0^3 + 4c_5 x_0^4$$

$$b = -\sum_{n=0}^{5} (n-1) c_n x_0^n = c_0 - c_2 x_0^2 - 2c_3 x_0^3 - 3c_4 x_0^4 - 4c_5 x_0^5$$

임을 알 수 있다.

또한, $Q(x) = \sum_{n=0}^{3} d_n x^n$ 이라 두면

$$d_0 = \sum_{i=2}^{5} (i-1) c_i x_0^{i-2} = c_2 + 2c_3 x_0 + 3c_4 x_0^2 + 4c_5 x_0^3$$

$$d_1 = \sum_{i=3}^{5} (i-2) c_i x_0^{i-3} = c_3 + 2c_4 x_0 + 3c_5 x_0^2$$

$$d_2 = \sum_{i=4}^{5} (i-3) c_i x_0^{i-4} = c_4 + 2c_5 x_0$$

$$d_3 = \sum_{i=5}^{5} (i-4) c_i x_0^{i-5} = c_5$$

으로 나타난다.

(1)식에 $a, b, Q(x)$을 대입하여 정리하면

$$\sum_{n=0}^{5} c_n x^n - (\sum_{n=0}^{5} n\, c_n\, x_0^{n-1})x + \sum_{n=0}^{5}(n-1)c_n x_0^n$$
$$= (x-x_0)^2\left[\sum_{i=2}^{5}(i-1)c_i x_0^{i-2} + (\sum_{i=3}^{5}(i-2)c_i x_0^{i-3})x + (\sum_{i=4}^{5}(i-3)c_i x_0^{i-4})x^2 + (\sum_{i=5}^{5}(i-4)c_i x_0^{i-5})x^3\right]$$

$$\therefore \left[\sum_{n=0}^{5} c_n x^n\right]' = \sum_{n=0}^{5} n c_n x_0^{n-1}$$

정리 2-2. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ 이 점 $x = x_0$에서 미분 가능할 때,

도함수 $a = \sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n\, x_0^{n-1}$ 이고, $b = -\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_n x_0^n$이다.

또한 멱급수 $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ 라 하면,

$d_0 = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2}$, $d_1 = \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_k x_0^{k-3}$, $d_2 = \sum_{k=4}^{\infty}(k-3)c_k x_0^{k-4}$,

$d_3 = \sum_{k=5}^{\infty}(k-4)c_k x_0^{k-5}$, $\cdots$, $d_n = \sum_{k=n+2}^{\infty}(k-(n+1))c_k x_0^{k-(n+2)}$, $\cdots$으로 나타난다.

증명. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$가 미분가능 함을 보이기 위하여

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 한 구간에서 정의된 멱급수 $Q(x)$을 찾는다. $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$이라 두면,

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - ax - b = (x - x_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

으로 나타낼 수 있다.

(2)식의 양변을 전개하고 동류항으로 정리하여 나타내면

$$\begin{aligned}&(c_0 - b) + (c_1 - a)x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\ &= d_0 x_0^2 + (d_1 x_0^2 - 2d_0 x_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (d_n x_0^2 - 2d_{n-1} x_0 + d_{n-2}) x^n\end{aligned}$$

의 형태로 나타난다.

위 식에서 양변의 계수를 비교하여 나타내면

$$c_0 - b = d_0 x_0^2$$

$$c_1 - a = d_1 x_0^2 - 2d_0 x_0$$

$$c_n = d_n x_0^2 - 2d_{n-1} x_0 + d_{n-2} \ (n \geq 2)$$

수학적 귀납법에 의해서

ⅰ) n 인 경우

$$d_{n-2} = c_n - (d_n x_0^2 - 2d_{n-1} x_0)$$

$$d_{n-3} = c_{n-1} + 2c_n x_0 - (2d_n x_0^3 - 3d_{n-1} x_0^2)$$

$$d_{n-4} = c_{n-2} + 2c_{n-1} x_0 + 3c_n x_0^2 - (3d_n x_0^4 - 4d_{n-1} x_0^3)$$

$$\vdots$$

$$d_2 = c_4 + 2c_5 x_0 + 3c_6 x_0^2 + \cdots + (n-3)c_n x_0^{n-4} - \left[(n-3)d_n x_0^{n-2} - (n-2)d_{n-1} x_0^{n-3}\right]$$

$$d_1 = c_3 + 2c_4 x_0 + 3c_5 x_0^2 + \cdots + (n-2)c_n x_0^{n-3} - \left[(n-2)d_n x_0^{n-1} - (n-1)d_{n-1} x_0^{n-2}\right]$$

$$d_0 = c_2 + 2c_3 x_0 + 3c_4 x_0^2 + \cdots + (n-1)c_n x_0^{n-2} - \left[(n-1)d_n x_0^{n} - n d_{n-1} x_0^{n-1}\right]$$

ii) $n+1$ 인 경우

$d_{n-1} = c_{n+1} - (d_{n+1}x_0^2 - 2d_n x_0)$

$d_{n-2} = c_n + 2c_{n+1}x_0 - (2d_{n+1}x_0^3 - 3d_n x_0^2)$

$d_{n-3} = c_{n-1} + 2c_n x_0 + 3c_{n+1}x_0^2 - (3d_{n+1}x_0^4 - 4d_n x_0^3)$

$d_{n-4} = c_{n-2} + 2c_{n-1}x_0 + 3c_n x_0^2 + 4c_{n+1}x_0^3 - (4d_{n+1}x_0^5 - 5d_n x_0^4)$

$\vdots$

$d_2 = c_4 + 2c_5 x_0 + 3c_6 x_0^2 + \cdots + (n-2)c_{n+1}x_0^{n-3} - \left[(n-2)d_{n+1}x_0^{n-1} - (n-1)d_n x_0^{n-2}\right]$

$d_1 = c_3 + 2c_4 x_0 + 3c_5 x_0^2 + \cdots + (n-1)c_{n+1}x_0^{n-2} - \left[(n-1)d_{n+1}x_0^{n} - nd_n x_0^{n-1}\right]$

$d_0 = c_2 + 2c_3 x_0 + 3c_4 x_0^2 + \cdots + nc_{n+1}x_0^{n-1} - \left[nd_{n+1}x_0^{n+1} - (n+1)d_n x_0^{n}\right]$

이를 통하여 $d_0 = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2}$, $d_1 = \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_k x_0^{k-3}$, $d_2 = \sum_{k=4}^{\infty}(k-3)c_k x_0^{k-4}$,

$d_3 = \sum_{k=5}^{\infty}(k-4)c_k x_0^{k-5}, \cdots, d_n = \sum_{k=n+2}^{\infty}(k-(n+1))c_k x_0^{k-(n+2)}$ $\cdots$ 라고 표현하자.

이 때, $a = c_1 - d_1 x_0^2 + 2d_0 x_0$ 이므로 $d_1 = \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_k x_0^{k-3}$, $d_0 = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2}$ 을

대입을 하면,

$$\begin{aligned} a &= c_1 - \left(\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_k x_0^{k-3}\right)x_0^2 + 2\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2}\right)x_0 \\ &= c_1 + 2c_2 x_0 + 3c_3 x_0^2 + 4c_4 x_0^3 + 5c_5 x_0^4 + 6c_6 x_0^5 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

또한, $b = c_0 - d_0 x_0^2$ 이므로 $d_0 = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2}$ 을 대입하여 나타내면,

$$b = c_0 - (\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_k x_0^{k-2})x_0^2$$

$$= c_0 - c_2x_0^2 - 2c_3x_0^3 - 3c_4x_0^4 - 4c_5x_0^5 - \cdots - (n-1)c_nx_0^n - \cdots$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_nx_0^n$$

따라서 (1) 식에 $a, b, Q(x)$을 대입하여 정리하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n - \left(\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx_0^{n-1}\right)x + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_nx_0^n$$
$$= (x-x_0)^2\left[\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_kx_0^{k-2} + (\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)c_kx_0^{k-3})x + \cdots + (\sum_{k=n+2}^{\infty}(k-(n+1))c_kx_0^{k-(n+2)})x^n + \cdots\right]$$

로 나타낼 수 있고, 양변을 전개하여 동류항끼리 정리를 하여 나타내면 양변의 계수가 같음을 확인할 수 있다.

정리 2-3. 두 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$가 $x=x_0$에서 미분가능하면

[1] $\left[P\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\right]' = P\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\right]'$ (P : 상수)

[2] $\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}d_nx_0^n\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\right]' \pm \left[\sum_{n=0}^{\infty}d_nx_0^n\right]'$ (복호동순)

[3] $\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\cdot x\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\right]'\cdot x + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n$

증명. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$ 가 $x=x_0$에서 미분가능 하므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n\right]'x - b = (x-x_0)^2Q(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty}d_nx_0^n\right]'x - e = (x-x_0)^2R(x)$$

라고 표현할 수 있으며, 여기서 b와 e는 상수이며 $Q(x)$와 $R(x)$는 멱급수들이다.

(1) $\left[P \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' = P \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]'$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x - b = (x - x_0)^2 Q(x)$$

위 식의 양변에 P을 곱하면

$$P \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - P \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x - P \cdot b = P \cdot (x - x_0)^2 Q(x)$$

$$\therefore \quad \left[P \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' = P \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]'$$

(2) $\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' \pm \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]'$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x - b = (x - x_0)^2 Q(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]' x - e = (x - x_0)^2 R(x)$$

위 두 방정식을 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하거나 빼면

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]' x - (b \pm e) = (x - x_0)^2 [\, Q(x) \pm R(x)\,].$$

$$\therefore \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' \pm \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n x_0^n\right]'$$

(3) $\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \cdot x\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

위 식의 양변에 x을 곱하면

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot x - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 - bx = (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x$$

이므로

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot x = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 + bx + (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x$$

양변에 $-\left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' \cdot x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right) \cdot x - f$을 더하면

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot x - \left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' \cdot x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right) \cdot x - f$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 + bx - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 \cdot x - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \cdot x + (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x - f$$

[f는 나중에 정한다.]

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 + \left(b - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right) x - f + (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 + \left(b - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 - \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 - b\right) x - f + (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 - 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 \cdot x - f + (x-x_0)^2 Q(x) \cdot x$$

이때,

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]'(x-x_0)^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]'(x^2-2x_0x+x_0^2)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x^2 - 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 x + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0^2$$

이므로

만약, $f=-\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0^2$ 라면

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\cdot x - \left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right) x + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' x_0^2 = (x-x_0)^2\left(\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]' + Q(x)\cdot x\right)$$

$$\therefore \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \cdot x\right]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n\right]'\cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

정리2-4. $x=x_0$에서 미분 가능할 때, 지수함수의 도함수는 다음과 같다.

$$(\exp)'(x) = \exp(x_0)$$

증명. 지수함수 $\exp(x)$가 $x=x_0$에서 미분 가능함을 보이기 위하여

(1) $$\exp(x) - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 멱급수 $Q(x)$을 찾는다.

이때, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 이므로

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

그러므로 정리 2-2에 의하여

$$a=\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{n!}x_0^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x_0^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_0^{n}=\exp(x_0)$$

$b=-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\frac{1}{n!}x_0^n$ 임을 알 수 있다.

또한 $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n x^n$이라 두면

$$d_0=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\frac{1}{k!}x_0^{k-2}$$

$$d_1=\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)\frac{1}{k!}x_0^{k-3}$$

$$d_2=\sum_{k=4}^{\infty}(k-3)\frac{1}{k}x_0^{k-4}$$

$$\vdots$$

$$d_n=\sum_{k=n+2}^{\infty}(k-(n+1))\frac{1}{k!}x_0^{k-(n+2)}$$

$$\vdots$$

가 성립함을 알 수 있다.

(2)식에 $a, b, Q(x)$의 값을 각각 대입하여 계수를 비교하여 보면 만족하고 유일하게 결정됨을 알 수 있다.

따라서 $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 은 $x=x_0$에서 미분가능하고,

$$(\exp)'(x)=\exp(x_0)$$

정리 2-5. $x=x_0$에서 미분 가능할 때, $\sin x$의 도함수는 다음과 같다.

$$(\sin x)'=\cos x_0$$

증명. $\sin x$가 $x=x_0$에서 미분 가능함을 보이기 위하여

(1) $$\sin x - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 멱급수 $Q(x)$을 찾는다.

이때, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 이므로

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

정리 2-2에 의하여

$a = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x_0^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x_0^{2n} = \cos x_0$

$b = -\sum_{n=0}^{\infty} 2n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x_0^{2n+1}$ 임을 알 수 있다.

또한 $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$이라 두면,

$$d_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k-1}$$

$$d_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k-2}$$

$$d_2 = \sum_{k=2}^{\infty} (2k-2) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k-3}$$

$$d_3 = \sum_{k=2}^{\infty} (2k-3) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k-4}$$

$$d_4 = \sum_{k=3}^{\infty} (2k-4) \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k-5}$$

$$\vdots$$

$$d_n = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\infty} (2k-n)\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x_0^{2k-(n+1)}$$

$$d_{n+1} = \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{\infty} (2k-(n+1))\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x_0^{2k-(n+2)}$$

$$\vdots$$

가 성립함을 알 수 있다.

(2)식에 $a, b, Q(x)$의 값을 각각 대입하여 계수를 비교하여 보면 만족하고 유일하게 결정됨을 알 수 있으므로 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 은 $x=x_0$에서 미분가능하고,

$$(\sin x)' = \cos x_0$$

정리 2-6. $x=x_0$에서 미분 가능할 때, $\cos x$의 도함수는 다음과 같다.

$$(\cos x)' = -\sin x_0$$

증명. $\cos x$가 $x=x_0$에서 미분 가능함을 보이기 위하여

(1) $$\cos x - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

을 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0을 포함하는 멱급수 $Q(x)$을 찾는다.

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ 이므로

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} - ax - b = (x-x_0)^2 Q(x)$$

정리 2-2에 의하여

$$a=\sum_{n=0}^{\infty} 2n\frac{(-1)^n}{(2n)!}x_0^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x_0^{2n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x_0^{2n+1}=-\sin x_0$$

$b=-\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}x_0^{2n}$ 임을 알 수 있다.

또한 $Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$이라 두면

$$d_0=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\frac{(-1)^k}{(2k)!}x_0^{2k-2}$$

$$d_1=\sum_{k=2}^{\infty}(2k-2)\frac{(-1)^k}{(2k)!}x_0^{2k-3}$$

$$d_2=\sum_{k=2}^{\infty}(2k-3)\frac{(-1)^k}{(2k)!}x_0^{2k-4}$$

$$\vdots$$

$$d_n=\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{\infty}(2k-(n+1))\frac{(-1)^k}{(2k)!}x_0^{2k-(n+2)}$$

$$\vdots$$

가 성립함을 알 수 있다.

그러므로 (2)식에 $a, b, Q(x)$의 값을 각각 대입하여 계수를 비교하여 보면 만족하고 유일하게 결정됨을 알 수 있다.

따라서 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ 은 $x=x_0$에서 미분가능하고,

$$(\cos x)'=-\sin x_0$$

III. 결　론

멱급수에 대한 도함수를 극한개념을 사용하지 않고 단순히 대수적인 방정식의 전개, 인수분해 및 중근의 성질 등 중학교 과정을 수료한 학생들이 습득한 수학적 지식을 이용하여 새로운 도함수의 정의를 세우고 도함수의 성질 및 도함수의 계산 더 나아가 초월함수의 도함수들에 계산이 극한을 도입한 도함수의 정의를 이용하여 얻은 결과들과 일치한다.

이러한 결과를 정리하면 본 논문의 증명 방법은 극한개념을 선수 학습으로 습득하지 못한 학습자 또는 수학을 전문적으로 공부를 하지 않은 학생들에게 미분의 성질들을 이해시키는데 쉬운 과정이라 할 수 있겠다. 도함수에 대한 구조적 이해보다는 도구적 이해에 가깝게 접근했던 이들에게 단순한 계산방법으로써의 도함수가 아닌 그 의미를 명확히 함으로써 이러한 단원뿐만 아니라 수학과 연결된 다른 모든 영역에서도 논리적 타당성을 부여해 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 강옥기, 강윤수, 고상숙, 고호경, 권나영. 수학교육학 신서. 교우사

2. 김광보(1991). 극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의 및 성질들의 연구. 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.

3. 이광연. 수학자들의 전쟁. 프로네시스

4. 임석현(2006). 멱급수와 테일러급수를 활용한 함수표현. 인제대학교 교육대학원 석사학위 논문.

5. 최나영(2001). 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구: 함수와 도함수 사이의 그래프 표현을 중심으로. 이화여자 대학교 교육대학원 석사학위 논문.

<Abstract>

Derivatives of A Power Series Without Using the Concept of Limit

Lee, Na-Ra

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Jeju National University
Jeju, Korea

Supervised by Professor Ko, Bong-Soo

The definition of a derivative of a power series which can be thought of as polynomial of infinite degree is derived without using the concept of limit. By comparing a derivative of a transcendental function derived from mathematical knowledge of middle school such as factorization and multiple root to a derivative derived from limit, we can prove that both are the same.