퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수의 곱셈·나눗셈 지도 사례

이지미

2017

석 사 학 위 논 문

퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수의 곱셈·나눗셈 지도 사례

A Case Study on Teaching Multiplication and Division of Fractions to Underachievers in Mathematics by Using Cuisenaire Rods

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

이 지 미

2017년 2월

석 사 학 위 논 문

퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수의 곱셈·나눗셈 지도 사례

A Case Study on Teaching Multiplication and Division of Fractions to Underachievers in Mathematics by Using Cuisenaire Rods

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

이 지 미

2017년 2월

퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수의 곱셈·나눗셈 지도 사례

A Case Study on Teaching Multiplication and Division of Fractions to Underachievers in Mathematics by Using Cuisenaire Rods

지도교수　최　근　배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

이　지　미

2016년 11월

이 지 미의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 김 해규 인

심사위원 현 종 익 인

심사위원 최 근 배 인

제주대학교 교육대학원

2016년 12월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국 문 초 록

퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수의 곱셈·나눗셈 지도 사례

이 지 미

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공

지도교수 최 근 배

본 연구는 초등학교 수학, 수와 연산 영역 중 분수의 곱셈과 나눗셈을 퀴즈네어 막대를 활용하여 지도해 보고, 수학 학습부진아에게 나타난 효과와 분수의 개념 및 연산지도에 효과적인 교수·학습 방법을 연구함으로써, 학교 수학수업 현장에서 수학 학습부진아의 오류 교정방안을 제시하고 교사들에게는 분수의 연산을 지도하는데 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다.

2009 개정 교육과정과 5, 6학년 교과서 분석을 통해 추출한 25문제를 제주특별자치도 서귀포시 S초등학교 6학년 164명에게 사전 검사하여, 그 중 하위 10%의 학생 중 수학 학습부진아 3명을 선정하여 사전 검사지 분석과 개별면담으로 오류를 분석하였다. 그 후, 퀴즈네어 막대를 활용하여 12차시 동안 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도하며 학생들의 오류 교정 과정을 녹취하고 그 효과를 살펴보았다.

우선, 수학 학습부진아에게서 나타난 공통적인 오류는 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈 계산방법을 혼동하여 나타난 유형이었다. (분수)×(자연수) 혹은 (분수)×(분수)의 계산을 분수의 나눗셈을 해결하듯이 승수를 모두 역수로 고쳐서 계산하거나 분수의 나눗셈 문제를 역수로 고치지 않고 분수의 곱셈을 풀듯이

분모와 분모를 곱하고, 분자와 분자를 곱하여 계산하는 경우였다. 또, 연구자가 지도한 수학 학습부진아 3명 모두 기계적 문제풀이의 피곤함을 느끼고, 수학에 대한 부정적인 태도를 보였다. 그 원인으로는 곱셈, 나눗셈의 개념 부족과 의미를 이해하지 않고 문제 풀이로만 학습한 '생각하는 수학의 부재'를 들 수 있다.

따라서 12차시 동안 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도할 때에는 최소한의 문제를 제시하여, 분수의 의미와 곱하기, 나누기 연산의 상황을 생각하게 한 후 퀴즈네어 막대를 조작함으로써 학생들의 흥미를 유발하면서도 생각하는 수학을 하도록 수업 구성에 노력하였다.

12차시의 퀴즈네어 막대를 활용한 지도가 종료된 후, 수학 학습부진아 3명 모두, 164명을 대상으로 사전 검사를 하였을 때 나왔던 전체 평균 72.6점에 가까운 성취도를 보이거나 90% 이상의 성취를 보인 학생도 있었다. 가장 놀라운 변화는 수학 교과에 매우 낮은 자존감을 가졌던 학생들의 태도 변화였으며, 의미를 이해하지 않고 기계적으로 문제풀이만 하던 이전과는 달리 분수의 의미와 곱셈과 나눗셈의 상황을 이해하고 있음을 관찰할 수 있었다.

다만, 본 연구에서는 퀴즈네어 막대를 '분할과 반복 조작활동'을 위한 하나의 도구로서 사용했다는 점에서 원래 용도와는 다소 맞지 않는 활동으로 진행하였으며, 퀴즈네어 막대를 활용하는 방볍이 매우 다양하다는 점에서 학생들이 의외의 해석을 하기도 하고, 분수 나눗셈 문제에서는 오히려 혼동하는 모습을 보이기도 하였다. 나눗셈의 경우, 상황 맥락에 따라 기준막대와 비교막대의 크기를 비교하여 값을 구할 수도 있으며 기준막대에서 비교막대만큼 몇 번 덜어낼 수 있는지, 혹은 비교막대가 기준막대만큼 얼마나 들어가는 지로 조작하여 값을 구하는 경우도 있다.

본 연구를 통해, 퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아들의 분수의 곱셈과 나눗셈 지도는 학생들에게 분수의 개념, 분수와 연산기호와의 관련성, 그리고 답이 유도되는 과정을 직접 조작해보고 시각적으로 확인할 수 있다는 점에서 그 효과를 발견할 수 있었으나, 정확한 진단을 위해 분수 연산 영역에서 수학 학습부진아를 선별할 수 있는 표준화된 검사지의 개발이 필요하며, 분수의 나눗셈 지도에 있어서 수학 학습부진아를 위한 효율적인 조작활동과 지도 방안이 연구되기를 기대한다.

주요어 : 분수의 곱셈과 나눗셈, 퀴즈네어 막대, 수학 학습부진아

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교 현장에서 분수의 연산 영역은 학생들의 성취도가 다른 영역에 비해 낮아 많은 교사들이 지도하는 데 어려움을 느낀다. 분수의 연산 영역이 학생들에게 있어 이해되기 어려운 이유는 분수가 가지고 있는 여러 가지 의미를 이해하지 못하고 알고리즘에 의한 기능 숙달로 학습되기 때문이다(신계숙, 2005).

2009 개정 교육과정에서 분수는 3학년 1학기에 등분할 개념으로 도입되어 3학년 2학기부터 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 시작으로 분수 연산을 학습하게 된다. 이 단계에서는 아직까지 구체물, 반구체물을 자르고 붙이는 조작활동을 통해 개념을 도입하고 있지만, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈, 나눗셈과 같은 복잡한 연산이 시작되면서 다양하고 재미있는 조작활동보다는 단순한 공식 암기와 기계적인 계산 방법을 더 많이 활용하게 된다(신봉숙, 김용태, 김한나, 박주영, 최대욱, 2001). 그런데, 이러한 기계적 계산 방법에 능숙한 학생들도 계산 능력은 뛰어나지만 직접 식을 만들어 답을 구해야 하는 경우 해결력이 떨어지는 문제점을 발견할 수 있다. 그 이유는 분수의 의미와 연산을 이해하지 못하고 형식적 절차에 따른 계산 과정을 반복하는 것에 초점을 둔 접근 방법 때문이다(김용석, 2015).

이러한 이유 때문에 분수의 연산이 알고리즘에 의한 계산으로 주로 이루어지는 초등학교 5, 6학년 수학, 그 중에서 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생들의 오류 분석과 그에 따른 적절한 지도 방안이 연구되어야 한다고 본다.

스켐프(Skemp)는 문제를 어떻게 해결해야 하고, 왜 그러한 결과가 나오는 지 이해하면서 알고리즘과 같은 규칙이나 절차를 연역하는 상태를 '관계적 이해(relational understanding)'라고 했다. 피아제(Piaget), 딘즈(Dienes), 브루너(Bruner)는 수학적 개념을 이해하는데 학생 스스로 조작해 보는 활동의 필요성을 강조하였다.

따라서 본 연구는 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수 연산영역에 부진을 보이는 학생을 지도, 분석하여 봄으로써 학생을 지도하는 교사들에게 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도하는데 도움을 주고자 한다.

2. 연구내용

본 연구에서는 초등학교 5, 6학년 수학, 분수의 곱셈과 나눗셈 연산에 있어 효과적인 교수·학습 방법을 모색하고자 연구의 내용을 다음과 같이 설정하였다.

첫째, 수학 학습부진아들의 분수의 곱셈과 나눗셈 계산에서 나타나는 오류를 분석한다.
둘째, 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 곱셈과 나눗셈 계산을 학습하였을 때, 첫 번째 연구 문제에서 나타난 오류의 변화를 분석한다.
셋째, 분수의 개념 및 연산지도에 효율적인 조작활동 내용을 제시한다.

3. 용어의 정의

가. 분수의 곱셈과 나눗셈 학습부진아

한국교육심리학회(2000)에 의하면 비교적 정상적인 지능과 잠재적인 학습능력을 가지고 있으면서도 학업성취도가 떨어지는 다양한 유형의 아동을 학습부진아로 규정하였다.

국립특수교육원(2009)은 보통 수준의 지능을 지니고 있으면서도 낮은 기억력, 기초 학습 능력 및 학습 전략 부족 또는 주의력 결핍, 낮은 학습 동기, 낮은 지적 호기심 등에 의해 학습 능률이 향상되지 못해 학업성적이 저조한 아동으로 학습부진아를 정의하였다.

본 연구에서 분수의 곱셈과 나눗셈 학습부진아는 지능이 보통 수준 이상인 학생 중에서, 기초 학습 능력 및 학습 전략이 부족하거나 낮은 학습 동기와 지적 호기심으로 분수의 곱셈, 나눗셈 연산 영역에서 성취도가 40% 미만인 학생 중 자발적으로 보충 학습을 원하는 학생들로 대상을 한정하였다.

나. 퀴즈네어 막대

퀴즈네어 막대는 1cm에서 10cm까지 길이와 색이 각기 다른 직육면체 모양의 막대 10종으로 총 74개의 막대로 구성되어 있으며 벨기에의 초등학교 교사였던 조지 퀴즈네어(George Cuisenaire)가 개발한 수학적 조작교구이다.

4. 연구의 제한점

본 연구의 대상은 제주특별자치도 서귀포시 S초등학교 6학년 수학 학습부진아 중 3명을 연구 대상으로 하였으므로 본 연구 결과를 다른 학교와 학년에 일반화하기에는 한계가 있다.

5. 기대되는 효과

본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈 연산에 있어 효과적인 교수·학습 방법을 모색하는 것으로서 다음과 같은 효과를 기대한다.

첫째, 수학 학습부진아들의 분수의 곱셈, 나눗셈 계산상의 오류를 퀴즈네어 막대로 교정하여 분수 연산을 능숙하게 해결할 수 있을 것이다.

둘째, 분수의 곱셈과 나눗셈 지도를 하는 교사들의 교수·학습 지도를 위한 자료가 될 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수

예비초등교사의 분수 관련 조작활동을 분석한 논문(최근배, 2010)에서 약 19%의 예비초등교사가 만족스럽지 못한 방법으로 분수 조작활동을 하였다. 이는 분수에 대한 복합적인 의미나 단위분수에 대한 개념 인식이 미비하여 나타난 결과로, 학교교육에서도 분수의 조작활동보다는 수학적 형식화와 산술적 측면을 강조할 수 있다는 여지를 남긴다.

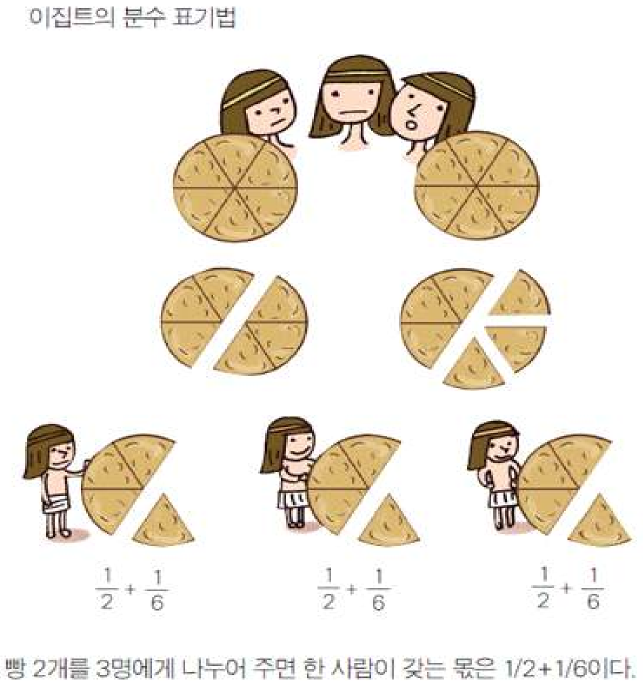
또, 분수의 개념을 논하는 여러 문헌들을 보면 분수의 개념이 일치하지 않은 것을 알 수 있다(정은실, 2006). 분수 개념 자체가 명백하게 제시되어 있지 않고 여러 개의 복합적인 의미로 사용되는 까닭에 초등학교 수학에서 학생들이 분수를 이해하기 어렵고, 산술적인 계산을 위한 수학으로 분수를 학습하고 있는 것이 실정이다. 따라서 분수의 개념과 의미를 확인하여 이 연구에서 진행할 조작활동에 이유를 설명하고자 한다.

가. 분수 개념의 발생

Wagner(1975)에 따르면, 기원전 500년 경 피타고라스학파는 '분수를 익숙하게 사용했으나, 분수를 수로 생각하지 않았다'고 하였다. Courant와 Robbins(1943)는 자연수는 사물을 세는(counting) 과정에서 나온 개념인 반면에, 분수는 '측정을 하기 위한 도구'로서 좀 더 정확하게 측정하려고 측정 단위를 작은 부분으로 나누는 과정에서 분수를 만들어 내게 되었을 것이라고 말하였다(Courant, R.&Robbins, H., 1943, p. 52; 정은실, 2006, pp.124-129에서 재인용).

좀 더 거슬러 올라가, 기원전 1650년경으로 추정되는 린드(Rind)의 파피루스에 의하면, 고대 이집트인들이 빵 2개를 3명이 나누어 먹는 분배 문제에서 단위 분수의 개념이 등장한다. [그림 Ⅱ-1]과 같이, 3명이 똑같이 나누어 먹기 위해서 빵 2개를 먼저 반으로 나누고 4등분 된 빵을 3명에게 한 조각씩 나누어 준다. 그 중에

남은 한 조각(빵 1개의 $\frac{1}{2}$)을 다시 3등분 하여 3명에게 한 조각씩 나누어 주면 빵 2개를 3명이 똑같이 나누어 먹을 수 있게 된다. 이 때, 한 사람이 먹는 빵의 양을 정확하게 측정하기 위해 단위 분수의 개념이 도입 되었고 시간이 흘러 12세기경 아라비아의 알 하자르(Al-Hassar)에 의해 오늘 날의 분수의 모습을 갖추게 되었다.

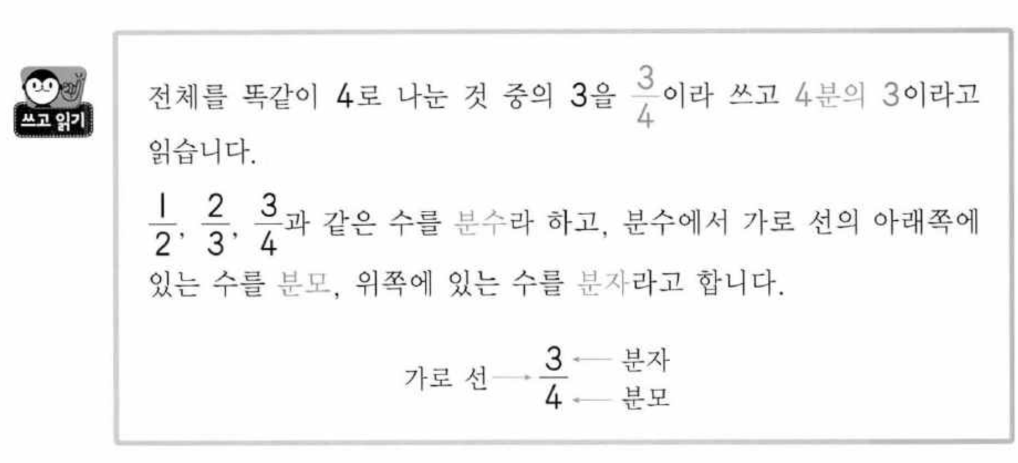


[그림 Ⅱ-1] 고대 분수 개념의 등장
주. 출처 **소년한국일보** (2013년 8월 27일자)

역사학적으로 보았을 때, 분수는 자연수 개념 획득 이후 공평하게 나누기 위해 똑같은 크기로 분배하고 측정하는 과정에서 발생하였고(정은실, 2006), 전체를 1로 보고 이것을 똑같이 나눈 것 중 한 부분인 '단위분수'를 가장 기본적인 단위로 본다. 따라서 분수를 처음 접하는 학생들에게도 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$과 같은 간단한 단위분수의 개념으로부터 시작하여 $\frac{k}{n}$는 '$\frac{1}{n}$이 k개'에서 '전체를 n개로 똑같이 나눈 것 중 k개만큼의 크기'와 같이 점진적인 과정으로 이루어지는 것이 적절하다고 보인다.

나. 분수의 수학적 정의

[그림 Ⅱ-2]는 초등학교 3학년 1학기 수학 교과서에 제시 된 분수의 정의인데, 분수에서 가로 선의 아래쪽에 있는 수를 분모, 위쪽에 있는 수는 분자라고 명명하고 있다.



[그림 Ⅱ-2] 초등학교 3학년 교과서 분수의 정의(3-1, p.200)

그러나 분수를 수학적으로 엄밀하게 정의하면 다음과 같다.

순서쌍 (n, m)=$\frac{n}{m}$을 분수(分數, fraction)라 하고, m을 분모, n을 분자라고 한다. 이때, m은 0이 아닌 정수, n은 정수이다. 분수의 분모와 분자가 정수이므로 예를 들어 $\frac{1}{0}$과 $\frac{1}{\sqrt{2}}$과 같은 수는 분수의 정의에 비추어 보면 분수가 아니다.

또, 분수는 유리수와는 다른 개념이다. 유리수(有理數, rational number)는 실수(實數) 중에서 정수와 두 정수의 비(比)로 표현된 분수를 합친 개념으로, 즉 양의 크기를 나타내는 수(數)이고 분수는 유리수를 나타내는 여러 가지 방법 중의 하나이다(최대욱, 2002. 재인용). 예를 들어, 분수 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$은 유리수 $\frac{1}{2}$에 대한 표현이라 할 수 있으며, 유리수 $\frac{1}{2}$은 분수들의 집합 {$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, …}을 뜻하는 이름이라고 말할 수 있다(교과부, 2011).

다. 분수의 의미

분수의 의미를 여러 가지로 제시한 여러 연구들을 보면 <표 Ⅱ-1>과 같다. 이 결과들에서 대체적으로 공통되는 의미는 전체-부분의 비교, 비, 몫, 측도, 연산자 등을 들 수 있다(고인자, 2003).

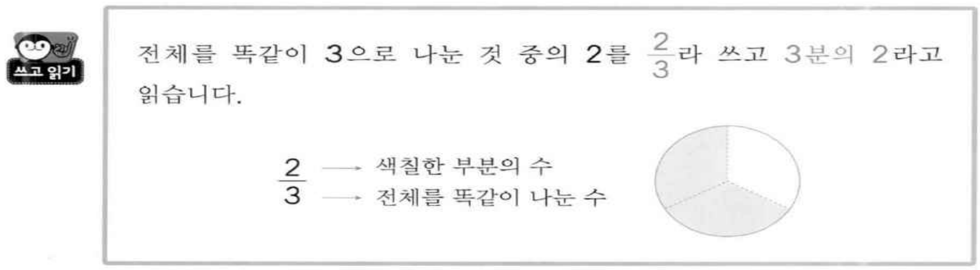
<표 Ⅱ-1> 분수의 의미에 관한 연구

연도	연구자	분수의 의미
1976	Kieren	전체-부분의 비교, 소수, 비, 몫, 연산자, 측도 등
1983	Freudenthal	분할자, 비교자, 연산자 등
1983	Behr	소수, 직선 좌표의 의미 추가
1985	Nesher	확률의 의미 추가

분수 개념은 다양한 상황과 의미를 포함하며 발달하였지만, 선행연구들을 토대로 정리된 다섯 가지 의미 중, 학교 수학에서 분수 $\frac{n}{m}$을 다룰 때 부과되는 의미를 다음의 세 가지로 정리한다.

1) 전체-부분의 비교

전체에 대한 양을 m등분 한 것이 n개가 모인 것을 의미하는 것으로, 전체에 대한 부분의 크기를 비교한 결과를 나타내었다. 학교 수학에서의 단위량은 연속량과 이산량으로 구분하는데, [그림 Ⅱ-3]과 같이 연속량의 등분할 상황을 제시하여 전체-부분의 비교 관계로 분수 용어와 기호를 도입하고 있다.



[그림 Ⅱ-3] 연속량의 전체와 부분 등분할(3-1, p.199)

2) 비의 의미(비율)

기준량 m에 대한 비교하는 양 n의 비율로, 부분-전체 관계나 두 대상의 크기, 양을 동시에 비교할 때 사용된다. 즉, ‘n:m’이라는 비의 값(비율)으로서 분수 $\frac{n}{m}$ 을 사용한 것이다. [그림 Ⅱ-4]는 초등학교 6학년 1학기 4단원. 비와 비율에 나온 정의로, 두 수의 차를 구하는 절대적 비교가 아닌 두 수의 비를 구하는 상대적 비교의 방법으로 분수의 꼴을 사용함을 알게 된다. Thomson과 Kaput & Maxwel-West는 비의 의미로서의 분수를 이해함으로써 두 양이 곱셈으로 관련되며 관계의 결과가 일정함을 인식할 수 있다고 한다(유현주, 1995. 재인용).

쓰고 읽기

비 150 : 200에서 기호 :의 왼쪽에 있는 150은 비교하는 양이고, 오른쪽에 있는 200은 기준량입니다. 비교하는 양을 기준량으로 나눈 값을 비의 값 또는 비율이라고 합니다.

$$(\text{비율})=(\text{비교하는 양})\div(\text{기준량})=\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$$

비 150 : 200을 비율로 나타내면 $\frac{150}{200}$ 또는 0.75입니다.

[그림 Ⅱ-4] 비의 의미로서의 분수(6-1, p.107)

3) 몫의 의미

자연수 n을 자연수 m으로 나눈 몫, 즉 ‘$n \div m$’의 의미인 나눗셈의 몫으로서 분수 $\frac{n}{m}$ 을 정의할 수 있다. [그림 Ⅱ-5]는 초등학교 5학년 2학기 3단원. 분수의 나눗셈에서 제시된 문제로 자연수와 자연수를 나눌 때의 몫이 ‘몇 분의 몇’인지 분수 형태로 답을 하게 제시되어 있음을 확인할 수 있다.

4 케이크 3개를 8명이 똑같이 나누어 먹었습니다. 한 사람이 먹은 케이크는 케이크 하나의 몇 분의 몇입니까?

[그림 Ⅱ-5] 몫의 의미로서의 분수(5-2, p.98)

라. 분수 연산의 의미와 효과적 지도방법

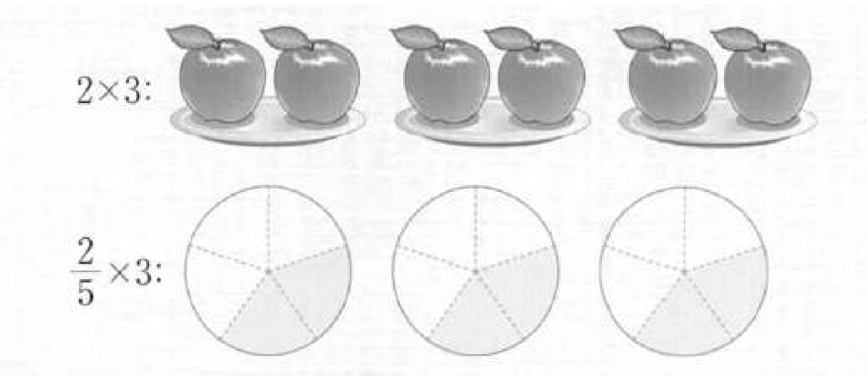
1) 분수의 곱셈

분수의 곱셈을 처음 접하게 되는 5학년 학생들에게 분수의 곱셈은 어렵게 느껴질 수 있다. 자연수 곱셈에서 동수누가와 몇 배의 개념을 익힌 후 분수의 배수 개념으로 수 연산이 확장될 때, 동수누가와 분수의 몇 배 개념을 쉽게 이해하기가 어려워지기 때문이다. 단순히 자연수의 곱셈 또는 약분을 처리하는 것이 아니라 1보다 작은 분수를 곱하면 결과 값이 작아지고, 1보다 큰 분수를 곱하면 커지게 경우를 인식할 때 학생들의 인지적 장애가 극대화 된다(교과부, 2011).

분자끼리 곱하여 분자를 구하고, 분모끼리 곱하여 분모를 구한다는 계산 알고리즘에 치우쳐서 지도하기 전에, 분수 곱셈의 의미를 알고 분수의 곱셈 계산을 사용하는 이유를 명확히 인식할 수 있다면, 분수의 덧셈과 뺄셈의 방법과 혼동하여 생기는 오류를 줄이고 실생활에 효과적으로 응용할 수 있게 될 것이다.

초등학교 5학년 1학기 6단원 분수의 곱셈에서 다루는 분수의 곱셈 상황을 보면 크게 (분수)×(자연수), (자연수)×(분수), (분수)×(분수)를 들 수 있다. 이 세 가지 곱셈 상황에 따라 분수 곱셈의 의미를 다음과 같이 정리한다.

가) (분수)×(자연수)



[그림 Ⅱ-6] 묶음의 의미로서 분수의 곱셈(교과부, 2011)

(분수)×(자연수)의 상황은 묶음의 의미로 해석될 수 있다. [그림 Ⅱ-6]과 같이, ‘2×3’의 자연수 곱셈 상황은 ‘2개씩 3묶음’으로 표현할 수 있고, ‘2+2+2=6’ 동수누

가로 해석되어 진다. 마찬가지로 '$\frac{2}{5}\times 3$'처럼 승수가 자연수인 분수의 곱셈도 '$\frac{1}{5}$이 2개씩 3묶음' 있는 것으로 표현할 수 있고, '$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$'처럼 동수누가를 이용하여 해석할 수 있다.

나) (자연수)×(분수)

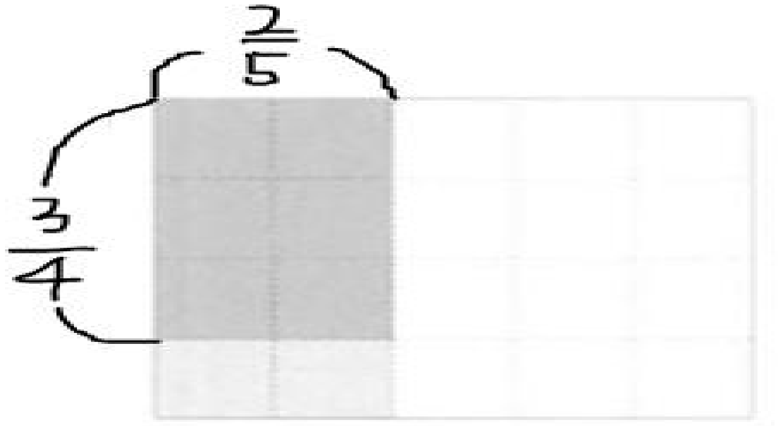
(자연수)×(분수)의 상황은 '～의' 또는 '～중에서'라는 의미를 파악하여 왜 분수의 곱셈으로 문제를 해결하여야 하는지 이해해야 한다. 예를 들어, 길이가 2m인 끈을 3개 사용하였을 때 사용한 끈의 길이는 '2×3'이다. 마찬가지로 길이가 2m인 끈의 $\frac{1}{2}$을 사용하였다면 사용한 끈의 길이는 '$2\times\frac{1}{2}$'로 구할 수 있다.

(자연수)×(분수)의 상황이 '～의' 또는 '～중에서'라는 의미로 담고 있음을 이해하고 '$6\times\frac{2}{3}$'를 구해본다면, 6의 $\frac{1}{3}$이 2개 있다는 것을 의미하므로, $6\times\frac{1}{3}=2$이고 $6\times\frac{2}{3}=6\times\frac{1}{3}\times 2=4$가 되므로 분수의 곱셈 의미를 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

다) (분수)×(분수)

(분수)×(분수)의 상황은 넓이를 바탕으로 해석될 수 있다. '어느 농부가 가지고 있는 땅의 $\frac{2}{5}$에 나무를 심었는데 그 중 $\frac{3}{4}$가 사과나무입니다. 사과나무를 심은 땅은 전체의 얼마입니까?'라는 문제가 있다. 이 문제를 해결하려면 (자연수)×(분수)의 상황에서 다뤘던 '～중에서'를 알고 있어야 한다. 전체 땅의 $\frac{2}{5}$에 나무를 심었는데 그 중에서 $\frac{3}{4}$에 사과나무를 심었으므로, 이 문제를 해결하기 위해서 '$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$'라는 식을 얻을 수 있다. 그러나, (자연수)×(분수)의 상황과는 달리 $\frac{2}{5}$의 $\frac{1}{4}$이 3개 있다는 의미 해석으로는 결과 값이 나오기가 어렵다. [그림 Ⅱ-7]은 직사각형 모델을 활용하여 넓이를 바탕으로 분수의 곱셈을 이해할 수 있는 그림이

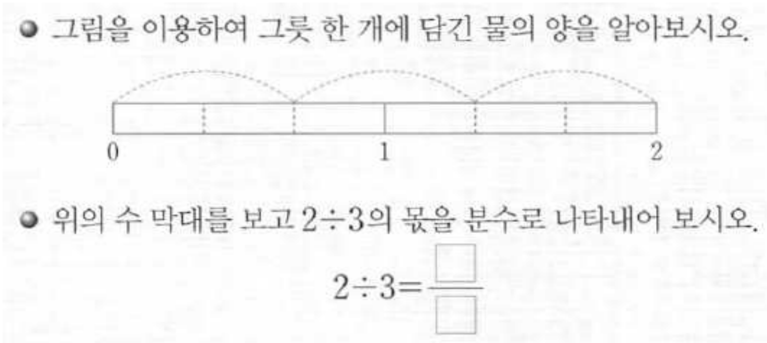
다. 직사각형 전체를 세로로 5등분 한 것 중의 2만큼($\frac{2}{5}$) 색을 칠하고 이번에는 가로로 4등분 한 것 중의 3만큼($\frac{3}{4}$) 색을 칠해본다. 이 때, 직사각형은 20칸으로 나누어지고, 그 중 6개의 칸이 겹쳐 칠해진 것을 확인할 수 있다. 분수의 곱셈은 '~중에서'라는 의미를 가지고 있으므로 겹쳐진 부분을 확인해야 함을 직관적으로 이해할 수 있다.



[그림 Ⅱ-7] 넓이를 바탕으로 이해한 분수의 곱셈

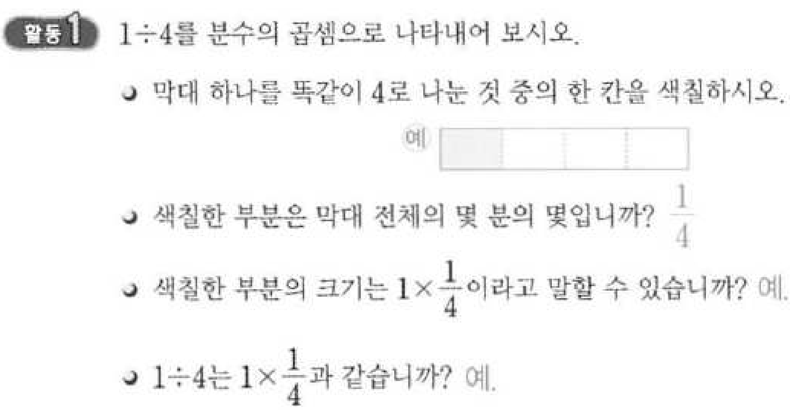
2) 분수의 나눗셈

분수의 나눗셈 지도에서는 주어진 상황이 분수의 나눗셈 상황이라는 것을 알고, 나눗셈을 곱셈으로 나타내는 계산 원리를 이해하고 계산할 수 있어야 한다. 분수의 의미는 앞서 'Ⅱ-1-다'에서 다루었듯이, 전체-부분의 비교, 비의 의미, 몫의 의미로 크게 나누어지는데, 분수의 나눗셈에서 분수의 의미는 나눗셈의 몫의 의미로 접근할 수 있다. 그러나 많은 교사들은 몫으로서의 분수 개념이 구체적 조작 활동으로 형성되기 어려움을 토로하고 있으며, 교과서 내 활동에서도 [그림 Ⅱ-8]과 같이 수직선, 활꼴 점선 등을 제시하여 학생이 수동적으로 받아들이게 하는 실정이다(교과부, 2011).



[그림 Ⅱ-8] 분수의 나눗셈 상황(교과부, 2011)

따라서, 많은 수학교육 학자들은 몫으로서의 분수 개념 형성을 위하여 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 몫으로서의 분수 개념 형성 이전의 선행 지식으로 가르치기를 주장하고 있다. [그림 Ⅱ-9]는 초등학교 5학년 2학기 3단원 분수의 나눗셈 단원의 첫 활동으로 수 막대 도식을 활용하고 있다. 막대 하나를 똑같이 4로 나누었을 때, 한 부분은 $\frac{1}{4}$로 3학년에서 처음 도입한 전체-부분의 비교를 이해하고 있다면 쉽게 끌어낼 수 있다. 또, 5학년 1학기에 도입되었던 분수의 곱셈에서 (자연수)×(분수) 개념을 상기시켜 '1÷4'의 크기가 '$1\times\frac{1}{4}$'의 크기와 같다는 점을 통해 ÷n은 $\times\frac{1}{n}$이라는 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 이해시킬 수 있다.



[그림 Ⅱ-9] 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 활용한 분수의 나눗셈(5-2, p.88)

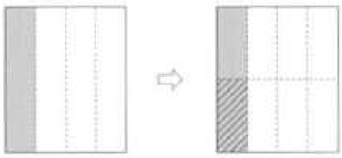
이렇게 (자연수)÷(자연수)가 자연수의 역수로 곱하는 것과 같다는 것을 이해한 후, 학생들이 접하게 되는 분수의 나눗셈 상황은 크게 (분수)÷(자연수), (분수)÷(분수), (자연수)÷(분수)로 세 가지로 나눌 수 있다. 이 세 가지 나눗셈 상황에 따라 분수 나눗셈의 의미를 다음과 같이 정리한다.

가) (분수)÷(자연수)

(분수)÷(자연수)의 상황은 넓이 모델을 사용하여 지도하고 있다. [그림 Ⅱ-10] 같은 나눗셈 상황은 $\frac{1}{4}$인 크기를 똑같이 둘로 나누었음을 알고, 전체 넓이를 똑같이 4개로 나눈 것 중 한 부분을 둘로 나누었을 때의 크기가 전체의 얼마인 지 확인해 봄으로써 직관적으로 몫의 크기를 알 수 있다. 또, 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 이해하고 있다면 $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$로의 알고리즘을 유추하여 나누는 수 대신에 역수를 곱한다는 계산 방법도 스스로 발견할 수 있을 것이다.

활동1 $\frac{1}{4} \div 2$를 계산하는 방법을 알아보시오.

- $\frac{1}{4} \div 2$를 분수의 곱셈으로 나타내어 보시오. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$은 얼마입니까? $\frac{1}{8}$
- 그림을 보고 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.



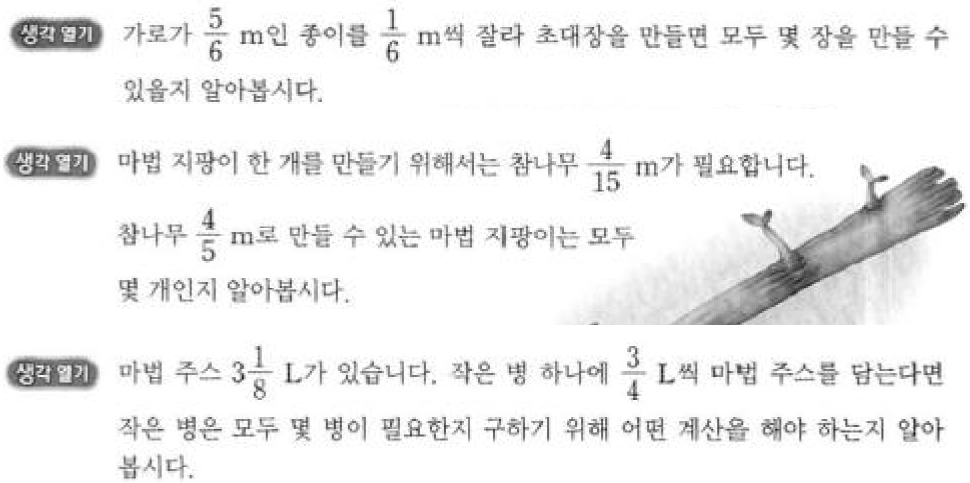
$$\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

- $\frac{1}{4} \div 2$를 계산하는 방법을 이야기해 보시오.

[그림 Ⅱ-10] (분수)÷(자연수)의 지도(5-2, p.92)

나) (분수)÷(분수)

〔그림 Ⅱ-11〕은 초등학교 수학 6학년 1학기 교과서에 제시된 (분수)÷(분수) 상황에 문제들이다. 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈, 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈, 대분수가 있는 분수의 나눗셈 모두 포함제 상황을 다루고 있다. 따라서 (분수)÷(분수)의 계산은 구체적 조작활동을 강조하여 매 상황을 조작하기 보다는 포함제 상황을 처리할 때 사고를 인지하게 한 후, 몇 가지 조작활동을 통해 나누는 수의 분모와 분자를 바꾸어 곱하는 알고리즘을 익히는 것에 중점을 두어야 한다(교과부, 2011).


생각 열기 가로가 $\frac{5}{6}$ m인 종이를 $\frac{1}{6}$ m씩 잘라 초대장을 만들면 모두 몇 장을 만들 수 있을지 알아봅시다.

생각 열기 마법 지팡이 한 개를 만들기 위해서는 참나무 $\frac{4}{15}$ m가 필요합니다. 참나무 $\frac{4}{5}$ m로 만들 수 있는 마법 지팡이는 모두 몇 개인지 알아봅시다.

생각 열기 마법 주스 $3\frac{1}{8}$ L가 있습니다. 작은 병 하나에 $\frac{3}{4}$ L씩 마법 주스를 담는다면 작은 병은 모두 몇 병이 필요한지 구하기 위해 어떤 계산을 해야 하는지 알아봅시다.

[그림 Ⅱ-11] 교과서에 제시된 (분수)÷(분수)의 상황(6-1, p.44)

다) (자연수)÷(분수)

(자연수)÷(분수)의 나눗셈 상황 역시 포함제로 접근하는 것이 효과적이다. 예를 들어 '$2 \div \frac{2}{3}$'의 나눗셈 상황은 '빵 2개를 $\frac{2}{3}$명에게 나누어 주면 1명은 얼마만큼의 빵을 얻는가?'라는 등분제 접근보다는 '빵 2개를 $\frac{2}{3}$조각씩 나누어 주면 몇 명이 먹을 수 있는가?'라는 포함제 접근이 덜 어색할 것이다. 나눗셈을 등분제로 이해하는 것에 익숙해진 학생들에게 (자연수)÷(분수)를 도입하기 전에 실생활에서 발생하는 포함제 상황을 제시하여 자연수 연산으로부터 분수의 연산으로 자연스럽게 확장하는 것이 효과적일 것이다.

2. 분수 관련 2009 개정 교육과정 및 교과서 분석

가. 내용 체계 및 영역 성취기준

분수(수와 연산) 영역 내용 체계는 <표Ⅱ-2>와 같이 분수의 의미를 알고, 분수와 소수의 관계 및 사칙계산 원리를 이해하여 그 계산을 할 수 있는데 중점을 두고 있다.

〈표 Ⅱ-2〉 학년군별 분수(수와 연산) 영역 내용 체계

학년군 / 영역	1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
수와 연산 (분수)	·	· 분수 · 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	· 약수와 배수 · 분수의 덧셈과 뺄셈 · 분수의 곱셈과 나눗셈 · 분수와 소수

나. 학년군별 내용

1) 초등학교 3~4학년군

⑥ 분수

① 양의 등분할을 통하여 분수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다.

② 단위분수와 진분수의 의미를 알고, 그 관계를 이해한다.

③ 진분수, 가분수, 대분수를 알고, 그 관계를 이해한다.

④ 단위분수의 크기를 비교할 수 있다.

⑤ 분모가 같은 분수의 크기를 비교할 수 있다.

⑧ 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈

① 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

<용어와 기호> 분수, 분자, 분모, 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수

<교수·학습상의 유의점>

① 1보다 작은 양을 나타내는 경우를 통하여 분수의 필요성을 인식하게 하고, 분수를 도입할 때 '분자', '분모'를 사용한다.

2) 초등학교 5~6학년군

1 약수와 배수

① 약수, 공약수, 최대공약수의 의미를 알고 구할 수 있다.

② 배수, 공배수, 최소공배수의 의미를 알고 구할 수 있다.

③ 약수와 배수의 관계를 이해한다.

④ 약수와 배수에 관련된 실생활 문제를 해결하고, 그 해결 과정을 설명할 수 있다.

2 분수의 덧셈과 뺄셈

① 분수의 성질을 이용하여 크기가 같은 분수를 만들 수 있다.

② 분수를 약분, 통분할 수 있다.

③ 분모가 다른 분수의 크기를 비교할 수 있다.

④ 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

3 분수의 곱셈과 나눗셈

① 분수의 곱셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

② '(자연수)÷(자연수)'에서 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다.

③ 분수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

5 분수와 소수

① 분수와 소수의 관계를 이해하고, 분수를 소수로, 소수를 분수로 나타낼 수 있다.

② 분수와 소수의 크기를 비교할 수 있다.

③ 간단한 분수와 소수의 혼합 계산을 할 수 있다.

<용어와 기호> 약수, 배수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수, 약분, 통분, 기약분수

<교수·학습상의 유의점>

① 약수와 배수는 실생활에서 활용되는 경우를 찾아 자연수 범위에서 다룬다.

② 최대공약수와 최소공배수는 두 수에 대해서 구하게 한다.

③ 분모가 다른 분수의 크기 비교에서 수 감각을 이용하여 추론하고 토론하는 활동을 하게 한다.

④ 분수의 나눗셈은 '(분수)÷(자연수)', '(분수)÷(분수)', '(자연수)÷(분수)'를 다룬다.

⑤ 분수와 소수의 혼합 계산은 자연수의 혼합 계산 원리를 통하여 이해할 수 있게 하고 지나친 계산 연습이나 복잡한 계산은 다루지 않는다.

다. 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 교과서 차시 분석

1) 분수의 곱셈 전개 계획

초등학교 5학년 1학기 6단원 분수의 곱셈은 <표Ⅱ-3>와 같이 (분수)×(자연수), (자연수)×(분수), (분수)×(분수), 세 분수의 곱셈 등의 순서로 총 12차시로 구성되어 있다.

<표 Ⅱ-3> 분수의 곱셈 단원 전개 계획

차시	주제	수업 내용 및 활동
1/12	단원 도입	· '문지기 도깨비와 금화' 이야기를 통하여 분수의 곱셈이 쓰이는 상황을 이해하게 한다. · 분수의 곱셈이 실생활에서 필요함을 느끼게 한다.
2/12	(진분수)×(자연수)	· (진분수)×(자연수)의 계산 원리를 알게 한다. · (진분수)×(자연수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다.
3/12	(대분수)×(자연수)	· (대분수)×(자연수)의 계산 원리를 알게 한다. · (대분수)×(자연수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다.
4/12	(자연수)×(진분수)	· (자연수)×(진분수)의 계산 원리를 알게 한다. · (자연수)×(진분수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다. · 곱하는 수가 1보다 작으면 곱이 곱해지는 수보다 작아진다는 것을 알게 한다.

5/12	(자연수)×(대분수)	· (자연수)×(대분수)의 계산 원리를 알게 한다. · (자연수)×(대분수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다.
6/12	(단위분수)×(단위분수)	· (단위분수)×(단위분수)의 계산 원리를 알게 한다. · 곱하는 수가 1보다 작으면 곱이 곱해지는 수보다 작아진다는 것을 알게 한다.
7/12	(진분수)×(진분수)	· (진분수)×(진분수)의 계산 원리를 알게 한다. · (진분수)×(진분수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다.
8/12	(대분수)×(대분수)	· (대분수)×(대분수)의 계산 원리를 알게 한다. · (대분수)×(대분수)를 약분하여 간단히 계산하게 한다.
9/12	세 분수의 곱셈	· 세 분수의 곱셈의 계산 원리를 알게 한다. · 세 분수의 곱셈을 약분하여 간단히 계산하게 한다.
10/12	공부를 잘했는지 알아봅시다	· 단원에서 배운 내용을 문제를 풀며 정리하게 한다.
11/12	문제 해결	· 여러 가지 방법으로 분수의 곱셈에 관한 문제를 해결하게 한다.
12/12	이야기 마당	· 오봉산에 얽힌 재미있는 이야기를 통해 분수의 곱셈을 활용하는 경험을 하게 한다.

2) 분수의 나눗셈 전개 계획

초등학교 5학년 2학기 3단원 분수의 나눗셈은 <표Ⅱ-3>와 같이 자연수와 자연수의 나눗셈을 시작으로 하여 몫으로서의 분수 개념을 도입하고 있다. 이후 진분수, 가분수, 대분수를 자연수로 나누는 분수의 나눗셈 계산을 총 9차시에 걸쳐 해결하도록 구성되어 있다.

<표 Ⅱ-4> 분수의 나눗셈 단원(5학년) 전개 계획

차시	주제	수업 내용 및 활동
1/9	단원 도입	· 스토리텔링을 통하여 분수의 나눗셈이 쓰이는 상황을 이해하게 한다. · 분수의 나눗셈이 실생활에서 필요함을 느낄 수 있게 한다.

2/9	(자연수)÷(자연수)	· (자연수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내는 방법을 알게 한다.
3/9	나눗셈의 몫	· 나눗셈의 몫을 분수로 나타내는 방법을 알게 한다.
4/9	(진분수)÷(자연수)	· (진분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 방법을 알게 한다. · (진분수)÷(자연수)를 계산하는 방법을 알게 한다.
5/9	(가분수)÷(자연수)	· (가분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 방법을 알게 한다. · (가분수)÷(자연수)를 계산하는 방법을 알게 한다.
6/9	(대분수)÷(자연수)	· (대분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 방법을 알게 한다. · (대분수)÷(자연수)를 계산하는 방법을 알게 한다.
7/9	공부를 잘했는지 알아봅시다	· 단원에서 배운 내용을 문제를 풀며 정리하게 한다.
8/9	문제 해결	· 분수의 나눗셈을 이용하여 정사각형의 넓이를 구하게 한다.
9/9	이야기 마당	· 바느질 겨루기 이야기를 통하여 분수의 나눗셈이 사용되는 상황을 경험하게 한다.

초등학교 6학년 1학기 2단원 분수의 나눗셈은 <표Ⅱ-4>와 같이 자연수가 제수(除數)였던 5학년 분수의 나눗셈과 달리, 분수가 제수(除數)인 분수의 나눗셈을 계산하도록 되어 있다. (자연수)÷(단위분수), 진분수끼리의 나눗셈, (자연수)÷(분수), 대분수의 나눗셈의 순서로 총 10차시로 구성되어 있다.

<표 Ⅱ-5> 분수의 곱셈 단원(6학년) 전개 계획

차시	주제	수업 내용 및 활동
1/10	단원 도입	· 스토리텔링을 통하여 분수의 나눗셈이 쓰이는 상황을 이해하게 한다.

2/10	(자연수)÷(단위분수)	· (자연수)÷(단위분수)의 계산 원리를 이해하게 한다. · (자연수)÷(단위분수)의 계산 방법을 발견하고 계산할 수 있게 한다.
3/10	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(1)	· 분모가 같은 (진분수)÷(단위분수)의 계산 원리를 이해하게 한다. · 분모가 같은 (진분수)÷(단위분수)의 계산 방법을 발견하고 계산할 수 있게 한다.
4/10	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(2)	· 분모가 같은 진분수끼리 계산하는 나눗셈의 계산 원리를 이해하게 한다. · 분모가 같은 진분수끼리 계산하는 나눗셈 방법을 발견하고 계산할 수 있게 한다.
5/10	분모가 다른 진분수끼리 나눗셈	· 분모가 다른 진분수끼리 계산하는 나눗셈의 계산 원리를 이해하게 한다. · 분모가 다른 진분수끼리 계산하는 나눗셈 방법을 발견하고 계산할 수 있게 한다.
6/10	(자연수)÷(분수)	· (자연수)÷(분수)의 계산 원리를 이해하게 한다. · (자연수)÷(분수)의 계산 방법을 발견하고 계산할 수 있게 한다.
7/10	대분수의 나눗셈	· 대분수의 나눗셈 방법을 이해하고 여러 가지 방법으로 계산할 수 있게 한다.
8/10	단원 평가	· 단원에서 배운 내용을 문제를 풀며 정리하게 한다.
9/10	문제 해결	· 분수의 나눗셈을 이용하여 실생활 문제를 해결하게 한다.
10/10	이야기 마당	· 분수의 나눗셈을 이용한 놀이를 통해 계산 기능과 수학적 의사소통 능력을 기르게 한다.

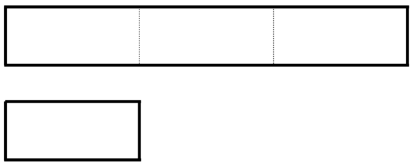
3. 분할과 반복 조작을 통한 분수지도

분수와 관련된 중요한 조작활동을 다음의 4가지로 요약하고 있다(Morton & McCloskey, 2008; 최근배, 2010 재인용).

첫째, 단위화하기(unitizing): 사물이나 사물들의 모임을 단위 또는 전체로 다루는 것을 의미한다.
둘째, 분할하기(partitioning): 단위나 전체를 합동인 부분으로 조각내는 활동을 의미한다.
셋째, 재편하기(disembedding): 전체를 본래대로 유지하면서 머릿속 상상으로 분할된 전체에서 몇 개의 부분을 복제하여 꺼내는 조작을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체를 4 부분으로 등분할하고 4 부분 중에서 3개를 재편함으로써 $\frac{3}{4}$을 만들 수 있다. Steffe & Olive(1996)는 "재편하기(disembedding)는 부분-전체의 비교에 바탕이 되는 근본적인 정신조작이다."라고 주장하고 있다.
끝으로, 반복하기(iterating): 부분과 동일한 크기의 복제본을 만들기 위하여 되풀이하기(repeating)의 조작을 의미한다.

위의 분수와 관련된 주요 조작활동 4가지 중 '분할(partitioning)' 스킴은 분수 조작에 있어 가장 핵심적인 스킴이다. 동일한 크기의 부분으로 분할함으로써 학생들은 $\frac{2}{3}$를 단순히 '3조각 중 2조각'이 아닌 '똑같이 나눈 3조각 중에서 2조각'으로 부분-전체로서의 분수를 인식할 수 있다.

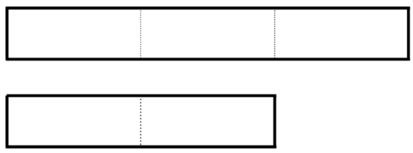
즉, 분할 단위분수 스킴(partitive unit fractional scheme)은 주어진 단위분수와 분할되지 않은 전체에서, 부분에 해당하는 단위분수를 반복하여 전체를 만들어봄으로써 전체에 대한 단위분수 부분의 상대적인 크기를 이해하도록 한다.



[그림 Ⅱ-12] 짧은 막대기의 크기는 $\frac{1}{3}$

또, 분할 스킴을 통해 단위분수와 전체 사이의 관계를 이해하면서, 반복(iterating) 조작 활동을 통해 단위분수에서 합성분수를 이해하게 되면, 자연수의 구성에서 1을 바탕으로 하듯이 분수에서 단위분수를 기본단위로 이해하여 분수에 대한 개념을 더 분명하게 할 수 있을 것이다(정은실, 2006).

이를 뒷받침하는 것이 분할 분수 스킴(partitive fractional scheme)으로, 이 스킴은 단위 분수와 전체사이의 관계를 유지하는 동안, 반복을 통한 단위 분수들로부터 합성분수(예를 들어 $\frac{2}{3}$는 2개의 $\frac{1}{3}$의 결합)를 만드는 것을 포함한다(최근배, 2010, p.413).



[그림 Ⅱ-13] 짧은 막대기의 크기는 $\frac{2}{3}$

최근배(2010)에 따르면, 위와 같은 분할과 반복 조작을 통한 분수지도가 주는 교육적 시사점은 수학적 개념형성을 위한 창조적 활동과 형성된 개념의 증명을 위한 정당화 활동을 경험시킬 수 있으며, 분수의 기본적인 단위인 단위분수를 바탕으로 분수개념형성에 중요한 역할을 할 수 있다는 것이다.

4. 선행연구 고찰

분수의 개념 및 연산지도에서 퀴즈네어 막대를 활용한 선행연구들을 살펴보면 <표 Ⅱ-6>과 같다.

<표 Ⅱ-6> 선행연구 내용 분석

연구년도	연구자	연구 내용
1999	김남희	퀴즈네어 막대를 활용한 지도가 수학 개념, 관계 및 구조를 이해하는데 도움을 준다는 연구
2001	신봉숙 외	퀴즈네어 막대와 그 외 효과적인 구체적 조작자료 활용방법을 제시하고 실제 학교현장에서 적용하여 그 효과성에 대해 서술한 연구
2002	류성림	초등수학 교육과정상에서 퀴즈네어 막대를 활용하여 지도할 수 있는 구체적인 실례를 제시한 연구
2003	고인자	퀴즈네어 막대를 활용하여 5학년 일반학생들을 대상으로 분수 연산의 효율적인 학습방법을 제시하고 그 효과성을 입증한 연구
2005	김용태	퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 사칙연산을 효율적으로 지도할 수 있는 방법을 제시한 연구
2010	최근배	분할과 반복 조작을 통한 분수지도가 단위분수를 바탕으로 분수개념형성에 중요한 역할을 할 수 있다는 것을 시사한 연구
2012	서은정	수학부진아에게 퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 덧셈, 뺄셈 지도가 효과적이었음을 보여준 연구

김남희(1999)는 퀴즈네어 막대가 학생들에게 수학적 개념형성과 기호 간의 관계 및 구조를 이해하는데 시각적, 인지적으로 도움을 준다고 하였다. 류성림(2002) 역시, 퀴즈네어 막대의 활용성을 알리고, 초등학교 수학 교육과정에서 퀴즈네어

막대를 활용하여 지도할 수 있는 학년과 영역을 추출하여 지도할 수 있는 구체적인 실례를 연구하였다.

퀴즈네어 막대를 활용하여 분수 영역을 지도한 사례로는 신봉숙 외(2001), 고인자(2003), 김용태(2005), 서은정(2012)의 연구가 있었는데, 김용태는 일반 학생들을 대상으로 퀴즈네어 막대를 활용할 수 있는 지도방안을 제시하였고, 신봉숙은 그 지도방안을 토대로 일반학생들에게 실제 적용을 하였다. 고인자, 서은정은 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 덧셈, 뺄셈 연산 영역을 지도하였으며, 특히 서은정은 부진학생들에게 분수의 덧셈, 뺄셈을 지도하여 퀴즈네어 막대의 효과성을 입증하였다.

또, 최근배(2010)는 분수개념형성을 위한 활동으로 단위분수를 중심으로 분할하기와 반복하기를 중요하게 다루었다. 분수에서 단위분수는 가장 기본적인 단위이므로 수학 부진학생들에게 단위분수를 기본으로 한 분할과 반복 활동은 흥미를 유발하면서도 분수 개념형성에 도움을 줄 수 있을 것이다.

위의 선행연구들을 통해, 초등학교 수학 수업 현장에서 퀴즈네어 막대가 효과적인 조작교구이며, 상당한 부분 학생들에게 영향을 주고 있다는 것을 확인할 수 있다. 또, 수학 부진학생들에게 분수의 덧셈, 뺄셈 연산을 퀴즈네어 막대로 지도한 효과도 입증됨을 확인할 수 있었으나, 아직 분수의 곱셈, 나눗셈 연산에서도 효과가 있는 지 확인되지 않았으며, 수학적 추론을 필요로 하는 분수의 나눗셈에서도 퀴즈네어 막대가 효과적인 교구인지 확인할 수 있다는 점에서 이번 연구는 의의가 있다.

따라서 본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈에서 성적이 부진한 학생들의 오류를 진단하고, 단위분수를 기본으로 한 분할과 반복 활동을 퀴즈네어 막대를 활용하여 지도함으로써 학생들의 오류를 교정할 수 있는 효율적인 교수·학습 방법을 찾아보고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

초등학교 수학과 5, 6학년 분수의 곱셈과 나눗셈에서 부진아의 오류 유형을 분석하고 퀴즈네어 막대를 활용하여 지도하기 위해 이번 연구에서 연구의 대상, 연구의 절차 및 내용, 연구의 방법, 검사 도구 등을 살펴보면 다음과 같다.

1. 연구의 대상

분수의 곱셈과 나눗셈 영역 부진아들의 오류 유형 및 사고를 분석하기 위해 본 연구자가 소속된 제주특별자치도 서귀포시에 소재하고 있는 S초등학교 6학년 164명을 대상으로 교과서 내 기본 문제들로 이루어진 사전 검사지를 풀도록 하였다. 이 중, 38명의 학생이 60% 미만의 성취도를 얻었으며, 지적장애와 학습장애가 있는 3명을 제외하고 사전 검사지 성적 하위 10%의 학생 중 담임교사의 추천과 자발적으로 희망하였던 학생 Y와 학생 J, 학생 S를 연구대상으로 선정하였다. 3명의 연구대상 학생들의 특징은 다음과 같다.

학생 Y: 사전 검사 성적이 100점 만점에서 20점(학년 평균 72.6점)으로 164명 중 154등을 하였다. 수학에 대한 큰 거부감은 없으나 수학을 암기 과목처럼 접근하여, 단원을 끝내고 다시 문제를 풀었을 때, 성취도가 현저히 낮아지는 특징이 있다.

학생 J: 사전 검사 성적이 100점 만점에서 40점(학년 평균 72.6점)으로 164명 중 140등을 하였다. 차분하고 꼼꼼한 성격이나 분수의 나눗셈 부분의 오개념으로 사전검사의 결과가 낮았다.

학생 S: 사전 검사 성적이 100점 만점에서 4점(학년 평균 72.6점)으로 164명 중 162등을 하였다. 수학과에서 매우 부정적인 가치관이 형성되어, 본인을 ‘수포자(수학을 포기한 사람)’라고 일컬으며, 수학과 전 영역에서 매우 낮은 성취도를 얻고 있다.

2. 연구의 절차 및 내용

<표 Ⅲ-1> 연구의 절차 및 내용

연구 절차	내 용	기 간
연구의 방향 설정	· 연구 주제 선정을 위한 자료 수집 · 주제 설정	2016년 1월
문헌 연구 및 선행연구 조사	· 수학 학습 부진아 지도방안에 대한 선행연구 조사 · 퀴즈네어 막대를 활용한 분수 연산지도에 관한 문헌 연구 조사	2016년 2월 ~2016년 6월
연구 추진 계획 수립	· 연구 실행 계획 수립 · 연구 과제 및 처리 방안 수립 · 연구 결과 처리 방안 수립	2016년 6월 ~2016년 7월
연구 실행	· 사전 검사 및 오류 유형 분석 · 퀴즈네어 막대를 활용한 부진아 지도 · 사후 검사를 통한 효과 확인 분석	2016년 8월 ~2016년 9월
연구 논문 작성	· 연구 자료 정리 · 논문 작성	2016년 7월 ~2016년 12월

3. 연구 방법

첫째, 수학 학습부진아들의 분수의 곱셈과 나눗셈 계산에서 나타나는 오류를 분석하기 위해, 초등학교 수학 5학년 1학기, 2학기, 6학년 1학기 교과서 내의 활동 문제를 바탕으로 사전 검사를 실시하였다. 사전 검사지에 학생들이 풀어 놓은 문제 계산 과정을 분석하여 오류 유형을 파악하였고, 개별 면담을 통하여 어떤 오개념을 가지고 답을 유도하였는지 분석하였다.

둘째, 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 곱셈과 나눗셈 계산을 학습하였을 때, 사전 검사에서 나타난 오류의 변화를 분석하기 위해, 아침활동 시간 30분을 활용하여 분수의 곱셈과 나눗셈 지도를 하였다. 퀴즈네어 막대로 단위분수의 의미를 먼저 이해하게 한 후, 분수의 곱셈과 나눗셈 문제를 교사의 안내를 통하여 해결하기, 학생 스스로 퀴즈네어 막대 활동하기, 퀴즈네어 막대 활동을 통해 알고리즘 유도하기, 알고리즘으로 풀어보기 순서로 지도하였다. 지도 시 사용된 분수의 곱셈과 나눗셈 문제는 교과서 내의 문제를 활용하였고, 지도과정은 음성 녹음으로 기록하였다. 12차시의 지도를 마치고 일주일 정도 흐른 후, 사전 검사지를 다시 풀어보게 하여 사전, 사후의 오류변화를 분석하였다.

셋째, 분수의 개념 및 연산지도에 효율적인 조작활동 내용을 제시하기 위해, 퀴즈네어 막대로 수학 부진아 학생들을 지도한 자료 일체를 정리하였고, 지도 시 불필요하다고 느끼거나 추가해야 할 부분을 제언하였다.

4. 검사 도구

연구를 진행하기 위해 선정되었던 부진 학생의 오류분석은 8월 25일(목)부터 31일(수)까지 사전 검사지 풀이과정과 3회에 걸친 면담을 통해 오류유형 및 원인을 분석하였다. 퀴즈네어 막대를 활용한 부진 학생의 지도는 아침활동 시간을 활용하여 9월 1일(목)부터 9월 23일(금)까지 12차시 실시하였다. 이 후, 학생들의 오류 변화를 확인하기 위해 9월 26일(월)에 사전 검사지로 다시 한 번 사후 검사를 실시하였다.

오류분석 및 오류변화 확인을 위한 사전검사 및 사후검사 도구로 2009 개정 수학 5, 6학년 교과서 내의 활동 문제들을 활용하였으며 문항 수는 25문항으로 [부록 1]에 제시하였다.

퀴즈네어를 활용하여 12차시 지도를 하는 동안 학생들이 활용하게 될 활동지는 문제 칸, 퀴즈네어 활동 칸, 풀이과정 칸을 구분하였고 활동지는 [부록 2]에 제시하였다.

5. 분수의 곱셈, 나눗셈 교수·학습 계획 수립

분수의 곱셈, 나눗셈 부진아 지도는 초등학교 수학 5학년 1학기 6단원. 분수의 곱셈, 5학년 2학기 3단원. 분수의 나눗셈, 6학년 1학기 2단원. 분수의 나눗셈 단원을 참고하여 <표 Ⅲ-2>와 같이 교수·학습 계획을 수립하였다.

<표 Ⅲ-2> 퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도 방향

순서	주제	수업 내용 및 활동
1	퀴즈네어 막대와의 만남	· 퀴즈네어 막대 소개, 1과 단위분수의 이해 · 퀴즈네어 막대로 분수 나타내기
2	(분수)×(자연수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 (분수)×(자연수) 나타내기 · (분수)×(자연수)의 의미, 계산 원리 파악하기
3	(자연수)×(분수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 (자연수)×(분수) 나타내기 · (자연수)×(분수)의 의미, 계산 원리 파악하기
4	(분수)×(분수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 (분수)×(분수) 나타내기 · (분수)×(분수)의 의미, 계산 원리 파악하기
5	(자연수)÷(자연수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 (자연수)÷(자연수) 나타내기 · (자연수)÷(자연수)의 의미, 계산 원리 파악하기
6	(분수)÷(자연수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 (분수)÷(자연수) 나타내기 · (분수)÷(자연수)의 의미, 계산 원리 파악하기
7	(자연수)÷(분수)의 계산	· 포함제 상황으로 '÷(분수)' 도입 · 퀴즈네어 막대로 (자연수)÷(분수) 나타내기 · (자연수)÷(분수)의 의미, 계산 원리 파악하기
8	분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 분모가 같은 (분수)÷(분수) 나타내기 · 분모가 같은 (분수)÷(분수) 계산 원리 파악하기
9	분모가 다른 (분수)÷(분수)의 계산	· 퀴즈네어 막대로 나눗셈의 곱셈변환 복습하기 · 분모가 다른 (분수)÷(분수) 계산하기
10	대분수의 나눗셈의 계산	· 퀴즈네어 막대로 나눗셈의 곱셈변환 복습하기 · 대분수의 나눗셈 계산하기

연구자가 선정한 부진학생들은 문제은행식의 문제 풀이나 암기 형태로 수학을 학습해 오며 누적된 피로감이 공통적으로 관찰되었다. 따라서, 퀴즈네어를 활용한 분수의 곱셈, 나눗셈 연산 지도에서는 최소한의 문제를 활용하여 원리 탐구와 이해 중심으로 진행하기 위해 하루에 지도하는 문항은 최대 5문제를 넘지 않도록 구성하였다. 지도 방향에 맞게 분수의 곱셈 지도 문항은 2009 개정 교육과정에 제시된 학습 목표 수준과 교과서를 참고하였고, 분수의 나눗셈은 '나눗셈의 곱셈 변환방법' 원리를 이해하는 활동 위주로 <표 Ⅲ-3>과 같이 구성하였다.

<표 Ⅲ-3> 퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도 문항

차시	문제 유형	문제
1	· 1과 단위분수의 이해 · 퀴즈네어 막대로 분수 나타내기	① 갈색 막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대 ② 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대 ③ 주황색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대 ④ 갈색 막대의 $\frac{3}{4}$에 해당하는 막대 ⑤ 파랑색 막대의 $\frac{2}{3}$에 해당하는 막대
2	(진분수)×(자연수)의 계산	① $\frac{4}{7}\times 2$ ② $\frac{5}{8}\times 4$ ③ 공원을 한 바퀴 돌면 $\frac{3}{4}$km입니다. 공원을 5바퀴 돌았다면 모두 몇 km 입니까?
3	(대분수)×(자연수)의 계산	① $1\frac{3}{8}\times 2$ ② $2\frac{3}{5}\times 3$ ③ 하루에 물을 $5\frac{1}{2}$L씩 마십니다. 3일 동안 마신 물은 몇 L 입니까?
4	(자연수)×(진분수)의 계산	① $3\times\frac{1}{4}$ ② $2\times\frac{3}{8}$ ③ 용돈을 2,000원 받았습니다. 그 중의 $\frac{3}{5}$을 공책을 사는데 썼습니다. 공책을 사는데 쓴 돈은 얼마입니까?

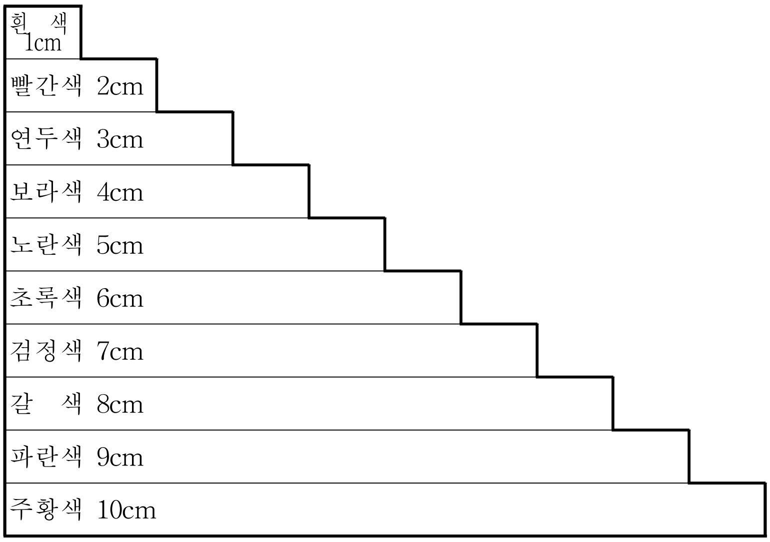
5	(자연수)×(대분수)의 계산	① $2\times 2\frac{2}{3}$ ② $8\times 1\frac{2}{5}$ ③ $3\times 1\frac{1}{4}$
6	(분수)×(분수)의 계산	① $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}$ ③ $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}$
7	(자연수)÷(자연수)의 계산	① 케이크 3개를 8명이 똑같이 나누어 먹었습니다. 한 사람이 먹은 케이크는 하나의 몇 분의 몇 입니까? ② 1÷3 ③ 1÷5 ④ 3÷5 ⑤ 나눗셈의 곱셈 변환 규칙 이해하기 (÷a=×$\frac{1}{a}$)
8	(분수)÷(자연수)의 계산	① 나눗셈의 곱셈 변환 규칙 복습하기 (÷a=×$\frac{1}{a}$) ② $\frac{1}{4}\div 2$ ③ $\frac{3}{5}\div 4$ ④ $1\frac{1}{2}\div 4$
9	(자연수)÷(분수)의 계산	① 등분제와 포함제의 이해 사탕 15개를 5명이 나누어 먹으면 한 사람은 몇 개씩 먹을 수 있나요? vs 사탕 15개를 5개씩 나누어 먹으면 몇 명이 먹을 수 있나요? ② $1\div\frac{1}{4}$ ③ $2\div\frac{1}{4}$ ④ $3\div\frac{1}{4}$
10	분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산	① 등분제와 포함제의 복습 ② $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$ ③ $\frac{7}{9}\div\frac{1}{9}$ ④ $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{4}{5}\div\frac{2}{5}$
11	분모가 다른 (분수)÷(분수)의 계산	① 나눗셈의 곱셈 변환 규칙 복습하기 (÷a=×$\frac{1}{a}$) ② $\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}$ ③ $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}$ ④ $\frac{3}{8}\div\frac{2}{5}$
12	대분수의 나눗셈의 계산	① 나눗셈의 곱셈 변환 규칙 복습하기 (÷a=×$\frac{1}{a}$) ② $3\frac{1}{8}\div\frac{3}{4}$ ③ $3\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{4}$

6. 퀴즈네어 막대의 활용방안

가. 퀴즈네어 막대의 구성

퀴즈네어 막대(Cuisenaire rods)는 벨기에의 초등학교 교사였던 조지 퀴즈네어(G. Cusenaire)가 1920년대 처음 고안한 수학 조작교구로, 1953년 영국의 수학교육자인 가테그노(Caleb Gattegno)에 의해 널리 알려지게 되었다. 이 막대는 자연수와 분수의 사칙연산과 같은 수학적 개념을 탐구하고 구체화할 수 있는 자료로서, 수학적 관계를 나타내기 위해 어떠한 눈금도 그려져 있지 않으며 서로 다른 색깔과 길이의 막대로 구성되어 있다.

퀴즈네어 막대는 한 막대에 일정 값을 주었을 때, 다른 막대와의 관계, 즉 길이의 비에 따라 나머지 9개의 막대 값이 정해진다. [그림Ⅲ-1]은 퀴즈네어 막대의 구성으로, 예를 들어 주황색 막대에 값 1을 주면 흰색 막대는 $\frac{1}{10}$(0.1)이 되고, 노란색 막대의 값 1을 주면 흰색 막대는 $\frac{1}{5}$(0.2)이 된다.



[그림 Ⅲ-1] 퀴즈네어 막대

나. 분수에서 단위(1)의 지도

분수를 이해하는 데 있어, 전체 1과 단위분수의 개념 이해는 매우 중요하다. 분수 이전에 자연수 단계에서는 이산량 모델을 통해 자연스럽게 1을 인지하였지만, 분수에서 1은 자연수에서의 1과 달리 상대적인 값을 의미하므로 오개념을 형성할 여지가 충분하다. 분수의 여러 가지 의미 중에서 비의 개념은 분수를 이해하는 한 기준이자, 분수 연산의 기본 개념을 제시하는데 퀴즈네어 막대로 나타내는 분수는 전체와 부분 사이의 비를 나타내는 것이므로(고인자, 2003), 분수의 연산을 지도하는데 퀴즈네어 막대는 좋은 교구가 될 수 있다.

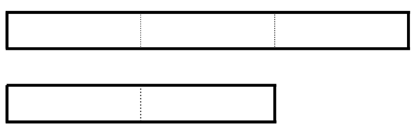
예를 들어, [그림 Ⅲ-1]에서 파란색 막대(9)를 기준으로 연두색 막대(3)는 $\frac{1}{3}$이고, 초록색 막대(6)가 기준일 때 연두색 막대(3)는 $\frac{1}{2}$이므로, 퀴즈네어 막대의 조작을 통해 전체 1과 분수의 상대적 크기의 표현을 자연스럽게 지도할 수 있다.

다. 분수로 나타내기

퀴즈네어 막대로 분수를 나타낼 때의 핵심은 기준, 즉 전체가 되는 막대와 비교, 즉 부분이 되는 막대 사이의 비를 나타내는 것이다. 따라서, 분수로 나타내기 위해서는 전체 단위(1)가 되는 막대를 정해야 한다.

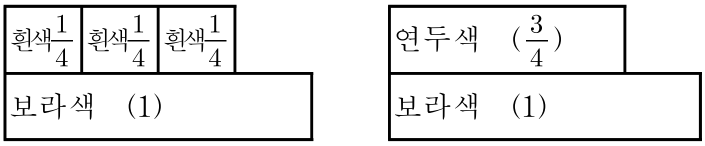
예를 들어, $\frac{3}{4}$을 나타내려고 한다면, [그림 Ⅲ-2]와 같이 보라색 막대(4)를 전체 단위(1)가 되는 막대로 정하고, 분할과 반복 조작의 관점에서[1] 흰색 막대(1) 3개

1) 분할 분수 스킴(partitive fractional scheme)은 분할 단위 분수 스킴의 일반화이다. 이 스킴은 단위 분수와 전체사이의 관계를 유지하는 동안, 반복을 통한 단위 분수들로부터 합성분수(예를 들어 $\frac{2}{3}$는 2개의 $\frac{1}{3}$의 결합)를 만드는 것을 포함한다(최근배, 2010, p.413).



[그림 Ⅱ-3] 짧은 막대기의 크기는 $\frac{2}{3}$

를 늘여 놓거나, 연두색 막대(3)를 찾는 방식으로 나타낼 수 있을 것이다. 이러한 일련의 과정을 통해, 학생들에게 단위(1)에 대한 정보가 분모에 포함되어 있음을 발견하도록 유도할 수 있다.



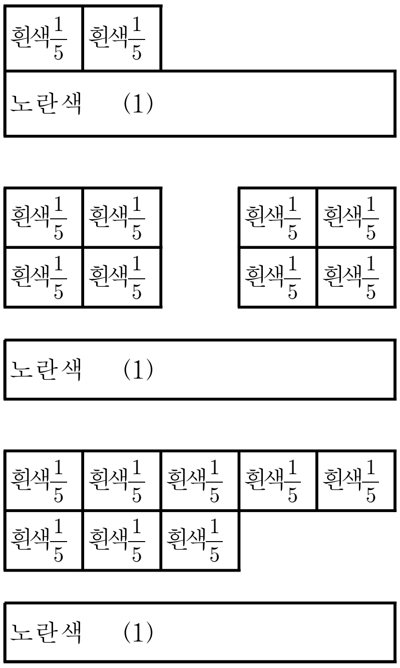
[그림 Ⅲ-2] $\frac{3}{4}$을 퀴즈네어 막대로 나타내기

라. 분수의 곱셈 지도 방법

1) (진분수)×(자연수)를 퀴즈네어 막대로 계산하기

[그림 Ⅲ-3]은 $\frac{2}{5}\times 4$을 퀴즈네어 막대로 조작하는 과정이다. 1단계, $\frac{2}{5}$를 나타내기 위해 노란색 막대(5)를 기준으로 단위분수 $\frac{1}{5}$에 해당하는 흰색 막대(1)를 2개 놓았다. 2단계, (분수)×(자연수)의 상황은 묶음의 의미로 해석될 수 있으므로 $\frac{2}{5}\times 4$는 $\frac{1}{5}$이 2인 $\frac{2}{5}$가 4묶음 있는 것이고, 따라서 $\frac{1}{5}$이 2개씩 4묶음 8개 있는 것으로 $\frac{8}{5}$이라는 값을 얻을 수 있다. 가분수 형태로 답이 나왔기 때문에 전체 단위 1만큼 흰색 막대를 놓은 것이 1, 나머지 $\frac{1}{5}$이 3개는 $\frac{3}{5}$으로 $1\frac{3}{5}$이라는 대분수 형태의 답까지 유도할 수 있다.

이러한 퀴즈막대 조작활동을 통해, 학생들은 $\frac{2}{5}\times 4=\frac{2\times 4}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$이고, $\frac{분자}{분모}\times 자연수=\frac{분자\times 자연수}{분모}$의 계산 원리를 발견하게 한다.



$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}\times 2$$

⇓

$$\frac{2}{5}\times 4=(\frac{1}{5}\times 2)\times 4$$
$$=\frac{1}{5}\times 8$$
$$=\frac{8}{5}$$

⇓

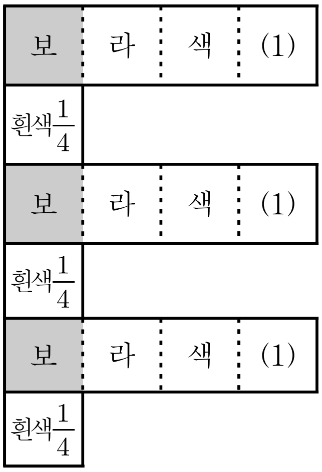
$$\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

[그림 Ⅲ-3] $\frac{2}{5}\times 4$을 퀴즈네어 막대로 해결하기

2) (자연수)×(분수)를 퀴즈네어 막대로 계산하기

[그림 Ⅲ-4]는 $3\times\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 조작한 과정이다. 1단계, 3은 기준이 되는 막대가 3개 있다는 뜻이고, 퀴즈네어 막대에서 기준에 대한 정보는 분수의 분모에서 찾을 수 있으므로 기준 막대를 보라색 막대(4)로 정할 수 있다. 2단계, '$\times\frac{1}{4}$'은 각 보라색 막대의 $\frac{1}{4}$로 해석할 수 있고, 보라색 막대의 $\frac{1}{4}$인 흰색 막대(1)가 3개 놓여진 것을 통해, $3\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}$임을 알 수 있다.

이 활동을 통해, 학생들은 $\text{자연수}\times\frac{\text{분자}}{\text{분모}}=\frac{\text{자연수}\times\text{분자}}{\text{분모}}$의 계산 원리를 발견하고 곱셈의 교환법칙으로도 분수의 곱셈을 해결할 수 있음을 알 수 있다.



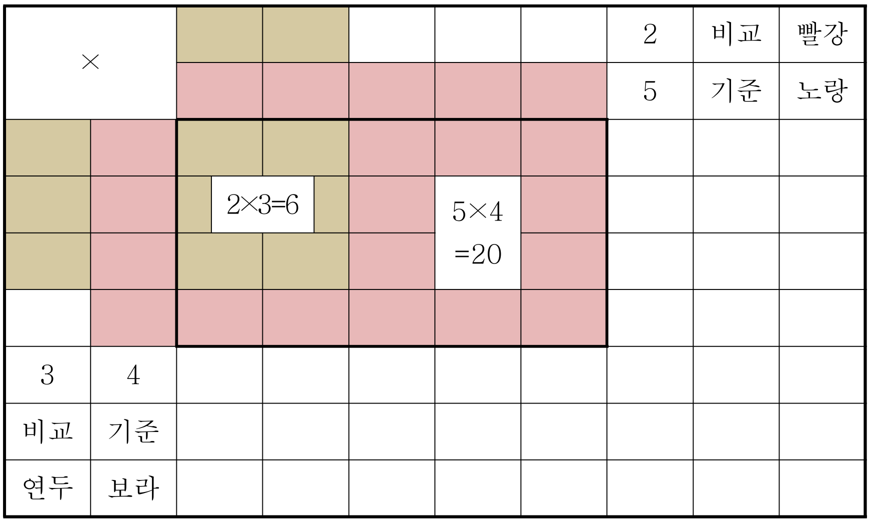
$3\times\frac{1}{4}$은 '3의 $\frac{1}{4}$'을 의미
각 막대에서 $\frac{1}{4}$만큼에 해당하는
흰색 막대가 3개 선택 되므로
$3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$을 구할 수 있음.

[그림 Ⅲ-4] $3\times\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 해결하기

3) (분수)×(분수)를 퀴즈네어 막대로 계산하기

[그림 Ⅲ-5]는 신봉숙, 김한나, 최대욱, 박주영, 김용태(2001)에 의하여 개발된 분수의 곱셈 정렬모델이다. 정렬모델을 활용하여, $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$을 계산해 보면, 1단계, $\frac{2}{5}$를 나타내기 위해 가로축 기준막대와 비교막대 영역에 노란색 막대(5)와 빨간색 막대(2)를 놓는다. 2단계, $\frac{3}{4}$을 나타내기 위해 세로축 기준막대와 비교막대 영역에 각각 보라색 막대(4)와 연두색 막대(3)를 둔다. 3단계, 기준막대 면적과 비교막대 면적을 확인하여 부분(비교)과 전체(기준)의 비의 개념인 분수로 나타내면, $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{6}{20}$과 같은 분수끼리의 곱셈 결과를 알게 된다.

(분수)×(분수)의 상황은 넓이를 바탕으로 해석될 수 있고, 분수의 곱셈은 '~중에서' 또는 ' ~의'라는 의미를 가지고 있으므로 겹쳐진 공통부분을 확인해야 함을 생각한다면, 퀴즈네어 막대와 정렬모델을 활용한 [그림 Ⅲ-5]는 충분히 학교 현장에서도 활용가능 한 모델일 수 있다.



[그림 Ⅲ-5] $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$을 퀴즈네어 막대로 해결하기

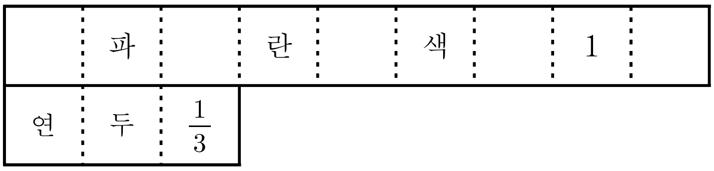
마. 분수의 나눗셈 지도 방법

1) 나눗셈의 곱셈 변환 방법 이해하기

분수의 나눗셈 개념 형성을 위하여 먼저 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 통한 사고의 확장이 필요하다. 분수의 나눗셈은 초등학교 수학에서 대표적인 도구적 이해의 지도 방법이 이루어지는 단원이라고 해도 과언이 아니다. 분수의 나눗셈을 해야 하는 상황이 억지스러울 뿐만 아니라, 이전의 수학적 개념을 토대로 알고리즘을 유도해 내는 과정이 복잡한 것도 도구적 이해가 이루어지는 많은 이유 중의 하나이다.

우선, 분수의 나눗셈을 지도하기 위해, (자연수)÷(자연수)의 나눗셈 상황을 통해 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 지도할 수 있다. [그림 Ⅲ-6]은 퀴즈네어 막대를 활용하여 1÷3을 해결한 과정이다. 파란색 막대(9) 1개를 학생들에게 제시하고, 이 막대를 세 부분으로 나눌 수 있는 막대를 찾도록 한다. 학생들은 연두색 막대를 곧 찾아낼 것이며, 파란색 막대와 비교했을 때, 연두색 막대가 $\frac{1}{3}$을 의미한다는 것을 이미 학습하였다. 이와 같은 간단한 퀴즈네어 막대 조작활동을 통해 학생들

에게 $1 \div 3 = 1 \times \frac{1}{3}$ 임을 유도해내고, 비슷한 종류의 (자연수)÷(자연수)를 퀴즈네어 막대로 조작하면서, $\div a = \times \frac{1}{a}$ 와 같다는 결과, 즉 나눗셈의 곱셈 변환을 지도할 수 있을 것이다.



[그림 Ⅲ-6] 1÷3을 퀴즈네어 막대로 해결하기

2) 나눗셈의 등분제와 포함제 개념 이해하기

'빵 2개를 $\frac{2}{3}$ 명에게 나누어 주려고 한다. 몇 조각씩 나누어야 하는가?' 이 문제를 접근하는데 전혀 어색함을 느끼지 못한다면, 이미 분수의 나눗셈을 도구적 이해로 해결하는 데 익숙해 진 사람일 것이다. 학생들에게 나눗셈 문제를 제시하고 문장제 문제를 만들어보라고 했을 때, 사람을 $\frac{2}{3}$ 명과 같이 분수로 나타내는 오류가 자주 보인다. 이는 분수 나눗셈의 의미와 연산을 이해하지 못하고 문제 해결력을 떨어뜨리는 원인 중 하나가 될 것이다.

나눗셈의 등분제와 포함제의 문제 상황은 같은 나눗셈이 적용되지만 구체적인 조작활동이 다르다. 등분제는 사과 15개를 3명에게 나누어 준다면 몇 개를 나눠줄 수 있는지에 대한 문제로 분배와 시행착오에 의한 나누기로 조작해 볼 수 있지만, 포함제는 사과 15개를 3개씩 나누어 준다면 몇 명에게 나눠줄 수 있는지에 대한 문제로 할당과 동수누감으로 구체적인 조작활동이 이루어진다(4-1 지도서, p.152).

제수가 분수인 분수 나눗셈의 경우, 나눗셈 상황은 포함제 접근이 자연스럽다. [그림 Ⅲ-7]은 $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$ 을 퀴즈네어 막대로 해결한 과정으로, 분모 6을 참고하여 기준을 초록색 막대(6)로 정하고 $\frac{5}{6}$ 을 의미하는 노란색 막대(5)를 $\frac{1}{6}$ 을 의미하는 흰

색 막대(1)로 몇 번 뺄 수 있는 지 확인한다. 이 활동을 통해, $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}=5\div1=5$임을 유도하고 '분모가 같을 때는 분자끼리 나눈다'나 나눗셈의 곱셈변환과도 연관시켜 지도할 수 있을 것이다.

생각 열기 가로가 $\frac{5}{6}$ m인 종이를 $\frac{1}{6}$ m씩 잘라 초대장을 만들면 모두 몇 장을 만들 수 있을지 알아봅시다.

[그림 Ⅲ-7] $\frac{5}{6}\div\frac{1}{6}$을 퀴즈네어 막대로 해결하기

Ⅳ. 연구 결과 및 해석

1. 오류 유형 및 원인 분석

가. 사전 검사를 통한 오류 문항 파악

사전 검사의 문항은 2009 개정 수학 교과서의 활동 문제를 활용하였으며 각 차시별 단순 연산 1문제, 유형별 문장제 문제 1문제를 추출하였다. 사전 검사 결과 <표 Ⅳ-1>과 같이, 총 25문제 중 학생 Y는 19문제, 학생 J는 15문제, 학생 S는 23문제에서 오류를 보였다.

<표 Ⅳ-1> 사전검사 문항별 결과

(정답: ○, 오답: ×)

번호	문제 유형	문제	학생 Y	학생 J	학생 S
1	(진분수)×(자연수)	$\frac{2}{5}\times 5$	×	○	○
2	(대분수)×(자연수)	$1\frac{1}{6}\times 8$	×	×	×
3	(자연수)×(진분수)	$10\times\frac{4}{15}$	×	○	×
4	(자연수)×(대분수)	$18\times 1\frac{7}{12}$	×	×	×
5	(단위분수)×(단위분수)	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$	×	○	○
6	(진분수)×(진분수)	$\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}$	×	○	×
7	(진분수)×(진분수)	$\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}$	×	○	×
8	(대분수)×(대분수)	$3\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{4}$	×	○	×
9	세 분수의 곱셈	$\frac{7}{10}\times\frac{21}{10}\times\frac{5}{8}$	×	○	×

10	세 분수의 곱셈 문장제 문제	전체 학생 수의 $\frac{1}{6}$은 6학년입니다. 6학년 중에서 $\frac{2}{5}$가 여학생이고 그 중에서 $\frac{3}{4}$이 수학을 좋아합니다. 수학을 좋아하는 6학년 여학생은 전체 학생의 몇 분의 몇입니까?	×	×	×
11	(자연수)÷(자연수)	1÷4	×	○	×
12	나눗셈의 몫	5÷2	○	○	×
13	(진분수)÷(자연수)	$\frac{3}{5} \div 4$	×	×	×
14	(가분수)÷(자연수)	$\frac{6}{5} \div 2$	×	×	×
15	(대분수)÷(자연수)	$2\frac{4}{5} \div 4$	×	×	×
16	나눗셈의 몫 문장제 문제	케이크 3개를 8명이 똑같이 나누어 먹었습니다. 한 사람이 먹은 케이는 케이크 하나의 몇 분의 몇 입니까?	×	○	×
17	(자연수)÷(단위분수)	$2 \div \frac{1}{3}$	×	×	×
18	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(1)	$\frac{7}{9} \div \frac{1}{9}$	○	×	×
19	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(2)	$\frac{14}{15} \div \frac{7}{15}$	○	×	×
20	분모가 다른 진분수끼리 나눗셈	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$	○	×	×
21	분모가 다른 진분수끼리 나눗셈	$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$	○	×	×
22	(자연수)÷(분수)	$7 \div \frac{3}{4}$	×	×	×
23	(자연수)÷(분수)	$4 \div \frac{2}{3}$	○	×	×
24	대분수의 나눗셈	$3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4}$	×	×	×
25	대분수의 나눗셈 문장제 문제	보미는 어머니께서 만드신 $7\frac{1}{2}$L 만큼의 과일 주스를 $1\frac{1}{2}$L씩 나누어 담아서 이웃에게 선물하려고 합니다. 몇 명의 이웃에게 나누어 줄 수 있을까요?	×	×	×

나. 학생 Y 문항별 오류 유형 및 원인 분석

<표 Ⅳ-2> 학생 Y 오류유형 및 원인 분석 1

문제 유형	분수의 곱셈 : (분수)×(자연수)
오류 유형	×(자연수)를 ÷(자연수)를 풀 듯 역수로 고쳐서 계산
오류 원인	대분수를 가분수로 고치기는 잘함. 최근에 6학년 과정에서 배운 분수의 나눗셈 계산 방법과 분수의 곱셈 계산 방법을 혼동.
오류 내용	1. $\frac{2}{5}\times5=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}=\dots$ 2. $1\frac{1}{6}\times8=\frac{7}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{48}$

학생 Y의 경우, 5학년에서 학습한 분수의 곱셈 10문제 중 10문제를 전부 오답하였다. <표 Ⅳ-2>의 오류 내용 1번과 2번에서 확인할 수 있듯이, '×(자연수)'를 '÷(자연수)'를 풀 듯 역수로 고쳐서 계산하는 오류를 범하고 있다. 그 오류를 제외하고는, 대분수를 가분수로 잘 고치고 있으며, 분모는 분모끼리 곱하고, 분자는 분자끼리 곱한다는 분수의 곱셈 알고리즘에도 익숙하다. 학생 Y와의 개별 면담 결과, 6학년 1학기에서 배운 분수의 나눗셈의 계산 방법을 그대로 적용하였고, "이 문제는 나눗셈이 아니고 곱셈 문제인데?"라는 교사의 물음에 "아! 헷갈렸어요."라고 하며 바로 정답을 구하는 모습을 보였다.

이와 같은 오류의 원인은 분수의 곱셈을 알고리즘으로 암기하여 학습한 후, 1년이 지나자 분수의 나눗셈 알고리즘을 암기하고 잊어버렸기 때문으로 보인다.

<표 Ⅳ-3> 학생 Y 오류유형 및 원인 분석 2

문제 유형	분수의 곱셈 : (분수)×(분수)
오류 유형	×(분수)를 ÷(분수)를 풀 듯 역수로 고쳐서 계산
오류 원인	분수의 나눗셈 계산 방법과 분수의 곱셈 계산 방법을 혼동.
오류 내용	5. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\div\frac{4}{1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ 8. $3\frac{3}{5}\times2\frac{1}{4}=\frac{18}{5}\div\frac{4}{9}=\frac{72}{45}=1\frac{27}{45}$

학생 Y의 분수의 곱셈 문제 오류는 <표 Ⅳ-3>에서 보듯, 여전히 분수의 나눗셈에 영향을 받는다. (분수)×(분수)를 (분수)÷(분수의 역수)로 바꾼 후, 곱셈처럼 풀고 있다. 학생 Y가 곱셈과 나눗셈의 의미, 계산 방법을 완전히 혼동하고 있는 것을 볼 수 있는 오류유형이다.

이와 같은 오류의 원인은 관계적 이해를 무시한 채, 막연히 ‘역수를 곱한다’라는 방법만을 기억하고 지나치게 암기 위주의 문제 풀이식 학습을 한 결과로 보인다.

<표 Ⅳ-4> 학생 Y 오류유형 및 원인 분석 3

문제 유형	분수의 곱셈 : (자연수)×(분수)
오류 유형	피승수 인 자연수를 역수로 고쳐서 계산
오류 원인	분수의 나눗셈 계산 방법과 분수의 곱셈 계산 방법을 혼동 자연수끼리의 곱셈 계산 실수
오류 내용	3. $10\times\frac{4}{15}=\frac{1}{10}\times\frac{4}{15}=\frac{4}{150}$ 4. $18\times1\frac{7}{12}=\frac{1}{18}\times\frac{19}{12}=\frac{19}{206}$

<표 Ⅳ-4>의 오류유형에서는 피승수 자연수 부분을 역수로 고쳐 계산하고 있는 것이 관찰된다. 또, 분수의 연산과는 별개로 4번 문제에서는 ‘18×12’의 자연수끼리의 곱셈도 206으로 답하고 있어, 학생 Y가 간단한 자연수 연산에서도 실수하고 있음을 확인하였다. <표 Ⅳ-2>와 <표 Ⅳ-3>의 오류처럼 승수의 분수를 역수로 고치는 일관성 있는 오류가 아니라 피승수도 역수로 고치는 오류가 발견되는 것으로 보아, 학생 Y는 다소 정답률이 높았던 분수의 나눗셈 문제도 ‘역수’로 만드는 것에 지나치게 집착하고 있을 가능성이 보인다.

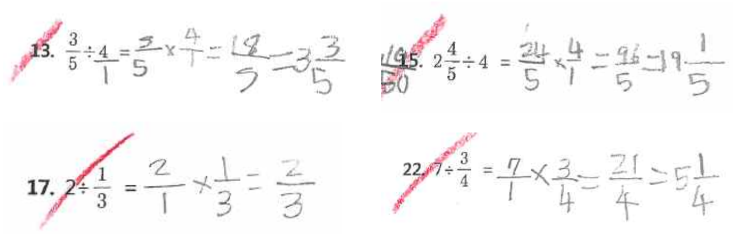
<표 Ⅳ-5> 학생 Y 오류유형 및 원인 분석 4

문제 유형	분수의 나눗셈 : (자연수)÷(자연수)
오류 유형	소수의 나눗셈으로 나타내는 과정에서 계산의 실수
오류 원인	직관적 추론의 오류, 분수와 소수의 관계 추론의 오류
오류 내용	11. 1÷4 =0.4 12. 5÷2 =2.5

<표 Ⅳ-5>의 11번과 12번 문제는 (자연수)÷(자연수)를 통해 나눗셈의 곱셈 변환을 유도하는 문제였으나, 사전검사를 실시했던 164명 38명의 학생이 분수의 곱셈, 나눗셈 시험임을 알고 있음에도 소수의 나눗셈 알고리즘으로 문제를 해결하였다. 학생 Y 역시, (자연수)÷(자연수) 2문제를 소수의 형태로 답을 썼는데, 개별 면담 결과, 소수의 나눗셈 알고리즘을 사용하지 않고 직관적인 추론에 의하여 문제를 풀었다고 답하였다. 12번의 경우, 5를 반으로 나눈 것은 2.5라서 쉽게 답을 썼다고 말하였으며 정답도 분수의 형태는 아니었지만 맞았다. 하지만, 11번의 경우에는 수직선상에서 1을 10개로 나누었을 때 4만큼이 0.4 지점임을 떠올리고 1÷4를 0.4라고 답하였다.

(자연수)÷(자연수)의 문제 상황에서 분수로 답을 쓰기보다 소수로 답을 쓰는 것은 사전검사 대상자들이 가장 최근에 소수의 나눗셈을 학습하고 있기도 하며, 몇 년간 분수 학습에서 기계적이고 지속적인 알고리즘 계산을 반복하며 가장 기본적인 분수의 의미(pp. 7-8)를 생각할 여유가 없었던 것도 한 이유일 것이다.

<표 Ⅳ-6> 학생 Y 오류유형 및 원인 분석 5

문제 유형	분수의 나눗셈 : (분수)÷(자연수), (자연수)÷(분수)
오류 유형	분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 계산
오류 원인	자연수를 분수 꼴로 바꾸는 과정에서 역수로 바꾸었다고 착각
오류 내용	

동분모와 이분모 분수끼리의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하여 높은 정답률을 보였던 학생 Y는 <표 Ⅳ-6>과 같은 문항에서는 역수로 바꾸지 않고 그냥 곱하는 오류를 보였다. 개별 면담 결과, 학생 Y는 계산하기 쉽게 자연수를 분수화(분모가 1인 꼴) 시키는 과정에서 이미 역수로 바꾸었다고 생각했다고 한다.

다. 학생 J 문항별 오류 유형 및 원인 분석

<표 Ⅳ-7> 학생 J 오류유형 및 원인 분석 1

문제 유형	분수의 나눗셈 : (분수)÷(자연수)
오류 유형	분수의 나눗셈을 분수의 곱셈 계산 방법으로 해결
오류 원인	분수의 나눗셈에 대한 의미와 분수를 자연수로 나누는 개념의 오류, 분수의 나눗셈 알고리즘을 기억하지 못함.
오류 내용	13. $\frac{3}{5} \div 4 = 2\frac{2}{5}$ 15. $2\frac{4}{5} \div 4 = 11\frac{1}{5}$

<표 Ⅳ-7>을 보면, 학생 J는 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈 문제처럼 풀었다. 13번 문제 $\frac{3}{5} \div 4$는 분자 3과 자연수 4를 곱하여 $\frac{12}{5}$를 구한 후, 대분수 $2\frac{2}{5}$로 고쳤고, 15번 문제 $2\frac{4}{5} \div 4$는 대분수 $2\frac{4}{5}$를 가분수 $\frac{14}{5}$로 고친 후, 분자 14와 자연수 4를 곱하여 $\frac{56}{5}$이 나오자 대분수 $11\frac{1}{5}$로 답을 적었다고 하였다.

이와 같은 오류의 원인은 분수에 나눗셈에 대한 의미, 즉 분수를 자연수로 나누는 개념과 계산 방법마저 잊었기 때문이다. 학생 J의 경우, 평상시에도 다소 행동이 느리며 본인이 이해하지 못한 것을 받아드리는 데 어려움이 있는 것으로 개별면담 결과 확인 되었다.

<표 Ⅳ-8> 학생 J 오류유형 및 원인 분석 2

문제 유형	동분모 분수끼리의 나눗셈
오류 유형	분수의 나눗셈을 분수의 곱셈 계산 방법으로 해결
오류 원인	분수의 곱셈처럼 분모와 분모, 분자와 분모를 곱한 것은 아니나, 분수의 곱셈 계산 방법과 혼동하고 있음. 나눗셈의 포함제 상황 개념의 오류
오류 내용	18. $\frac{7}{9} \div \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ 19. $\frac{14}{15} \div \frac{7}{15} = \frac{2}{15}$

<표 Ⅳ-8>에서는 학생 J의 동분모 분수끼리의 나눗셈 오류 유형을 확인할 수 있다. 18, 19번 문제와 같은 동분모 분수끼리의 나눗셈에서는 분자끼리 나누어 답을 구해야 하지만 학생 J는 분모를 그대로 유지하고 있는 것이 관찰되었다.

이와 같은 오류의 원인은 나눗셈의 개념 미비가 가장 큰 원인으로, 나눗셈의 포함제 상황을 이해했다면, $\frac{7}{9}$을 $\frac{1}{9}$씩 덜어내었을 때, 7번 덜어낸다는 것을 쉽게 찾아낼 수 있어 역수를 곱하거나 하는 등의 분수 나눗셈 알고리즘을 사용하지 않아도 된다.

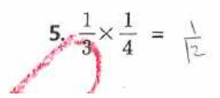
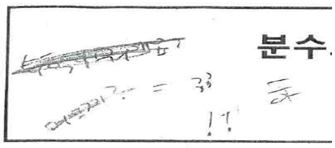
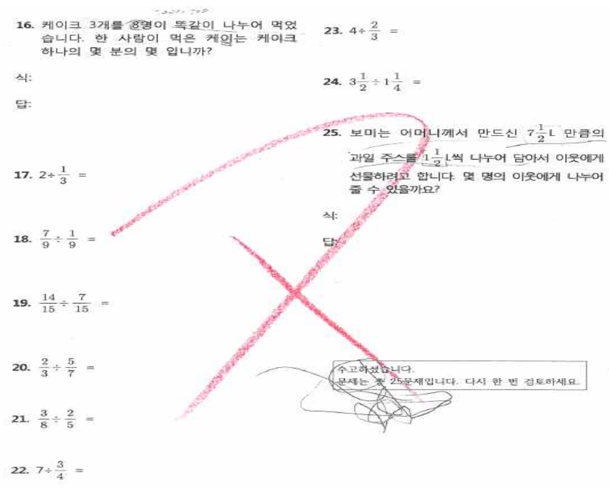
<표 Ⅳ-9> 학생 J 오류유형 및 원인 분석 3

문제 유형	이분모 분수끼리의 나눗셈
오류 유형	분수의 나눗셈을 분수의 곱셈 계산 방법으로 해결
오류 원인	분수의 나눗셈에 대한 의미와 분수를 자연수로 나누는 개념의 오류, 분수의 나눗셈 알고리즘을 기억하지 못함.
오류 내용	20. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ 21. $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$

<표 Ⅳ-9>에서는 학생 J의 이분모 분수끼리의 나눗셈 오류 유형을 확인할 수 있다. 이분모 분수끼리의 나눗셈에서도 <표 Ⅳ-7>의 오류 유형과 마찬가지로 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈 문제처럼 풀고 있는 것이 관찰된다. 20번 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$을 분모 3과 7을 곱하고 분자 2와 5를 곱하여 $\frac{10}{21}$으로 계산하였다.

라. 학생 S 문항별 오류 유형 및 원인 분석

<표 Ⅳ-10> 학생 S 오류유형 및 원인 분석

문제 유형	정의적 영역
오류 유형	측정 불가
오류 원인	수학에 대한 낮은 자존감
오류 내용	 
	
	

학생 S는 본 연구자가 이 사전 검사지를 제공한 164명 중, 가장 무성의하게 시험에 응한 학생이었다. 거의 대부분의 문항에 답을 하지 않았고, 평상시에도 자신은 수학을 포기해서 절대 공부하지 않겠다고 말하는 수학교과에 대한 정의적 영역이 매우 낮은 학생이다. 그러나, <표 Ⅳ-10>에서 보듯, 25문제 중 답을 쓴 1번과 5번은 정답을 맞혔으며, 간단한 곱셈과 약분은 가능한 수준이라는 것을 확인할 수 있었다.

마. 학생 Y, J, S의 오류 원인 분석 및 지도 방향

<표 Ⅳ-11>은 학생 Y, J, S에게서 나타난 공통적인 오류 유형에 따라 원인을 분석하고 그에 따른 지도방향을 모색한 표이다. 학생 Y는 분수의 곱셈 유형에서 오답이 많았고, 학생 J는 분수의 나눗셈 유형에서 오답이 많아 서로 틀린 유형은 달랐으나, 공통적으로 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈 계산방법을 혼동하여 낮은 성취도를 얻었다. 그 원인으로는 곱셈과 나눗셈의 상황이나 개념 이해 부족과 알고리즘 위주의 문제은행식 문제 풀이, 즉 생각하는 수학의 부재로 인해 나타난 혼동이 가장 큰 이유였다. 학생 S에게서 주로 나타난 오류의 원인은 자신은 할 수 없다는 생각에서 기인한 낮은 자존감이 대표적이었다.

따라서, 이번 퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 곱셈과 나눗셈 부진 학생 지도는 의미를 이해하지 않는 반복적 문제풀이를 최대한 지양하고 최소한의 문제를 퀴즈네어 막대를 조작하고 토론하는 방식으로 지도해야 함을 확인하였다. 또, 부진학생들의 특성상, 수학교과에 대한 낮은 자존감이 내적, 외적으로 존재할 것이므로, 학생들에게 긍정적 강화를 지속적으로 제공하며, 단순 계산 실수에 대한 지적이나 기약 분수로 나타내기, 대분수로 나타내기 등의 지도는 크게 강조하지 않기로 했다.

<표 Ⅳ-11> 오류원인 종합 및 지도방향

<table>
<tr><th>오류 유형</th><th>원인</th><th>지도방향</th></tr>
<tr><td rowspan="2">분수의 곱셈과 분수의 나눗셈 계산방법 혼동</td><td>곱셈과 나눗셈의 상황, 개념 이해 부족</td><td>최소한의 문제로 교구를 조작하고 의미를 토론하는 방식으로 수업 진행</td></tr>
<tr><td>알고리즘 위주의 문제은행식 문제 풀이</td><td>의미를 이해하지 않는 반복적 문제풀이 지양</td></tr>
<tr><td>수학교과에 대한 낮은 자존감</td><td>거듭된 낮은 수학 성적으로 자신은 할 수 없다는 생각</td><td>지속적인 상담과 래포형성으로 할 수 있다는 자신감을 만들어주고 긍정적 강화를 지속적으로 제공하기</td></tr>
</table>

2. 지도 적용 및 결과 분석

이 절에서는 연구자가 수업 전에 의도하였던 지도 방향을 서술하고, 학생을 지도하면서 지도에 참고할 만한 부분이나 학생의 사고, 태도의 변화가 있었던 부분을 녹취하였다. 그리고 지도 후에 학생들의 반응이나 지도 시 불필요하다고 느끼거나 추가해야 할 부분을 제언하였다.

가. 1차시 〈퀴즈네어 막대와의 만남〉

1) 지도의 방향

퀴즈네어 막대를 처음 조작하는 학생들이 교구에 익숙해지도록 교구를 소개하고 간단한 조작을 해 보는 차시로 구성하였다. 퀴즈네어 막대의 구성을 소개하고 간단한 조작활동을 통해 기준막대와 비교막대가 갖는 상대적인 크기로 1과 단위분수를 이해하도록 하였고, 직접 퀴즈네어 막대로 분수를 나타내 보도록 지도하였다.

2) 지도의 실제

교사 : 오늘은 앞으로 여러분이 계속 해서 만나게 될 이 막대에 대해서 이야기 나누는 시간을 가질 거예요. 서로 다른 색깔의 막대가 몇 개 있는지 확인해 볼까요?

학생 Y : 10개 있어요.

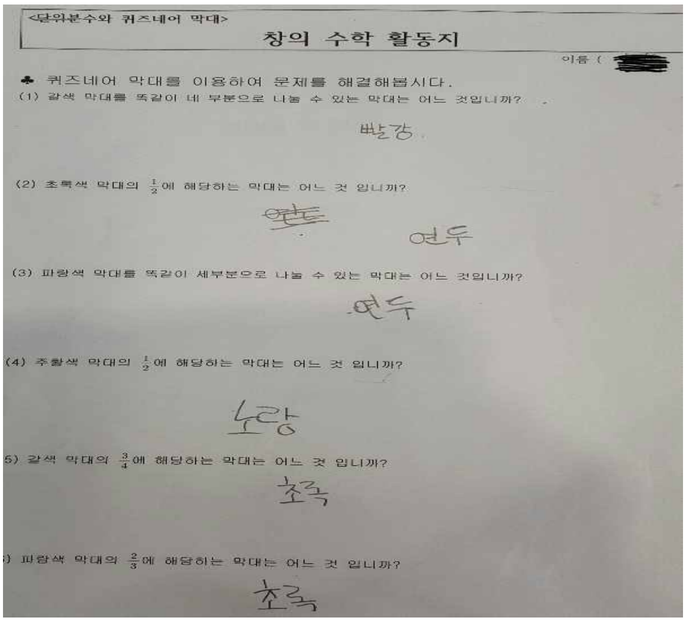
교사 : 다른 색깔의 막대끼리 무엇이 다른 것 같아요?

학생 Y : 길이요. 주황색이 제일 길고, 그 다음 파란색이 길고…

교사 : 좋아요, Y. 잘 찾았어요. 다른 색깔의 막대끼리는 서로 길이가 다르네요. 그럼, 서로 다른 길이와 색깔의 막대 10개를 짧은 막대부터 긴 막대 순서대로 놓아볼까요?

학생 Y, J, S : (흰색, 빨간색, 연두색, 보라색, 노란색, 초록색, 검정색, 갈색, 파란색, 주황색 순서로 정렬한다)

교사 : 잘했습니다. 지금 여러분들이 차례대로 정리해 놓은 이 막대를 ‘퀴즈네어 막대’라고 해요. 앞으로, 우리는 이 퀴즈네어 막대를 가지고 분수의 곱셈과 나눗셈을 공부할 거예요. 우선, 퀴즈네어 막대를 가지고 이 학습지의 6문제를 풀어봅시다. 선생님과 1, 2번 문제를 함께 풀어보고 3번부터 여러분 각자 해결해 봐요. 1번 문제를 같이 읽어 볼까요?


<단위분수와 퀴즈네어 막대>

창의 수학 활동지

이름 ([redacted]

♣ 퀴즈네어 막대를 이용하여 문제를 해결해봅시다.

(1) 갈색 막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대는 어느 것입니까?

빨강

(2) 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대는 어느 것 입니까?

~~연두~~ 연두

(3) 파랑색 막대를 똑같이 세부분으로 나눌 수 있는 막대는 어느 것입니까?

연두

(4) 주황색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대는 어느 것 입니까?

노랑

5) 갈색 막대의 $\frac{3}{4}$에 해당하는 막대는 어느 것 입니까?

초록

) 파랑색 막대의 $\frac{2}{3}$에 해당하는 막대는 어느 것 입니까?

초록

[그림 Ⅳ-1] 학생 Y의 퀴즈네어 막대 이해

학생 Y, J, S : 갈색 막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대는 어느 것 입니까?

교사 : 자기 앞에 갈색 막대를 하나 놓아 볼까요? 이 막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대를 찾아보세요.

학생 J : (빨간색 막대 4개를 놓는다) 빨간색 막대요.

교사 : 어머! J는 어떻게 이렇게 빨리 빨간색 막대인 것을 알아냈니?

학생 J : 갈색 막대가 8칸짜리라서 4로 나눠서…, 빨간색이 2칸짜리라서요.

학생 Y : 아, 뭐야! 여기 칸 세어서 해도 돼요?

교사 : 원래 퀴즈네어 막대는 칸이 그려져 있지 않지만 여러분들이 막대를 찾을 때,

도움이 되라고 희미하게 점선을 그려두었어요. J는 그럼 갈색 막대의 8칸을 보고 똑같이 네 부분으로 나누라는 것을 8 나누기 4로 이해했구나?

학생 J : (고개를 끄덕인다)

교사 : 좋아요, 다른 친구들도 J가 빨간색 막대라고 한 것에 동의하니?

학생 Y : 네, 8 나누기 4는 2니까. 아, 내가 먼저 할 수 있었는데!

교사 : 그럼 이번에는 2번 문제를 같이 읽어 볼까요?

학생 Y, J, S : 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 막대는 어느 것입니까?

교사 : 이번에는 초록색 막대를 하나 놓아보고 조건에 맞는 막대를 찾아볼까요?

학생 Y : (연두색 막대를 놓는다) 연두색요!

교사 : 다른 친구들은요?

학생 J, S : (연두색 막대를 놓는다) 연두색 막대요.

교사 : 좋아요, 그럼 Y가 왜 연두색 막대를 골랐는지 말해볼래?

학생 Y : 초록색 막대는 6칸인데, $\frac{1}{2}$을 찾으라고 했으니까요.

교사 : $\frac{1}{2}$이 의미하는 게 뭔데요?

학생 Y : 어떤 것의 반이요.

교사 : 오호. 그럼 $\frac{1}{3}$은?

학생 Y : 어, 어, 뭐라고 하지? 3개 중의 하나?

교사 : 좋은 생각이야, 다른 친구들은요?

학생 S : 맞는 거 같아요.

교사 : (초록색 막대를 놓고, 빨간색 막대 3개를 초록색 막대 아래에 둔다) Y가 잘 말했어요. 그런데, 조금 더 보충해서 이야기하면, (초록색 막대를 가리키며) 어떤 막대를 (빨간색 막대 3개를 하나씩 가리키며) 똑같이 세 부분으로 나눈 것 중의 (빨간색 막대 한 개를 든다) 하나를 우리는 $\frac{1}{3}$이라고 해요. Y 말이 아주 다르지는 않지만 똑같이 나누었다는 것을 잊지 말아야 겠죠?

학생 Y, J, S : 네.

교사 : 그래서 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$은 여러분이 말한 것처럼 똑같이 반으로 나눌 수 있는 연두색 막대가 맞아요. 그럼, 이제 3, 4번 문제를 여러분 스스로 퀴즈네어 막대를 놓아가며 해결해 볼까요?

학생 Y, J, S : (모두 3번은 연두색 막대, 4번은 노란색 막대로 답한다)

교사 : 선생님 도움 없이도 모두 잘 해결하네요. 어때요? 퀴즈네어 막대 활동이 어렵나요?

학생 Y : 아니요, 완전 쉬워요!

교사 : 좋아요! 그 말을 들으니까 선생님도 기분이 좋네요. 자! 그런데, 선생님이 여러분들이 푼 것을 보고 궁금한 것이 생겼어요. 2번과 3번 문제를 보세요. 어떻게 답이 똑같이 연두색이 될 수가 있지?

학생 Y : 음... 2번에서는 초록색을 반으로 나눈 거고, 3번에서는 파란색을 세 개로 나눴어요.

교사 : 그럼 2번 문제에서는 연두색 막대로 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$이었고, 3번 문제에서 연두색 막대는 파란색 막대의 몇 분의 몇이 되는 거죠?

학생 J : $\frac{1}{3}$이요.

교사 : 그래, 선생님도 같은 생각이야. 그럼 연두색 막대는 $\frac{1}{2}$이 될 수도 있고, $\frac{1}{3}$이 될 수도 있는 건가요?

학생 Y, J, S : (대답 없음)

학생 S : 그런 거 같아요, 초록색 막대한테는 $\frac{1}{2}$이고, 파란색한테는 $\frac{1}{3}$이고.

교사 : 오, S 고마워요. 잘 말했어요. S 말대로, 연두색 막대는 어떤 막대와 비교하느냐에 따라 크기가 달라져요. 5, 6번 문제 풀어보면서 어떤 막대를 써야 할지 더 생각해 볼까요? 5번은 선생님과 해보고, 6번은 여러분이 직접 해 봅시다. 5번 문제를 같이 읽어 봅시다.

학생 Y, J, S : 갈색 막대의 $\frac{3}{4}$에 해당하는 막대는 어느 것입니까?

교사 : 우선, $\frac{3}{4}$이 무엇을 의미하는지 알아야 할 것 같아요.

학생 S : 똑같이 4로 나눈 것 중의 3.

교사 : 굿! S가 진짜 잘 말했어요. S 말대로 똑같이 네 부분으로 나눈 것 중의 세 부분을 찾으려면, 우선 갈색막대를 몇 부분으로 나눈 것을 찾아야 할까요?

학생 Y, J, S : 네 부분이요.

학생 Y : 빨간색이요, 빨간색.

교사 : 잘 찾았어요. 갈색막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대는 빨간색 막대고, $\frac{3}{4}$은 이 빨간색 막대가 몇 개 있는 것과 같을까?

학생 Y, J, S : 3개요.

교사 : 그럼, 이제 빨간색 막대 3개를 합친 것과 같은 길이인 막대를 찾으면?

학생 Y, J, S : 초록색 막대요.

교사 : 훌륭하네요. 그럼 6번은 스스로 해결할 수 있겠죠? 해 봅시다.

학생 Y, J, S : (교사 도움 없이 스스로 문제를 잘 해결한다)

교사 : 여러분들, 이제 어떤 막대의 분수만큼의 크기를 잘 이해하고 있는 것 같네요. 자 그럼, 질문! 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$은 연두색 막대라고 했어요. 연두색 막대의 값이 $\frac{1}{2}$이라면, 초록색 막대의 값은 뭐라고 할 수 있을까요?

학생 Y, J, S : (대답 없음)

교사 : 힌트는 $\frac{1}{2}$인 연두색 막대가 2개 있으면 초록색 막대 한 개를 만들 수 있어요.

학생 J : (확신 없이) 1?

교사 : 오! 왜요?

학생 J : 연두색 막대가 $\frac{1}{2}$인데, 2개 있으니까 더해서 1...

교사 : 좋은 생각이야, J! 다른 친구들 이해돼요?

학생 Y : 아니요.

교사 : 자, 그럼 다시, 아까 파란색 막대의 $\frac{1}{3}$이 연두색 막대라고 했죠? 그럼 연두색 막대가 $\frac{1}{3}$이라면, 파란색 막대의 값은 뭐라고 할 수 있죠? 힌트는 역시, 연두색 막대가 3개 있으면 파란색 막대 한 개를 만들 수 있어.

학생 J : 1.

학생 Y : 아아! 알 거 같아요. 나눈 게 합쳐지는 거 같은데?

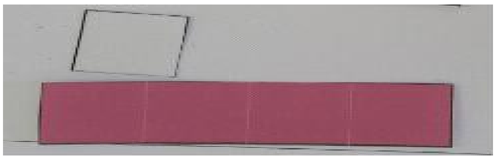
교사 : 합쳐지는 건 전체, 전체는? (잠깐 기다렸다가) 1. 분수에서는 나누어지기 전에 전체를 '1'이라고 표현합니다. 그럼 이제 선생님이 보여주는 이 분수($\frac{1}{4}$)를 읽어볼까요?

학생 Y, J, S : 4분의 1.

교사 : 좋아요, 그럼 $\frac{1}{4}$이 의미하는 것은 뭘까? $\frac{1}{4}$이 의미하는 것이 무엇인지 퀴즈네어 막대로 한 번 나타내 볼까요?

학생 Y, J, S : (보라색 막대 1개와 흰색 막대 1개를 놓는다)

교사 : 그렇죠. 그럼 J가 어느 것이 $\frac{1}{4}$인지 우리에게 이야기 해 줄래요? 다른 친구들은 한 번 들어봅시다.



[그림 Ⅳ-2] 학생 J의 $\frac{1}{4}$

학생 J : (보라색 막대를 가리키며) 이게 4고, (흰색 막대를 가리키며) 이게 1.

교사 : 음, 좋아요. 우선, $\frac{1}{4}$이 의미하는 것은 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의?

학생 J : 4분의...

교사 : (보라색 막대를 가리키며) 이것이 우리에게는 전체인 기준막대가 되겠지요? 이 보라색 막대를 똑같이 4개로 나눈 것 중에 하나가?

학생 J : 흰색 막대.

교사 : 4분의?

학생 J : 1요.

교사 : 좋아, 얘들아. 그럼 이 보라색 막대와 흰색 막대 중에서 어느 것이 $\frac{1}{4}$이지?

학생 Y, J, S : 흰색 막대요.

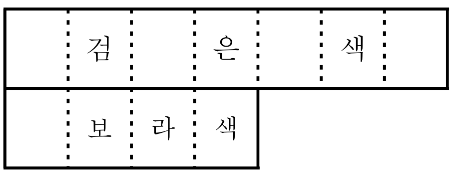
교사 : 그래요. 퀴즈네어 막대에서는 기준이 되는 막대와 비교가 되는 막대 2개가 같이 있어야겠죠? 이 흰색 막대는 보라색 막대가 없으면 $\frac{1}{3}$인지, $\frac{1}{4}$인지 알 수가 없잖아요? 선생님은 개인적으로 이 흰색 막대를 아주 좋아해요. 이 흰색 막대는 분자가 1인 분수를 만들 수 있어요. 이런 녀석들을 우리는 단위분수라고 불러요, 단위분수. 3학년 때 공부했던 건데 기억나요?

학생 Y, J, S : 아니요

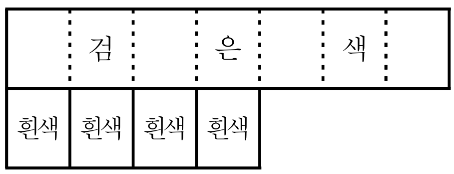
교사 : 단위분수는 아주 많이 만들 수 있어요. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$처럼 분자가 1인 분수를 단위분수라고 해요. 분모 수만큼 똑같이 나눈 것 중의 한 부분이죠. 그럼 이번에는 이 분수($\frac{4}{7}$)를 읽어보고, 퀴즈네어 막대로 나타내어 볼까요?

학생 Y, J : 7분의 4. (검은색 막대 1개와 보라색 막대 1개를 놓는다)

학생 S : 7분의 4. (검은색 막대 1개와 흰색 막대 4개를 놓는다)



[그림 Ⅳ-3] 학생 Y, J의 $\frac{4}{7}$



[그림 Ⅳ-4] 학생 S의 $\frac{4}{7}$

교사 : 좋아요. Y, J랑 S가 놓은 방법이 다르네요. 달라도 상관없어요. 퀴즈네어 막대는 여러 가지로 표현할 수 있거든. 우선 S가 왜 이렇게 놨는지 먼저 이야기 해보고 Y, J 이야기도 들어봅시다.

학생 S : 그냥... 이게 (분자를 가리키며) 4니까 4개를 놨어요.

교사 : 왜 4야?

학생 S : 4개라서

교사 : (흰색 막대를 가리키며) 이거는 얼마를 의미하는데?

학생 S : 7분의 1

교사 : 왜 7분의 1이라고 생각해?

학생 S : (머뭇거림)

교사 : 이야기 할 수 있어 S야! 할 수 있어.

학생 S : (검은색 막대를 가리키며) 7에서...

교사 : 검은색 막대를 똑같이 몇 개로 나눈 것 중의?

학생 S : 7

교사 : 검은색 막대를 똑같이 7개로 나눈 것 중의 흰색 막대는 1개지? 그래서 이 흰색 막대는 검은색 막대의?

학생 S : $\frac{1}{7}$

교사 : 그렇지! 그런데 왜 흰색 막대를 4개를 놨어?

학생 S : $\frac{1}{7}$이 4개니까

교사 : 좋아! $\frac{4}{7}$가 의미하는 것은 S한테는 $\frac{1}{7}$이라는 단위분수가 몇 개 있다는 거야?

학생 S : 4개

교사 : 그렇지, 4개 있다는 거야. 그럼 이번에는 Y랑 J의 막대를 볼까? S야, 다른 친구들은 어떻게 놨어?

학생 S : 한꺼번에요.

교사 : 그래, $\frac{1}{7}$이 4개 있는 것만큼 보라색 막대 하나로 한꺼번에 놨지? 이렇게 해도 $\frac{4}{7}$가 될 수 있어. 두 방법 다 아주 훌륭하게 잘 분수로 나타냈어요. 그럼, 정리! 퀴즈네어 막대로 분수를 나타낼 때는 1단계 무엇을 찾아야 할까요?

학생 Y, J, S : 기준 막대요.

교사 : 좋아요! 1단계는 전체, 기준 막대를 찾아야 해요, 전체 1을 의미하는 기준

막대를 먼저. 그 다음 2단계는 뭐를 찾아야 할까?

학생 Y : 분자.

교사 : 그렇지. 분자만큼 여러분이 놓고자 하는 막대를 둬야 해요. 퀴즈네어 막대에서 흰색 막대는 단위분수인데, 흰색 막대를 여러 개 놔도 좋고, 한꺼번에 놔도 돼요. 그럼, 이 분수($\frac{5}{8}$)를 읽어 보고, 퀴즈네어 막대로 나타내어 봅시다.

학생 Y, J, S : 8분의 5. (교사의 도움 없이 3명 모두 퀴즈네어 막대를 놓는다)

(중간생략)

교사 : 선생님이 말해주지 않았는데 너희들이 바로 기준막대를 찾고 있네? 어, 어떻게 찾았어요?

학생 Y : 밑에 숫자 보고요.

교사 : 밑에 숫자는 우리가 뭐라고 하죠? 분?

학생 Y, J : 모.

교사 : 분모를 보고 1초의 망설임도 없이 1단계 기준막대를 잘 찾는 것을 보니, 앞으로도 퀴즈네어 막대에서 기준막대를 찾을 때 무엇을 보면 좋을까요?

학생 Y, J, S : 분모요.

3) 지도의 결과

전체와 부분으로서의 분수 의미에 초점을 둔 퀴즈네어 조작 활동이 학생들에게 어렵지 않았고, 큰 어려움 없이 즐겁게 참여하는 모습을 보였다. 똑같이 나누어진 만대를 찾는 과정을 통해 분수의 의미를 복습하였고, 나누어 진 막대의 크기를 다시 전체 막대와 비교해 보는 활동을 통해 분수에서 전체 단위 '1'에 대해서 상기시키는 시간이 되었다. 분수로 나타내어 보는 활동에서는 단위분수에 대해서 설명하고 학생 개개인이 조작하기 편한 형태로 퀴즈네어 막대를 둘 수 있음을 인지시켰다.

3학년에서 분수를 도입할 때 익혔던 내용이라, 용어 사용에 있어서 미흡한 부분이 있지만, 개념을 쉽게 이해할 수 있음을 확인할 수 있었다.

나. 2~3차시 〈(분수)×(자연수)의 계산〉

1) 지도의 방향

퀴즈네어 막대를 조작하는 활동을 통해 '분수의 곱셈'의 의미를 시각화 하는 데 중점을 두었다. '×(자연수)'가 의미하는 것은 동수누가, 즉 피승수를 승수만큼 더해주는 의미임을 알게 하고, 그 속에서 (분수)×(자연수)의 계산 원리를 유도해 내는 방향으로 지도하였다.

2) 지도의 실제

가) (진분수)×(자연수)의 지도

교사 : ($\frac{4}{7}\times 2$를 보여주며) 이 문제를 퀴즈네어 막대로 풀어보려고 합니다. 지난 시간에 우리는 분수를 퀴즈네어 막대로 놓는 방법을 배웠어요. 그럼 여기서 무엇의 의미를 알아야 퀴즈네어 막대로 이 문제를 해결할 수 있을까요?

학생 J : 곱하기 2요.

교사 : 그렇죠. 곱하기 2를 어떻게 하는지 알아야 하는데, 곱하기 언제 배웠죠?

학생 Y : 구구단! 2학년 때요.

교사 : 어떻게 배웠을까?

학생 S : 그냥 외웠어요.

교사 : 그래, 그냥 외웠어. 2, 1은 2. 2, 2는 4. 그럼, 질문! 2×3=2+2+2, 2를 몇 번 더한 것과 같았지?

학생 Y, J, S : 3번.

교사 : 그렇지! 그럼 분수도 똑같아. $\frac{4}{7}\times 2=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}$, $\frac{4}{7}$를 2번 더한 것과 같아. 곱하기는 2학년 때 배웠던 거니까 분수의 곱셈에서도 "아! 분수야!"하고 짜증내지 말고 "아~ 2학년 때 배웠던 바로 그거!" 라고 생각하면 돼. 그럼 1단계! 앞에 있는 이 분수($\frac{4}{7}$)를 퀴즈네어 막대로 두어 보고, 2단계는 ×2 만큼을 퀴즈네어로 찾는 거야. 선생님과 해보자. $\frac{4}{7}$를 놓을 때 기준 막대는 무엇을 보면 알 수 있다?

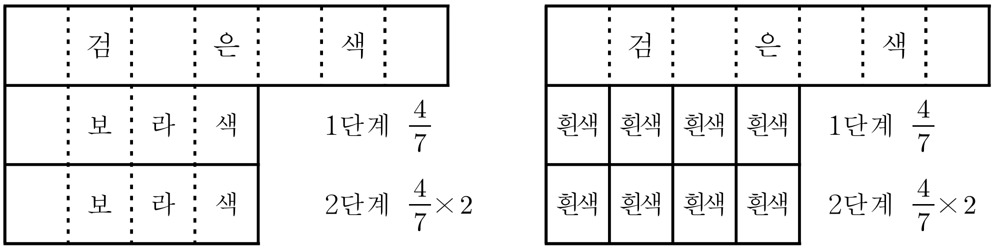
학생 Y, J, S : 분모 7.

교사 : 그럼 검은색 막대를 기준막대로 두고 $\frac{4}{7}$는 어떻게 두죠?

학생 Y : 4칸짜리 보라색 막대요.

교사 : 좋아요, S는?

학생 S : 흰색 막대 4개.



[그림 Ⅳ-5] $\frac{4}{7}\times 2$를 퀴즈네어 막대로 해결하기

교사 : 그래, 그럼 분자 4를 나타내는 것은 $\frac{1}{7}$인 흰색 막대를 4개로도 놓고, Y 방법대로 보라색 막대 1개로도 둬서 2가지 방법 모두 봅시다. 2단계. ×2는 $\frac{4}{7}$가 몇 묶음 있는 거라고?

학생 J, S : 2묶음.

교사 : 그럼 1단계에서 두었던 퀴즈네어 막대를 똑같이 어떻게 놓으면 될까?

학생 S : 똑같이 한 개 더.

교사 : 똑같이 한 묶음 더. $\frac{1}{7}$인 흰색막대가 1, 2, 3, 4. 4개씩?

학생 Y, J, S : 2묶음.

교사 : 흰색 막대 $\frac{1}{7}$이 그래서 몇 개가 되었죠?

학생 Y, J, S : 8개.

교사 : 그럼, 어떻게 계산하니까 8개가 되는 거죠?

학생 S : 4×2

교사 : 좋아요! 그럼 (분수)×(자연수)의 문제를 머릿속에서 퀴즈네어 막대를 상상하면서, 어떤 계산식으로 풀면 될지 이야기 해 봅시다. 우선, 분수는 무엇과 무엇으로 이루어져 있죠?

◆ 분수 × 자연수

$$\frac{(\text{분자})}{(\text{분모})}\times \text{자연수} = \frac{(\text{분자})\times(\text{자연수})}{\text{분모}}$$

＊(　　) 안은 학생들과 함께 채워 넣은 부분

[그림 Ⅳ-6] (분수)×(자연수) 알고리즘 유도 판서

학생 Y, J, S : 분자와 분모요.

교사 : 그렇죠. 분모와 분자로 이루어 진 (분수)×(자연수) 꼴은 '몇 개로 나누어 진', 단위를 의미하는 분모는 그대로 두고, 무엇과 무엇만 곱하면 되죠?

학생 J, S : 분자와 자연수요.

교사 : 그렇지. 그래서 오늘 했던 $\frac{4}{7}\times 2$도 분모 7은 그대로 단위니깐 남겨두고 $\frac{1}{7}$이 4개 있었는데 그것이 자연수 2만큼 2묶음 있더라 해서 분자와 자연수를 곱해주는 거예요. 이것을 그냥 외우려고 하지 말고, 앞으로는 $\frac{4}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 4개가 있는 건데 2묶음 있는 거고, 그래서 $\frac{1}{7}$이 몇 개 있는 것과 같다?

학생 Y, J, S : 8개

교사 : 그래서 분자와 자연수를 곱해주면 되는 거예요.

학생 S : 답이 $\frac{8}{7}$이에요?

교사 : 그래 정답은 $\frac{8}{7}$이야.

학생 S : 막 고치라고 하지 않아요?

교사 : 좋은 질문이야, S. 가분수를 대분수로 고치라고 하면 어떻게 하면 될까?

$\frac{8}{7}$은 (검은색 막대를 가리키며) 이게 전체 1이죠? (흰색 막대 7개를 모아서 검은색 막대와 비교하며) 흰색 막대를 모았더니 검은색 막대 하나 됐네?

학생 S : 네

교사 : 그런데 검은색 막대 하나가 되고도 흰색 막대 $\frac{1}{7}$이 하나가 남네? 그래서?

학생 S : 아아. 이렇게 쉬운 방법이. $1\frac{1}{7}$.

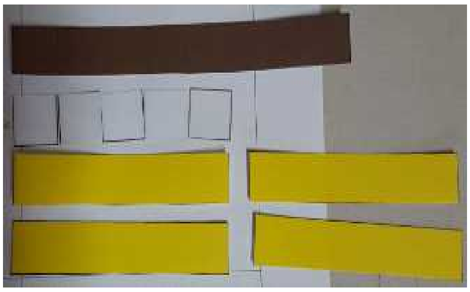
교사 : 유레카야? 할 수 있겠어?

학생 S : 네!

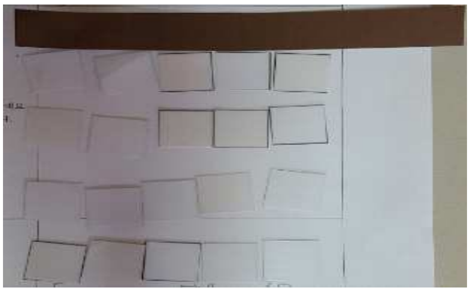
교사 : 아주 훌륭합니다. 그럼 이제 여러분 스스로 이 문제($\frac{5}{8}\times 4$)를 퀴즈네어 막대로 놓아 보고, 계산식으로도 한 번 풀어봅시다.

학생 Y, J, S : (교사의 도움 없이 퀴즈네어 막대로 나타내고, 계산식으로도 푼다)

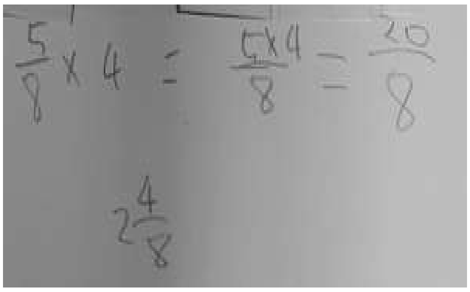
[그림 Ⅳ-7] 학생 Y의 $\frac{5}{8}\times 4$



[그림 Ⅳ-8] 학생 J의 $\frac{5}{8}\times 4$



[그림 Ⅳ-9] 학생 S의 $\frac{5}{8}\times 4$

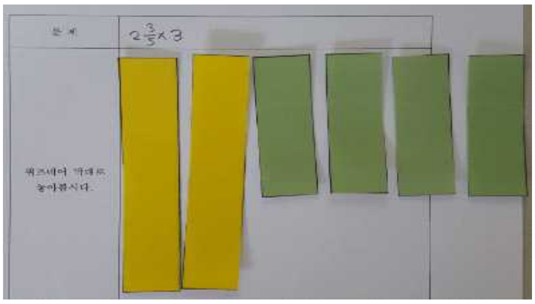


[그림 Ⅳ-10] 학생 S의 $\frac{5}{8}\times 4$ 알고리즘 풀이

나) (대분수)×(자연수)의 지도

교사 : $2\frac{3}{5}\times 3$을 퀴즈네어 막대로 놓아 봅시다.

학생 J : ([그림Ⅳ-11]처럼 퀴즈네어 막대를 조작한다)



[그림 Ⅳ-11] 학생 J의 $2\frac{3}{5}\times 3$ 풀이 오류

교사 : 음, 좋아요. (연두색 막대를 가리키며) 이 막대의 크기는 얼마예요?

학생 J : $\frac{3}{5}$

교사 : 잘했어. 연두색 막대가 $\frac{3}{5}$이고, 문제가 의미하는 것은 $2\frac{3}{5}$이?

학생 J : 3묶음 있는 거요.

교사 : 그럼, J가 놓은 이 퀴즈네어 막대에서 $2\frac{3}{5}$은 어떤 거니?

학생 J : (노란색 막대 2개와 연두색 막대 1개를 가리킨다)

교사 : 아주 좋아. $2\frac{3}{5}$. 1단계는 아주 잘 한 것 같아. 그럼 2단계. 문제가 의미하는 것은 $2\frac{3}{5}$이 3묶음 있다는 거였어. $2\frac{3}{5}$이 1묶음, 2묶음, 3묶음.

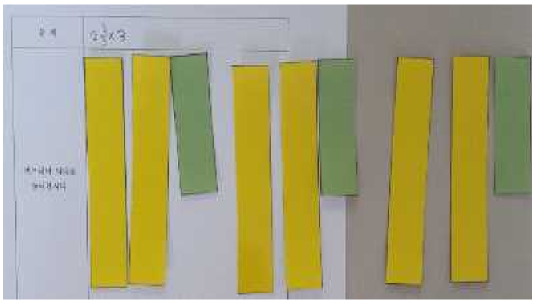
학생 J : 아아.

교사 : 뭔가 고치고 싶니?

학생 J : 네.

교사 : 그럼, 한 번 고쳐볼래?

학생 J : ([그림Ⅳ-12]처럼 퀴즈네어 막대를 조작한다)



[그림 Ⅳ-12] 학생 J의 $2\frac{3}{5}\times 3$ 풀이 교정

교사 : 아주, 잘했어! 왜 처음에는 $2\frac{3}{5}$에다가 연두색 막대 3개를 더 놓은 거야?

학생 J : $\frac{3}{5}$이 3묶음 있다고 생각했어요.

교사 : 아아. $2\frac{3}{5}\times 3$의 $\times 3$이 자연수 부분 2에는 닿지 않는 거라고 생각했구나?

학생 J : 네. 가까이 있는 $\frac{3}{5}$만 곱하는 건 줄 알았어요.

교사 : 자연수만큼 곱할 때는 앞에 있는 분수 전체를 곱해야 함을 이제 알겠지? 그럼, J가 고쳐 놓은 퀴즈네어 막대만 보고 $2\frac{3}{5}\times 3$의 정답을 찾아볼까?

학생 S : 음... 음... 이것만 봤을 때는요, $6\frac{9}{5}$.

교사 : 잘했어. 퀴즈네어 막대만 봤을 때는 $6\frac{9}{5}$지. 그런데 어째 분수의 모양이 이상하죠?

학생 S : 이상해요. 분자가 분모보다 더 커요.

교사 : 그러네? 분자가 분모보다 크네요? 몇 개나 더 커요?

학생 Y, J, S : 4개요.

교사 : 그래요. 4개가 더 커요. 자 그러면, 어떻게 퀴즈네어 막대를 조작하면 자연스럽게 바뀌질까? (노란색 막대를 여러 개 들고 흔들면서) 선생님은 바꿔줄 준비가 됐어. 이거(노란색 막대)랑 뭐랑 바꾸면 될까? 선생님이랑 뭔가 교환하자.

학생 Y : (노란색 막대를 주면서) 이거랑 바꿔주세요.

교사 : 에이, 똑같은 건 안 바꿔 줘.

학생 S : (흰색 막대 1개를 주면서) 이거요.

교사 : 선생님은 이렇게 큰 노란색 막대인데, 겨우 흰색 막대 1개? 안 바꿔줄 거야.

학생 S : (웃으면서 흰색 막대 5개를 주면서) 이거요.

교사 : 좋아! $\frac{1}{5}$이 5개, $\frac{5}{5}$니까 똑같이 노란색 막대 1개로 바꿔줄게요. 그럼, 바꾼 이 퀴즈네어 막대를 보고 다시 한 번 정답을 말해줄래요?

학생 Y, J, S : $7\frac{4}{5}$.

교사 : 맞았어, 이게 진짜 정답이에요. $\frac{9}{5}$에서 5분의 몇 만큼 빼는 대신?

학생 Y, J, S : $\frac{5}{5}$.

교사 : $\frac{5}{5}$만큼 빼는 대신 자연수 부분에 1을 올려주고 $\frac{9}{5}$는 $\frac{4}{5}$로 줄어들겠죠? 아니면, 처음부터 대분수 $2\frac{3}{5}$을 가분수로 바꿔도 상관없어요. 노란색 막대 1은 흰색 막대 $\frac{1}{5}$이 몇 개 있는 거였죠?

학생 S : 5개요.

교사 : 그래요. 그런데 노란색 막대가 2개 있으니까 흰색 막대는?

학생 J, S : 10개요.

학생 Y : 아아. 그래서, $\frac{1}{5}$이 13개 있다고 해서 바꾸면 되겠구나!

교사 : 좋은 마무리다, Y야! 그러면 $\frac{13}{5}\times 3$을 어제 풀던 방식으로 풀어도 되겠지?

3) 지도의 결과

퀴즈네어 막대로 대분수를 놓아보는 과정에서 학생 S는 대분수에서 자연수와 분수 부분이 더해진 것이 아니고 곱해진 거로 착각하는 경우가 있었으며, 학생 J는 대분수와 자연수를 곱할 때 자연수 부분은 곱하지 않는 오류를 보였다. 확실히 풀이 과정을 시각화 화는 퀴즈네어 막대가 분수의 곱셈을 지도할 때 오류를 쉽게 파악할 수 있어서 유용한 교구로 활용될 수 있음을 다시 한 번 확인할 수 있었다.

다. 4～5차시 〈(자연수)×(분수)의 계산〉

1) 지도의 방향

이미 1차시 <퀴즈네어 막대와의 만남>에서 ‘파란색 막대의 $\frac{3}{4}$을 구해 보시오’와 같은 문제를 부진 학생들이 쉽게 해결할 수 있지만, 수학 기호 ‘곱하기’가 사용되는 순간, 학생들에게 곱셈의 상황적 의미는 사라지곤 한다.

따라서, 이 차시에서는 ‘×(분수)’를 하게 되는 상황이 ‘～의’ 또는 ‘～중에서’라는 의미를 담고 있음을 이해하는 데 주안점을 두었다.

2) 지도의 실제

가) (자연수)×(진분수)의 지도

교사 : 만약에, 2m짜리 끈을 3개 사용했다면 여러분은 끈을 몇 m를 사용한 거죠?

학생 Y, J, S : 6m

교사 : 좋아요, 2×3=6, 6m를 사용했구요, 그럼 2m 끈의 2분의 1을 사용했다면?

학생 Y : 1m

교사 : Y, 좋아요. 그럼 1m가 나오게 된 식을 한 번 적어볼래요?

학생 Y, J, S : (오랫동안 적지 못함)

학생 Y : ÷2인가?

학생 J : ($2\times\frac{1}{2}$를 적었다가 학생 Y의 혼잣말을 듣고 $\div\frac{1}{2}$로 고친다)

교사 : 2m 끈을 3개 사용했을 때 식은 2×3이었죠? 같은 방식으로 2m 끈의 $\frac{1}{2}$을 사용한 것은 $2\times\frac{1}{2}$이에요. ‘~의’, ‘~중에서’가 들어가면 곱하기를 의미해요. 그럼 이 문제를 다 같이 읽어볼까요?

학생 Y, J, S : 용돈을 2천원 받았다. 그 중의 5분의 3을 공책을 사는데 사용했다. 공책을 사는데 사용한 돈은 얼마인가?

교사 : 이 문제를 해결할 때 세울 수 있는 식은?

학생 Y : 나누기? 2000원 중에서?

학생 Y, J, S : (이후로도 한참동안 의미를 이해하지 못하여 다음으로 넘어감)

(중간생략)

교사 : $3\times\frac{1}{4}$을 해결해 봅시다. $3\times\frac{1}{4}$은 3 중에서 $\frac{1}{4}$만큼이 얼마인지 찾는 거예요. 퀴즈네어 막대로 풀기 위해서 우선 1단계, 기준막대는 뭐를 보면 되죠?

학생 S : 분모.

교사 : 그렇지. 분모를 보면 어떤 기준막대를 써야 할지 알 수 있고 분모가 4니까 보라색 막대를 사용해 봅시다. 보라색 막대는 전체 1을 의미하고, 그래서 보라색 막대 몇 개가 필요하죠?

학생 Y, J, S : 3개.

교사 : 그럼 이 보라색 막대 3개 중에서 $\frac{1}{4}$만큼을 찾아봅시다.

학생 Y, J, S : (아무도 놓지 못하고 혼란스러워 한다)

교사 : $\frac{1}{4}$은 똑같이 4개로 나눈 것 중에 몇 개?

학생 Y, J, S : 1개.

교사 : 그럼 보라색 막대를 똑같이 4개로 나눈 것 중에 1과 같은 크기인 흰색 막대를 각각 놓아 볼까요? 흰색 막대가 총 몇 개 놓아 졌지요?

학생 Y, J, S : 3개요.

교사 : 흰색 막대는 보라색 막대의 $\frac{1}{4}$이고 3개 있네요. 그래서 정답은?

학생 Y, J, S : $\frac{3}{4}$

교사 : 잘했어요. 그럼 비슷한 문제로 하나 더 놓아 봐요. $5\times\frac{1}{3}$. 기준막대는요?

학생 S : (자연수가 5라서 잠시 헷갈려 함) 노란색 막대요.

학생 Y, J : 연두색 막대요.

교사 : 분모가 3인 것을 확인하고 연두색 막대를 기준막대로 하죠? 연두색 막대 몇 개를 놓아야 할까요?

학생 S : 연두색 막대 5개.

교사 : 좋아! 연두색 막대 5개 중에서 $\frac{1}{3}$만큼을 찾아봅시다.

학생 Y : 흰색 막대 5개요

교사 : 3분의?

학생 Y : $\frac{5}{3}$

교사 : ($3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$을 같이 판서하여) 혹시 이 문제들을 푸는데 공통점이 보이나요?

학생 Y : 자연수랑 분자랑 곱하니까 정답이 나와요.

교사 : 이야, Y! 잘 발견했어요. 지난 시간에 진분수랑 자연수를 곱할 때, 분자랑 자연수를 곱했던 것처럼 자연수랑 분자랑 곱하고 분모의 단위는 그대로 남겨주면 되는구나?

(중간생략)

교사 : $2\times\frac{3}{8}$을 해결해 봅시다. 우선, 1단계. 기준막대가 무엇인지 먼저 찾고 퀴즈네어 막대로 풀어봅시다. S가 왜 그렇게 두었는지 말해 볼까요?

학생 S : 자연수 2는 분모를 보고 갈색 막대 2개를 놨어요. 흰색 막대는 이 갈색 막대의 $\frac{1}{8}$이라서 3개를 두었어요.

교사 : 잘했어요. 여러분, 흰색 막대 3개를 놓은 것은 첫 번째 갈색 막대 1의 $\frac{3}{8}$이죠? 그런데 우리는 갈색 막대 2개 중에서 $\frac{3}{8}$을 찾아야 하니까, S가 한 것처럼 두 번째 갈색막대 중에서도 $\frac{3}{8}$을 똑같이 올려놓아야 해요. 그랬더니 정답은?

학생 Y, S : $\frac{6}{8}$.

[그림 Ⅳ-13] 학생 S의 $2\times\frac{3}{8}$

[그림 Ⅳ-14] 학생 J의 $2\times\frac{3}{8}$

나) (자연수)×(대분수)의 지도

교사 : $1\frac{2}{5}$는 진분수인가요? 대분수인가요?

학생 Y : 대분수?

교사 : 자연수 부분하고 분수 부분이 함께 있는 이 대분수를 퀴즈네어 막대로 놓아 볼까요? $1\frac{2}{5}$.

학생 Y, J, S : (노란색 막대 1개와 흰색막대 2개를 잘 놓는다.)

교사 : 왜 그렇게 퀴즈네어 막대를 놓았는지 누가 말해줄 수 있겠어요?

학생 Y : 저요! 기준막대는 분모 5를 보고 노란색 막대를 놓고, 나머지는 $\frac{1}{5}$이 2개 있는 거니까 흰색 막대를 2개 놨어요.

교사 : 훌륭해! 다른 친구들도 Y가 놓은 것과 같은 모양으로 놨는데 이유도 비슷한가요? 이제 퀴즈네어 막대로 대분수도 잘 표현할 수 있겠나요?

학생 Y, J, S : 네.

교사 : 그렇다면, $1\frac{2}{5}$에서 1과 $\frac{2}{5}$ 사이에는 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 중에 어떤 기호가 숨겨져 있을까요?

학생 Y : 곱하기!

교사 : 왜 곱하기라고 생각해?

학생 Y : $\frac{5}{5}$가 하나 있으니까 어... 그러면... 1과 $\frac{2}{5}$에서 가분수로 만들 때... 아닌데? 나누기? 곱하기? 빼기? 더하기?

교사 : S는 어떤 기호가 숨겨져 있을 것 같고, 왜 그렇게 생각해?

학생 S : 더하기. 여기 퀴즈네어 막대에서 보면요, 노란색 막대는 $\frac{5}{5}$이고 이거랑 흰색막대 2개랑 같이 있는 거니까 더해서 $\frac{7}{5}$이 돼요.

교사 : S가 나날이 퀴즈네어 전문가가 되어 가는데? 훌륭한 설명이에요. 그럼 오늘 풀 문제에 들어가기에 앞서 선생님이 퀴즈를 하나 낼게요. 각자 계산하지 말고 느낌 오는 대로 이야기 해 보세요. $2\times2\frac{2}{3}$가 클까? 아니면 2×2가 클

까?

학생 Y : 2×2가 큰 거 같아요.

학생 J, S : (오랫동안 고민만 한다)

교사 : 계산하지 말고 느낌대로 골라보세요. 느낌상.

학생 Y : 아, 이거($2\times2\frac{2}{3}$)로 바꾸고 싶어요. 아, 아닌가? 둘 다 똑같을까?

학생 S : 저는 첫 번째 것($2\times2\frac{2}{3}$)이 커 보여요.

학생 J : 저도 첫 번째 것.

교사 : Y는 그냥 두 번째 것? 좋아요. 자 그럼 결과를 한 번 비교해 볼게요. 2× 2의 결과는? 그렇죠, 4에요. 그럼 $2\times2\frac{2}{3}$는 어떻게 해석해야 할까? 선생님과 함께 해 봅시다. 우선 대분수는 자연수 부분하고 분수 부분이 합쳐진 거라고 했죠? 그럼 2 하고도 $\frac{2}{3}$만큼 더 있는 거네? 그럼 우선 $2\times2\frac{2}{3}$를 계산하기 위해 '2'를 먼저 두어야 겠죠? 어떤 막대를 2개 놓아볼까요?

학생 S : 연두색 막대요.

교사 : 좋아요. 곱하는 분수의 분모가 3이니까 쉽게 연두색 막대를 2개 놓읍시다. 하나, 둘! 2단계, $2\frac{2}{3}$만큼을 곱할 거예요. 여기서 $2\frac{2}{3}$는 2하고도 얼마가 더 있다?

학생 J : $\frac{2}{3}$

교사 : 좋아, J. 그럼 우리도 2 먼저 곱해 줍시다. 연두색 막대가 2개 있었는데, 2배 더 놓으니까 이제 연두색 막대는 몇 개?

학생 Y, J, S : 4개.

교사 : 자연수 부분의 2만큼 2배씩 늘렸고요, 이제 나머지 분수 부분 $\frac{2}{3}$만큼 찾을 거예요. 어떻게 하면 되죠?

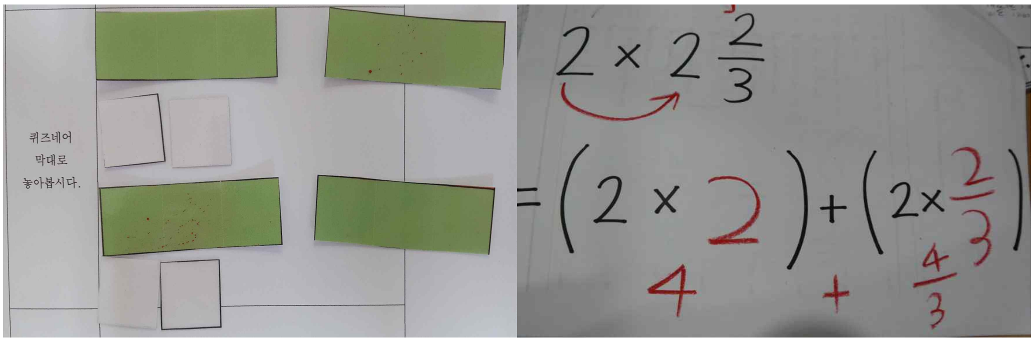
학생 Y : 연두색 막대의 $\frac{2}{3}$는 흰색 막대 2개요.

교사 : 그렇지! 그런데 연두색 막대가 2개 있으니까 흰색 막대는 모두 몇 개죠?

학생 S : 4개요.

교사 : 흰색 막대가 4개니까, 2의 $\frac{2}{3}$배 만큼 계산한 값은?

학생 J, S : $\frac{4}{3}$



[그림 Ⅳ-15] 퀴즈네어 막대를 보며 알고리즘 유도하기

교사 : 굿 잡! 그럼 $2 \times 2\frac{2}{3}$ 결과를 퀴즈네어 막대만 봤을 때 정답이 얼마예요?

학생 Y : $4\frac{4}{3}$이요.

교사 : $4\frac{4}{3}$. 어? 그런데 정답이 조금 이상하네? 이럴 때는 어떻게 했었죠?

학생 S : 가분수가 된 분자 $\frac{4}{3}$에서 $\frac{3}{3}$만큼 자연수에 하나 주고 $\frac{1}{3}$만 남아요.

학생 Y : $5\frac{1}{3}$이에요.

교사 : 그럼, 맨 처음 퀴즈! 그래서 2×2와 비교했을 때 어느 것이 큰 지 확인해 봅시다. 2×2는 얼마?

학생 Y, J, S : 4!

교사 : $2 \times 2\frac{2}{3}$는 $5\frac{1}{3}$이니까 결국 어느 2에 어떤 것을 곱한 게 더 크나요?

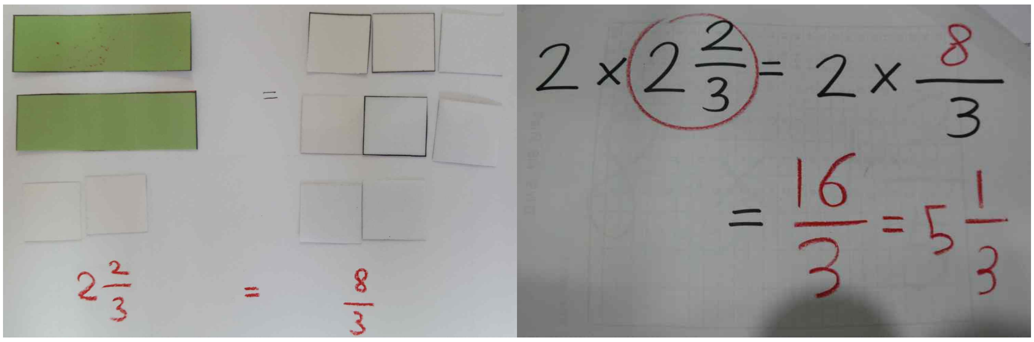
학생 Y, J, S : $2\frac{2}{3}$이요.

교사 : 2를 곱한 것보다 얼마만큼 더 큰 거예요?

학생 Y : $\frac{2}{3}$배 만큼이요. 그런데, 대분수를 가분수로 안 바꿔줘도 돼요?

교사 : 오, Y! 대분수를 가분수로 바꿔서 풀어도 돼요. 대분수를 가분수로 바꿔 볼까? 이 연두색 막대를 보면서 말해봅시다. 연두색 막대는 $\frac{1}{3}$이 몇 개 있죠? 3개. 연두색 막대 2개에는 $\frac{1}{3}$이? 6개. 그럼 $2\frac{2}{3}$에는 $\frac{1}{3}$이? 6개하고도 2개 더 있어서? 8개. ($2\frac{2}{3}$를 가리키며) 2×3+2는 8.

학생 Y : 아아, 그럼 $2\times\frac{8}{3}$을 곱하면 자연수랑 분자 곱해서 $\frac{16}{3}$이구나!



[그림 Ⅳ-16] 대분수를 가분수로 고쳐서 풀고 싶은 학생 지도하기

3) 지도의 결과

지도 결과 아쉬웠던 점은 '×(분수)'의 의미를 너무 빨리 교사가 정의해 버려서 학생들이 충분히 생각할 시간이 없었고, 그 결과 학생 Y는 제대로 이해하지 못했다는 점이다. 1차시에 했던 5, 6번 문제 활동을 다시 해 보거나, 여러 가지 '～의', '～ 중에서'의 문제 상황을 더 제시하여 시간적 여유를 가지고 학생들 스스로 공통점을 찾아보게 하는 것이 문제를 하나 더 푸는 것보다 좋았을 것 같다는 생각이 든다.

또, 처음에는 자연수만큼을 먼저 놓고 그 것의 분수만큼을 찾는 활동을 어려워했으나, 전체-부분의 의미를 다시 상기시키자 곧 잘 해결하는 모습을 보였다. '×(자연수)'와 '×(분수)'의 의미가 조금은 다르지만, 곱셈 결과를 보며 비슷하게 풀리는 것을 확인하고, 교환법칙이 성립함을 학생들 스스로 찾아내는 것을 관찰할 수 있었다.

라. 6차시 〈(분수)×(분수)의 계산〉

1) 지도의 방향

이 차시에서도 (분수)×(분수)가 의미하는 것을 먼저 이해하도록 지도방향을 잡았다. 피승수 분수는 전체 1의 영역을 분수만큼 똑같이 몇으로 나누어 진 것 중의 몇 부분임을 상기시키고, 다시 그 중에서 승수 분수만큼 똑같이 나누었을 때, 겹쳐지는 공통부분을 찾도록 도입하였다. 퀴즈네어 막대로 다시 한 번 조작해 보는 것은 그림보다 더 강력한 이미지를 뇌리에 남게 하여 (분수)×(분수)의 문제 상황에 직면했을 때, 그 계산 원리를 떠올리게 함이 목적임을 밝힌다.

2) 지도의 실제

교사 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$을 봅시다. 우선, 이 문제가 의미하고 있는 것을 2단계로 살펴볼까요? 우선 1단계, 무엇을 보나요?

학생 Y, J, S : $\frac{1}{3}$이요.

교사 : 좋아요, $\frac{1}{3}$이 의미하는 것은 S야, 뭐였죠?

학생 S : 똑같이 3개로 나눈 것 중에서 1개요.

교사 : 그래, 잘했어! 똑같이 세 부분으로 나눈 것 중에서 한 부분이 $\frac{1}{3}$이었고, 그리고 2단계는 무엇을 봐야 돼요?

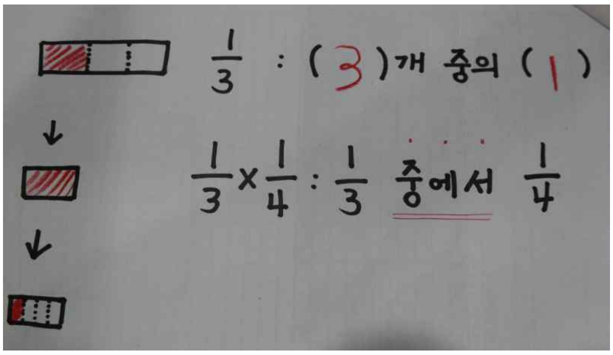
학생 Y, J, S : $\times\frac{1}{4}$이요.

교사 : 그렇죠! $\times\frac{1}{4}$. 분수를 곱한 다는 것은 묶음의 의미가 아니라 어떤 의미로 생각하고 있어야 한다고, Y?

학생 Y : 어떤 것 중에서요.

교사 : 퍼펙트! 그럼, 여러분의 말에 의하면, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$은 어떤 것을 세 부분으로 나눈 것 중의 한 부분 중.에.서. 다시 네 부분으로 나눴을 때 한 부분만큼의 크기를 찾으라는 거죠?

교사 : 다시 한 번 그림을 그려가면서 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$의 의미를 이해해 볼까요? ([그림 Ⅳ-17]을 판서하며) 어떤 막대 한 개가 있는데, $\frac{1}{3}$은? 그렇지, 이 막대를 똑같이 세 개로 나눈 것 중의 1개이고, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$은 이 막대만 봤을 때, 즉 이 막대? 중! 에! 서! 하나, 둘, 셋, 넷. 4등분 한 것 중의 하나인 거네요. 우리는 오늘 이 조그맣게 남은 이 막대 조각의 크기를 퀴즈네어 막대로 구해 볼 거예요.



[그림 Ⅳ-17] $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$의 의미 판서

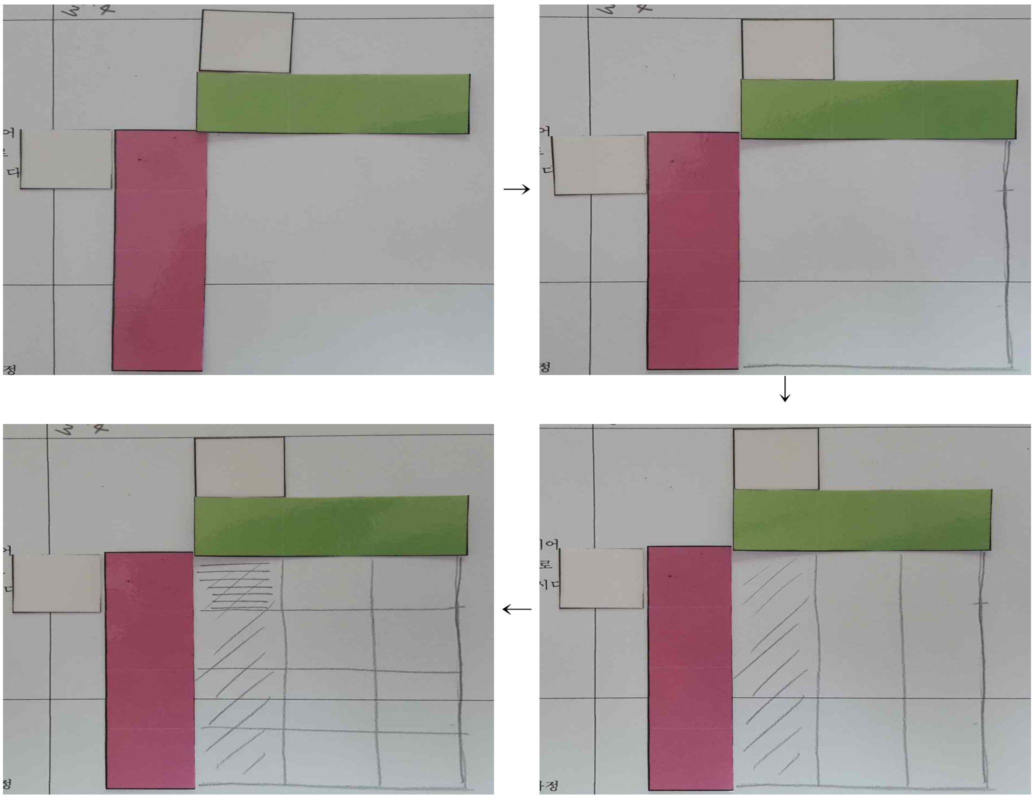
교사 : 자, 우선 선생님과 함께 해 봅시다. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$을 해결하기 위해서 선생님이 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$만큼 퀴즈네어 막대를 가로축과 세로축에 놓아보려고 해요. 우선 곱하여지는 분수, $\frac{1}{3}$만큼을 가로축에 놓아 볼게요. 어떤 기준막대와 비교막대를 놓으면 좋을까, J야?

학생 J : 연두색 막대와 흰색 막대요.

교사 : J 말대로 한 번 분모가 3이니까 연두색 막대를 분모처럼 아래에 두고, 분자 1만큼 흰색 막대를 연두색 막대 위에 위치시켜 볼게요. 그리고 이번엔 $\frac{1}{4}$을 세로축에 놓을 건데, Y야, 어떤 기준과 비교막대를 써야할지 선생님한테 전해줄래요?

학생 Y : (보라색 막대와 흰색 막대를 준다)

교사 : 좋아! 분모 4, 보라색 막대. 분자 1, 흰색 막대를 세로축에 놓았습니다.



[그림 Ⅳ-18] $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$을 퀴즈네어 막대로 해결하는 과정

교사 : 이제 왜 이렇게 먼저 분수만큼 가로축, 세로축에 놓았는지 천천히 알아봅시다. 지금 우리가 가로축, 세로축에 놓은 연두색, 보라색 막대 크기만큼 직사각형을 하나 그려봅시다. 이 직사각형이 아무것도 계산하기 전인 ‘어떤 막대’입니다. 이 막대를 처음에 얼마만큼 똑같이 나눠야 했죠?

학생 Y : $\frac{1}{3}$이요.

교사 : 그래요. 그래서 가로축의 연두색 막대의 점선을 참고하면서 직사각형을 똑같이 세 부분으로 나누고, 한 부분만큼 색을 칠해 줍시다. 자 이제, 2단계는?

학생 Y, S : $\times\frac{1}{4}$이요.

교사 : 그렇지. 3등분 된 것 중의 한 부분을 똑같이 네 부분으로 나눌 거예요. 세로축의 보라색 막대의 점선을 참고하면서 네 등분 하고, 그 중의 몇 이죠?

학생 S : 한 부분요.

교사 : 그럼 보세요, 직사각형이 총 몇 칸이 되었나요?

학생 Y, J, S : 12칸이요.

교사 : 가로축 연두색의 3, 세로축 보라색의 4를 서로 어떻게 하면?

학생 S : 곱했어요.

교사 : 잘했어, S! 3과 4를 서로 곱했죠. 직사각형의 넓이를 구할 때, 가로와 세로의 길이를 곱하듯이, 분모끼리 곱하면 얼마나 많은 칸이 생겼는지 확인할 수 있어요. 그리고 마지막까지 겹쳐 색칠해 진 칸은 몇 칸이에요?

학생 Y, J, S : 1칸이요.

교사 : 이 1칸은 결국, 흰색 막대끼리 겹쳐지는 부분이 되는 거예요.

($\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}$을 퀴즈네어 막대로 세 명 다 잘 푼다)

교사 : 자, 그럼 정리해 봅시다. 분자끼리의 곱셈에서는 여러분들이 퀴즈네어 막대로 계산했던 것처럼 분모는?

학생 Y, J, S : 분모끼리.

교사 : 분자는?

학생 Y, J, S : 분자끼리.

교사 : 곱하면 간단하게 구할 수 있는 것을 확인했어요.

3) 지도의 결과

이 차시를 지도하면서 (분수)×(자연수)나 (자연수)×(분수)를 퀴즈네어 막대로 지도할 때 느꼈던 '눈에 보이는 효과'의 놀라움이 반감되었다. $\frac{4}{7}\times 2$에서 $\frac{4}{7}$를 퀴즈네어 막대로 찾고 똑같이 2묶음을 옆에 정렬시켜서 답을 찾았던 이전 차시와는 달리, (분수)×(분수)의 정렬모델은 기존 교육과정 상의 제시된 활동과 크게 다를 것이 없었다. 다만, 교과서에서 이미 유도된 점선으로 답을 찾아가는 것보다 색이 있는 퀴즈네어 막대로 분수를 가로축과 세로축에 보이게 하여 스스로 유도선을 그려보고 겹쳐지는 칸을 찾아봄으로써 분수끼리의 곱셈의 계산 원리를 찾는데 조금이나마 유의미한 활동이 되었다고 판단한다.

마. 7~8차시 〈□÷(자연수)의 계산〉

1) 지도의 방향

이 차시에서는 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 나눗셈을 직접 계산하기보다는 분수의 나눗셈 개념 형성을 위한 나눗셈의 곱셈 변환 방법을 퀴즈네어 막대로 이해하도록 지도의 방향을 설정하였다. 우선, 8÷2, 10÷5와 같은 몫이 자연수로 떨어지는 나눗셈을 바로 답해보게 함으로써, '÷(나누기)'에 대한 의미를 생각해 보게 하고, 퀴즈네어 막대를 활용하여 ÷(자연수)의 문제를 해결해 보도록 한다. 지도 시, 강조할 부분은 똑같이 '자연수'만큼 나누는 것은(÷a) 똑같이 '자연수'만큼 나눈 것 중의 한 부분($\times\frac{1}{a}$)과 같다는 것, 즉 나눗셈의 곱셈 변환($\div a = \times\frac{1}{a}$)을 이해시키는 것이다.

2) 지도의 실제

가) (자연수)÷(자연수)의 지도

교사 : 선생님이 물어보는 문제에 바로 답해 봅시다. 8÷2는? 12÷4는? 20÷4는?

학생 Y, J, S : 4. 3. 5.

교사 : 잘했어. 어떻게 이렇게 빨리 대답하지? 여러분들은 이 문제를 어떻게 듣자마자 바로 대답할 수 있었어요?

학생 Y : (이해할 수 없다는 듯이) 네? 분수보다 쉬우니까요.

교사 : 왜 이게 분수보다 쉬운데? 어떻게 배운지 3년이 넘은 이 문제들은 아직도 기억하고 있지? 지난 1학기에 배운 분수는 잊어버렸는데?

학생 Y : 음... 모르겠어요. 그냥 이 문제는 너무 쉬워요.

교사 : 좋아요. 그러면 여러분들이 금방 푼 이 문제에서 (÷를 가리키며) 이게 뭐죠?

학생 Y, J S : 나누기

교사 : 나누기가 뭔데요? 나누기의 의미가 뭐죠?

학생 Y : 어떤 게 주어졌을 때 똑같이 이 수(피제수)만큼 나누는 거?

교사 : 맞아요, 잘했어요. '÷'는 두 가지로 그 의미를 생각했는데, 오늘은 Y가 말한 것처럼 똑같이 이 수만큼 나누는 경우에 대해서만 생각해 보자. 아까 8÷2에서 8이라는 어떤 막대가 있다고 치자. 이것을 몇 부분으로 똑같이 나누었을 때?

학생 J : 2

교사 : 그래, 똑같이 반으로 나누었을 때 한 부분의 크기는?

학생 Y, J, S : 4요.

교사 : 즉 8÷2의 의미는 8을 똑같이 둘로 나누었을 때, 한 부분의 크기를 구해 보라는 말과 같아요.

교사 : 그럼, 이제 퀴즈네어 막대로 놀아봅시다. 갈색막대를 하나 준비해 주시구요, 이 갈색막대를 똑같이 네 부분으로 나눌 수 있는 막대를 찾아보세요.

학생 Y, J, S : (빨간색 막대 1개를 놓는다)

교사 : 모두 빨간색 막대를 골랐네요? 확인해 볼까요? 하나, 둘, 셋, 넷. 맞네요? 그럼, 이 갈색막대의 크기가 1이라면, 이 빨간색 막대의 크기는 얼마인가요?

학생 Y : $\frac{2}{8}$

교사 : 응, 갈색막대를 8개로 나눈 것 중의 2만큼이니까 $\frac{2}{8}$도 맞지만, 조금 더 크게 보면, 갈색막대를 똑같이 네 부분으로 나눈 것 중의 하나이니까?

학생 Y, J : $\frac{1}{4}$이요.

교사 : 어떤 막대랑 비교했을 때요? 그렇지. 갈색막대랑 비교했을 때 빨간색 막대는 $\frac{1}{4}$의 크기를 갖죠. 자, 그럼 이번에는 파란색 막대를 똑같이 세 부분으로 나눌 수 있는 막대를 찾아볼래요?

학생 Y, J, S : (연두색 막대 1개를 놓는다)

교사 : 잘했어요. 그럼, 이 파란색 막대의 크기가 1일 때, 이 연두색 막대 하나의 크기는 얼마인가요?

학생 Y : $\frac{1}{3}$

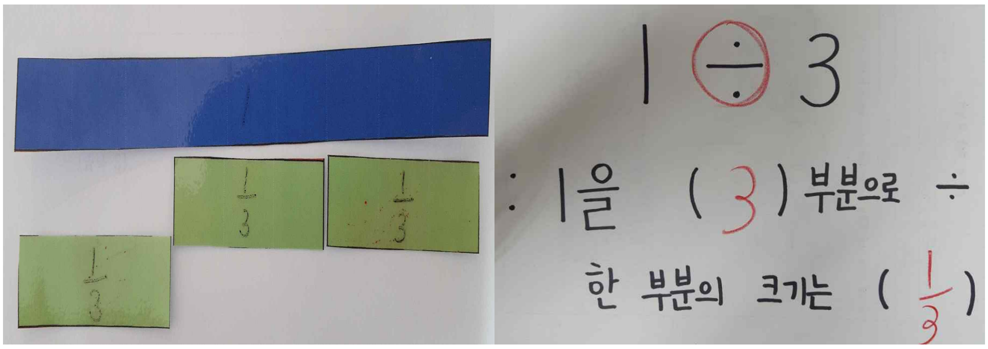
교사 : 좋습니다! 똑같이 세 부분으로 나눈 것 중의 하나이기 때문에 연두색 막대는 파란색 막대의 $\frac{1}{3}$이라고 할 수 있죠. 자, 그럼 이 문제를 수학적으로 식을 쓴다면, 우리는 어떤 식을 만들 수 있을까요? 파란색 막대 한! 개를?

학생 Y, J : 1 나누기…

학생 S : 3이요.

교사 : 그래요, 1÷3. 그리고 이 1÷3의 의미는 1은 똑같이 세 부분으로 나누었을 때, 한 부분의 크기는?

학생 Y, J, S : $\frac{1}{3}$



[그림 Ⅳ-19] 1÷3의 의미를 퀴즈네어 막대로 이해하기

(1÷5, 3÷5도 퀴즈네어 막대로 조작활동을 해 본다)

교사 : 1÷3=$\frac{1}{3}$, 1÷5=$\frac{1}{5}$, 3÷5=$\frac{3}{5}$ 임을 확인했어요. 그럼, 이 결과를 보면서, 여러분 정답들의 공통점을 찾을 수 있겠어요?

학생 Y : 뒤에 숫자가 분모가 돼요.

교사 : 그렇지! 뒤에서 나누는 숫자가 분모 자리로 가고, 나누어지는 앞의 숫자는 분자 자리로 가는 것을 확인할 수 있네?

학생 S : 아아.

교사 : 그럼, 이제 다시 퀴즈네어 막대를 보면서 나누기의 의미를 생각해 봅시다. J야, 오늘 우리가 배운 나누기의 의미는 뭐였지요?

학생 J : 음... 똑같이 그 수만큼 나누었을 때의 음... 크기요.

교사 : 그래! 그런데 이 퀴즈네어 막대를 보자. 여러분들이 똑같이 몇 부분으로 나누었다고 해서 놓은 막대인데, 이 막대는 예전에 공부했을 때는 이 파란색 막대 중에서 똑같이 나눈 것 중.에.서. 하나로 배웠던 그 모양이야!

학생 Y : 오오! 맞다!

교사 : 그럼, 오늘의 정리! 어떤 수를 네모(□)로 나눈다는 것은 어떤 수 중에서 똑같이 몇으로 나눈 것?

학생 J, S : 똑같이 네모(□)로 나눈 것 중의 하나.

교사 : 그래, 똑같이 네모(□)로 나눈 것 중의 하나로 이해해도 돼요. 그래서 '역수를 곱한다'는 말 들어 보았나요?

학생 Y, J, S : 네.

교사 : 그 말이 바로 이 말이에요. $1 \div \square = 1 \times \frac{1}{\square}$로 고쳐서 분수의 곱셈을 풀던 것처럼 풀 수 있어요. □로 나눈다는 것은 뭐다?

학생 Y : 똑같이 □로 나눈 것 중의 하나요.

나) (분수)÷(자연수)의 지도

(도입에서 3÷8의 문제를 문장제 문제로 제시하여 나눗셈의 곱셈변환 법칙을 복습한다)

교사 : 그래서, 앞으로 분수의 나눗셈 할 때는 이 규칙을 계속 머릿속에 가지고 있어야 한다는 거예요. ÷□는 똑같이 □개로 나눈 거니까 곱하기?

학생 Y, J, S : $\times \frac{1}{\square}$

교사 : 그래, 이것을 역수로 고쳐서 푼다고 배웠던 겁니다. 자, 이번에는 자연수를 나눌 것이 아니고 분?

학생 Y : 수!

교사 : 그래, 분수를 나눠볼 거예요. 우리 퀴즈네어 막대로 분수를 놓을 때는 기준막대와 비교막대 2개가 필요했지요? 첫 번째 문제, $\frac{1}{4} \div 2$입니다. 이번에는 기준막대에 대한 힌트를 줄게요. 힌트는 기준막대를 갈색 막대로 두고 $\frac{1}{4} \div 2$를 1단계, 2단계로 생각해서 풀어봅시다.

학생 S : 그럼 이 $\frac{1}{4}$은 갈색 막대의 $\frac{1}{4}$을 놓는 거예요?

교사 : 얘들아, S가 제안한 생각이랑 같은 생각인가요? 좋아! 1단계, $\frac{1}{4}$은 기준 막대인 갈색막대의 $\frac{1}{4}$입니다. 음. 모두 빨간색 막대를 잘 찾았네요? 그럼 2단계.

이 빨간색 막대를 어떻게 해야 한 대요?

학생 Y : 나누기 2.

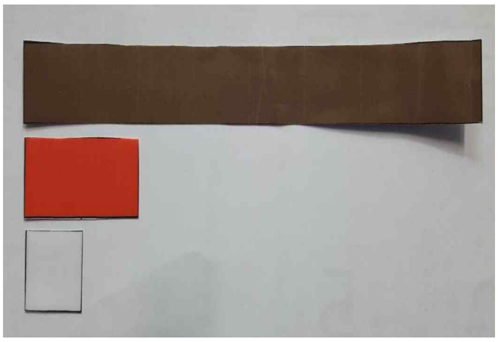
교사 : 그래요. 2단계는 이 빨간색 막대를 똑같이 반으로 나눌 수 있는 막대를 찾아야 겠죠?

학생 Y : 그럼, 1인가?

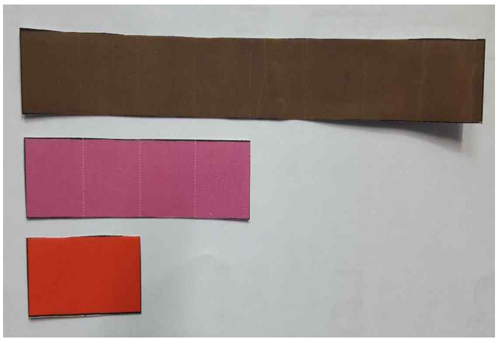
교사 : 한 번 놓아보세요. 다른 친구 거랑 다르다고 주저하지 않아도 돼요. 틀려도 자신 있게 놓아보자.

학생 Y : (갈색막대, 빨간색 막대, 흰색 막대를 차례대로 놓는다)

학생 J, S : (갈색막대, 빨간색 막대를 놓은 후, 분홍색 막대를 그 사이에 놓는다)



[그림 Ⅳ-20] 학생 Y의 $\frac{1}{4} \div 2$



[그림 Ⅳ-21] 학생 J, S의 $\frac{1}{4} \div 2$

교사 : 그럼, 누가 한 번 자기가 놓은 것을 보고 이유를 말해 줄래요?

학생 Y : 저요! 빨간색 막대가 갈색막대의 $\frac{1}{4}$이구요, 그래서 빨간색 막대의 반을 찾으라고 하니까, 흰색 막대를 찾았어요.

학생 S : 똑같이 반으로 나눈 것을 찾으라고 해서 갈색막대의 반인 보라색 막대를 찾았어요.

교사 : 아아. 한 번 다시 문제를 볼까요? $\frac{1}{4} \div 2$입니다. 똑같이 반으로 나누는 건 맞는데, 기준막대인 갈색 막대 1을 반으로 나눠야 하나요, 아니면 갈색 막대를 똑같이 4부분으로 나눈 것 중의 하나인 빨간색 막대를 반으로 나눠야 하나요?

학생 S : 아. 빨간색 막대요.

(학생 J와 S의 오류를 교정한 후, 나눗셈의 곱셈교환 법칙을 다시 한 번 복습한다)

교사 : $\frac{1}{4} \div 2$는 우선 $\frac{1}{4}$을 몇으로 나누었다는 뜻이죠?

학생 Y, J, S : 둘이요.

교사 : 그래, $\frac{1}{4}$을 반으로 나눈 것을 의미하는데, 그 뜻은 $\frac{1}{4}$을 똑같이 반으로 나눈 것 중의 하나로 이해해도 된다고 했으니까 이 빈칸($\frac{1}{4} \div 2 = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$)에 들어갈 숫자는?

학생 Y, J, S : $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

3) 지도의 결과

이 차시에서는 학생 Y는 연산의 의미를 이해하면서 풀고 있지만, 학생 J와 S가 여전히 '÷'의 의미를 생각하기보다 문제의 정답을 찾는 문제풀이를 하려고 했다. 분수의 나눗셈은 나눗셈의 곱셈변환 법칙의 원리만을 퀴즈네어 막대로 지도할 계획이었지만, 직접 $\frac{1}{4} \div 2$를 기준막대를 제시하고 풀어보게 해 보니, 피제수와 나누기 연산, 그리고 제수와의 관계를 제대로 파악하고 있는지를 관찰할 수 있었다. 퀴즈네어 막대의 조작이 크게 어렵지 않은 경우에는 간단한 문제를 퀴즈네어 막대로 풀어보게 하고 설명하는 활동이 연산의 의미를 이해하고 있는지 확인하는 좋은 수단임을 확인하였다.

바. 9~10차시 〈□÷(분수)의 계산〉

1) 지도의 방향

이 차시에서는 ÷(분수)가 등분제의 의미로 이해했을 때, 다소 어색함을 발견하게 하고 포함제의 상황을 충분히 이해하도록 도입을 구성하였다. 등분제, 포함제라는 용어는 사용하지 않고 몇 번 덜어낼 수 있는지, 몇 명에게 줄 수 있는지의 용어로 대체하여 퀴즈네어 막대의 조작활동만으로 정답을 찾게 한 후, 나눗셈의 곱셈변환법칙으로도 정답을 찾을 수 있음을 안내하였다.

2) 지도의 실제

가) (자연수)÷(분수)의 지도

교사 : 지금부터 선생님이 문제 2개를 보여줄 거예요. 둘 중 한 문제는 정말 말도 안 되는 이상한 문제이고, 한 문제는 해결가능한 문제인데, 어떤 문제가 이상한 지 어느 부분이 이상한 지 생각해 보고 말해주세요.

학생 S : (사탕 2개를 $\frac{1}{4}$명에게 나누어 준다는 문제를 가리키며) 여기요.

교사 : 오! 뭔가 감을 잡은 거 같은데? 이 문제에서 어디가 이상하죠?

학생 S : 그런데 이 문제는 $\frac{1}{4}$만큼인데 여기는 왜 $\frac{1}{4}$명이에요?

교사 : 그래 S야, 자꾸 '명'을 가리키는 것을 보니 이상하다는 느낌이 계속 오는 것 같네? 도대체 $\frac{1}{4}$명은 어떻게 셀 수 있을까? 머리인가? 다리인가?

학생 Y : (웃음) 도대체 $\frac{1}{4}$명이 뭐야? 사람을 4등분해야 하는 건가?

학생 S : (웃음) 너무 잔인해.

교사 : 그렇지? 너무 잔인하다. 그래서 이 문제는 풀 수가 없는 문제인 거야. 사탕 2개를 $\frac{1}{4}$명에게는 절대로 나누어 줄 수 없지. 그럼 이 문제는? 우선, 사탕을 $\frac{1}{4}$만큼으로 나눈다는 말이 뭘까요?

학생 Y : 사탕을 4개로 나눈 것 중의 하나요.

교사 : 그렇지. 사탕을 똑같이?

학생 Y, S : 4개로 나눈 것 중의 한 부분요.

교사 : 좋아! 그렇게 나눌 수 있니?

학생 Y, J, S : 네.

교사 : 맞아! 사람은 똑같이 4개로 나눌 수 없지만, 사탕은 똑같이 4개로 나눌 수 있어. 이 때, 사탕 2개를 똑같이 $\frac{1}{4}$만큼씩 나누었을 때, 몇 사람이 그것을 먹을 수 있느냐, 그걸 묻는 문제인 거야.

학생 S : 아아. (혼잣말로) 그럼 8명이 먹을 수 있겠네?

교사 : 우와. 식도 안 세우고 어떻게 바로 8명이 나왔지? 한 번 이 문제의 식을

세워볼까? 사탕 2 나누기?

학생 Y, S : 2 나누기 $\frac{1}{4}$

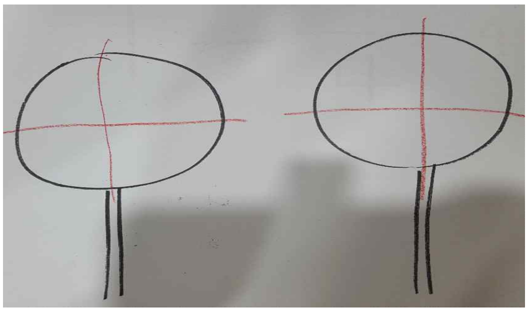
교사 : 자, 그럼 S는 아까 어떻게 바로 8이 나왔니?

학생 S : 그냥, 머릿속에서요.

교사 : 그냥 머릿속에서 (막대사탕 그림을 보여주며) 이것을 생각한 게 맞아?

학생 S : (웃으며) 네. 이 그림 생각하면서 4개로 나눴어요.

교사 : 그래? 그럼 어떻게 나눴는지 한 번 빨간 펜으로 나눈 것을 그려봐.



[그림 Ⅳ-22] 학생 S가 이해한 $2 \div \frac{1}{4}$

교사 : 좋아. 사탕 1개에 4조각씩, 사탕 2개는 몇 명에게 나눠줄 수 있었어?

학생 Y, J, S : 8명이요.

교사 : 좋아요. 오늘은 우리 이런 문제와 관련된 것을 해결해 볼 거예요. 우선, $1 \div \frac{1}{4}$을 봅시다. J아, 이 문제를 아까 사탕 문제처럼 바꿔보면 어떻게 될까?

학생 J : 사탕... 1개를...

학생 Y : 4조각으로 나눴을 때, 몇 명이 나눠먹을 수 있나!

교사 : (웃음) Y, 정말 잘 말했는데 다음번에는 J에게도 말할 기회를 줍시다. Y랑 J가 잘 말했어. $1 \div \frac{1}{4}$은 사탕 1개를 $\frac{1}{4}$만큼씩 나누었을 때, 몇 조각이 나오는 지로 이해할 수 있어요. 그럼, 퀴즈네어 막대에서 이 보라색 막대의 $\frac{1}{4}$만큼에 해당하는 막대를 찾아볼 수 있겠어요?

학생 Y, J, S : (단번에 흰색 막대를 집는다.)

교사 : 잘했어요. 보라색 막대를 똑같이 몇으로 나눈?

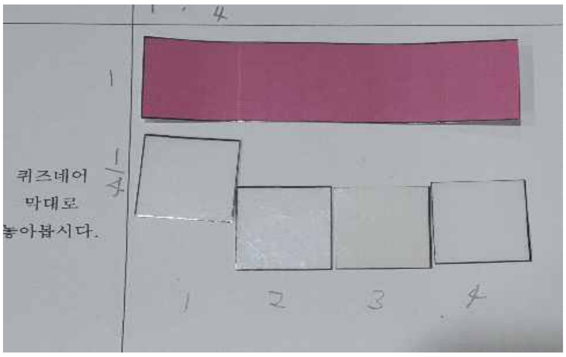
학생 Y, S : 4개로 나눈 것 중의 하나.

교사 : 그러면 이 보라색 막대와 여러분이 찾은 흰색 막대를 보고 $1 \div \frac{1}{4}$의 결과를 생각해 봅시다. 이 보라색 막대를요, 흰색 막대만큼 똑같이 나누어서 친구들에게 나누어 주려고 해요. 친구 몇 명에게 나누어 줄 수 있지?

학생 Y : 4명이요.

교사 : 어떻게 해서?

학생 Y : 보라색 막대는 흰색 막대가 4개 들어갈 수 있어요.



[그림 Ⅳ-23] 학생 Y의 $1 \div \frac{1}{4}$을

퀴즈네어 막대로 해결하기

교사 : 그렇지! 보라색 막대에서 흰색 막대를 4번 덜어낼 수 있어서 $1 \div \frac{1}{4}$의 결과는?

학생 Y, J, S : 4

(같은 방식으로 $2 \div \frac{1}{4}$, $3 \div \frac{1}{4}$을 계산하고, 분수로 나누는 것에 대한 의미를 알고 자연수와 나누는 수의 분모를 곱했을 때, 결과 값을 얻을 수 있음을 발견한다.)

나) 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 지도

교사 : $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$을 해결해 봅시다. 우선, 여러분 $\frac{5}{6}$가 의미하는 것이 뭘까요?

학생 Y, S : 똑같이 6개로 나눈 것 중의 5개요.

교사 : 그럼 퀴즈네어 막대로 한 번 $\frac{5}{6}$를 놓아 볼까요? 우선, 기준막대는 무엇을 놓아야 할까요?

학생 S : (초록색 막대를 집으며) 6칸짜리.

교사 : 좋아요. 그럼 이 초록색 막대, 기준 막대는 크기가 얼마죠?

학생 Y, J, S : 1.

교사 : 그럼, 이 초록색 막대의 $\frac{5}{6}$만큼을 찾아볼래요?

학생 Y, S : (흰색 막대 5개를 놓는다.) / 학생 J : (노란색 막대 1개를 놓는다.)

교사 : 좋아요, Y, S. 여기에서 흰색 막대의 크기는 초록색 막대의?

학생 Y, S : $\frac{1}{6}$.

교사 : 그렇지. $\frac{1}{6}$이 5개니까 $\frac{5}{6}$ 맞고요, J가 찾은 노란색 막대도 흰색 막대 5개를 놓은 것과 같은 길이인 것을 보니 $\frac{5}{6}$만큼을 잘 찾았어요. 그럼, 이 $\frac{5}{6}$를 어떻게 할 거래요? $\div \frac{1}{6}$이 의미하는 게 도대체 뭘까?

학생 S : 음... 모르겠는데...

교사 : 음, 그럼 이 초록색 막대를 길쭉한 막대사탕이라고 생각해 보자. S가 친구들 주려고 가지고 오다가 중간에 떨어뜨려서 귀퉁이가 떨어져 버렸어. 그래서 남은 사탕이 이 노란색 막대만큼 밖에 안 남은 거야. 조금 부서졌지만, S는 이 흰색 막대만큼이라도 사탕을 쪼개서 친구들에게 나눠 주려고 해. 몇 명에게 나눠줄 수 있지?

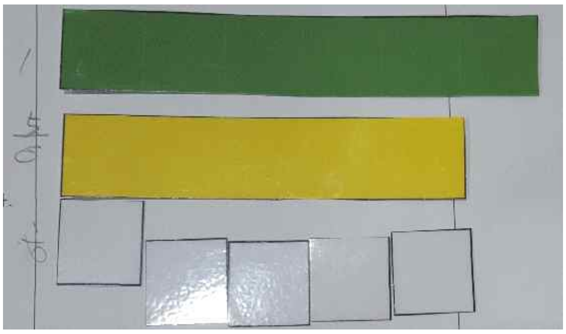
학생 Y, J, S : 5명이요.

교사 : 어떻게 해서?

학생 S : 노란색 막대는 흰색 막대가 5개 들어가요. 5조각으로 나눌 수 있어요.

교사 : 5개를 1만큼씩 나누면?

학생 Y, J, S : 5.



[그림 Ⅳ-24] 학생 S의 $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$을

퀴즈네어 막대로 해결하기

교사 : 그런데, 우리 처음 문제는 $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$이었는데, 퀴즈네어 막대를 보니까 그냥 5÷1로 해도 되는 거야?

학생 S : 음... 안 되지 않아요?

교사 : 글쎄, 우리 우연의 일치인지 다른 문제를 하나 더 풀어볼까?

($\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$를 제시하고 퀴즈네어 막대로 똑같은 방식으로 풀어본다.)

교사 : 어? 이것도 답이 6÷2로 해도 되네? 우연의 일치일까?

학생 Y, J, S : 아니요.

교사 : 그럼, 여기서 규칙. 분모가 같을 때에는?

학생 S : 분모는 투명인간이에요.

교사 : 분모는 무엇을 의미했지?

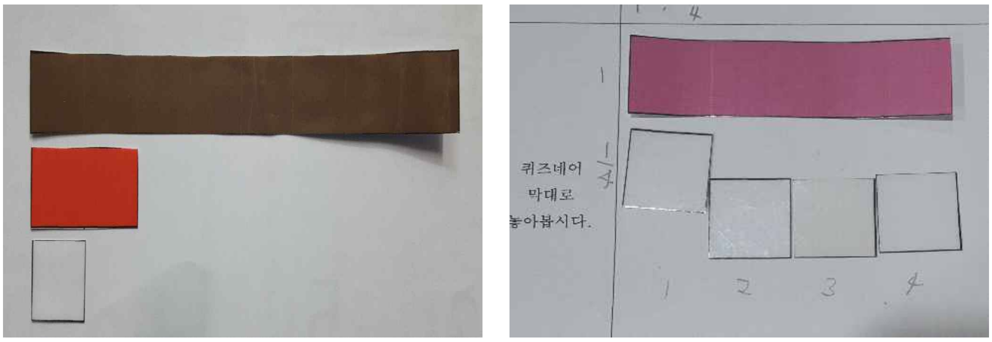
학생 Y : 똑같이 나누는 것.

교사 : 그렇지. 분모는 똑같이 분모만큼으로 나누는 것을 의미하는 단위이니까, 분모가 같을 때에는 7개로 나눈 것 중에서 6개를 2개씩 나누었다고 생각하면 되니까, 앞으로 분모가 같은 분수의 나눗셈에서는 무엇끼리 나누어도 될까?

학생 S : 분자끼리요.

3) 지도의 결과

분수의 곱셈보다 퀴즈네어 막대로 분수의 나눗셈을 이해하는 것에 노력이 더 필요함을 느낄 수 있었다. 그 이유는 나눗셈이 가지는 등분제 상황과 포함제 상황에 따라서 퀴즈네어 막대를 조작하는 방법과 값을 찾는 방법이 달라지기 때문이다. 예를 들면, [그림 Ⅳ-25]와 같이 분수의 나눗셈을 등분제로 해석했을 때에는 기준막대(갈색막대)의 $\frac{1}{4}$인 빨간색 막대를 똑같이 2개로 나눈 흰색 막대의 크기를 기준막대와 비교하는 방식으로 결과 값을 얻어내지만, $1 \div \frac{1}{4}$와 같은 포함제 상황에서는 기준막대 1에서 $\frac{1}{4}$만큼씩을 몇 번 덜어낼 수 있는 지를 찾아야 하므로 퀴즈네어 막대의 개수를 세는 방식으로 결과 값을 얻어야 한다.



[그림 Ⅳ-25] 퀴즈네어 막대로 $\frac{1}{4} \div 2$와 $1 \div \frac{1}{4}$을 해결하는 서로 다른 조작법

그 결과, 복잡한 의미추론이 아직 어려운 수학부진아 학생들에게는 모든 분수의 나눗셈을 퀴즈네어 막대로 지도하기보다는 간단하게 의미를 이해할 수 있는 문제에서만 퀴즈네어 막대를 활용하거나, 지도시기의 간격을 충분히 늘려서 한 문제유형이 완전히 파악되었을 때, 다른 문제유형을 지도하는 것이 효율적일 것이다.

사. 11~12차시 〈분모가 다른 분수의 계산, 대분수의 계산〉

1) 지도의 방향

이 차시의 문제유형에서 학생들은 분수의 나눗셈을 역수로 고치지도 않았는데 분수의 곱셈처럼 해결하는 오류를 보였다. 이는 왜 역수로 고쳐서 문제를 해결할 수 있는지에 대한 이해 없이 계산방법을 외운 결과이므로, 오류를 교정하기 위해 퀴즈네어 막대를 활용하여, ÷와 ×의 관련성을 이해시키고자 하였다. 이미 수학부진아들은 교육과정 상으로 이분모 분수끼리의 나눗셈은 동분모 분수로 통분하여 분자끼리 나누는 과정에서 역수를 곱하여도 된다는 규칙을 익히고도 역수로 곱하지 않는 오류를 보이고 있으므로, 이번 지도에서는 통분하여 문제를 해결하는 과정은 생략하고 나눗셈의 곱셈변환 방법을 이해하는데 주력하고자 하였다.

2) 지도의 실제

교사 : 우리 지금까지 분수의 곱셈과 나눗셈을 공부하고 있어요. 그런 의미에서 오늘은 수업을 시작하기 전에 곱하기와 나누기의 의미에 대해서 자유롭게 이야기해 보는 것으로 수업을 시작합시다. 자, 곱하기의 의미가 뭐였죠?

학생 Y : 음… 어떤 것의 몇 배?

교사 : 그렇지. 어떤 것을 몇 배, 몇 묶음으로 이해할 수 있는데, 그렇다면 $\frac{1}{2}\times3$은?

학생 Y : $\frac{1}{2}$이 3묶음.

교사 : 그렇지! $\frac{1}{2}$이 3묶음 있는 것이고, 또 다른 의미도 있는데 예를 들면, $3\times\frac{1}{4}$이 의미하는 것은?

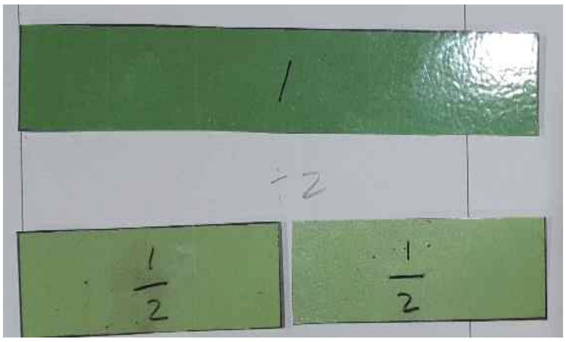
학생 Y : 3 중에서 $\frac{1}{4}$씩요.

교사 : 그래, Y는 곱하기에 대해서 이제 확실히 의미를 파악한 것 같네! 그럼, 이번에는 나누기. 나누기 2가 의미하는 것이 뭘까요?

학생 S : 똑같이 둘로 나누어 주는 거요.

교사 : 그렇지. 똑같이 두 부분으로 나누었을 때, 한 부분의 크기로 이해할 수도 있고, 둘씩 나누어 줄 때 몇 명에게 나누어 줄 수 있는지 로도 이해할 수 있겠지? 그렇다면, 선생님이 주는 이 초록색 막대를 똑같이 둘로 나눠볼까요? 어떤 색 막대 두 개가 필요할지 한 번 찾아볼까요?

학생 Y, J, S : (연두색 막대 2개씩을 놓는다.)



[그림 Ⅳ-26] 학생 J의 나눗셈의 곱셈변환

교사 : 잘 찾았어요. 이 초록색 막대를 똑같이 둘로 나누면 연두색 막대만큼씩 놓을 수 있겠네요. 여러분이 놓은 이 막대를 나누기 기호를 이용해서 식으로 세운다면 어떤 식이 만들어질 수 있을지 이야기 해 볼까? 우선, 초록색 막대를 나누는 거니까?

학생 S : 초록색 막대 나누기...

학생 Y : 나누기 2!

교사 : 좋아. 초록색 막대 나누기 2의 결과는?

학생 Y : 연두색 막대 2개!

교사 : 연두색 막대 2개는 합치면 초록색 막대가 되는 거고, 초록색 막대를 둘로 나누었으니까 초록색 막대의 반만큼만!

학생 Y : 아아, 그럼 연두색 막대 1개.

교사 : 그렇지. 자, 그럼 우리 나누기 하지 말고 분수의 곱셈으로 돌아가 보자. 자, 이 연두색 막대는 초록색 막대를 똑같이 둘로 나눈 것 중의 하나죠?

초록색 막대가 1일 때, 연두색 막대의 크기는?

학생 Y, S : $\frac{1}{2}$이요.

교사 : 좋았어. 그럼 연두색 막대는 초록색 막대의 $\frac{1}{2}$이니까, 초록색 막대 1?

학생 Y : 곱하기 $\frac{1}{2}$!

교사 : 역시, Y는 곱셈 박사가 됐구나! 곱하기의 의미에는 '어떤 것 중에서'라는 뜻도 있었지요? 그래서 이 퀴즈네어 막대를 $1\times\frac{1}{2}$로도 나타낼 수 있겠어요. 그럼, 똑같은 초록색과 연두색 막대를 보고 우리 두 가지 식을 썼는데, 같이 말해 볼까?

학생 Y, J, S : $1\div2$하고 $1\times\frac{1}{2}$

교사 : 잘했어요! $1\div2$하고 $1\times\frac{1}{2}$은 결국 같은 결과를 나타내고 있어요. 그래서, 우리가 분수의 나눗셈을 할 때, 역수를 곱하면 된다고 말하는 게 여기서 오는 거예요. 똑같이 둘로 나눈 크기와 똑같이 둘로 나눈 것 중의 하나의 크기는 서로 같기 때문에 우리는 나누는 수를 역수로 바꿔서 곱해도 같은 결과를 얻을 수 있어요.

3) 지도의 결과

이분모 분수의 나눗셈은 분모를 통분하여 분자끼리 나누는 과정에서 수학적 추론으로 분모 부분의 위치를 바꾸어 역수를 곱하는 알고리즘을 발견한다.

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}&=\frac{3\times7}{5\times7}\div\frac{4\times5}{7\times5}\\&=\frac{3\times7}{4\times5}\ \text{(분모의 4와 5의 위치를 바꾸어)}\\&=\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}\end{aligned}$$

[그림 Ⅳ-27] 기존의 나눗셈의 곱셈변환

이와 같은 알고리즘의 유도는 수학부진아 뿐만 아니라 많은 학생들에게 수학적 추론을 요구하여 이해되기 어려운 부분이다. 그런 의미에서, 퀴즈네어 막대를 활용한 나눗셈의 곱셈변환은 나눗셈의 결과와 곱셈을 변환한 결과가 같음을 확인할 수 있으므로 '역수를 곱하여' 계산하는 알고리즘을 좀 더 쉽게 접근할 수 있는 효과적인 조작활동이었다.

3. 효과 분석

퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 곱셈과 나눗셈을 학습하였을 때, 수학 학습 부진아들의 오류 변화를 확인하기 위하여 2016년 8월 25일자에 실시하였던 사전검사지로 사후 검사를 실시하였다. 사후 검사의 결과는 <표 Ⅳ-12>와 같이, 총 25문제 중 학생 Y는 23문제, 학생 J는 19문제, 학생 S는 18문제를 맞음으로써, 효과적으로 오류 교정이 이루어졌음을 확인하였다.

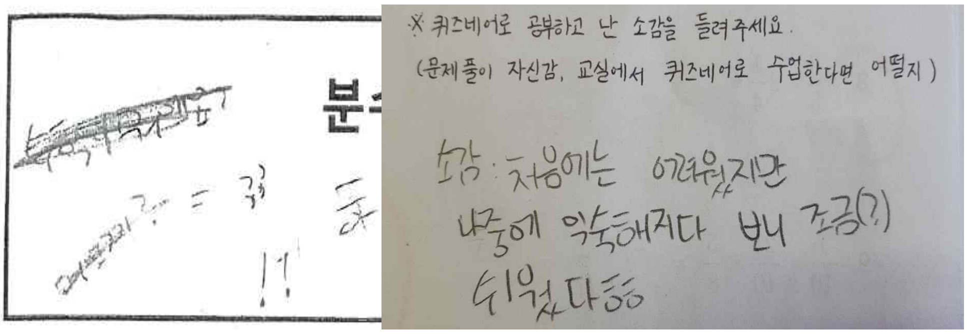
<표 Ⅳ-12> 사후검사 문항별 결과

(정답: ○, 오답: ×)

번호	문제 유형	문제	학생 Y	학생 J	학생 S
1	(진분수)×(자연수)	$\frac{2}{5}\times 5$	○	○	○
2	(대분수)×(자연수)	$1\frac{1}{6}\times 8$	○	○	○
3	(자연수)×(진분수)	$10\times\frac{4}{15}$	○	○	○
4	(자연수)×(대분수)	$18\times 1\frac{7}{12}$	○	○	×
5	(단위분수)×(단위분수)	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$	○	○	○
6	(진분수)×(진분수)	$\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}$	○	○	○
7	(진분수)×(진분수)	$\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}$	○	○	○
8	(대분수)×(대분수)	$3\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{4}$	○	○	○
9	세 분수의 곱셈	$\frac{7}{10}\times\frac{21}{10}\times\frac{5}{8}$	○	○	○

10	세 분수의 곱셈 문장제 문제	전체 학생 수의 $\frac{1}{6}$ 은 6학년입니다. 6학년 중에서 $\frac{2}{5}$ 가 여학생이고 그 중에서 $\frac{3}{4}$ 이 수학을 좋아합니다. 수학을 좋아하는 6학년 여학생은 전체 학생의 몇 분의 몇입니까?	×	○	×
11	(자연수)÷(자연수)	1÷4	○	○	○
12	나눗셈의 몫	5÷2	○	○	○
13	(진분수)÷(자연수)	$\frac{3}{5} \div 4$	○	×	○
14	(가분수)÷(자연수)	$\frac{6}{5} \div 2$	○	×	○
15	(대분수)÷(자연수)	$2\frac{4}{5} \div 4$	○	×	○
16	나눗셈의 몫 문장제 문제	케이크 3개를 8명이 똑같이 나누어 먹었습니다. 한 사람이 먹은 케이는 케이크 하나의 몇 분의 몇 입니까?	×	○	×
17	(자연수)÷(단위분수)	$2 \div \frac{1}{3}$	○	×	×
18	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(1)	$\frac{7}{9} \div \frac{1}{9}$	○	○	×
19	분모가 같은 진분수끼리 나눗셈(2)	$\frac{14}{15} \div \frac{7}{15}$	○	○	×
20	분모가 다른 진분수끼리 나눗셈	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$	○	○	○
21	분모가 다른 진분수끼리 나눗셈	$\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$	○	○	×
22	(자연수)÷(분수)	$7 \div \frac{3}{4}$	○	×	○
23	(자연수)÷(분수)	$4 \div \frac{2}{3}$	○	×	○
24	대분수의 나눗셈	$3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4}$	○	○	○
25	대분수의 나눗셈 문장제 문제	보미는 어머니께서 만드신 $7\frac{1}{2}$L 만큼의 과일 주스를 $1\frac{1}{2}$L씩 나누어 담아서 이웃에게 선물하려고 합니다. 몇 명의 이웃에게 나누어 줄 수 있을까요?	○	○	○

다만, 퀴즈네어 막대를 활용한 지도로 가장 높은 성취도를 보인 학생 Y의 경우, 계산 실수와 같은 오류까지는 교정하지 못하여 2문제를 오답하였다. 매우 내성적인 성향으로 소극적인 참여도를 보였던 학생 J의 경우, 나눗셈의 곱셈변환 방법을 활용하여 분수끼리의 나눗셈 문제에서는 오류가 교정되었으나 제수나 피제수가 자연수로 제시될 경우에는 다시 분수의 곱셈 알고리즘으로 풀어 6문제에서 오답을 보였다. 매우 낮은 자존감으로 수학 문제에 손도 안 댔던 학생 S의 경우, 가장 놀라울 만한 변화를 보여주었는데, 다소 시간이 걸렸지만 25문제를 모두 풀어냈으며, 약간의 오류는 있지만 수학 문제에서 그 의미를 먼저 생각하고 풀어보려는 태도를 보였다.



[그림 Ⅳ-28] 학생 S의 태도변화가 드러난 소감 (지도 전과 지도 후)

이 결과, 퀴즈네어 막대로 분수의 곱셈, 나눗셈을 지도할 때, 모든 유형에서 만족할 만한 결과를 얻어내지는 못했으나, 답이 유도되는 과정을 시각적인 자극과 조작활동을 통하여 흥미를 충분히 유발하였으며 학생들의 적극적인 참여를 유도할 수 있었다. 특히, 분수의 나눗셈의 지도보다는 분수의 곱셈 지도에서 퀴즈네어 막대 조작활동이 매우 효과적이었음은 학생들의 사후 결과, 3명 모두 80% 이상의 정답률을 보이고 있는 것을 통해 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 요약 및 결론

본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈 연산에 있어 퀴즈네어 막대를 활용한 지도가 초등학교 수학부진학생들에게 효과가 있는지 알아보고 분수의 개념 및 연산지도에 효과적인 교수·학습 방법을 연구함으로써, 학교 수학수업 현장에서 수학부진 학생의 오류를 교정하는 방안을 제시하고 교사들에게는 분수의 연산을 지도하는데 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다.

이를 위하여 우선 2009 개정 교육과정과 교과서 분석을 통해 분수의 곱셈과 나눗셈 연산의 문제유형을 추출하였고, 분수의 개념 및 연산지도에서 퀴즈네어 막대를 활용한 선행연구들을 조사하여 각 문제유형별 퀴즈네어 막대 활용방안을 모색하였다. 그리고 본 연구자가 재직 중인 제주특별자치도 서귀포시의 S 초등학교 6학년 학생 164명을 대상으로 사전검사를 실시한 후, 그 중 성적 하위 10% 학생 3명을 선정하여 오답문항의 오류를 분석하고 10개의 문제유형을 12 차시에 걸쳐 지도한 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 수학 부진학생들에게서 나타난 공통적인 오류는 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈 계산방법을 혼동하여 나타난 유형이었다. 분수의 곱셈에서 매우 낮은 정답률을 보인 학생 Y는 (분수)×(자연수) 혹은 (분수)×(분수)의 계산을 분수의 나눗셈을 해결하듯이 승수를 모두 역수로 고쳐서 계산하는 오류를 보였고, 분수의 나눗셈에서 낮은 정답률을 보인 학생 J는 분수의 나눗셈 문제를 역수로 고치지 않고 분수의 곱셈을 풀듯이 분모와 분모를 곱하고, 분자와 분자를 곱하여 계산하는 오류를 보였다. 그 원인으로는 곱셈, 나눗셈의 개념 부족과 의미를 이해하지 않고 문제 풀이로만 학습한 '생각하는 수학의 부재'를 들 수 있다.

둘째, 퀴즈네어 막대를 활용하여 수학 부진학생들을 지도한 결과는 다음과 같다.

퀴즈네어 막대를 활용한 수업에서 가장 적극적으로 참여하던 학생 Y의 경우, 사후검사에서 92점을 득하여 사전검사보다 72점의 높은 점수 향상을 보였는데, 의미를 이해하지 않고 기계적으로 문제풀이를 하던 이전과는 달리 분수의 의미와

곱셈과 나눗셈의 상황을 정확하게 이해하고 자신의 언어로 구체적으로 설명할 수 있게 되었다. 12차시를 지도하는 동안 매우 내성적인 성향으로 말이 거의 없고 소극적인 참여를 보였던 학생 J의 경우, 사전검사에서 분수의 나눗셈 문제유형을 어려워했었다. 이 학생도 나눗셈의 곱셈변환방법을 퀴즈네어 막대로 익히면서 '역수로 고친다.'라는 알고리즘을 이해하기는 했으나, 여전히 분수가 아닌 자연수가 들어있는 분수의 나눗셈의 일부 유형에서는 이전의 오류가 계속해서 나타나고 있는 것을 사후검사에서 확인하였다. 사전검사 25문제 중 2문제만을 풀고 자신을 '수포자(수학을 포기한 자)'로 말하고 다녔던 학생 S의 경우, 매우 긍정적인 태도변화가 있었다. '수포자', '수학이 싫다', '재미없다'라는 말보다는 수업 중 웃는 횟수나 '쉽다', '재미있다'라는 말을 더 많이 하는 것을 관찰할 수 있었으며, 쉽게 풀리지 않는 문제도 계속해서 생각해 보려고 하고 주어진 문제를 풀어 보려고 하는 자세를 보였다. 달랑 2문제만 풀고 8점을 득했던 사전검사와 오답도 있었으나 모든 문제를 풀어 72점을 득했던 사후검사의 점수 변화도 학생 S의 태도변화를 보여준다. 지도 이후, 학생 S와의 개별 인터뷰에서 학생 S는 '퀴즈네어 막대로 공부하면 손으로 직접 만지고 눈으로 볼 수 있으니까 무슨 의미인 지 알아볼 수 있어서 재미있다'라고 응답하였다.

퀴즈네어 막대를 활용한 분수의 연산지도는 이전까지의 복잡한 추론과 알고리즘 문제풀이에서 시각적으로 자극을 주는 막대를 조작해보는 구체적 활동으로 전환되어 학습에 흥미를 유발하고 완벽한 계산보다는 의미를 생각하는 수학을 유도할 수 있었다. 다만, 퀴즈네어 막대를 활용하는 방법이 매우 다양하다는 점에서 학생들이 의외의 해석을 하기도 하고, 다른 유형의 문제에서는 오히려 혼동하는 모습을 보이기도 하였다. 예를 들면, 분수의 나눗셈의 경우, $\frac{1}{4} \div 2$를 퀴즈네어 막대로 해결할 때에는 기준막대와 비교막대의 크기를 비교하여 값을 구하는데, $1 \div \frac{1}{4}$을 구할 때에는 기준막대에서 비교막대만큼 몇 번 덜어낼 수 있는지, 혹은 비교막대가 기준막대만큼 얼마나 들어가는 지로 조작해야 하기 때문에, 교사의 활용 안목 없이 퀴즈네어 막대가 활용된다면 오히려 의미 이해의 악영향을 끼칠 수 있을 것이다.

수학교육자 Dines는 퀴즈네어 막대의 맹목적 사용에 대해 부정적인 입장을

취하였는데, 퀴즈네어 막대가 유용함을 인정하였으나 학교현장에서 퀴즈네어 막대만을 유일하게 사용하거나 교구에 대한 교사의 충분한 이해 없이 사용되어지는 것을 비판하였다(김남희, 1999). 그러므로, 퀴즈네어 막대를 맹목적으로 활용할 것이 아니라, 단위분수를 중심으로 분할과 반복 조작활동을 통해 수학 학습부진아들의 분수의 곱셈과 나눗셈 지도는 학생들에게 분수의 개념, 분수와 연산기호와의 관련성, 그리고 답이 유도되는 과정을 직접 조작해보고 시각적으로 확인하는 방향으로 활용된다면 부진학생들의 인지적 영역과 흥미유발과 같은 정의적 영역까지 교정할 수 있는 효율적인 지도방안이 될 수 있을 것이다.

2. 제언

본 연구의 제한점 및 후속 연구에 대한 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 연구자가 추출한 문제로 구성된 비표준화 사전검사지의 결과, 상대적으로 성적이 낮았던 학생 3명을 수학학습부진아로 선정하여 지도한 연구로, 모든 학생에게 일반화하여 적용하기에는 무리가 있다. 검사지의 문제 유형에 따라 오류 원인이 달라질 수 있으며, 학생 개개인의 오류 유형은 학생 수만큼 다양하다. 따라서, 분수의 곱셈과 나눗셈 성취수준을 정확하게 진단하기 위한 신뢰할만한 검사지 개발과 좀 더 구체적으로 오류 분석이 가능한 후속 연구가 이루어져야 할 것이다.

둘째, 퀴즈네어 막대는 서로 다른 색과 길이의 막대를 시각적으로 인지하여 활용하는 것이 가장 큰 특징인 교구이지만, 본 연구에서는 단위분수를 중심으로 한 분할과 반복 조작활동의 한 도구로서 사용되어졌다는 점에서 원래의 용도와는 다소 맞지 않는 활동이 진행되었다. 그럼에도 불구하고 퀴즈네어 막대의 특징인 서로 다른 색깔, 길이가 부진학생들의 집중도와 집중시간을 높여 단위분수의 조작활동에도 활용될 수 있음을 학생들의 반응과 사후검사로 확인할 수 있었다.

셋째, 분수끼리의 곱셈과 분수의 나눗셈 지도에서는 조작활동만으로 답을 유도하기가 어렵고 나눗셈 유형에 따라 막대를 조작하는 방법도 다양하여 복잡한

추론이 어려운 수학학습부진아들을 지도하기에는 한계가 있었다. 따라서, 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 나눗셈 문제를 해결 가능한 간단한 수준의 조작 활동 방법 개발과 퀴즈네어 막대가 아닌 다른 자료를 활용한 분수의 나눗셈 교수·학습 방법이 연구되어 수학학습부진아들의 오류가 개선될 수 있도록 해야겠다.

참 고 문 헌

교육과학기술부. (2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8]).

교육과학기술부. (2016a). 수학 3-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016b). 수학 3-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016c). 수학 4-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016d). 수학 4-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016e). 수학 5-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016f). 수학 5-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016g). 수학 6-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016h). 수학 6-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016i). 초등학교 교사용 지도서 수학 3-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016j). 초등학교 교사용 지도서 수학 3-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016k). 초등학교 교사용 지도서 수학 4-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016l). 초등학교 교사용 지도서 수학 4-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016m). 초등학교 교사용 지도서 수학 5-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016n). 초등학교 교사용 지도서 수학 5-2. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016o). 초등학교 교사용 지도서 수학 6-1. (주)천재교육.

교육과학기술부. (2016p). 초등학교 교사용 지도서 수학 6-2. (주)천재교육.

고인자. (2003). 퀴즈네어 막대를 활용한 분수 연산의 효율적인 교수·학습 방법. 광주교육대학교 교육대학원.

김남희. (1999). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 1**(2), 699-721.

김용석. (2015). 단위화 드러내기를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈의 이해. 한국교원대학교 대학원.

서동엽. (2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. **대한수학교육학회 수학교육학연구, 15**(3), 233-249.

서은정. (2012). 퀴즈네어 막대를 활용한 수학 학습부진아 분수 연산 지도 사례. 광주교육대학교 교육대학원.

신계숙. (2005). 수학 학습부진아 분수 연산 개별화 지도모델 개발과 적용 효과. 고신대학교 교육대학원.

신봉숙, 김용태, 김한나, 박주영, 최대욱. (2001). 조작활동을 통한 분수 지도에 관한 연구. 2001학년도 우수현장논문 연구결과보고서.

정은실. (2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 8**(2), 123-138.

최근배. (2010). 분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구, **대한수학교육학회 <학교수학>, 12**(3), 411-424.

[개념 잡는 수학 교실] 분수. (2013. 8. 27). 소년한국일보. 2016. 8. 22, http://kids.hankooki.com/ArticleView/ArticleView.php?url=edu/201308/kd2013082715352077380.htm&ver=v002

한국교육심리학회. (2000). 교육심리학용어사전[소책자]. 학지사.

국립특수교육원. (2009). 특수교육학 용어사전[소책자]. 저자.

ABSTRACT*

A Case Study on Teaching Multiplication and Division of Fractions to Underachievers in Mathematics by Using Cuisenaire Rods

Lee, Ji Mi

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Choi, Keunbae

The purpose of this study was to analyze the teaching of underachievers in mathematics using Cuisenaire rods, and effective teaching methods for understanding the meaning of fractions. Through this study, student errors with fractions operations can be corrected in the math classroom, and recommendations for teachers teaching fractions are provided.

By analyzing the 2009 revised national curriculum and grade 5-6 textbooks, 25 problems of pre-testing that was developed by researchers were given to 164 6th graders in S Elementary school, Seogwipo, Jejudo. Among them, three students who were in the 'under 10%' group were

* A thesis submitted to the committee of Graduate School of Education, Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education conferred in February, 2017.

chosen to be underachievers in mathematics. Next, the incorrect answers were analyzed by pre-testing and an interview. And then, those three students learned multiplication and division of fractions using Cuisenaire rods during 12 lessons. This process led to consequential effects of the study.

First, the common error types that were presented by underachievers in mathematics appeared to confuse the calculation method of multiplication and division of fractions. When solving the division of fractions, students calculated (fractions)×(natural number) or (fractions)×(fractions) by multiplying the inverse of the multiplier. Or, when solving the multiplication of fractions, they did the division of fractions without changing to the inverse : the denominators were multiplied with each other, the numerators were multiplied with each other. In addition, all three underachievers in mathematics who the researcher had taught felt tired of math mechanical exercises, and showed a negative attitude towards math. The causes may be a 'lack of mathematical thinking'; math mechanical exercises without understanding the concept of multiplication and division of fractions.

Thus, in the 12 lessons designed to get at student's understanding of the meaning of fractions and the situation of the fractions operation, students solved minimal problems and utilized Cuisenaire rods to gain a motivation and mathematical thinking

After the 12 lessons utilizing Cuisenaire rods, all three underachievers in mathematics got a close achievement to 72.6% which is the average of pre-testing. One of the students got over 90%. The most remarkable change is the change in attitude of the students who had very low self-esteem in mathematics. They also tried to understand the meaning of fractions and the situation of the fractions operation.

However, because there were a variety of ways to utilize Cuisenaire rods, students had unexpected interpretations, and felt rather confused while solving the division of fractions. In the case of division, students could calculate the result by comparing the basic rod and compared rod, or by counting how many compared rods can be included into the basic rod. Therefore, a teacher who wants to use Cuisenaire rods should teach the application method of Cuisenaire rods with discernment.

Through this study, when it comes to teaching fractions operations to underachiever in mathematics, using Cuisenaire rods was a very effective method. It could help students to find out the result visibly and manipulate concrete materials. However, it is highly anticipated that standardized tests should be developed for accurate diagnoses as well as more effective teaching methods and activities to teach the division of fractions for underachiever in mathematics.

key word : Multiplication·Division of Fractions, Cuisenaire Rods, Underachievers in Mathematics

부 록

〔부록 1〕 사전·사후 검사지

〔부록 2〕 퀴즈네어 활동지

〔부록 1〕

분수의 곱셈, 나눗셈 평가지

6학년 (　　)반 이름 : (　　　　　　　)

1. $\frac{2}{5}\times 5$ =

2. $1\frac{1}{6}\times 8$ =

3. $10\times\frac{4}{15}$ =

4. $18\times 1\frac{7}{12}$ =

5. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ =

6. $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}$ =

7. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}$ =

8. $3\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{4}$ =

9. $\frac{7}{10}\times\frac{21}{10}\times\frac{5}{8}$ =

10. 서귀북초등학교 전체 학생 수의 $\frac{1}{6}$은 6학년입니다. 6학년 중에서 $\frac{2}{5}$가 여학생이고 그 중에서 $\frac{3}{4}$이 수학을 좋아합니다. 수학을 좋아하는 6학년 여학생은 전체 학생의 몇 분의 몇입니까?

식:

답:

11. 1÷4 =

12. 5÷2 =

13. $\frac{3}{5}\div 4$ =

14. $\frac{6}{5}\div 2$ =

15. $2\frac{4}{5}\div 4$ =

16. 케이크 3개를 8명이 똑같이 나누어 먹었습니다. 한 사람이 먹은 케이는 케이크 하나의 몇 분의 몇 입니까?

식:

답:

17. $2 \div \frac{1}{3}$ =

18. $\frac{7}{9} \div \frac{1}{9}$ =

19. $\frac{14}{15} \div \frac{7}{15}$ =

20. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$ =

21. $\frac{3}{8} \div \frac{2}{5}$ =

22. $7 \div \frac{3}{4}$ =

23. $4 \div \frac{2}{3}$ =

24. $3\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{4}$ =

25. 보미는 어머니께서 만드신 $7\frac{1}{2}$L 만큼의 과일 주스를 $1\frac{1}{2}$L씩 나누어 담아서 이웃에게 선물하려고 합니다. 몇 명의 이웃에게 나누어 줄 수 있을까요?

식:

답:

수고하셨습니다. 문제는 총 25문제입니다. 다시 한 번 검토하세요.

〔부록 2〕

퀴즈네어 막대 활동지

문 제	
퀴즈네어 막대로 놓아봅시다.	
풀이과정	