석사학위논문

# GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료 개발 및 적용

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

**오 동 율**

2018년 8월

# GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료 개발 및 적용

지도교수 양 성 호

오 동 율

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

2018년 8월

오동율의 교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 ________________ 인

위 원 ________________ 인

위 원 ________________ 인

제주대학교 교육대학원

2018년 8월

< 초록 >


# GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료 개발 및 적용



**오 동 율**

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

**지도교수 양 성 호**



본 연구는 GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료를 개발하고 이를 수업에 적용 후 이를 분석하여 학생들이 GeoGebra와 몬테카를로 시뮬레이션을 숙달하고 다양하게 활용할 수 있는 능력을 키워 학생들의 연구 활동에 도움을 주고자 하는 목적을 가지고 있다.

이러한 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료를 개발한다.

2. 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료를 적용한 후, 학생 활동 및 결과물을 분석한다.

본 연구의 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 본 연구에 의해 개발된 교수・학습 자료는 학생들의 연구 활동에 다양하게 활용할 수 있는 몬테카를로 시뮬레이션 사용 숙달에 효과적임을 알 수 있었다.

둘째, 개발된 교수・학습 자료는 학생들에게 GeoGebra의 다양한 사용법을 익히는데 도움을 주었다.

셋째, 개발된 교수・학습 자료는 문제 해결력을 신장시키고 수학에 대한 흥미를 키워주는데 도움을 주었다.

# 목 차

# 그 림 목 차

# Ⅰ. 서론

## 1. 연구의 필요성과 목적

학교 현장에서 수학은 더 이상 획일화 된 교실 속 교과서 수업만 이루어지는 것이 아니다. 특히, 과학고에서 이루어는 과제연구, R&E 등의 연구 활동에서 수학은 다른 분야와 융합하여 많은 결과물들을 만들어내며 수학의 가치를 보여주고 있다. 이러한 점들은 과학고 학생이 아니더라도 영재 교육의 창의적 산출물대회, 수학 동아리 활동, 수험 체험전 등 교내외 여러 프로그램을 통하여 점차 많은 학생들이 수학을 이용한 연구 활동에 참여할 수 있는 기회가 제공되고 있다.

하지만 지금까지 실제 상황이 아닌 이론적으로만 학습하여 정답을 구하는 문제들을 기계적으로 해결해오던 기존의 수학교육 방법에서 이제 막 벗어나 변화하고 있는 수학교육 환경은 학생들의 연구 활동에 제한적일 수밖에 없다. 학생들은 이론으로 학습한 수학적 지식들을 문제 상황에 바로 적용하기 힘들어 하고 있으며 모든 현실 적인 문제들이 정답이 정확하게 정해져 있는 것이 아니기에 기존에 모든 조건이 알맞게 주어져 한 가지 방법으로 이를 해결해 오던 학생들에게 연구 활동은 그렇게 쉬운 것은 아니다. 이에 학생들이 주로 선정하고 있는 주제와 연구 방법들은 기존 다른 학생들이 연구하던 것들을 비슷하게 따라하는 정도에 그치고 있는 것이 현실이다.

한편, 몬테카를로 방법은 다양하면서도 전문적인 연구 분야까지도 널리 사용되고 있는 실제적인 연구 방법 중 하나이다. 이 방법을 수학 프로그램 중 하나인 GeoGebra를 이용하여 시뮬레이션으로 제작 가능하다. GeoGebra는 전문적인 프로그램 언어를 사용하지 않으면서도 기하, 대수, 스프레드시트 등 다양한 것들이 연결되어 학생들에게 활용 가능성이 매우 크며, 몬테카를로 시뮬레이션 또한 슬라이더의 랜덤 기능을 통해 쉽게 구현이 가능하고 스프레드시트를 이용하여 수집한 데이터 분석도 용이하다. 학생들에게 GeoGebra를 이용한 여러 가지 몬테카를로 시뮬레이션 제작 과정을 체험하게 한다면 학생들은 좀 더 다양하고 질적으로 향상된 연구 활동을 하는데 많은 도움이 될 것이다.

따라서 본 연구는 GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수·학습 자료를 개발하고 이를 수업에 적용 후 분석하여 학생들이 GeoGebra와 몬테카를로 시뮬레이션을 숙달하고 다양하게 활용할 수 있는 능력을 키워 학생들의 연구 활동에 도움을 주고자 하는 목적을 가지고 있다.

## 2. 연구문제

가) GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수·학습 자료를 제작한다.

나) 몬테카를로 시뮬레이션 교수·학습 자료를 적용한 후, 학생 활동 및 결과물을 분석한다.

## 3. 연구의 제한점

본 연구는 제주과학고등학교 학생들 중에 수업 참여 희망자를 받아 실시하였다. 과학고 학생들은 수학·과학 분야의 속진 심화 교육과정을 받고 있으며 R&E, 과제연구 등 여러 연구 활동 프로그램에도 꾸준히 참여하고 있다. 이에 학생들의 반응과 수행정도가 일반고 학생들과는 차이가 날 수 있다.

# Ⅱ. 이론적 배경

## 1. 몬테카를로 시뮬레이션

시뮬레이션이란 직접 실험하기 어려운 경우, 실 시스템의 유사모델을 사용하여 간접적으로 모의 실험하는 것을 말한다. 이러한 시뮬레이션 중 난수를 발생시켜 시뮬레이션 하는 것을 '몬테카를로 시뮬레이션'이라 한다. 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 발생기로서는 동전, 주사위, 항아리, 회전판, 난수표, 컴퓨터의 난수 발생기 등을 포함한다.

몬테카를로 시뮬레이션은 '대수의 법칙'에 그 이론적 기반을 두고 있다. 대수의 법칙이란 시행 횟수가 늘어나면 날수록 $\frac{(\text{성공 횟수})}{(\text{시행 횟수})}$가 이론적인 확률에 점점 근사하게 된다는 것이다.(김상길, 1999)

본 연구에서의 시뮬레이션은 모두 몬테 카를로 시뮬레이션을 뜻하며 난수 생성은 컴퓨터를 통하여 발생시키기에 의사 난수임을 밝힌다.

이러한 몬테카를로 시뮬레이션은 수학, 통계학, 과학, 공학, 컴퓨터 분야 등 다양한 분야의 연구들에서 응용되는 실제적이고도 효과적인 시뮬레이션이 방법이다.

몬테카를로 시뮬레이션의 방법은 일반적으로 다음과 같은 4가지 절차를 거친다.(이윤석, 2012)

① 특정 문제에 대한 시뮬레이션 모델 구축한다.

② 난수를 생성하여 입력할 값을 만들고 이를 모델에 입력한다.

③ 모델에서 입력된 값에 대한 결과 계산한다.

④ 계산된 결과 값을 이용하여 특정 문제에 대한 각종 분포나 특성들을 추론함으로써 문제에 대한 해답을 유추한다.

## 2. 몬테카를로 시뮬레이션 활용 예제

가) $\pi$의 추정(Robert V.Hogg, Joseph W.Mckean, Allen Craig, 2005/2006, p.339-341)

$\pi$의 추정 방법으로 다음과 같은 방법이 있다.

$U, V$가 서로 독립인 균등분포 $(0,1)$을 따를 때,

$X=\begin{cases}1 & (U^2+V^2<1)\\0 & (U^2+V^2\geq 0)\end{cases}$이라 하면 $\mathrm{E}(X)=\frac{\pi}{4}$이다.

$U, V$의 난수 $n$개를 뽑아 몬테카를로 시뮬레이션을 적용하여 확률표본 $X_1, X_2, \cdots X_n$을 만들면 통계량 $4\overline{X}$는 $\pi$의 추정량이다.

이 때, $\dfrac{\overline{X}-\pi/4}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$을 따르므로

$\pi$에 대응하는 95%, 신뢰구간은

$\left(4\overline{X}-1.96\times 4\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n},\, 4\overline{X}+1.96\times 4\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}\right)$이다.

따라서 $\pi$의 근삿값의 오차는 $1/\sqrt{n}$에 비례하며 감소한다.

나) 연속 확률변수의 난수 생성(Robert V.Hogg et al, 2005/2006, p.341)

확률 변수 $X$의 확률밀도 누적분포를 $F(x)$라 하고,

확률변수 $U$가 균등분포 $(0,1)$를 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X\leq x)=F(x)=\mathrm{P}(U\leq F(x))=\mathrm{P}\left(F^{-1}(U)\leq x\right)$이므로 $X=F^{-1}(U)$가 된다.

따라서 확률변수 $X$의 난수는 자기 자신 누적 분포 함수의 역함수에 $(0,1)$에서 임의로 추출한 난수를 대입하여 구한다.

예를 들어 $\lambda=1$인 지수분포를 따르는 확률변수 $X$가 있다고 할 때,

누적분포함수는 $F(x)=1-e^{-x}$ $(x>0)$이고

이의 역함수는 $F^{-1}(u)=-\log(1-u)$ $(0<u<1)$이다.

따라서 $U$가 균등분포 $(0,1)$을 따를 때 $X=-\log(1-U)$이다.

$U$에서 난수를 $U_1, \cdots, U_n$을 생성했다고 했을 때,

이에 대응되는 $X$의 난수는 $-\log(1-U_1), \cdots, -\log(1-U_n)$이다.

다) 뷔퐁의 바늘문제(허명회, p.70-74)
뷔퐁의 바늘문제는 다음과 같다.
‘넓은 평면 위의 일정한 간격을 두고 평행한 직선이 무수히 많이 그려져 있다. 길이 1인 바늘을 평면 위에 떨어뜨릴 때, 이 바늘이 평행선과 만날 확률을 구하여라.’
이 문제는 다음과 같은 방법으로 풀 수 있다.

바늘과 직선이 이루는 각을 $\Theta$ $(0 \le \Theta \le \pi)$라 하고
바늘의 중심에서 가까운 직선까지의 거리를 $Y \left(0 \le Y \le \dfrac{d}{2}\right)$라 하면,

표본공간 $S$는 $S = \left\{(\Theta, Y) \mid 0 \le \Theta \le \pi, 0 \le Y \le \dfrac{d}{2}\right\}$이고

구하는 사건을 $A$라 할 때, $S = \left\{(\Theta, Y) \mid 0 \le Y \le \dfrac{d}{2}\sin\Theta\right\}$이므로

이론적 확률은 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta}{\pi/2} = \dfrac{2l}{\pi}$이다.
이 확률을 몬테카를로 시뮬레이션으로 구하기 위해서는
$\Theta$는 균등분포 $(0, \pi)$, $Y$는 균등분포 $(0, \pi)$를 따른다고 할 수 있으므로
표본공간 $S$에서 $\Theta, Y$를 $n$개의 표본을 뽑아 $A$에 들어가는 비율로 구한다.

라) 베르트랑의 현(Kapadia, R. and Borovcnik, M., 1991, p59-60)
베르트랑의 현 문제는 다음과 같다
‘반지름의 길이가 $R$원에서 내접하게 정삼각형을 그리고 그 원을 지나도록 한 직선을 무작위로 그릴 때, 현의 길이 $s$가 삼각형 한 변의 길이 $a$보다 길어질 확률을 구하여라.’
이 문제는 소위 기하학적 확률에 대한 것으로 동일한 사건에 대하여 여러 가지 확률 값이 나타난 패러독스 문제이다.

이 문제는 다음 세 가지 풀이를 가지고 있다.

① 현은 중점 M에 의해 유일하게 결정되기 때문에 M 위치에 주목한다.
만약 M이 반지름의 길이가 $R_1 = R/2$인 원의 내부에 있을 경우 $s > a$이고,
그렇지 않은 경우에는 $s \le a$이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(s>a) = \dfrac{(\text{반지름 } R_1\text{인 원의 넓이})}{(\text{반지름 } R\text{인 원의 넓이})} = \dfrac{1}{4}$

② $s$의 위치를 그에 수직인 지름과 비교한다.
만약 $s$의 위치가 중심으로 부터의 거리가 $R/2$인 구간 $I$(구간 $I$는 지름의 일부이며 길이는 $R$이다.)의 내부에서 움직인다면, 그 길이는 $s$보다 크다. 따라서

구하는 확률은 $\mathrm{P}(s>a) = \dfrac{(\text{구간 } I\text{의 길이})}{(\text{지름})} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

③ 현 $s$의 양 끝점을 P, Q라 할 때, P에서의 접선 $t$와 $s$ 사이의 각을 $\theta$라 하면,
$\theta$의 범위는 $0 < \theta < \pi$이고, $\dfrac{1}{3}\pi < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$일 때, $s > a$ 이므로

구하는 확률은 $\mathrm{P}(s>a) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\pi < \theta < \dfrac{2}{3}\pi\text{인 구간}\right)}{(0 < \theta < \pi\text{인 구간})} = \dfrac{1}{3}$

이 문제를 세 가지 각각의 경우에 해당되는 몬테카를로 시뮬레이션 제작이 가능하다.

## 3. GeoGebra

수학 소프트웨어 GeoGebra에 대하여 공식 사이트에서는 GeoGebra에 대한 소개를 다음과 같이 하고 있다.

GeoGebra는 기하, 대수, 스프레드시트, 그래프, 통계, 미적분 등을 사용하기 편리한 패키지로 묶어 모든 수준의 교육에 사용할 수 있는 움직이는 수학 소프트웨어이다.
간단한 특징들은 다음과 같다.
① 기하, 대수, 스프레드시트가 완벽하게 융합된 움직이는 수학 시스템이다.
② 사용하기 쉬운 인터페이스를 가졌지만 강력한 기능을 다양하게 포함한다.
③ 웹페이지와 같은 상호작용적인 학습 자료를 만들 수 있는 저작도구이다.
④ 수백만명의 전 세계 지오지브라 사용자를 위해 다양한 언어가 지원된다.
⑤ 오픈소스 소프트웨어로 비영리 사용자에 대하여 자유롭게 사용할 수 있다.
(https://www.GeoGebra.org/about)

GeoGebra의 교육적 활용방안에 대해 김승호(2017)는 다음과 같이 설명하였다.

GeoGebra를 활용한 수업은 학생들에게 지필환경에서 경험할 수 없었던 새로운 교육 기회를 제공한다. GeoGebra는 학생들이 주체가 되어 조작을 통해 비본질적인 요소를 변화시키면서 본질적인 요소는 그대로 유지하며 수학적 관계를 파악하는 '수학적 다양성의 원리'를 바탕으로 새로운 개념을 학습하거나 배운 내용에 대하여 재인식하는 기회를 제공한다.

# Ⅲ. 연구 방법

## 1. 연구 대상

본 연구는 제주과학고등학교 학생들 중에 수업 참여 희망자를 받아 실시하였다. 총 4차시로 이루어진 수업 중에 1, 2차시에 18명의 학생들이 참여하였으며, 3, 4차시에 13명의 학생이 참여하였다.

## 2. 교수·학습 자료 개발 기준

컴퓨터를 이용하는 모의실험의 목적과 그 이점으로 우정호(2006, p.474)는 다음을 설명하였다.

① 컴퓨터는 여러 가지 종류의 값싸고 편리한 무작위 실험을 제공하여 이론적 연구에 도움이 되는 많은 자료와 경험을 제공할 수 있어 이론적 연구와 실험적 연구를 결합시킬 수 있다.
② 확률, 기댓값, 분산과 같은 중요개념과 그 성질이 적절한 실험을 통해 동기가 유발되고 예시 될 수 있으며, 무작위 실험의 안정성과 변이성 및 통계적 추정 절차를 예시 할 수 있다.
③ 반복 횟수를 쉽게 증가하여 결과의 불확실성과 변이성을 줄일 수 있으며 새로운 종류의 패턴을 발견할 수 있다.
④ 모의실험을 통해 얻은 자료는 통계적인 자료 분석의 기회를 제공한다.
⑤ 모델의 가정을 변화시키고 실험을 계속하며 생성된 자료를 분석하는 방법을 바꾸는 등 광범위한 실험이 가능하다.
⑥ 새롭고 보다 더 유연한 표현으로 모델과 통계적 처리 과정을 나타낼 수 있고 자료를 그래픽 설비를 이용하여 나타낼 수 있다.
⑦ 복잡한 확률 문제를 해결하는 중요한 방법인 모의실험에 대해 배울 수 있다.

이러한 점들을 감안하여 교수 학습 자료 개발 기준을 다음과 같이 선정하였다.

① 수학을 통해 문제를 해결하고 연구 활동에 도움이 될 수 있는 문제를 다룬다.
② 몬테카를로 시뮬레이션의 활용을 숙달할 수 있도록 다양한 예시를 접하게 하며 이 과정에서 GeoGebra 여러 조작 방법을 익히게 한다.
③ 너무 쉽지 않으면서 시뮬레이션으로 구현 가능한 도전적인 문제들을 다룬다.
④ 이론적으로 계산한 확률과 시뮬레이션으로 구한 확률을 비교할 수 있어야 하고, 결과 값이 다르게 나올 때, 이를 해결하기 위하여 다양한 방법으로 접근하기 좋은 문제를 포함한다.
⑤ 시뮬레이션을 통하여 구한 데이터를 분석하는 과정을 거칠 수 있는 문제를 포함하여 확률과 통계에 대한 이론으로만 파악하는 하는 것이 아니라 실제적으로 받아들일 수 있게 도움을 준다.
⑥ 시뮬레이션 제작에 시각화가 동시에 이루어져 학생들의 흥미를 이끌어 낸다.

## 3. 수업 소재

가) $\pi$의 근삿값 찾기
- 이 방법은 여러 가지 몬테카를로 시뮬레이션 중 가장 잘 알려져 있으며 이론적 이해와 그 제작 방법이 어렵지 않아 이를 도입 부분에 활용한다면 몬테카를로 시뮬레이션의 의미와 함께 GeoGebra의 조작법을 익히는데 용이할 것이다.
- 이렇게 구한 근삿값이 얼마나 빠르게 $\pi$에 가까워지는 가에 대해 통계적 추정을 이용하여 설명하면 구간추정의 의미를 직접적으로 받아들일 수 있을 것이다.

나) 특정 확률분포를 따르는 난수 생성
- 현실적인 확률분포들은 한 가지 형태가 아닌 다양한 형태를 이룬다. 생성한 난수가 이 특징을 고려해야 현실에 적합하다고 볼 수 있을 것이다. 이 방법을 익혀 탐구 활동에 활용한다면 몬테카를로 시뮬레이션을 적용할 수 있는 탐구 활동의 범위가 훨씬 더 넓어지고 질 향상에도 도움이 될 것이다.

다) 뷔퐁의 바늘문제

- 이 도전적인 문제를 적절하게 수학적으로 의미를 부여하여 시뮬레이션으로 만들고 시각화한다. 이 과정에서 다양한 수학적 기법을 이용하여 시각화 과정에 필요한 것들을 하나씩 해결할 것이다. 이를 통하여 현실적인 문제들을 수학적으로 의미를 부여하고 해결하는 능력과 함께 수학에 관한 자신감을 키우는 기회가 될 것이다.

라) 베르트랑의 현

- 이 문제는 난수 생성의 무작위성을 어떻게 접근하여 부여하는가에 따라 그 결과가 달라지므로 이를 달리하면서 각기 다른 통계적 확률 값으로 수렴하는 몬테카를로 시뮬레이션으로 제작을 할 수 있다. 학생들은 서로 다른 결과를 이끌어내기 위하여 전략을 세우고 서로 비교하며 다양한 방법으로 접근할 것이고 이를 통하여 수학에 대한 색다른 매력을 느낄 수 있을 것이다.

## 4. 수업 절차

가) 1차시 : 몬테카를로 시뮬레이션 소개 및 $\pi$의 근삿값 찾기

- $\pi$의 근삿값을 구하는 방법을 통하여 몬테카를로 시뮬레이션의 의미를 배우고 이를 GeoGebra로 만들며 프로그램의 기본 조작방법을 익힌다.
- 몬테카를로 시뮬레이션에 필요한 확률과 통계의 기본 개념을 배운다.

나) 2차시 : 특정 확률분포를 따르는 난수 생성

- 일반적인 확률분포를 따라는 난수 생성의 필요성을 느끼고 균등분포의 난수와 누적 분포를 이용하여 이를 만드는 방법에 대하여 배운다. 이 과정을 GeoGebra를 활용해 표준정규분포의 난수를 생성한다. 또한, 얻어낸 데이터를 분석하여 원래의 확률분포와 비교하는 과정을 거치며 실제적으로 받아들일 수 있게 도움을 준다.

다) 3차시 : 뷔퐁의 바늘문제

- 뷔퐁의 바늘문제를 이론적으로 계산하고 교사의 시범을 따라 GeoGebra를 이용하여 이 문제를 시뮬레이션 하고 시각화한다. 이 과정을 통하여 다양한 수학적 기법들을 익힌다.

라) 4차시 : 베르트랑의 현

- 먼저 베르트랑의 현 문제 구현 방법 중에서 제작과정이 비교적 쉬운 원의의 임의의 두 점을 잡아 이를 현으로 만들어 시뮬레이션을 하는 과정을 교사의 시범을 따라 제작한다.

- 학생들은 베르트랑의 현의 서로 다른 확률 값이 나오는 이유를 설명하고 스스로 이들을 몬테카를로 시뮬레이션으로 구현하는 시간을 갖는다. 이 과정에서 나올 수 있는 여러 가지 방법들에 대하여 발표와 토론의 과정을 거친다.

마) 과제

- 수업 때 만들지 않은 몬테카를로 시뮬레이션을 GeoGebra로 제작하여 메일로 제출한다.

## 5. 분석 방법

가) 학생들의 시뮬레이션 제작 과정과 결과물을 바탕으로 GeoGebra 조작 능력과 몬테카를로 시뮬레이션 이해 정도를 파악한다.

나) 베르트랑의 현 문제 시뮬레이션 제작에 대한 발표, 토론 등의 학생 활동을 분석하여 개발한 자료가 문제 해결 능력 신장에 도움이 되는지를 파악한다.

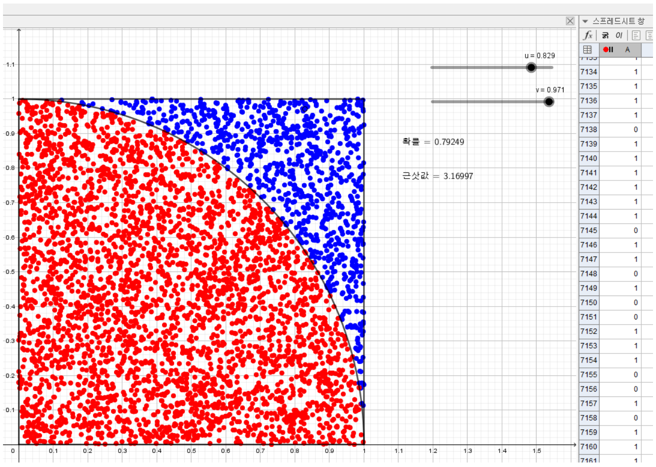
다) 제출된 과제물을 통하여 몬테카를로 시뮬레이션 활용 능력을 분석하여 학생들의 연구 활동에 도움이 되는지를 파악한다.

# Ⅳ. 연구 결과

## 1. 교수・학습 자료 개발

1) 1차시 교수・학습 자료 및 지도방안 : 몬테카를로 시뮬레이션 소개 및 $\pi$의 근삿값 차기

- GeoGebra를 소개하고 설치 방법과 함께 구성화면에 대하여 간단히 설명한다.
- $\pi$의 값을 계산하는 예시를 통하여 몬테카를로 방법에 대하여 소개한다. 또한 교사의 시범을 보며 학생들이 직접 이 과정을 GeoGebra로 구성하며 여러 조작법을 익히고 활용하는 능력을 키운다.
- 몬테카를로 시뮬레이션을 위해 필요한 확률과 통계의 기본 개념을 확립시킨다.




<그림 1> $\pi$의 근삿값 찾기

▸ 이론 설명

몬테카를로 시뮬레이션 :

시뮬레이션이란 직접 실험하기 어려운 경우, 실 시스템의 유사모델을 사용하여 간접적으로 모의 실험하는 것을 말한다. 이러한 시뮬레이션 중 난수를 발생시켜 시뮬레이션 하는 것을 '몬테카를로 시뮬레이션'이라 한다. 몬테카를로 방법은 난수의 값을 이용하여 함수의 값을 확률적으로 계산하는 알고리즘이다. 몬테카를로

시뮬레이션의 난수 발생기로서는 동전, 주사위, 항아리, 회전판, 난수표, 컴퓨터의 난수 발생기 등을 포함한다. 몬테카를로 시뮬레이션은 '대수의 법칙'에 그 이론적 기반을 두고 있다. 대수의 법칙이란 시행 횟수가 늘어나면 날수록 $\frac{(\text{성공 횟수})}{(\text{시행 횟수})}$가 이론적인 확률에 점점 근사하게 된다는 것이다.

▶ 원주율 $\pi$의 값을 계산하는 몬테카를로 방법
$[0,1]\times[0,1]$에서 점 $(x,y)$를 뽑을 때, 이 점이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 들어갈 확률이 $\pi/4$이므로, $[0,1]\times[0,1]$에서 충분히 많은 점을 뽑아, 전체 점 개수를 원에 속한 점 개수로 나눈 비율을 계산하여 이 값을 근사한다.

균등분포 :

확률변수 $X$의 확률밀도함수가 $f(x)=\frac{1}{b-a}\quad(a<x<b)$로 주어질 때, $X$는 구간 $(a,b)$에서 균등분포를 따른다고 한다. $\mathrm{P}(\alpha\le X\le\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}\ (a<\alpha\le\beta<b)$이다.
특히, $X$가 구간 $(0,1)$에서 균등분포를 따를 때, $\mathrm{P}(\alpha\le X\le\beta)=\beta-\alpha$이다.

몬테카를로 방법의 오차 :
몬테카를 시뮬레이션으로 구한 근삿값과 참값과의 오차는 $n$이 커짐에 따라 감소하는데 $1/\sqrt{n}$에 비례하며 감소한다고 알려져 있다.
- 이를 입증하려면 통계적 추정 단원 개념이 필요함을 설명하고 필요 시 개별적으로 이를 설명해준다.

※ 사각형 안에서 한 점을 뽑았을 때 단위원에 들어가는 확률은 $\pi/4$이므로 $X$를 이를 $n$번 시행했을 때 원 안에 들어간 횟수라 하면, $X$는 정규분포 $\mathrm{B}(n,\pi/4)$를 따르고, $\hat{P}=X/n$라 하면 $\pi/4$에 대응하는 95% 신뢰구간은
$\left(\hat{p}-1.96\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},\ \hat{p}+1.96\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right)$
$\pi$에 대응하는 95% 신뢰구간은 $\left(4\hat{p}-1.96\times4\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},\ 4\hat{p}+1.96\times4\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right)$.

▸ GeoGebra 구성과정

① 설명

- 슬라이더의 랜덤 기능을 통하여 사각형 안의 임의의 점을 만든다.
- 이 점이 원 안에 있으면 빨간색으로 표현하고 스프레드시트에 1을 기록한다.
- 이 점이 원 밖에 있으면 파란색으로 표현하고 스프레드시트에 0을 기록한다.
- 스프레드시트의 데이터를 이용하여 확률 값을 구하고 $\pi$의 근삿값을 구한다.

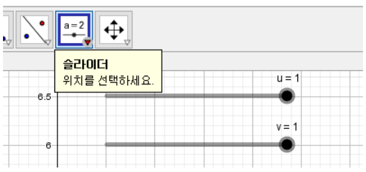
- 이 과정을 미리 만든 예시를 통하여 설명하며 시각적으로 보여준다.

② 슬라이더 구성

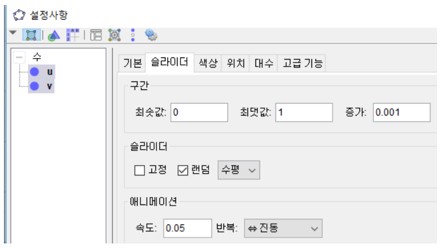
- $x$좌표를 뜻하는 $u$, $y$좌표를 뜻하는 $v$의 슬라이더 2개를 만든다.
- 두 슬라이더 모두를 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 랜덤, 증가-0.001, 속도-0.05 를 선택한다.

- 위의 $u, v$가 기본적인 균등분포의 난수가 됨을 설명한다.

- 속도를 맞추어야 시각화와 데이터 기록에 문제점이 없음을 설명한다.



<그림 2> 슬라이더 선택

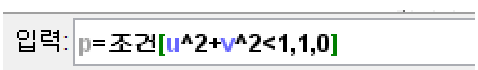


<그림 3> 슬라이더 설정사항

③ 논리 구성

- 입력창에 $p=$조건$[u^2+v^2<1,1,0]$ 입력한다.

- 위 조건을 입력하면 $u^2+v^2<1$일 때 $p=1$이고 $u^2+v^2\geq 1$일 때 $p=0$을 만족하는 $p$를 만드는 것임을 설명한다.



<그림 4> 입력창 입력방법

④ 점 만들기

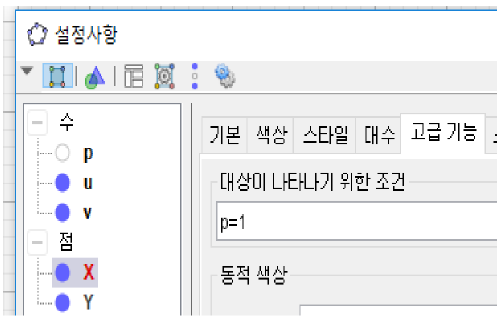
• 입력창에 $X=(u,v)$ 입력하고, 설정사항 색상에서 빨간색, 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건에 $p=1$을 입력한다.

• 입력창에 $Y=(u,v)$ 입력하고, 설정사항 색상에서 파란색, 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건에 $p=0$을 입력한다.

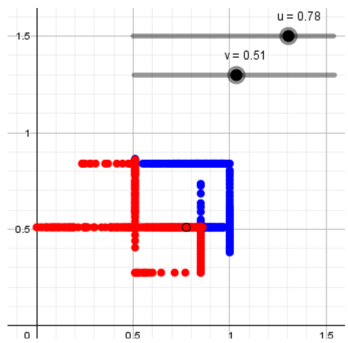
• 두 점 모두 이름 보이지 않기 선택하고, 두 점 모두 자취보이기 선택한다.

- 고급기능의 대상이 나타나기 위한 조건을 이용하여 대상이 어떤 조건의 성립 여부에 따라 대상이 보이는 것을 결정 할 수 있음을 설명한다.

- $u,v$를 변화시키며 점의 위치 및 색상을 확인시킨다.



<그림 5> 대상이 나타나기 위한 조건

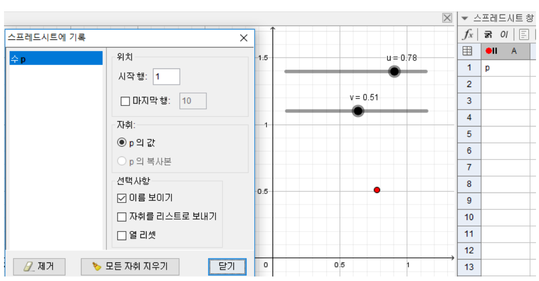


<그림 6> 위치에 따른 색변화

⑤ 데이터 기록

• 보기의 스프레드시트 창을 연다.

• 대수창 $p$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택한 후, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음을 선택 후 닫는다.



<그림 7> 스프레드시트에 기록

- 스프레드시트의 기능과 간단하게 소개한다.
- 데이터를 스프레드시트에 기록하여 여러 가지로 활용할 수 있음을 보여준다.

⑥ 확률 표현

- 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력한다.
- 대수창의 확률을 기하창에 드래그한다.

- 1이 $m$번 나오고 0이 $n$번 나왔을 때, 평균은 $(m\times1+n\times0)/(m+n)=m/(m+n)$이므로 평균을 통하여 통계적 확률을 구할 수 있음을 설명한다.

⑦ $\pi$ 근삿값 찾기

- 입력창에 근삿값=4*확률 입력
- 대수창의 근삿값을 기하창에 드래그

- 시행횟수가 많아지면 통계적 확률이 기하적 확률인 $\pi/4$에 수렴하므로 구한 확률에 4를 곱하여 $\pi$의 근삿값을 구함을 설명한다.

⑧ 꾸미기

- 입력창에 $c=$원호$[(0,0),(1,0),(0,1)]$ 입력
- 입력창에 선분$[(0,0),(1,0)]$, 선분$[(1,0),(1,1)]$, 선분$[(1,1),(0,1)]$, 선분$[(0,1),(0,0)]$ 입력한다.
- 모두 이름 보이지 않기를 선택한다.

⑨ 애니메이션

- 슬라이더 $u,v$를 동시 선택 후 애니메이션 시작한다.

- 애니메이션 후 시뮬레이션이 잘 작동되는지 확인하게 하고, 데이터 삭제 방법 등에 대하여 설명한다.
- 시행횟수가 많아질수록 근삿값이 $\pi$에 가까워짐을 확인시킨다.

2) 2차시 교수・학습 자료 및 지도방안 : 특정 확률분포를 따르는 난수 생성기

- 균등분포의 난수 생성만 필요한 것이 아님을 설명하고 원래 분포의 특성을 포함하는 추출의 필요성과 함께 어떻게 할 것인지 생각해보게 한다.
- 누적분포와 균등분포의 난수 생성을 이용하여 특정 확률분포를 따르는 난수를 만들 수 있음을 알려주고 이를 표준정규분포에 적용하는 시범을 보여준다.
- 시뮬레이션을 통하여 구한 데이터를 역으로 분석하는 과정을 거쳐 확률과 통계를 이론으로만 파악하는 하는 것이 아니라 실제적으로 받아들이는데 도움을 준다.

▸ 이론 설명

확률 수 $X$의 확률밀도 함수를 $f(t)$라 할 때,

누적 분포 $F(x)=\mathrm{P}(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$라 하자.

확률변수 $U$가 균등분포 $(0,1)$를 따른다고 하면

$\mathrm{P}(a \le X \le b)=F(b)-F(a)=\mathrm{P}(F(a)\le U \le F(b))=\mathrm{P}\left(a \le F^{-1}(U)\le b\right)$이므로

$X=F^{-1}(U)$가 된다.

따라서 확률변수 $X$의 난수는 자기 자신 누적 분포 함수의 역함수에 $(0,1)$에서 임의로 추출한 난수를 대입하여 구한다.

▸ 표준정규분포 난수 생성기 GeoGebra 구성과정

① 슬라이더 구성

- 슬라이더 $u$를 만든다.
- 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 랜덤, 증가-0.001, 속도-0.05를 선택한다.

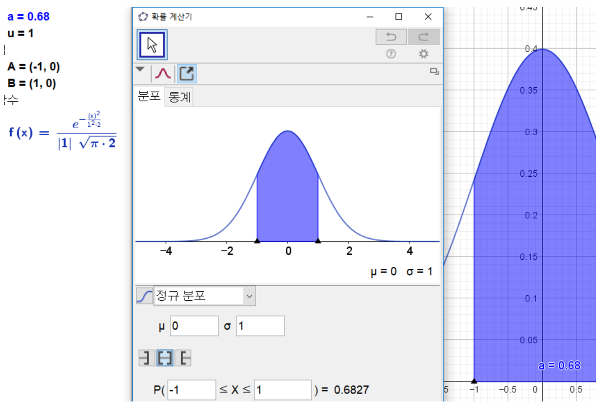
- 슬라이더의 랜덤 기능을 통하여 균등분포 $(0,1)$에서 난수 추출을 할 수 있음을 확인 시킨다.

② 확률분포 만들기

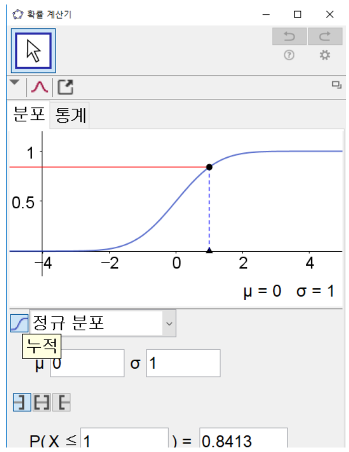
- 보기에 확률 계산기를 연다.
- 정규분포를 선택하고 내보내기의 기하창에 복사를 선택하여 표준정규분포를

기하창과 대수창에 만든다.

- 정규분포뿐만 아니라 다양한 분포가 내장되어있음을 보여준다.
- 간단하게 확률 계산기의 기능을 소개한다.




<그림 8> 확률계산기




<그림 9> 확률계산기 누적분포

③ 누적확률분포 만들기

- 입력창에 $F$=적분[$f$]+1/2 입력한다.

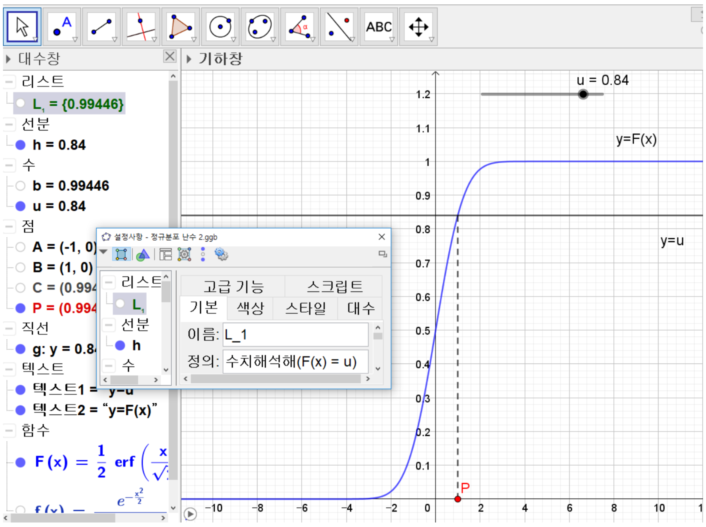
- 명령어 적분이 정적분과 부정적분 모두 가능함을 설명한다.
- GeoGebra의 부정적분 명령은 적분상수가 한 가지로 결정이 되어 이를 조정해야 하고, $F(0)=\mathrm{P}(X \leq 0)=\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$이므로 $F$=적분[$f$]+1/2로 구함을 설명한다.
- <그림 9>처럼 확률계산기에서도 누적분포를 만들 수 있음을 보여준다.

④ 난수 생성

- 입력창에 $L_1$ =수치해석해[$F(x)=u$] 입력한다.
- 입력창에 $b$=원소[$L_1$, 1] 입력한다.

- 역함수를 구하지 않고도 표본을 추출할 수 있음을 설명하고 슬라이더 $u$를 변형하며 교점의 좌표가 나오지 않는 경우를 보여주며 이를 수치해석해를 통하여 표본을 추출할 수 있음을 설명한다.

- 어떤 방정식의 해가 여러 개일 수도 있어 수치해석해가 리스트로 나오는 것임을 알려주고 이를 명령어 원소를 이용하여 추출함을 설명한다.



<그림 10> 표준정규분포 난수생성

⑤ 점 만들기

- 입력창에 $\mathrm{P}=(b,0)$ 입력하고 설정사항에서 자취 보이기를 선택한다.

⑥ 데이터 기록

- 보기의 스프레드시트 창을 연다.
- 대수창 $b$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택한 후, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음을 선택 후 닫는다.

⑦ 표본평균, 표본표준편차

- 입력창에 표본평균=평균[A2 : A9999] 입력한다.
- 입력창에 표본표준편차=표본표준편차[A2 : A9999] 입력한다.
- 대수창의 확률 및 표본표준편차를 기하창에 드래그한다.

- 표본평균, 표본표준편차의 의미와 계산법을 설명하고 모표준편차와 표본표준편차를 비교하여 설명한다.

⑧ 애니메이션

● 슬라이더 $u$를 애니메이션 시작한다.

- 애니메이션 후 시뮬레이션이 잘 작동되는지 확인하게 한다.

- 시행횟수가 많아질수록 표본평균과 표본표준편차가 각각 모평균과 모분산인 $0, 1$에 가까워짐을 확인하게 한다.

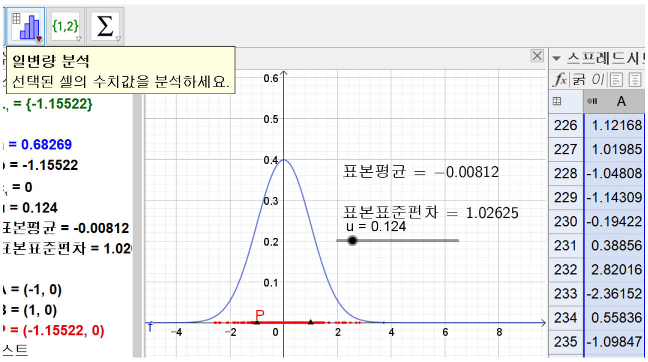
⑨ 표본분석

● 스프레드 시트창의 A열을 선택하여 일변량 분석 후 통계보이기 선택한다.

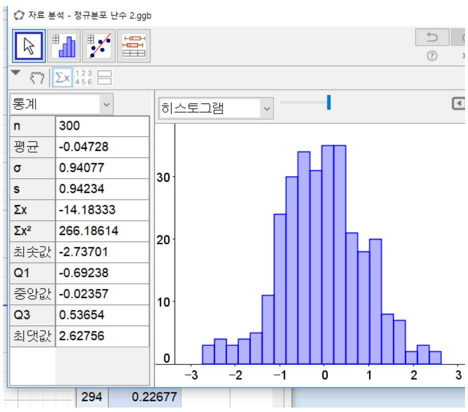
- 이 과정을 통하여 난수를 얻었을 때 원래 분포의 특성이 잘 반영이 됐는지 확인하는 과정을 거치는 것임을 설명한다.

- 일변량 분석을 통하여 얻은 데이터를 분석할 수 있음을 알려준다.

- 데이터가 주어질 때 역으로 원래 분포의 특징을 파악할 수 있음을 인지시킨다.




<그림 11> 일변량분석




<그림 12> 일변량분석 결과

3) 3차시 교수・학습 자료 및 지도방안 : 뷔퐁의 바늘 문제

- 뷔퐁의 바늘문제를 이론적으로 계산하고 교사의 시범을 따라 GeoGebra를 이용하여 시뮬레이션과 함께 시각화를 시키며 흥미를 제공하며, 다양한 수학적 기법을 익힌다.

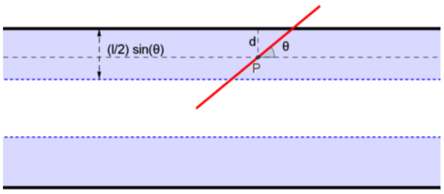
▶ 이론 설명

문제) 넓은 평면 위의 일정한 간격을 두고 평행한 직선이 무수히 많이 그려져 있다. 길이 $l$인 바늘을 이 평면 위에 떨어뜨릴 때, 바늘이 평행선과 만날 확률을 구하여라. (단, 평행선의 간격은 1이고 $l \le 1$라 한다.)

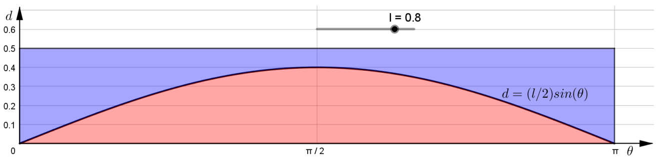
풀이) 바늘의 중심에서 가까운 직선까지의 거리를 $d$ 바늘과 직선이 이루는 각을 $\theta$라 할 때, 표본공간 $S$는 $S=\left\{(d,\theta)|0 \le d \le \frac{1}{2}, 0 \le \theta \le \pi\right\}$이고

구하는 사건을 $A$라 할 때, $A=\left\{(d,\theta)|0 \le d \le \frac{l}{2}\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi\right\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{\int_0^{\pi} l\sin\theta\, d\theta}{\pi/2}=\dfrac{2l}{\pi}$이다.




<그림 13> 뷔퐁의 바늘문제 도시




<그림 14> 전체 공간 $S$와 사건 $A$의 도시

▶ GeoGebra 구성 과정

① 설명

• 바늘이 평행선과 만남의 여부는 바늘 중심 위치의 높이, 바늘이 $x$축과 기울어진 정도(각), 바늘의 길이에 따른다. 평행선 사이의 거리는 1로 고정할 것이기 때문에 중심위치의 높이는 정수$+a$ $(0 \le a \le 1)$로 표현하고 $a$에 따라 바늘이 평행선과 만나고 만나지 않고를 기록한다.

② 평행선 그리기

- 격자를 이용하여 평행선을 만든다.
- 설정에서 격자 선택하고 눈금간격 $y$축은 1, $x$축은 100으로 색을 검은색, 선 종류 실선, 격자 보이기를 선택한다.

③ 바늘의 길이 구성

- 최솟값 0, 최댓값이 1이 되게 슬라이더 $l$ 을 만든다.

④ 랜덤 슬라이더 구성

- 높이를 뜻하는 소수 $a$, 기울어진 정도를 뜻하는 $t$, 높이 정수 $b$, 가로 범위 $c$, 가로 소수 $d$의 슬라이더 5개를 만든다.
- 전부 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 증가-0.0001, 속도-0.02, 랜덤을 선택한다.

- 동시 선택 후 한꺼번에 설정을 변경할 수 있음을 알려준다.

⑤ 바늘의 중심 위치 만들기

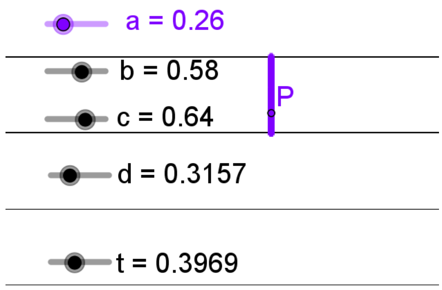
- 입력창에 $\mathrm{P}=(-10{*}(1-c)+15{*}c+d, floor(-10{*}(1-b)+15{*}b)+a)$ 입력한다.

- 슬라이더를 변화시키며 점의 위치를 확인시킨다.
- 명령어 $floor$가 가우스 함수를 뜻함을 알려준다. 이를 이용하여 바늘의 중심 위치의 $y$좌표가 정수$+a$ $(0 \le a \le 1)$로 표현됨을 설명한다.
- $b$의 값이 0부터 1까지 변할 때 $-10{*}(1-b)+15{*}b$은 $-10$부터 15까지 변함을 설명하고 이를 통하여 바늘이 나타나는 범위를 제한시켰음을 알려준다.
- <그림 15>, <그림 16>, <그림 17>처럼 슬라이더를 변화시키며 점의 위치를 확인시킨다.

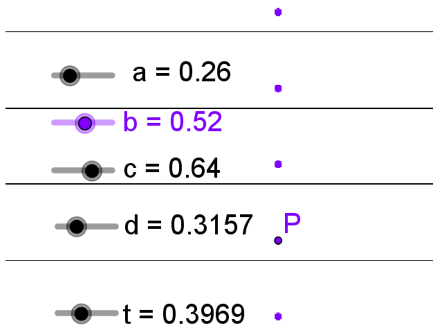
⑥ 바늘의 끝점 만들기

- 입력창에 $\mathrm{Q}=\mathrm{P}+l/2{*}(\cos(pi{*}t), \sin(pi{*}t))$ 입력한다.
- 입력창에 대칭[Q,P] 입력한다.

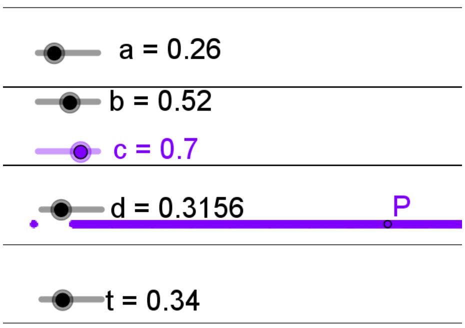
- <그림 18>처럼 슬라이더를 변화시키며 점의 위치를 확인시킨다.



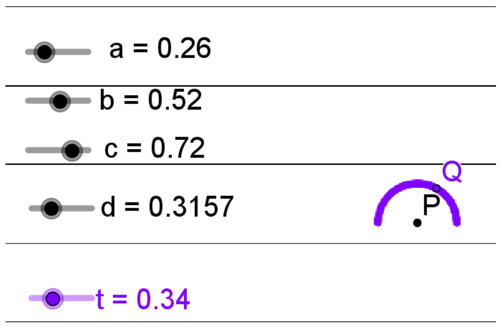

<그림 15>




<그림 16>




<그림 17>




<그림 18>

⑦ 논리 구성

- 입력창에 $p=$조건$[a<l/2*\sin(pi*t),1,0]$ 입력하여 바늘이 중심위치 아래에서 평행선과 만날 조건을 만든다.
- 입력창에 $q=$조건$[a>1-l/2*\sin(pi*t),1,0]$ 입력하여 바늘이 중심위치 위에서 평행선과 만날 조건을 만든다.
- 입력창에 $r=1-(1-p)*(1-q)$ 입력하여 바늘이 평행선과 만날 조건을 만든다.

- 어떤 조건에서 만나게 되는지 다시 확인시킨다.

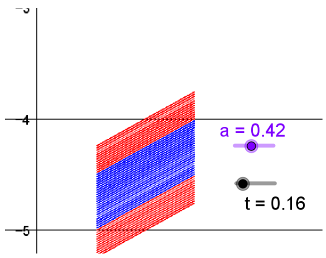
- $p=1$ 또는 $q=1$일 때, $r=1$이 되고, $p=0, q=0$일 때, $r=0$이 됨을 확인시킨다.

- 논리곱, 논리합을 수학적으로 만들 수 있는 방법을 생각해 보게 한다.

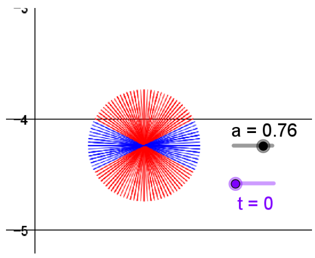
⑧ 바늘 만들기

- $Q$와 $Q'$을 이은 선분 2개를 만든다.
- 첫 번째 선분은 이름을 $u$라 하고, 설정사항 색상에서 빨간색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 $r=1$ 선택한다.
- 두 번째 선분은 이름을 $v$라 하고, 설정사항 색상에서 파랑색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 $r=0$ 선택한다.
- 두 선분 모두 이름 보이지 않기, 두 선분 모두 자취보이기 선택한다.

\- <그림 19>, <그림 20>처럼 슬라이더를 변화시키며 확인을 하게 한다.




<그림 19>

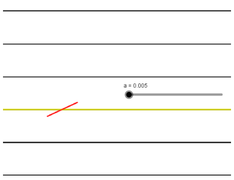



<그림 20>

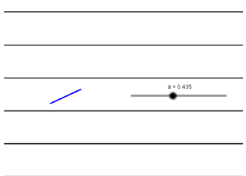
⑨ 만날 때 직선 색칠

- 입력창에 $m: y = floor(-10*(1-b)+15*b)$ 입력하고, 설정사항에서 색상 노란색, 이름 안 보이기, 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 $r=1$을 선택하여 바늘의 중심위치 아래서 만나는 직선을 만든다.
- 입력창에 $n: y = floor(-10*(1-b)+15*b)+1$ 입력하고, 설정사항에서 색상 노란색, 이름 안 보이기, 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 $r=0$을 선택하여 바늘의 중심위치 위에서 만나는 직선을 만든다.

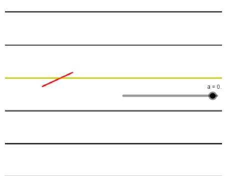
\- <그림 21>, <그림 22>, <그림 23>처럼 슬라이더 $a$를 변화시키며 확인을 하게 한다.



<그림 21>



<그림 22>



<그림 23>

⑩ 데이터 기록

- 보기의 스프레드시트 창을 연다.
- 대수창 $r$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택한 후, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음을 선택 후 닫는다.

⑪ 확률 표현

- 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력한다.
- 대수창의 확률을 기하창에 드래그한다.

⑫ $\pi$ 근삿값 찾기

- 입력창에 근삿값=2*$l$/확률 입력한다.
- 대수창의 근삿값을 기하창에 드래그한다.

\- 시행횟수가 많아지면 통계적 확률이 점차 수학적으로 계산한 $\frac{2l}{\pi}$에 가까워 질 것이므로 $\pi \fallingdotseq \frac{2l}{\text{확률}}$로 $\pi$의 근삿값을 구함을 설명한다.

⑬ 슬라이더 애니메이션

- 랜덤기능을 선택한 슬라이더$(a, t, b, c, d)$ 동시 선택 후 애니메이션 시작

\- 애니메이션 후 시뮬레이션이 잘 작동되는지 확인하게 한다.

\- 시행횟수가 많아질수록 근삿값이 $\pi$에 가까워짐을 확인시킨다.

⑭ 꾸미기

- 점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{Q}'$, 랜덤 슬라이더$(a, t, b, c, d)$를 보이지 않게 만든다.

4) 4차시 교수·학습 자료 및 지도방안 : 베르트랑의 현

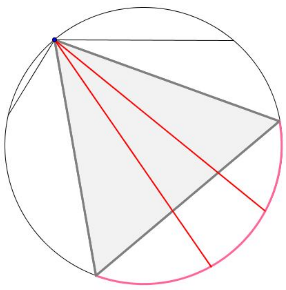
- 먼저 한 가지 해법에 대한 몬테카를로 시뮬레이션 제작 과정을 따라하게 한다.
- 왜 서로 다른 확률 값을 갖게 되는지 설명하게 한다.
- 나머지 해법들에 대해서도 학생들이 스스로 몬테카를로 시뮬레이션으로 제작하여 발표하게 지도한다.

▶ 이론 설명

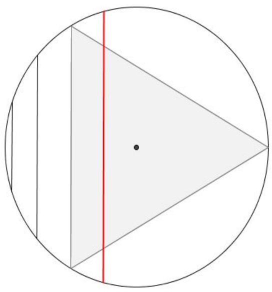
문제) 원에서 임의의 현을 선택했을 때, 그 현의 길이가 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이보다 클 확률을 구하여라.

풀이) 이 문제는 '임의의' 에 대한 해석에 따라 서로 다른 세 가지 풀이가 있고, 그에 따라 서로 다른 세 가지 답이 도출된다.

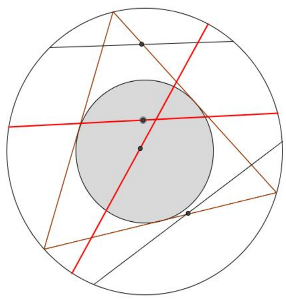
아래는 그 세 가지 풀이이다.



<그림 24>



<그림 25>



<그림 26>

<그림 24>는 시작점을 잡고 끝점을 임의로 잡는 방법, <그림 25>는 현과 중심의 거리를 임의로 잡는 방법, <그림 26>은 현의 중점을 임의로 잡는 방법이다.

각각의 풀이에 대한 답은 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 이다.

▶ GeoGebra 구성과정

① 설명

- 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 임의의 두 점을 잡아 현을 만들고 이 길이를 구하여 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이($\sqrt{3}$)와 비교한다.

② 원 만들기

• 입력창에 $x^2+y^2=1$을 입력하여 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 만든다.

③ 랜덤 슬라이더 구성

• 슬라이더 2개 $u, v$을 만든다.

• 두 슬라이더 모두를 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 랜덤, 증가-0.0001, 속도-0.02를 선택한다.

④ 현의 끝점 잡기

• 입력창에 $\mathrm{U}=(\cos(2pi^*u), \sin(2pi^*u))$ 입력한다.

• 입력창에 $\mathrm{V}=(\cos(2pi^*v), \sin(2pi^*v))$ 입력한다.

- 슬라이더를 움직이며 두 점의 위치를 확인시킨다.

⑤ 논리 구성

• 입력창에 $p$=조건[거리$[\mathrm{U},\mathrm{V}]>\mathrm{sqrt}(3), 1, 0]$ 입력하여 현의 길이가 $\sqrt{3}$ 보다 클 조건을 만든다.

⑥ 현 만들기

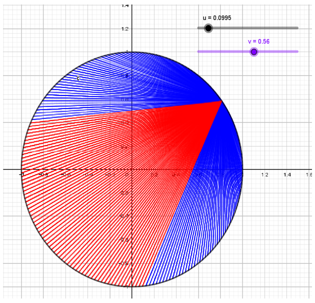
• U와 V을 이은 선분 2개를 만든다.

• 첫 번째 선분은 설정사항 색상에서 빨간색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건에 $p=1$ 입력한다.

• 두 번째 선분은 설정사항 색상에서 파랑색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건에 $p=0$ 입력한다.

• 두 선분 모두 이름 보이지 않기 선택, 두 선분 모두 자취보이기를 선택한다.

- <그림 27>처럼 슬라이더를 이용하여 확인하게 한다.



<그림 27>

⑦ 데이터 기록

- 보기의 스프레드시트 창을 연다.
- 대수창 $p$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택한 후, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음을 선택 후 닫는다.

⑧ 확률 표현

- 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력한다.
- 대수창의 확률을 기하창에 드래그한다.

⑨ 슬라이더 애니메이션

- 랜덤기능을 선택한 슬라이더$(u, v)$ 동시 선택 후 애니메이션 시작한다.

- 애니메이션 후 시뮬레이션이 잘 작동되는지 확인하게 한다.
- 점차 확률 값이 어떤 값에 가까워지는지 확인하게 한다.

⑩ 꾸미기

- 점 U, V 모두 보이지 않게 한다.

문제1. 세 가지 해법에 대하여 각각의 확률이 나타나는 이유를 설명하여라.

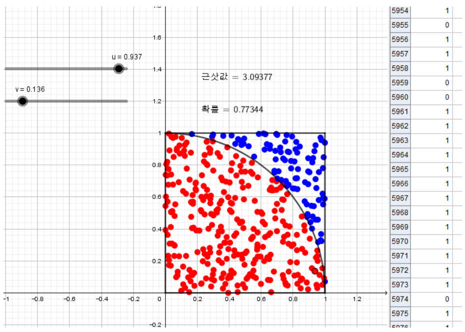
문제2. 나머지 두 가지 방법을 GeoGebra를 이용하여 몬테카를로 시뮬레이션으로 만들어 보자.

## 2. 학생 활동 및 결과물 분석

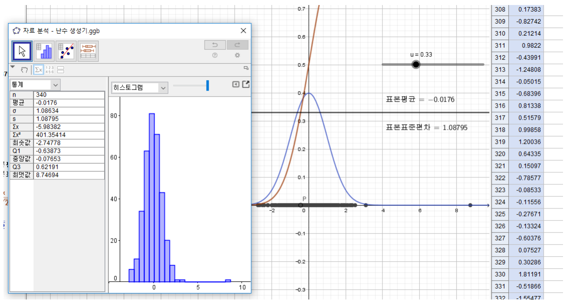
제작한 교수 학습 자료를 수업에 적용하여 학생들의 반응과 더불어 제작한 결과물, 프로젝트 수업 후 발표 내용, 과제물들을 받아 분석하였다.

1) 1-3 차시 결과물

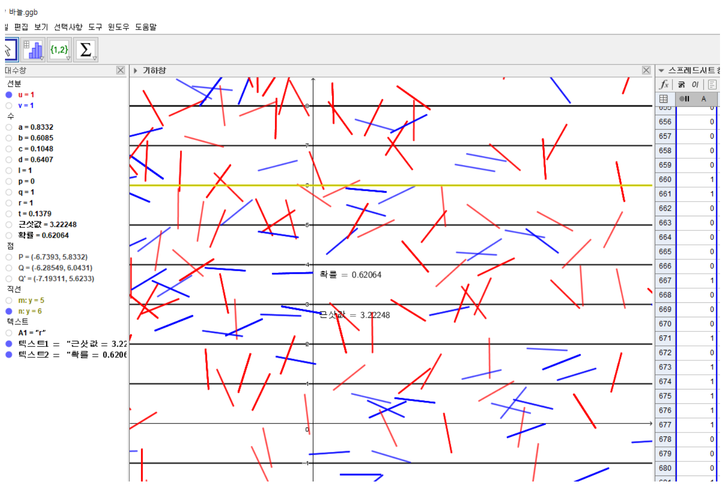
1차시부터 3차시까지는 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 개념을 이해하고 교사의 시범을 보며 GeoGebra을 통하여 여러 가지 몬테카를로 시뮬레이션을 만드는 과정이다. 학생들은 교사와 학생 간에 서로 도움을 받으며 교사의 시범을 잘 따라 시뮬레이션을 제작하였다. 학생들은 수업이 진행 될수록 점차 몬테카를로 시뮬레이션을 GeoGebra로 작성하는데 숙달이 되었다. 다음 그림들은 교사의 시범을 따라 만든 학생들의 몬테카를로 시뮬레이션 결과물이다.



<그림 28> $\pi$의 근삿값 찾기 결과물



<그림 29> 정규분포 난수 생성기 결과물



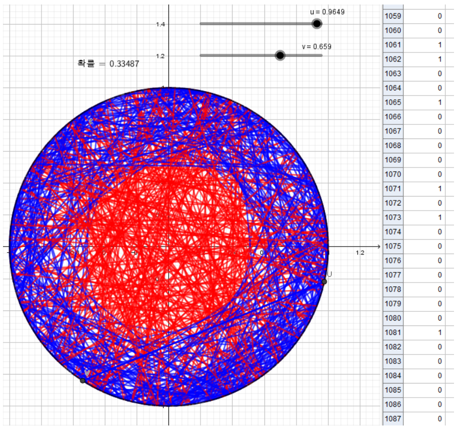
<그림 30> 뷔퐁의 바늘문제 결과물

2) 4 차시 수업 결과 분석

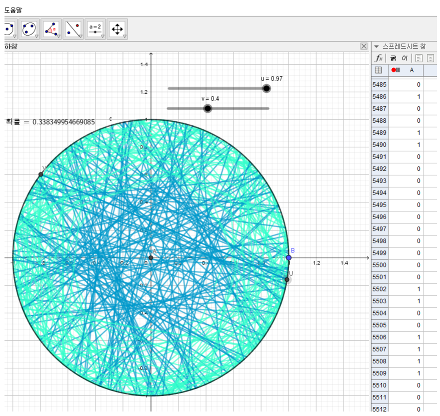
4차시는 베르트랑의 현 문제에 관한 수업이다. 먼저 한 가지 해법에 대한 몬테카를로 시뮬레이션 제작 과정을 따라하게 하였고, 왜 서로 다른 확률 값을 갖게 되는지 설명하게 하였으며 나머지 해법들에 대해서도 학생들이 스스로 몬테카를로 시뮬레이션으로 제작하여 발표하게 지도하였다. 학생들은 베르트랑의 현 문제의 서로 다른 확률 값이 나오는 이유에 대하여 충분히 이론적으로 설명할 수 있었고, 제작 과정에서 다양한 접근 방법을 보여주며 몬테카를로 시뮬레이션 구현을 시도 하였다.

가) 원의의 임의의 두 점을 잡아 현을 그리는 방법 - 확률 값 : $\frac{1}{3}$

교사가 시범을 보여준 방법인 원의의 임의의 두 점을 잡아 이를 현으로 만들어 시뮬레이션으로 제작하는 과정은 학생들이 쉽게 따라하였다. 다음 그림들은 학생들의 시뮬레이션 결과물이다.



<그림 31>

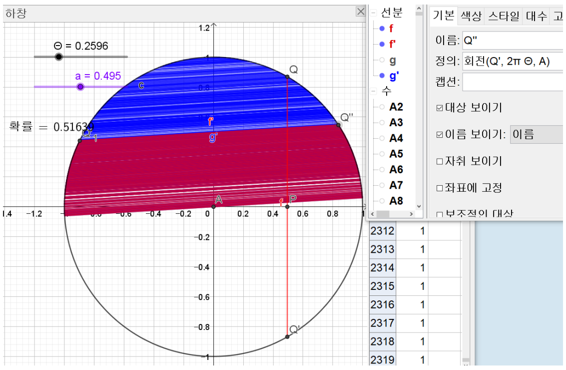


<그림 32>

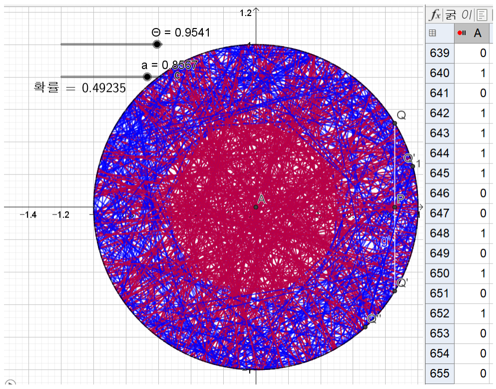
나) 현과 중심의 거리를 임의로 잡는 방법 - 확률 값 :$\frac{1}{2}$

학생들은 이 확률 값 구현 과정에서는 기존에 배워 익힌 방법들을 이용하여 별다른 어려움 없이 시뮬레이션 제작에 성공하였다. 학생들의 해법들을 정리하면 다음과 같다.

① <그림 33>처럼 슬라이더 $a$ $(0 \le a \le 1)$를 만들고, 두 점 $\mathrm{Q} = \left(a,\ \sqrt{1-a^2}\right)$, $\mathrm{Q}' = \left(a,\ -\sqrt{1-a^2}\right)$을 원점을 중심으로 $2\pi\Theta$ $(0 \le \Theta \le 1)$만큼 회전 이동한 두 점을 연결하여 현을 만들었다.

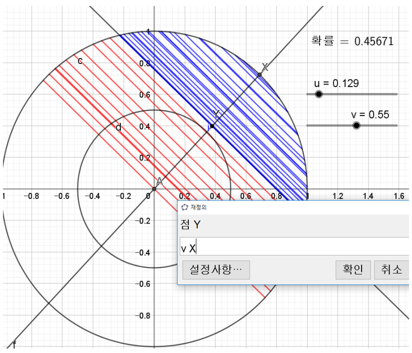



<그림 33>

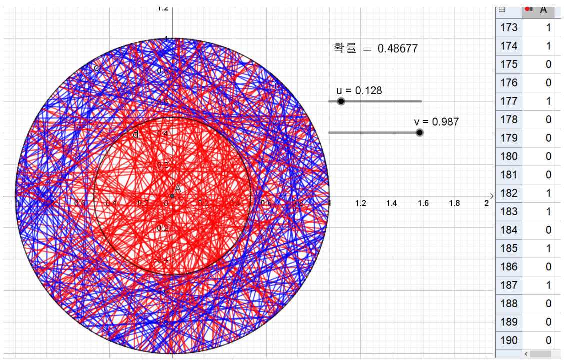



<그림 34>

② <그림 35>처럼 $\mathrm{X} = (\cos u, \sin u)$ $(0 \le u \le 1)$라 할 때, $\mathrm{Y} = v\mathrm{X}$ $(0 \le v \le 1)$와 원점을 연결한 직선에 수직인 현을 만들었다.

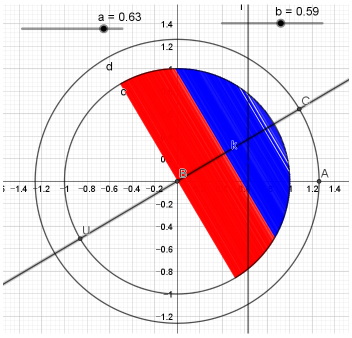



<그림 35>

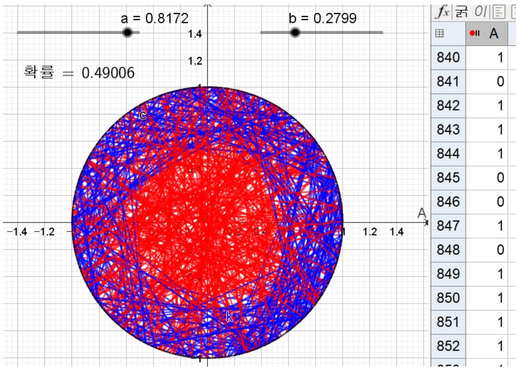



<그림 36>

③ <그림 37>처럼 $\mathrm{U} = (\cos b, \sin b)$ $(0 \le b \le 1)$라 하고, 원점 B와 U를 연결한 직선과 반지름의 길이가 $2|a|$ $(-1 \le a \le 1)$인 원의 교점을 C라 할 때, BC의 수직이등분선의 일부를 현으로 결정하였다.



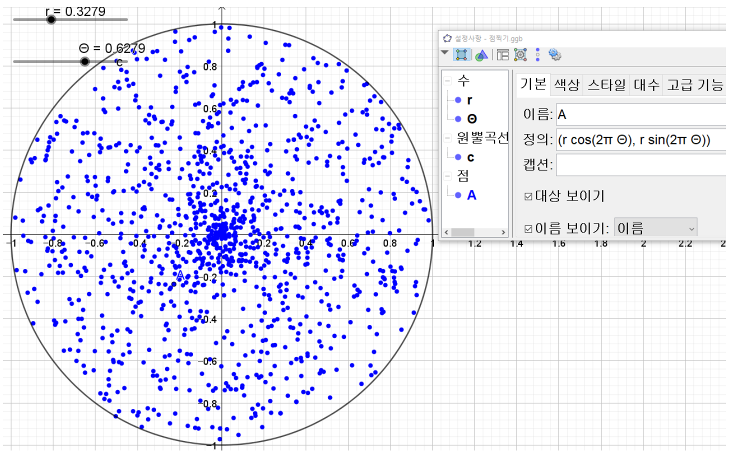

<그림 37>




<그림 38>

다) 원 안에 현의 중점을 임의로 잡는 방법 - 확률 값 : $\frac{1}{4}$

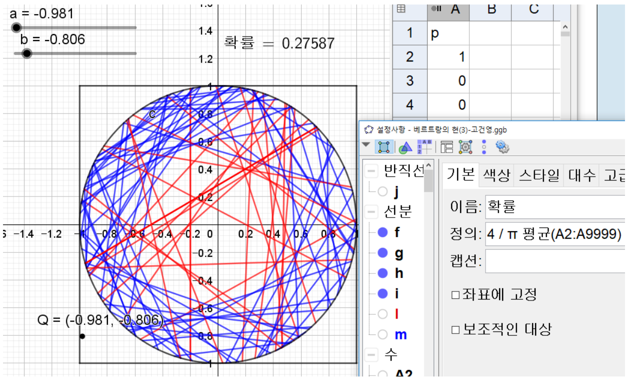
학생들은 원 내부의 한 점이 주어지면 그 점을 중심으로 하는 현이 유일하게 결정되기 때문에 어떻게 하면 원 내부의 임의의 한 점을 뽑을 것인지에 대하여 초점을 맞춰 고민하였고 다수의 학생들은 극좌표 형태를 이용하여 점을 뽑아 이를 바탕으로 현을 만들어 시뮬레이션을 실시하였으나 결과가 원하는 $\frac{1}{4}$이 아닌 $\frac{1}{2}$이 나와서 당황하였다. 이 원인이 무엇인지를 밝혀내기 위하여 토의를 진행하는데, 한 학생이 이 과정을 시뮬레이션 하였고, <그림 39>처럼 원의 중심 근방에서 원주 근방보다 상대적으로 점이 더 많이 찍히는 것을 보여주며 전략을 수정해야 함을 설명하였다.




<그림 39> 극좌표를 이용한 원 안의 점찍기

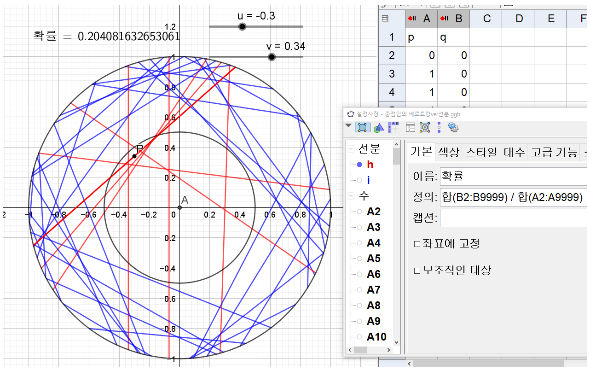
이를 토대로 학생들은 전략을 수정하였고 다음과 같은 해법들을 제시하였다.

① <그림 40>처럼 점 $\mathrm{Q}=(a,b)$ $(-1 \le a, b \le 1)$이라 하고 Q를 중점으로 하는 현을 만들고, 두 조건 $p=$조건$[a^2+b^2<0.25, 1, 0]$이라 하여 이를 스프레드시트에 기록한다. 여기서 Q가 원 밖에 있는 경우에는 현은 만들어지지 않고 $p=0$으로 기록된다. 이 기록된 자료의 평균은 사각형에서 임의의 점을 뽑아 이 점을 중점으로 갖는 현을 만들었을 때, 이 길이가 $\sqrt{3}$보다 큰 경우를 나타낸다. 구하려는 확률은 사각형이 아닌 원의 현을 임의로 추출한 경우에 해당되므로 이 평균값에 사각형의 넓이를 반지름의 길이가 1인 원의 넓이로 나눈 값, 즉 $\dfrac{4}{\pi}$를 곱한다.



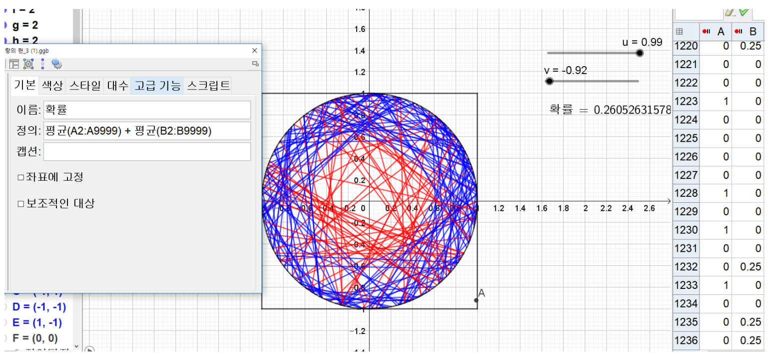
<그림 40>

② <그림 41>처럼 점 $\mathrm{P}=(u,v)$ $(-1 \le u, v \le 1)$, 원의 중심을 A라 하였을 때, P를 중심으로 하는 현을 만들고, 두 조건 $p=$조건$[$거리$[\mathrm{A},\mathrm{P}] \le 1, 1, 0]$, $q=$조건$[$거리$[\mathrm{A},\mathrm{P}] < \dfrac{1}{2}, 1, 0]$을 만들고 이를 스프레드시트 $A, B$열에 각각 기록한다. 현의 길이가 $\sqrt{3}$의 길이가 1보다 클 확률을 구하기 위해서는 P의 좌표가 반지름의 길이가 1인 원 밖의 점들을 제외한 상태에서 A와 P 사이의 거리가 $\dfrac{1}{2}$보다 작은 경우들을 세어야 하므로 구하려는 통계적 확률은 $q$의 합을 $p$의 합으로 나누어 계산한다.




<그림 41>

③ <그림 42>처럼 이론적 확률 값이 $\frac{1}{4}$이라는 사실을 알고 있다고 가정을 하여 해결하는 방법이다. 점 $\mathrm{A}(u,v)$ $(-1 \le u, v \le 1)$를 임의로 만들고 A를 중심으로 하는 현 GH를 만든다. $p=$조건[거리$[\mathrm{G},\mathrm{H}] > \sqrt{3}, 1, 0]$, $q=$조건$[u^2+v^2 > 1, 0.25, 0]$이라 할 때, 현 GH가 정의되지 않는 경우에는 $p=0, q=0.25$가 나온다. 점 A를 임의로 뽑았을 때, 기하적 확률을 생각하면 $p=1, q=0$일 확률은 $\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{4}$, $p=0, q=0$일 확률은 $\frac{\pi}{4} \times \frac{3}{4}$, $p=0, q=0.25$일 확률은 $1-\frac{\pi}{4}$이다. 확률=평균[A2 : A9999]+평균[B2 : B9999]이라 하면 시뮬레이션을 반복한 데이터를 통해 계산한 확률은 $\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{4} + 0.25(1-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$에 가까워 질 것이다.

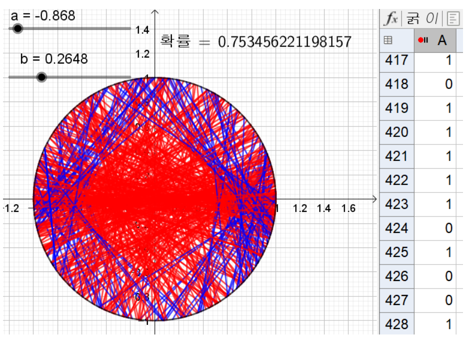



<그림 42>

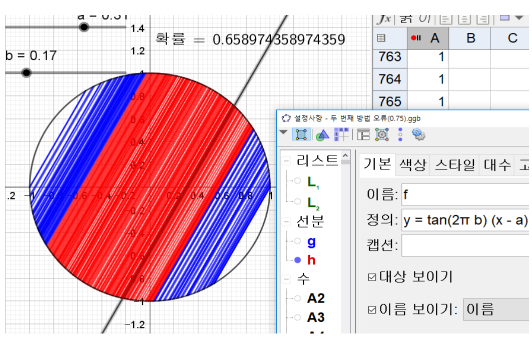
라) 다른 확률 값을 갖는 방법

학생들에게 지금까지의 확률이 아닌 다른 확률 값이 나오는 경우가 있으면 이를 제시하라 하였는데 다음과 같은 방법이 나왔다.

직선 $y=\tan(2\pi b)(x-a)$ $(-1 \le a \le 1, 0 \le b \le 1)$의 일부를 현으로 만들었다.
- 이 과정을 시뮬레이션 했을 때, 통계적 확률이 약 0.75가 나왔다. 어떻게 된 것인 가를 파악하기 위하여 <그림 44>처럼 슬라이더 $b$를 고정하고 슬라이더 $a$를 움직였을 때 평행한 현이 모두 나오지 않는 것을 발견하고 이에 전략이 잘못되었음을 설명하였다.



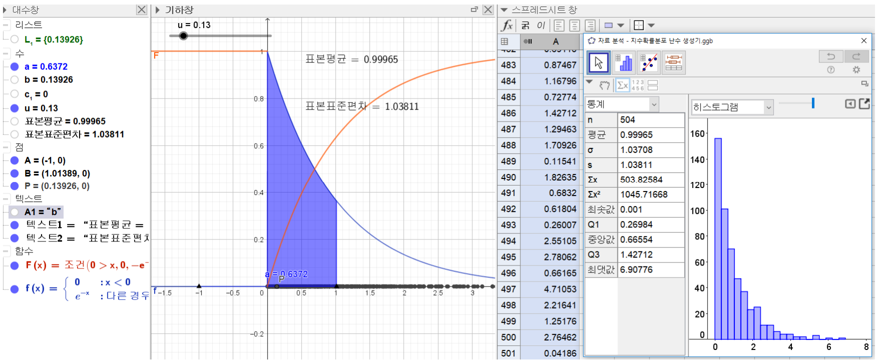
<그림 43>



<그림 44>

3) 과제물 분석
수업을 들은 학생들에게 수업 때 만들지 않은 몬테카를로 시뮬레이션을 GeoGebra로 제작하여 메일로 제출이라는 과제를 제시하였고 이에 다음 네 가지의 과제가 제출되었다.

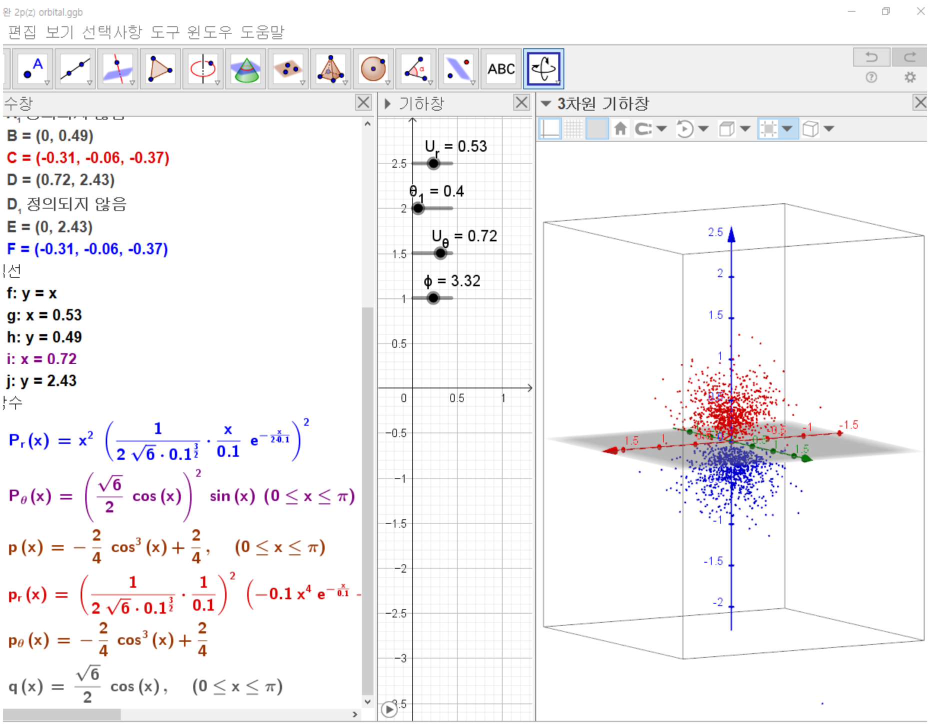
① 지수분포의 난수 생성기
첫 번째 제출된 과제는 특정 확률분포를 따르는 난수 생성기를 적용하여 지수분포의 난수 생성기를 만든 것이다. 이는 표준정규분포로 제작한 과정을 $\lambda=1$인 지수분포 $f(x)=e^{-x}$ $(x>0)$에 그대로 적용한 것이다.




<그림 45> 지수분포의 난수 생성기

② 수소 오비탈 모형

두 번째 제출된 과제는 수소의 오비탈 모형 중 하나를 GeoGebra로 제작한 것이다. 이는 두 학생이 수소 전자의 위치가 구면좌표계로 표현 된 확률분포로 주어진다는 사실을 이용하여 제작한 것이다. 현재 학생들은 이 주제를 가지고 학교에서 개인 연구 활동에 참여하고 있다.



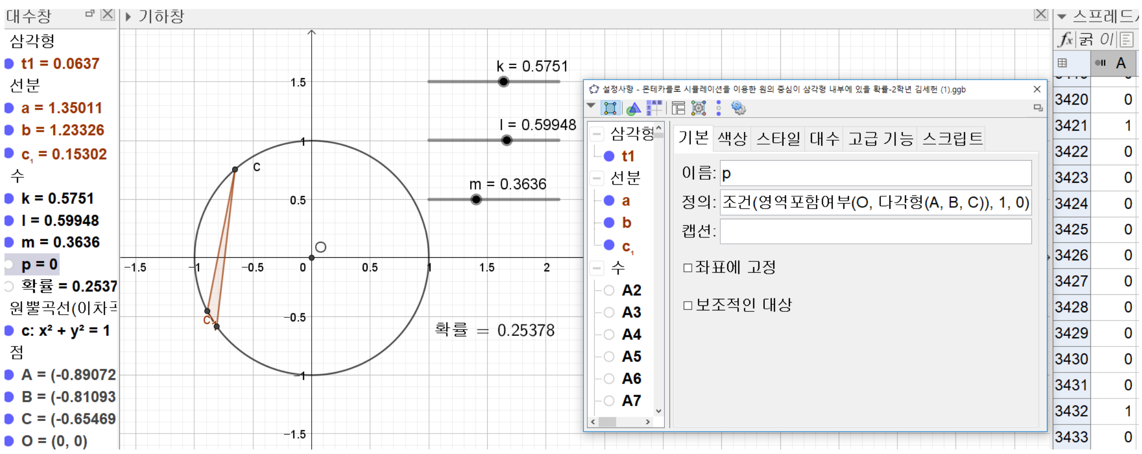

<그림 46> 수소 오비탈 모형

③ 원에 중심이 삼각형 내부에 있을 확률

세 번째 제출된 과제는 2학년 학생들이 수업 시간에 배우고 있는 교과서의 문제를 GeoGebra를 이용하여 몬테카를로 시뮬레이션으로 해결한 것이다.

'원주 상에 세 점 A, B, C를 잡을 때, △ABC가 그 둘레나 내부에 원의 중심을 포함한 확률을 구하여라.'

$\mathrm{A}=(\cos 2\pi k, \sin 2\pi k), \mathrm{B}=(\cos 2\pi l, \sin 2\pi l), \mathrm{C}=(\cos 2\pi m, \sin 2\pi m)$ $(0 \le k, l, m \le 1)$이라 하고 원점을 O라 하면, 삼각형 ABC안에 O가 있을 조건을 만들어 이를 기록하고 시뮬레이션을 실시하여 그 확률 값이 0.25임을 밝혀냈다.




<그림 47> 삼각형 안에 원의 중심이 있을 확률

④ 세 점으로부터 거리가 일정한 점들의 자취가 이루는 도형의 넓이

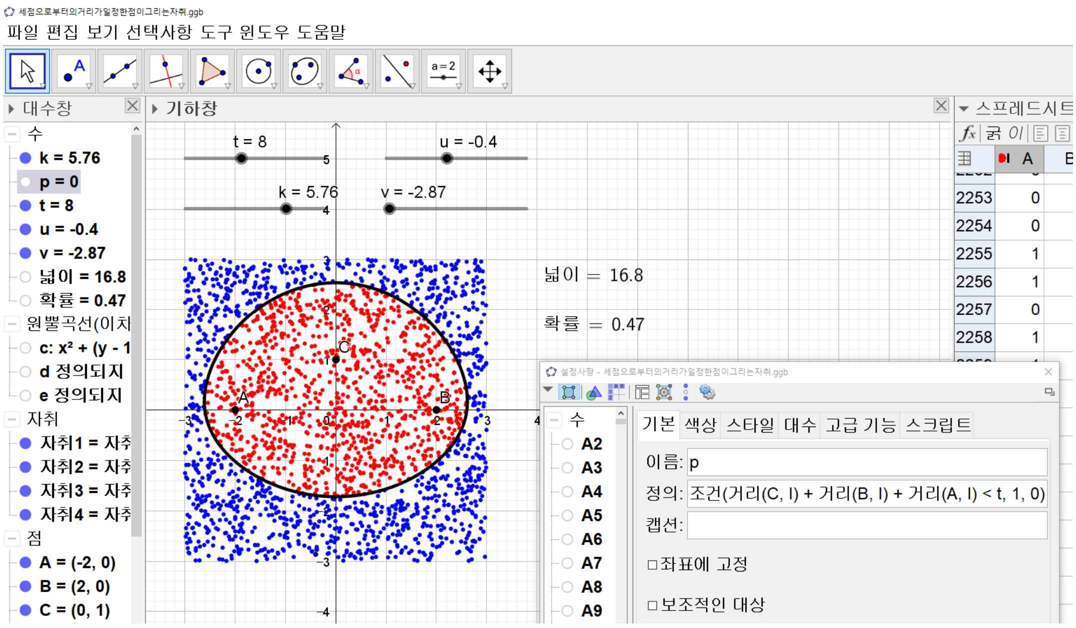
네 번째 제출된 과제는 기존 선배 학생들이 연구했던 결과를 확장시켜 만든 과제물이다. 기존 과제는 세 점으로부터의 거리의 합이 일정한 도형의 자취를 그리고 그 도형의 성질을 구하는 연구였는데, 이러한 도형의 넓이를 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 구한 것이다. 설정한 문제는 다음과 같다.

'세 점 $\mathrm{A}(-2,0), \mathrm{B}(2,0), \mathrm{C}(0,1)$으로부터의 거리의 합이 8인 도형의 넓이를 구하여라.'

이를 구하기 위하여 이 도형이 포함되어 있는 영역 $[-3,3]\times[-3,3]$에서 임의로 점 $\mathrm{I}(u,v)$ $(-3 \le u, v \le 3)$를 뽑았을 때, 이 점이 이 영역 안에 들어가는 조건을 만든다. 즉, $p$=조건[거리[C, I]+거리[B, I]+거리[A, I]$<8, 1, 0$]이라 한다.

확률=평균[A2:A9999]이라 하여, 시뮬레이션을 시행하면 이 값은 사각형에서 점을 임의로 뽑았을 때 도형 안에 들어있는 확률에 가까워지므로, 구하는 도형의 넓이는 이 확률 값에 사각형의 넓이 36을 곱하여 계산하면 된다.

이를 실제로 시뮬레이션을 한 결과 이 값은 약 16.8이 나왔다.




<그림 48> 세 점으로부터의 거리의 합이 일정한 도형의 넓이

이렇게, 수업을 받은 학생들은 여러 문제를 직접 GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션으로 구성해 해결하여 모습을 보여주었다.

# Ⅴ. 결론 및 제언

## 1. 결론

본 연구는 학생들의 연구 활동에 도움이 될 수 있는 교수・학습 자료 개발에 목적을 가지고 있다. 이를 위하여 GeoGebra를 활용한 몬테카를로 시뮬레이션 교수・학습 자료를 제작하고, 제작한 자료를 가지고 4차시의 수업을 진행한 뒤 학생들의 반응, 제작한 결과물, 발표 내용과 함께 과제물을 받아 분석하는 과정을 거쳤다.
이러한 과정을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 본 연구에 의해 개발된 교수・학습 자료는 학생들의 연구 활동에 다양하게 활용할 수 있는 몬테카를로 시뮬레이션 사용 숙달에 효과적임을 알 수 있었다. 이 자료를 통하여 학생들은 몬테카를로 시뮬레이션의 개념을 배우고 여러 가지를 문제를 시뮬레이션으로 구현하는 기회를 충분히 가졌다. 학생들은 점차 몬테카를로 시뮬레이션에 숙달이 되었으며, 학생들이 제출한 과제물에서 볼 수 있듯이 수업 시간에 다루지 않았던 문제들까지도 직접 몬테카를로 시뮬레이션으로 구성하여 해결하는 모습을 보여주었다. 이 자료는 학생들의 연구 활동의 범위와 연구 질 향상에도 많은 도움을 줄 것이라 판단된다.

둘째, 이 자료는 학생들에게 GeoGebra의 다양한 사용법을 익히는데 도움을 주었다. 학생들은 GeoGebra 조작에 관한 교사의 시범을 잘 따라 왔으며 수업이 진행될수록 기하, 대수, 스프레드시트 활용 등 다양한 기능들을 빠르게 습득하여 적용하는 모습을 보여주었다. 이는 종합적인 이론을 필요로 하는 몬테카를로 시뮬레이션을 주제로 가지고, 사용하기 쉬우면서도 여러 기능들을 연결되어 복합적으로 다룰 수 있는 GeoGebra를 이용하여 수업을 진행한 것이 영향을 주었다고 볼 수 있다. 이 수업을 통하여 학생들은 앞으로 더욱 다양한 분야에서 GeoGebra를 적극적으로 활용할 것이라 판단된다.

셋째, 이 자료는 문제 해결력을 신장시키고 수학에 대한 흥미를 키워주는데 도움을 주었다. 학생들은 현실적인 문제 상황을 이론적으로 먼저 계산하고 여러 가지 수학적인 기법들을 사용하여 시각적으로 구현하였고 시뮬레이션으로 하여 이론적 계산 값과 결과를 비교하였다. 또한, 직관적으로 받아들이기 어려운 문제 상황에 대해 다양한 방법으로 접근하며 직접 시뮬레이션으로 구성하고 제작하여 이를 검토와 수정, 토론하는 과정을 거치며 자신의 생각을 발전시켜 나갔다. 이런 과정에서 학생들은 흥미를 가지고 적극적으로 수업에 참여하였으며 수학을 활용하는 능력을 키우고 수학의 힘을 느끼는 기회를 가졌다.

## 2. 제언

본 연구는 확률과 통계 단원의 개념적 이해와 자료 분석의 상호작용에 관한 필요성과 가능성을 보여주었다. 본 연구는 희망 학생을 대상으로 진행하였고 고학년이 아닌 대다수의 참여 학생들이 교육과정 상 확률과 통계 단원에 관한 충분한 이해 없이 수업에 참여하였다. 이에 학생들이 호기심을 가질 수 있는 몬테카를로 시뮬레이션의 오차에 관한 설명이나, 시뮬레이션을 통해 얻은 자료들의 활용에 한계가 있었다. 이에 확률과 통계 단원의 학습 정도가 충분히 뒷받침 되는 상황에서 이 자료가 확률과 통계 단원의 개념적 이해와 자료 분석을 서로 보완하는데 어떤 도움을 주는지에 관련한 후속 연구를 제언한다.

또한, 확률과 통계 교과 수업 방안에 관하여 다음과 같이 제언한다. 확률과 통계 수업에서 데이터를 얻고 수집한 데이터를 바탕으로 이를 분석하고 활용할 수 있는 환경이 제공되어야 한다. 확률과 통계는 상당한 이론이 필요함에도 불구하고 그 활용성에 의하여 학생들에게 충분한 이해의 과정을 건너뛰어 바로 문제에 적용하고 있는 것이 현실이다. 이러한 문제점을 확률과 통계 수업에서 실제로 데이터를 얻고 그 이론적 사실들을 점검하고 활용하는 기회를 가지면 학생들은 확률과 통계 개념을 자연스럽게 받아들일 수 있는 기회가 될 것이다.

# Ⅵ. 참고문헌


[1] 김상길(1999). 컴퓨터 시뮬레이션 프로그램(Interactive Probability)을 이용한 확률 및 기댓값 지도에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

[2] 김승호(2017). GeoGebra를 활용한 Voronoi Diagram에 관한 수학 영재 교수・학습 자료 개발 및 적용. 부산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[3] 우정호(2006) 학교 수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교출판부.

[4] 이윤석(2012). 몬테카를로 시뮬레이션을 활용한 도로에서 차량 당 $CO_2$ 배출량 연구 경기대학교 대학원 석사학위 논문.

[5] 허명회(2005). 수리통계학 강의. 자유아카데미.

[6] Kapadia, R. and Borovcnik, M., *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluer Academic Publishers, 1991.

[7] Robert V.Hogg, Joseph W.Mckean, Allen Craig. (2006). 수리통계학개론(이재창, 이용구, 김상용, 역). 서울: 경문사.(원서출판 2005)

[8] 지오지브라 공식 홈페이지-소개 <https://www.GeoGebra.org/about>

<부록> 제작한 교수·학습자료

Ⅰ. 몬테카를로 시뮬레이션 소개 및 $\pi$의 근삿값 찾기

몬테카를로 시뮬레이션

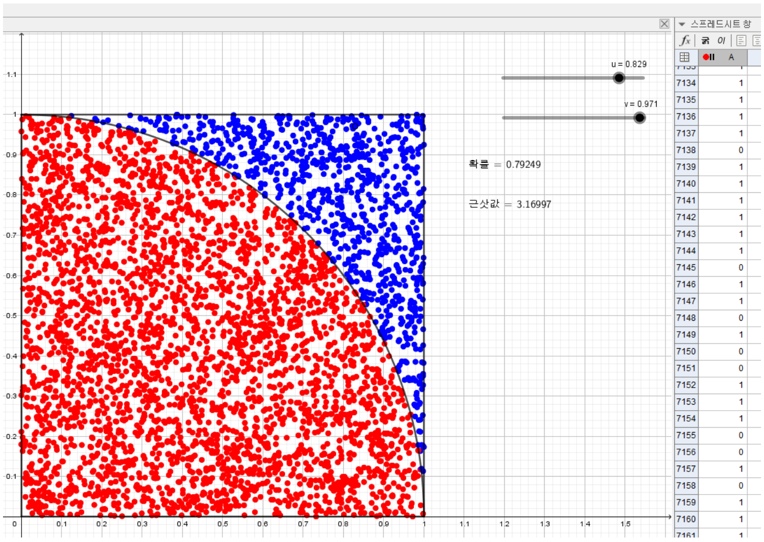
시뮬레이션이란 직접 실험하기 어려운 경우, 실 시스템의 유사모델을 사용하여 간접적으로 모의 실험하는 것을 말한다. 이러한 시뮬레이션 중 난수를 발생시켜 시뮬레이션 하는 것을 '몬테카를로 시뮬레이션'이라 한다. 몬테카를로 방법은 난수의 값을 이용하여 함수의 값을 확률적으로 계산하는 알고리즘이다.

몬테카를로 시뮬레이션의 난수 발생기로서는 동전, 주사위, 항아리, 회전판, 난수표, 컴퓨터의 난수 발생기 등을 포함한다.

몬테카를로 시뮬레이션은 '대수의 법칙'에 그 이론적 기반을 두고 있다. 대수의 법칙이란 시행 횟수가 늘어나면 날수록 $\dfrac{(\text{성공 횟수})}{(\text{시행 횟수})}$가 이론적인 확률에 점점 근사하게 된다는 것이다.

예) 원주율 $\pi$의 값을 계산하는 몬테카를로 방법

$[0,1]\times[0,1]$에서 점 $(x,y)$를 뽑을 때, 이 점이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 들어갈 확률이 $\pi/4$이므로 $[0,1]\times[0,1]$에서 충분히 많은 점을 뽑아, 전체 점 개수를 원에 속한 점 개수로 나눈 비율을 계산하여 이 값을 근사한다.




$\pi$의 몬테카를로 방법

※ 균등분포

확률변수 $X$의 확률밀도함수가 $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ $(a<x<b)$로 주어질 때, $X$는 구간 $(a,b)$에서 균등분포를 따른다고 한다.

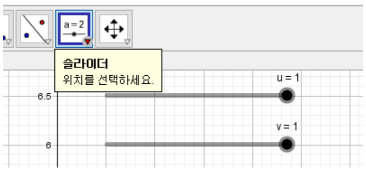
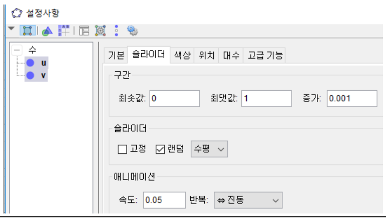
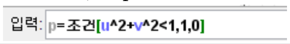
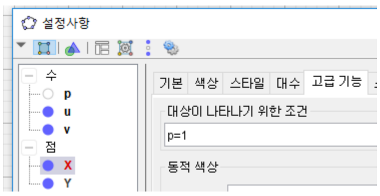
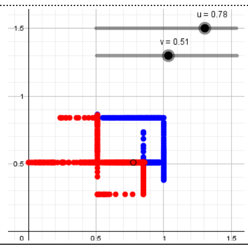
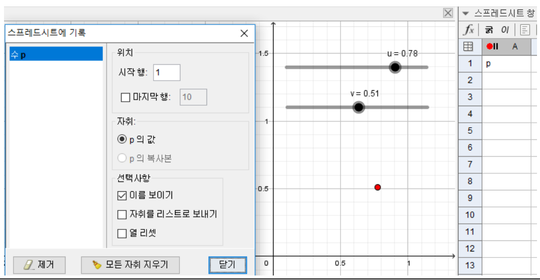
$\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ $(a<\alpha \le \beta < b)$이다.

특히, $X$가 구간 $(0,1)$에서 균등분포를 따를 때, $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)=\beta-\alpha$이다.

※ 몬테카를로 방법의 오차

몬테카를 시뮬레이션으로 구한 근삿값과 참값과의 오차는 $n$이 커짐에 따라 감소하는데 $1/\sqrt{n}$에 비례하며 감소한다고 알려져 있다.

※ GeoGebra 구성과정

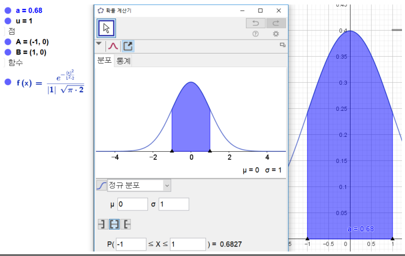
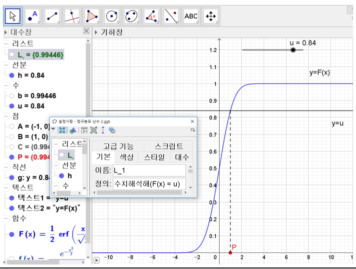
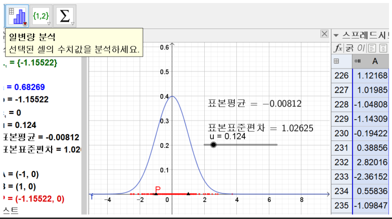
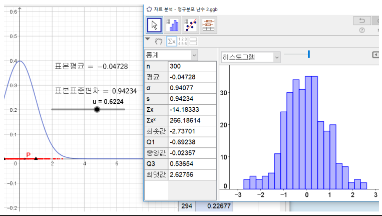
| 순서 | 구성 | 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 설명 | 슬라이더의 랜덤 기능을 통하여 사각형 안의 임의의 점을 만들고<br>원 안이면 기하창에 빨간색으로 표현, 스프레드시트에 1을 기록<br>원 밖이면 기하창에 파란색으로 표현, 스프레드시트에 0을 기록<br>스프레드시트의 데이터를 이용하여 확률 값을 계산하고, $\pi$의 근삿값을 구함. |
| 2 | 슬라이더 구성 | 슬라이더 2개 $x$좌표를 뜻하는 $u$, $y$좌표를 뜻하는 $v$ 만들기<br>전부 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 랜덤, 증가-0.001, 속도-0.05(속도를 균일하게 맞추기 위하여)<br> |
| 3 | 논리 구성 | 입력창에 $p=$조건$[u^2+v^2<1,1,0]$ 입력<br>$u^2+v^2<1$이면 $p=1$이고 $u^2+v^2\geq 1$이면 $p=0$<br> |
| 4 | 점 만들기 | 점 1 : 입력창에 $X=(u,v)$ 입력, 설정사항 색상에서 빨간색,<br>고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 : $p=1$<br>점 2 : 입력창에 $Y=(u,v)$ 입력, 설정사항 색상에서 파란색,<br>고급기능 대상이 나타나기 위한 조건 : $p=0$<br>두 점 모두 이름 보이지 않기 선택, 두 점 모두 자취보이기 선택<br>$u,v$를 변화시키며 점의 위치를 확인<br> |
| 5 | 데이터 기록 | 보기- 스프레드시트 창 열기<br>대수창 $p$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음 선택<br> |
| 6 | 확률 표현 | 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력<br>대수창의 확률을 기하창에 드래그 |
| 7 | $\pi$ 근삿값 찾기 | 입력창에 근삿값=4*확률 입력<br>대수창의 근삿값을 기하창에 드래그 |
| 8 | 꾸미기 | 입력창에 $c=$원호$[(0,0),(1,0),(0,1)]$ 입력<br>입력창에 선분$[(0,0),(1,0)]$, 선분$[(1,0),(1,1)]$, 선분$[(1,1),(0,1)]$, 선분$[(0,1),(0,0)]$ 입력<br>모두 이름 보이지 않기 |
| 9 | 애니메이션 | 슬라이더 $u,v$를 동시 선택 후 애니메이션 시작 |

※ 새로 고침: Ctrl+F, 스프레드 시트창 삭제 가능

## Ⅱ. 특정 확률분포를 따르는 난수 생성기

설명) 확률 변수 $X$의 확률밀도 함수를 $f(t)$라 할 때, 누적 분포 $F(x)=\mathrm{P}(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$라 하자.
확률변수 $U$가 균등분포 $(0,1)$를 따른다고 하면
$\mathrm{P}(a \le X \le b)=F(b)-F(a)=\mathrm{P}(F(a)\le U \le F(b))=\mathrm{P}\left(a \le F^{-1}(U)\le b\right)$이므로 $X=F^{-1}(U)$가 된다.
따라서 확률변수 $X$의 난수는 자기 자신 누적 분포 함수의 역함수에 $(0,1)$에서 임의로 추출한 난수를 대입하여 구한다.

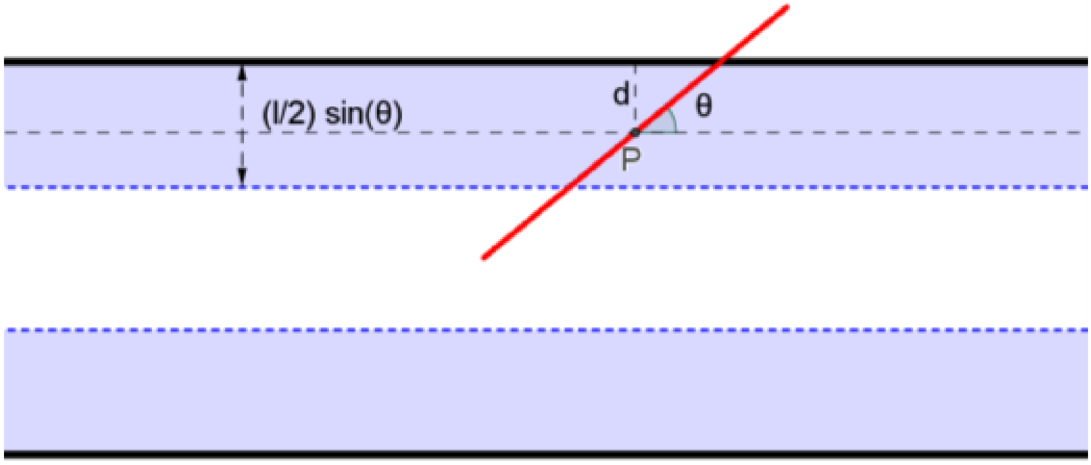
※ 표준정규분포 난수 생성기 GeoGebra 구성과정

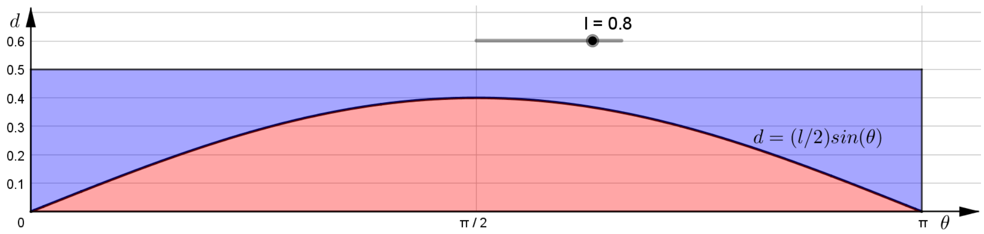
| 순서 | 구성 | 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 슬라이더 구성 | 슬라이더 $u$ 최솟값 0, 최댓값이 1인 수 랜덤, 증가-0.001, 속도-0.05 |
| 2 | 확률분포 만들기 | 보기 - 확률 계산기 정규분포 내보내기 기하창에 복사  |
| 3 | 누적 확률분포 만들기 | 입력창에 $F$=적분$[f]+1/2$ 입력 |
| 4 | 난수 추출 | 입력창에 $L_1$ =수치해석해$[F(x)=u]$ 입력<br>입력창에 $b$=원소$[L_1, 1]$ 입력  |
| 5 | 점 만들기 | 입력창에 $P=(b,0)$ 입력 (자취 보이기 선택) |
| 6 | 데이터 기록 | 보기- 스프레드시트 창 열기<br>대수창 $b$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음 선택 후 닫기 |
| 7 | 표본평균, 표본표준편차 | 입력창에 표본평균=평균[A2 : A9999] 입력<br>입력창에 표본표준편차=표본표준편차[A2 : A9999] 입력<br>대수창의 확률 및 표준편차를 기하창에 드래그 |
| 8 | 애니메이션 | 슬라이더 $u$를 애니메이션 시작 |
| 9 | 표본분석 | 스프레드 시트창의 A열을 선택하여 일변량 분석 후 통계보이기 선택   |

III. 뷔퐁의 바늘
넓은 평면 위의 일정한 간격을 두고 평행한 직선이 무수히 많이 그려져 있다.
길이 $l$인 바늘을 이 평면 위에 떨어뜨릴 때, 바늘이 평행선과 만날 확률을 구하여라.
(단, 평행선의 간격은 1이고 $l \le 1$라 한다.)

풀이) 바늘의 중심에서 가까운 직선까지의 거리를 $d$ 바늘과 직선이 이루는 각을 $\theta$라 할 때,
표본공간 $S$는 $S=\left\{(\theta,d)\,|\,0 \le \theta \le \pi, 0 \le d \le \frac{1}{2}\right\}$이고 구하는 사건을 $A$라 할 때,
$A=\left\{(\theta,d)\,|\,0 \le d \le \frac{l}{2}\sin\theta\right\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta}{\pi/2}=\frac{2l}{\pi}$$ 이다.



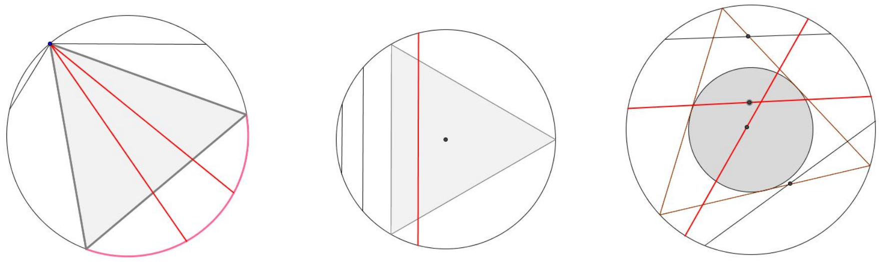
※ GeoGebra 구성과정

| 순서 | 구성 | 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 설명 | 바늘이 평행선과 만나거나 만나지 않거나 :<br>바늘 중심 위치의 높이, 바늘이 $x$축과 기울어진 정도(각), 바늘의 길이에 따름.<br>평행선 사이의 거리는 1로 고정할 것임.<br>따라서 중심위치의 높이는 정수+$a$ $(0 \le a \le 1)$로 표현하고<br>$a$에 따라 바늘이 평행선과 만나고 만나지 않고를 기록. |
| 2 | 평행선 그리기 | 격자를 이용: 설정에서 격자 선택<br>눈금간격 $y$축은 1, $x$축은 100으로 색을 검은색, 선 종류 실선, 격자 보이기 |
| 3 | 바늘의 길이 구성 | 슬라이더 $l$ 최솟값 0, 최댓값이 1 |
| 4 | 랜덤 슬라이더 구성 | 슬라이더 5개<br>전부 최솟값 0, 최댓값이 1인 수, 증가-0.0001, 속도-0.02, 랜덤<br>높이를 뜻하는 소수 $a$, 기울어진 정도를 뜻하는 $t$, 높이 정수 $b$, 가로 범위 $c$, 가로 소수 $d$<br>※ 동시 선택 후 한꺼번에 설정을 변경할 수 있음. |
| 5 | 바늘의 중심 위치 만들기 | 입력창에 $\mathrm{P}=(-10*(1-c)+15*c+d, floor(-10*(1-b)+15*b)+a)$ 입력<br>※ $floor$ : 가우스 함수를 뜻함. 정수로 표현하기 위하여<br>슬라이더를 변화시키며 점의 위치를 확인 |
| 6 | 바늘의 끝점 만들기 | 입력창에 $\mathrm{Q}=\mathrm{P}+l/2*(\cos(pi*t), \sin(pi*t))$ 입력<br>입력창에 대칭[Q,P] 입력<br>슬라이더를 변화시키며 점의 위치를 확인 |
| 7 | 논리 구성 | 아래서 만날 조건: 입력창에 $p$=조건[$a<l/2*\sin(pi*t)$,1,0] 입력<br>위에서 만날 조건: 입력창에 $q$=조건[$a>1-l/2*\sin(pi*t)$,1,0] 입력<br>만날 조건: 입력창에 $r=1-(1-p)*(1-q)$ 입력 |
| 8 | 바늘 만들기 | Q와 Q′을 이은 선분 2개를 만든다.<br>선분1: 이름 $u$, 설정사항 색상에서 빨간색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $r=1$ 입력<br>선분2: 이름 $v$, 설정사항 색상에서 파랑색, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $r=0$ 입력<br>두 선분 모두 이름 보이지 않기 선택, 두 선분 모두 자취보이기 선택 |
| 9 | 만날 때 직선 색칠 | 아래서 만나는 직선: 입력창에 $m: y=floor(-10*(1-b)+15*b)$ 입력,<br>색상 노란색, 이름 안 보이기, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $p=1$ 입력<br>위에서 만나는 직선: 입력창에 $n: y=floor(-10*(1-b)+15*b)+1$ 입력<br>색상 노란색, 이름 안 보이기, 설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $q=1$ 입력 |
| 10 | 데이터 기록 | 보기- 스프레드시트 창 열기<br>대수창 $r$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음 선택 후 닫기 |
| 11 | 확률 표현 | 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력<br>대수창의 확률을 기하창에 드래그 |
| 12 | $\pi$ 근삿값 찾기 | 입력창에 근삿값=2*$l$/확률 입력<br>대수창의 근삿값을 기하창에 드래그 |
| 13 | 슬라이더 애니메이션 | 랜덤기능을 선택한 슬라이더$(a,t,b,c,d)$ 동시 선택 후 애니메이션 시작 |
| 14 | 꾸미기 | 점 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{Q}'$ 모두 보이지 않게 하기<br>슬라이더$(a,t,b,c,d)$ 보이지 않게 |

## Ⅳ. 베르트랑의 현

원에서 임의의 현을 선택했을 때, 그 현의 길이가 원에 내접하는 삼각형의 한 변의 길이보다 클 확률을 구하여라.

풀이)
이 문제는 ‘임의의’ 에 대한 해석에 따라 서로 다른 세 가지 풀이가 있고, 그에 따라 서로 다른 세 가지 답이 도출된다. 아래는 그 세 가지 풀이이다.



첫 번째 그림은 시작점을 잡고 끝점을 임의로 잡는 방법, 두 번째 그림은 현과 중심의 거리를 임의로 잡는 방법, 세 번째 그림은 현의 중점을 임의로 잡는 방법이다. 각각의 풀이에 대한 답은 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 이다.

※ GeoGebra 구성과정

| 순서 | 구성 | 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 설명 | 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 임의의 두 점을 잡아 현을 만들고 이 길이를 구하여 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이($\sqrt{3}$)와 비교를 할 것임. |
| 2 | 원 만들기 | 입력창에 $x^2+y^2=1$ 입력 |
| 3 | 랜덤 슬라이더 구성 | 슬라이더 2개 $u, v$<br>전부 최솟값 0, 최댓값이 1인 수(속도를 균일하게 맞추기 위하여), 증가-0.0001,<br>속도-0.02, 랜덤 |
| 4 | 현의 끝점 잡기 | 입력창에 $\mathrm{U}=(\cos(2pi*u), \sin(2pi*u))$ 입력<br>입력창에 $\mathrm{V}=(\cos(2pi*v), \sin(2pi*v))$ 입력 |
| 5 | 논리 구성 | 현의 길이가 $\sqrt{3}$ 보다 클 조건: 입력창에 $p$=조건[거리$[\mathrm{U,V}]>\mathrm{sqrt}(3),1,0$] 입력 |
| 6 | 현 만들기 | U와 V을 이은 선분 2개를 만든다.<br>선분1: 설정사항 색상에서 빨간색,<br>설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $p=1$ 입력<br>선분2: 설정사항 색상에서 파랑색,<br>설정사항 고급기능 대상이 나타나기 위한 조건: $p=0$ 입력<br>두 선분 모두 이름 보이지 않기 선택, 두 선분 모두 자취보이기 선택 |
| 7 | 데이터 기록 | 보기- 스프레드시트 창 열기<br>대수창 $p$에 우클릭 후 스프레드시트에 기록 선택, 시작행 1, 마지막행 체크하지 않음<br>선택 후 닫기 |
| 8 | 확률 표현 | 입력창에 확률=평균[A2 : A9999] 입력<br>대수창의 확률을 기하창에 드래그 |
| 9 | 슬라이더 애니메이션 | 랜덤기능을 선택한 슬라이더($u, v$) 동시 선택 후 애니메이션 시작 |
| 10 | 꾸미기 | 점 U, V 모두 보이지 않게 하기 |

문제1. 세 가지 해법에 대하여 각각의 확률이 나타나는 이유를 설명하여라.

문제2. 나머지 두 가지 방법을 GeoGebra를 이용하여 몬테카를로 시뮬레이션으로 만들어 보자

< Abstract >


**Development and Application of Teaching and Learning Materials for Monte Carlo Simulation Using Geogebra**



OH, Dong-Yul

Department of Mathematics Education

Graduate School of Education

Jeju National University

Supervised by Professor **Yang, Sung-Ho**



The purpose of this study is to develop teaching and learning materials for Monte Carlo simulation using GeoGebra and then to apply them to the class to develop students' ability to master and utilize various GeoGebra and Monte Carlo simulation capabilities.

To achieve this goal, research tasks were set up as follows.

1. Develop teaching and learning materials for Monte Carlo simulation using GeoGebra.

2. After conducting the lessons with the produced teaching and learning materials, analyze the students' activity, and produced results.

The results of this study were as follows.

First, it can be seen that the teaching and learning materials developed by this study are effective in mastery of using Monte Carlo simulation that can be used variously in students' research activities.

Second, the developed teaching and learning materials helped students learn various uses of GeoGebra.

Third, the developed teaching and learning materials helped to improve problem - solving ability and interest in mathematics.