석 사 학 위 논 문

초등학교 교과서 속 분수 영역 분석 및 분수 의미에 대한 교사의 사고 분석

- SMK와 PCK 중심으로 -

Analysis of Fractions from Korean Mathematic Textbooks and of the Teachers' Thoughts Regarding the Meanings of Fraction

- Focusing on SMK and PCK -

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

양 지 은

2020년 8월

초등학교 교과서 속 분수 영역 분석 및 분수 의미에 대한 교사의 사고 분석

- SMK와 PCK 중심으로 -

Analysis of Fractions from Korean Mathematic Textbooks and of the Teachers' Thoughts Regarding the Meanings of Fraction

- Focusing on SMK and PCK -

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

양 지 은

2020년 5월

양 지 은의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 이 호 수 인

심사위원 김 해 규 인

심사위원 최 근 배 인

제주대학교 교육대학원

2020년 6월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국 문 초 록

본 연구에서는 교과서 속 분수 영역을 5가지 의미로 분석하고, 교사가 가지고 있는 분수의 의미 및 분수 문제 속 분수의 의미를 찾음으로써 교사가 교과서의 과정에 따라 분수를 지도한다면 교사들은 어떠한 분수의 의미를 갖는지에 대한 수학 내용 지식(Subject Matter Content Knowledge)과 교수 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge)를 분석하고자한다. 이를 통해 수학 교과서와 지도서 속 분수 영역 및 교사교육 프로그램의 개발과 운영을 위한 기초자료를 제공하는 것을 목적으로 한다.

이를 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

① 초등학교 교과서 속 분수의 의미는 어떻게 다뤄지고 있는가?

② 분수의 의미에 대한 초등학교 교사들의 교과지식(SMK와 PCK)은 어떠한가?

이와 같은 연구 문제를 해결하기 위해 3~6학년 교과서 속 분수 영역 분석과 분수의 의미에 관한 설문지를 도구로 하는 질적 조사 연구를 실시하였다. 연구 절차는 먼저 분수의 의미에 관하여 문헌 검토하고 이를 바탕으로 교과서 분석 후 분수의 의미에 관한 PCK에 대한 문항을 만들었다. 연구 대상은 현 제주도 초등학교 교사 100명이었다.

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 교과서 분석 결과 현 교육과정에서 분수의 5가지 의미를 모두 다루는 모습을 보이고 있으나, 분수의 의미를 설명함에 있어 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수 중심으로 설명하는 모습을 볼 수 있었다. 전체-부분의 관계로서의 분수로 분수를 도입하지만 3학년 이후로 갈수록 단위분수를 많이 이용하며 측정으로서의 분수를 주로 이용하고 있으며 연산자로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수는 상대적으로 적게 다뤄지고 있었다. 그러나, 지도서에는 전체-부분의 관계로서의 분수 외에 다른 의미의 분수들에 대한 구체적인 설명이 없었다. 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미는 필수적이나 나머지 분수를 이해하기 위해서는 충분하지 않으며, 다섯 개의 분수의 의미를 정

확하게 이해하지 못할 경우 분수의 연산 및 후속 학습에 있어서 어려움을 느낄 수밖에 없을 것이다. 따라서, 전체-부분의 관계로서의 분수뿐만 아니라 다른 분수의 의미에 관해 깊은 이해가 필요할 것이다.

둘째, 분수의 다양한 의미에 관한 교사들의 SMK를 살펴보면 교사 모두 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수의 의미를 표현하고 있다는 사실을 알 수 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수, 몫으로서의 분수, 측정으로서의 분수, 비율로서의 분수, 연산자로서의 분수 순으로 교사들이 분수의 의미를 이해하고 나타내고 있다. 이는 교육과정 속 분수개념에서 가장 기초적이고 핵심적인 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미 이해에 비해 상대적으로 몫, 측정, 비, 연산자로서의 의미에 대한 깊은 이해가 적고 교사들의 분수의 의미에 대한 이해는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미에 한정적인 것으로 바라볼 수 있다. 이러한 현상은 지도서의 분수의 의미에 관한 구체적인 설명이 없음과 연관지어 생각해볼 수 있다. 따라서, 분수의 의미에 관한 지도서의 변화가 요구된다.

셋째, 전체-부분의 관계로서의 분수의 시각적인 모델에 관한 교사의 SMK는 이산량을 표현하는 이산량 모델보다는 연속량을 표현하는 영역모델, 길이모델과 같은 연속모델을 주로 이용하여 표현하는 모습이 보였다.

넷째, 몫으로서의 분수의 의미에 관한 교사의 SMK는 등분제 상황에 국한되어 있었다. 이는 3학년 1학기 똑같이 나누어주는 등분할의 상황에서 분수를 도입하고 6학년 1학기에 배우는 몫으로서의 분수의 의미와 관련이 있다. 6학년 1학기의 몫으로서의 분수 개념 중 6차시 중 5차시는 등분제 상황이고 1차시만이 포함제 상황으로 살펴볼 수 있다. 따라서, 교과서와 지도서에서 포함제 상황에서 몫으로서의 분수와 관련한 실생활 속 문장제에 대한 폭넓은 경험을 제공해야 한다.

다섯째, 연산자로서의 분수의 의미에 관한 교사의 SMK는 분수의 5가지 의미 중 가장 적었다. 소수의 교사들만이 연산자로서의 분수의 의미를 기술했으며 그 중에 4명의 교사가 모델 또는 그림을 통해 $\frac{3}{4}$을 연산자로서의 분수로 표현하였다. 이는 연산자로서의 분수의 의미가 교사들에게 익숙하지 않은 개념이라고 볼 수 있다. 교사들이 수학수업에 있어 가장 많이 참고하는 지도서에 연산자로서의 분수를 짧게 설명하여 교사의 이해를 돕지 못하고 있다고 생각할 수 있다. 따라

서, 지도서에 교사들의 분수의 연산자적 의미를 이해를 돕는 구체적인 설명이 필요할 것이다.

여섯째, 전체-부분의 관계로서의 분수에서 중요한 전체의 단위를 어떻게 설정하는지 교사의 분수감각을 살펴보았을 때, 대부분의 교사들이 전체의 단위를 다양하고 유연하게 이용하고 있지 않다고 볼 수 있었다. 대부분의 교사들은 1개의 단위로 표현하였으며 가능한 단위의 개수가 최대인 4개 모두 기술한 교사는 단 2명이었다는 사실을 알 수 있었다.

일곱째, 교사들이 주어진 막대의 길이를 통해 새로운 길이의 막대를 구할 때의 해결방법을 분석하며 교사들의 SMK를 살펴보니, 분할-반복 조작보다 통분방법을 통해 문제를 해결함을 볼 수 있었다. 통분과 식의 방법을 사용한 교사들은 형식적인 알고리즘을 이용했다고 볼 수 있으며 이에 비해 통분과 식의 방법이 아닌 분할-반복 조작을 통해 막대의 길이를 구한 교사들은 분수를 형식적으로 바라보지 않고 유연하게 받아들이고 있음을 알 수 있다.

여덟째, 대부분의 교사들은 측정으로서의 분수의 중요한 개념인 기본 단위 설정에 있어 효과적인 지도 방법을 제시하고 있다. 이들은 1m의 기준 단위를 설정하여 학생들에게 수직선상의 분수를 지도하고 있었다. 많은 교사들이 내재적으로 측정으로서의 분수의 중요한 개념인 기본 단위 설정을 인지하고 있고 이를 통해 측정으로서의 분수에 관한 효과적인 PCK를 가지고 있음을 알 수 있다.

아홉째, 연산자로서의 분수에 관한 교사들의 PCK는 정확하지 않은 모습을 보이고 있었다. 연산자로서의 분수의 의미와 관련된 문제에서 정확한 연산자로서의 분수로 설명하는 교사는 적었으며, 정확하지 않지만 연산자로서의 분수로 설명하는 경우에는 전체-부분의 관계로서의 분수로 회귀하는 모습을 보이고 있었다. 학생들의 이해를 위해 전체-부분의 관계로서의 분수 방법을 사용할 수는 있지만 연산자로서의 분수로 살펴봐야 할 문제조차 모두 전체-부분의 관계로서의 분수로만 해석하는 것은 학생과 교사의 분수에 대한 사고를 확장시키지 못할 수 있다.

열 번째, 교과서 속 분수의 진도와 교사들이 생각하는 분수의 개념 또는 의미의 진도 사이의 일치도를 살펴보니 대부분의 교사들은 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수를 도입해야한다고 생각하고 있었으나 전체-부분의 관계로서

의 분수 외에 교사들이 생각하는 측정, 연산자, 몫, 비율로서의 분수의 순서와 교과서 순서와의 일치도는 현저히 낮았다.

열한 번째, 대부분의 교사들이 분수의 다양한 의미를 지도해야 한다고 말하며 그 이유는 실생활에서의 유용성, 수학적 사고, 오개념 수정, 후속 학습을 위함, 분수감각, 교사의 지식 부족, 학습의 흥미도와 관련해서 설명하였다. 흥미로웠던 점은 5가지의 의미를 모두 기술한 교사들 모두 분수의 다양한 의미 지도가 필요하다고 말하였다. 이는 분수의 다양한 의미 지도의 필요성에 있어 유의미한 결과로 살펴볼 수 있다.

열두 번째, 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 시 어려움에는 의미 구분의 어려움, 분수의 추상적인 개념, 분수 설명 자료 부족. 다양한 문제 상황 어려워함, 학생의 도구적 이해, 전시학습의 영향, 시간 부족, 교사의 지식 부족, 분수의 언어감각, 학생들의 수준 차이, 수학적 사고가 있었다. 흥미로웠던 점은 많은 교사들이 분수 설명 자료가 부족하여 분수의 의미 지도가 어렵다고 하였다. 교사들이 요구하는 분수 설명 자료에는 실생활에서의 다양한 분수 예시, 지도서 속 다양한 분수의 의미 지도방법 등이 있다. 교사가 느끼는 분수의 의미 지도 시 어려움은 교사의 PCK에 직접적인 영향을 끼치며 이는 학생들이 분수 의미를 학습하는 데에도 영향을 준다. 따라서, 분수 의미에 대한 체계적인 지도 방안이 필요하고, 실생활 속 분수의 여러 가지 상황을 살펴봄으로써 분수의 의미에 대해 생각해 볼 수 있는 기회를 마련해야 한다.

분수의 5가지 의미에 대한 이해는 분수 개념의 기본으로서 분수의 사칙 연산의 관계적 이해, 분수 스킴 및 유연한 분수 감각을 형성하는데 영향을 주는 중요한 요소이므로 초등학교 학생들과 교사들은 분수의 다양한 상황 속 분수의 의미에 대한 풍부한 경험을 할 수 있어야 한다. 이는 학생과 교사들이 자연스럽게 학습하고 형성하는 것이 아니기 때문에 교과서와 지도서 안에서 보다 명시적으로 이루어져야 할 것이다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

분수의 개념은 초등학교 수학에서 학생들이 힘들어하고 포기하는 개념 중 하나이다. 분수의 연산에 앞서 분수의 여러 가지 의미와 같은 기본적인 사전지식이 전제되어 있지 않다면 학생들은 도구적 이해에 멈추게 될 수밖에 없다. 홍은숙·강완(2008)은 학생들은 여러 가지 의미를 지니고 있는 분수의 개념을 제대로 이해하지 못하고 있고, 분수에 대해 일상생활에서 경험한 실제적인 수학적 지식을 분수의 형식적 지식의 학습에 연결시키지 못하고 있어 결국 분수의 의미를 외우게 되는 것이라 말한다. 이광호(2017)는 분수의 의미에 대한 Susan J. Lamon의 생각을 다음과 같이 옮겼다.

> 범자연수에서 분수로 넘어가면서 기호에 대한 의미를 담는 상황의 다양성과 복잡성은 크게 증가한다. 분수는 다양한 다른 의미를 가지지만 기호로 나타낼 때는 결국 같아 보인다. … 그러나 깊은 이해와 분수 감각으로부터 자연스러운 분수 연산을 하도록 가르치기 위해서 우리는 분수 기호의 저변에 깔려 있는 의미의 출처인 넓은 범위의 현상들에 대해 이해할 필요가 있다. (Susan, 2012/2017, p. 36)

분수 개념의 다양한 의미를 이해하는 것은 분수에 대한 수감각 및 연산감각을 위해 꼭 필요한 개념이다. 또한, 분수는 상황에 따라 다른 의미를 가진 채로 해석할 수 있기 때문에 학생들이 분수의 의미를 정확하게 인지하고 있지 않는다면 분수의 다양한 오개념을 야기할 수 있다. 따라서, 학생들이 분수를 의미 있게 이해하도록 하기 위해서는 구체적인 상황에서 의미를 찾아 견고한 개념적 이해를 구성하도록 하는 것이 좋다(3-2 지도서, p. 235). 분수 개념의 의미는 저자에 따라 다르게 말할 수 있지만 이 논문에서는 Susan J. Lamon의 저서에 바탕을 두어 분수의 의미를 분석한다. 분수 개념의 다섯가지 의미에는 전체-부분의 관계, 측정, 몫, 연산자, 비율로서의 분수가 있다. 그러나 현 분수 교육은 미

국과 한국 모두 부분-전체 비교에 기반하여 전체-부분의 관계로서의 분수라는 하나의 의미를 중심으로 해석한다. 이후에 분수의 연산을 학습할 시 학생이 분수를 제대로 이해하는데 어려움을 주며 결국 도구적 이해에 멈추게 되는 현상을 보일 수 있다. 이에 이광호(2017)는 Susan J. Lamon의 생각을 다음과 같이 밝히고 있다.

> 부분-전체 비교만을 분수에 대한 의미로 가르쳐왔기 때문에 분수와 부분-전체 분수가 같은 의미로 통용되어왔던 것은 당연하다. 그러나 이제 우리는 부분-전체 해석만을 강조하는 제한적인 교육이 유리수에 대한 개념을 약하게 한다는 것을 안다. 또한 교사들도 연산자, 측정자, 비 그리고 몫으로서의 의미인 대안적인 의미가 있다는 것을 깨닫기 시작했다. 부분-전체 비교는 다른 해석과 대등한 입장이지 분수와 같은 의미를 지닌 특별한 장점을 갖는 해석이 아니다. (Susan, 2012/2017, p. 37)

전체-부분의 관계로서의 분수의 의미로만 모든 분수를 바라본다면 다양한 문제상황을 바라볼 때 학생들의 혼란이 생길 수밖에 없다. 이에 따라 5가지 의미를 가진 분수 개념이 교과서에 어떻게 녹아들었으며 어떤 분수의 의미가 집중적으로 다루어지고 있는지 분석하고자 한다.

더 나아가 분수 의미에 대한 교사들의 사고를 분석하여 논의하고자 한다. 한국교육과정평가원에서는 내실 있는 교실 수업의 열쇠는 교사의 수업 전문성이며, 교사의 수업 전문성의 핵심은 교과 내용을 지도하는 데 필요한 방법적 지식인 내용 교수 지식(PCK)이라는 인식 하에 교사 실천 지식, PCK에 관한 연구를 본격적으로 시행하였다(최승현, 2007). 김경은(2009)은 교사 지식에 관한 연구는 교수 및 교사 교육에서 수학교육학자들로부터 많은 주목을 받아온 주제라 말한다. 교사가 지닌 수학 내용 지식(Subject Matter Content Knowledge)과 교수학적 내용 지식(Pedagogical Content Knowldege)은 수학교육에 있어 교사의 전문성의 한 부분이다. 유금순(2012)은 교사는 가르치는 행위를 통해서 학습자의 교육적 변화를 일으키는 사람으로서 가르치는 일은 아직 성숙되지 않은 학생들을 대상으로 하는 특수성을 가지기 때문에 교사들에게는 특별한 자질인 전문성이 요구된다고 주장한다. PCK는 교과를 가르치기 위해 필요한 전반적인 관점, 특정한 학습 주제를 가르치기 위한 교수학적 전략과 표상에 대한 지식 등으로 볼

수 있다(재인용, 김경은, 2009). 분수의 개념이나 성취도, 연산에 대한 연구가 많음에도 불구하고 교사가 교과서의 문제에 대한 분수의 의미 및 분수의 의미에 대한 교사의 지식을 파악할 수 있는 연구가 부족하다고 할 수 있다. 또한, 이종욱(2005)은 현직 교사를 연구 대상으로 설정하여 교사가 가진 교과 지식과 수업 실제와의 관계를 제시하는 연구가 부족함을 말하며 초등교사의 분수 지식 실태를 분석하였다. 이종욱(2005)은 교사교육이 성공적으로 이루어지기 위해서는 교사교육기관에서 운영하는 교육과정을 개발해야 할 것이고 이를 위해서는 먼저 예비교사나 현직교사의 지식의 현 상황에 대한 객관적인 분석이 이루어져야할 것이라 말한다.

따라서, 본 연구에서는 교과서 속 5가지 의미의 분수 영역을 분석하고, 교사가 가지고 있는 분수의 의미 및 분수 문제 속 분수의 의미를 찾음으로써 교사가 교과서의 과정에 따라 분수를 지도한다면 교사들은 어떠한 분수의 의미를 갖는지에 대한 교사 지식을 수학 교과 내용 지식(Subject Matter Content Knowledge)와 교수학적 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge)을 중심으로 분석하고자한다. 이를 통해 수학 교과서와 지도서 속 분수 영역 및 교사교육 프로그램의 개발과 운영을 위한 기초자료를 제공하는 것을 목적으로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수의 의미

자연수로는 정확하게 표현할 수 없는 양을 나타내기 위해 분수란 개념을 필요하게 되었다. 분수는 측정의 상황에서 발생한 것으로 생각되는데 어떤 단위로 크기를 재어 측정할 때 정확하게 단위의 몇 배로 측정할 수 없는 길이는 단위를 똑같이 나눈 부분을 단위로 측정하여 측정 결과를 더 자세하게 나타내었다고 한다(3-1 지도서, p. 293). Susan은 분수의 5가지 의미를 다음과 같이 설명하였다.

가. 전체-부분의 관계로서의 분수 (Part-Whole Comparisons with Unitizing)

전체-부분의 관계로서의 분수는 부분과 전체 사이의 관계를 나타내는 분수로서 학생과 교사가 가장 기본적으로 인지하고 있는 분수이다. 등분할(partitioning)을 통해 부분이 전체에서 얼마만큼 인지를 살펴볼 수 있다. 피자를 똑같이 나누어 먹는 경우와 같이 전체를 등분할하고, 이때의 부분을 표현하기 위해 분수를 사용하게 된다. Susan은 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미를 단위로 나누어져있는 같은 부분들의 전체 수 중의 단위의 같은 부분들의 수라고 설명한다. 즉, 전체를 똑같이 나눈 것 중의 일부가 전체의 얼마인지를 나타내는 분수이다. 몇으로 나눈 것 중의 몇이라는 의미를 가지며 여기에서 '같은'의 의미는 수, 길이, 넓이 등등 전체 단위의 특성에 따라서 달라지는 같은 영역을 말한다(Susan, 2006, p. 125).

나. 측정으로서의 분수 (Measure)

측정으로서의 분수는 2가지 관점에서 찾아볼 수 있다. 첫 번째는 길이, 무게, 부피, 시간 등 양의 측정 상황에서 cm, kg, L, 시간 등 표준단위를 측정할 때이다. 정은실(2005)은 측정으로서의 분수는 길이, 무게, 부피, 시간 등 양의 측정과 관련하여 측정 단위 이하의 양을 잴 필요가 있을 때, 그 나머지의 양을 재기 위

한 목적으로 만들어진 분수라고 말한다(p. 123). 양의 측정 과정에서 나타나는 자투리를 나타내는 것으로 측정하려는 양이 주어진 단위의 정확히 몇 배가 아닐 때 주어진 단위를 똑같이 분할하여 측정 결과를 자세히 나타내는 것이 이에 해당된다(3-1 지도서, 294쪽).

두 번째는, 단위가 주어졌을 때 단위분수를 구하여 이를 이용할 때이다. 양성준(2009)은 단위분수를 단위보다 작은 부분을 측정하는 데 가장 기본적인 개념이라 말한다. 단위분수를 만들어 분수를 표현하는 개념은 전체-부분의 관계로서의 분수에서 전체보다 큰 경우의 분수가 나왔을 때의 한계를 극복할 수 있다. 단위분수를 이용하여 분수를 설명할 때 가분수의 개념을 자연스럽게 도입할 수 있다. 이러한 측정으로서의 분수는 일차원 공간에서 연속된 0으로부터 특정 점까지 연속된 양의 거리를 측정한다. 이차원 공간에서 분수는 면적을 측정한다(Susan, 2006, p.170). 또한, 측정으로서의 분수는 연속적으로 단위를 등분(partition)한다. 측정으로서의 분수는 어느 크기든 수직선상에서 등분할 때, 주어진 2개의 분수 사이의 분수를 찾을 때, 2개의 분수를 비교할 때 찾아볼 수 있다(Susan, 2006, p.173-174).

다. 연산자로서의 분수 (Operator)

연산자로서의 분수는 면적의 수축과 확대, 길이의 감소와 증가, 나누기와 곱하기 등에 대한 개념이다. $\frac{a}{b}$만큼 확대하거나 축소하는 것이다. 연산자는 변환시켜주는 역할 '길이를 줄이거나 늘림, 이산량 집합 속에 있는 물품들의 수를 줄이거나 늘림, 같은 모양을 줄이거나 늘림'을 한다. 연산자가 변환시켜주는 역할이라는 것은 과정을 수행하기 위한 지시라는 의미가 함축되어 있다. 예를 들어 6의 $\frac{2}{3}$는 (6x2)/3 또는 (6/3)x2라는 과정이 들어있다. 이는 6이라는 숫자를 2라는 인수로 확대시키고, 3이라는 인수로 감소시키는 과정이다(Susan, 2006, p.151). 또한, 연산자로서의 분수는 $\frac{\text{연산으로부터의 결과값}}{\text{연산에 작용하는 입력값}}$ 관계로 정의할 수 있다(Susan, 2006, p.154). 연산자로서의 분수는 분수의 합성 시 분수를 바라볼 때 적합할 수 있다. 분수의 5가지의 의미들 중 물건과 같은 이산량이 아닌 수

자체를 바라보며 첫 번째의 분수에서 다시 분수의 과정을 추가할 수 있기 때문이다(Susan, 2006, p.156). 따라서 연산자로서 분수는 분수적 승수, 2개의 연산과정, 입력값과 결과값 사이의 관계로서 바라볼 수 있다.

라. 몫으로서의 분수 (Quotient)

등분할(partitioning)은 같은 조각들로 나누는 것이다. 이는 몫으로서의 분수를 이해하는데 기본이 된다. 자연수를 자연수로 나누었을 때 나눗셈의 결과인 몫으로서의 분수 $\frac{a}{b}$는 b사람 당 a피자 조각을 의미한다. 즉, 한 사람이 가진 조각의 수를 나타내는 것이다.

마. 비율로서의 분수 (Rate)

비란 2개의 변량의 비교이다. 두 양의 상대적인 크기인 비를 분수로 나타내는 것이다. 비에는 2가지 종류: 부분-전체 비교와 부분-부분이 있다. 비율이란 비를 다른 종류의 측정값과 비교한 결과이다(Susan, 2006, p.182). 2개의 변량을 같은 방법으로 비교하는 것이다. 예를 들어, 2개의 변량이 시간에 따라 바뀔 때가 있다. 2개의 변량을 1개의 단위와의 관계로 살펴보면 이는 'unit rate'가 된다(Susan, 2006, p.192). 무리수, 0인 경우가 있기 때문에 비는 항상 분수가 되는 것은 아니다(Susan, 2006, p.183).

〈표 Ⅱ-1〉 분수의 5가지 의미

$\frac{a}{b}$	의미: $\frac{3}{4}$	교실 활동
전체-부분의 관계로서의 분수 (Part-Whole Comparisons with Unitizing): 전체를 b 단위로 똑같이 나눈 것 중의 a 부분들.	$\frac{3}{4}$은 전체를 4 부분으로 나눈 것 중의 3부분을 의미. 단위를 크게 하거나 작게 함으로서 동치분수를 찾을 수 있음.	동치분수를 만들기 위한 그리고 분수를 비교하기 위한 단위화
측정으로서의 분수 (Measure): a($\frac{1}{b}$units)	$\frac{3}{4}$은 수직선에서 0으로부터 3($\frac{1}{4}$-단위)의 거리 또는 주어진 영역의 3($\frac{1}{4}$-단위).	수직선상의 연속적인 등분할; 미터와 게이지 읽기
연산자로서의 분수 (Operator): 어떤 것들 중의 $\frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}$은 단위에서 작용하는 원리를 말함; 3을 곱하고 그 결과를 4로 나눈 값 또는 4로 나눈 후 그 결과를 3으로 곱한 값. 1($\frac{3}{4}$-단위)와 $\frac{1}{4}$(3-단위)	기계, 종이 접기, 복사, 할인, 곱셈과 나눗셈을 위한 넓이 모델
몫으로서의 분수 (Quotient): a를 b로 나눈 수	$\frac{3}{4}$은 4 사람이 어떤 것 중 3 단위를 똑같이 나누었을 때 각 사람이 갖는 양.	등분할
비율로서의 분수 (Ratio): a:b	3:4는 2가지 변량을 합관계보다는 곱관계를 통해 비교한 관계.	두가지 색의 칩 활동

주. 출처 **Teaching Fractions And Ratios for Understanding, Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers** (p. 226) Susan J. Lamon, 저. 2006. Mahwah: New Jersey.

2. 분수 이해를 위한 추론

가. 비례적 추론(Proportional reasoning)

비례적 추론은 분수에서 가장 기본적인 추론이라 할 수 있다. 비례적 추론에는 정비례와 반비례가 있다. 규모의 확대와 축소, 수의 곱셈관계에 있어 확대와 축소 등 두 변량사이의 일정한 관계를 가진 배율(Reasoning Up and Down)적 추론이라 할 수 있다. 어떤 단위의 분수를 제공함으로써 배율로 확대된 단위를 구하고자 할 수 있고, 배율로 축소된 단위를 구할 수 있다. 비례적 추론은 비례적 관계에 대한 주장에서 발견하기, 표현하기, 분석하기, 설명하기, 증거 제공하기 등이 있다(Susan, 2006, p.4). 배관계와 관련된 곱셈적인 사고 역시 비례적 추론과 연관이 있다.

나. 상대적 사고와 절대적 사고(Relative and Absolute Thinking)

변화에 관한 사고에는 상대적 사고와 절대적 사고, 2가지 관점이 있다. 절대적 사고 관점은 변화에 있어 덧셈과 관련이 있다. 상대적 사고 관점은 변화에 있어 곱셈과 관련이 있다. 절대적 사고는 절대적인 수치가 덧셈관계로 변화한다. 상대적 사고는 상대적 수치가 곱셈관계로 변화한다. 상대적인 사고는 두 변량 사이의 관계이기 때문에 분수를 이해하는데 기초로 볼 수 있다. 예를 들어 조각의 크기와 조각의 수 사이의 관계, 같은 단위와 관련된 분수간의 비교, 분수의 크기, 동치분수 간의 관계 등이 있다(Susan, 2006, p.32)

다. 승법적 사고(Multiplicative Thinking)

가법적 사고가 아닌 승법적 사고는 확대, 축소, 크기 조정, 복제, 지수적으로 확대, 똑같이 나누는 것과 같은 과정과 관련이 있다(Susan, 2006, p.7). 학생들은 그 동안 합관계의 사고에 집중되어 있어 곱관계의 사고를 어려워할 수 있다. 절대적인 개념이 아닌 상대적인 개념으로 넘어가고 있기 때문에 학생들이 변량

사이의 상대적인 관계를 이해할 수 있도록 도와줘야한다. 자연수 체계에서는 곱셈을 하면 그 값이 더 커지고, 나눗셈을 하면 그 값이 더 작아지는 데 비해 분수의 곱셈에서는 그 값이 더 작아지기도 하고, 분수의 나눗셈은 그 값이 더 커지는 경우가 생긴다(5-1 지도서, 219쪽)

라. 단위화(Unitizing)

단위화란 변량에 있어 기준을 정하는 의미이다. 묶음으로서 단위를 어떻게 정하냐에 따라 같은 사물의 수를 표현함에 있어 다르게 표현할 수 있다. 단위에 따라 사물의 수는 곱관계로서 바뀐다. 단위를 자유롭게 정함으로써 학생들은 수를 유연하게 다룰 수 있다. 이는 후에 분수에서 단위를 정함에 있어 영향을 줄 것이다.

마. 나누기와 비교하기(Sharing and Comparing)

동등하게 나누며 몫을 구하는 활동을 통해 학생들은 등분할(Partitioning)의 개념을 이해할 수 있다. 등분할이란 이산량, 연속량 등 모든 변량을 나머지 없이 동등하게 나누는 과정이다. 나누어진 묶음을 보았을 때 모든 묶음이 같아야 한다. 등분할을 통해 전체-부분의 관계로서의 분수를 정의 할 수 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수에서 분자는 전체를 똑같이 나눈 단위 중의 묶음의 개수이고, 분모는 전체를 얼마의 단위로 나누었는지 정의한다.

3. PCK

교사가 학생을 지도함에 있어 필요한 지식에 대해서는 관점에 따라 다양할 수 있으나 Shulman(1986)은 3가지의 내용 지식(Content Knowledge)의 관점을 제시한다; 교과 내용 지식(Subject Matter Content Knowledge), 교수학적 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge), 교육과정 지식(Curricular Knowledge).

수학 교과에서의 교과 내용 지식(Subject Matter Content Knowledge)은 수

학 내용에 대한 지식으로 볼 수 있다. 수학 내용 지식이란 수학이란 교과가 본질적으로 가지고 있는 지식으로 수학적 개념, 연결성, 표현 등에 대한 다양한 수준과 형태의 지식을 의미한다(최승현, 2007). 대학 수준의 수학적 지식이 아니라 학교 교육과정에 대한 지식을 기반으로 개념에 대한 정의, 사례의 구분, 연결성 등을 포함한다. 황혜정(2010)은 학생들에게 가르쳐야 될 수학적 지식보다는 더 높은 단계의 수학적 지식을 지녀야 학생 수준에 알맞게 변형하여 지도할 수 있다고 한다.

> 교사의 수업 기법과는 무관하게, 교사는 학생들의 학습을 이끌어갈 수 있도록 충분한 교과 내용 전문성을 갖추고 있어야한다. … 수학 교사가 갖추어야 할 교과 내용에는 개념, 이해, 추론, 문제해결, 의사소통 등의 행동 영역적 측면과 수학의 내용 영역의 모든 측면들이 포함된다. 그러나 이러한 교과 내용 지식은 좋은 수업의 필요 요소이지만 이것만으로는 부족하며, 다른 지식들과 연계되어야 한다. (황혜정, 2010, p.50).

교수학적 내용지식(Pedagogical Content Knowledge)은 교과 내용 자체에 관한 지식을 넘어 가르치는데 필요한 교과 내용 지식의 차원으로 교사전문성을 수반하는 교사들만의 특별한 형태의 내용지식이다. PCK는 무엇이 특정 주제를 쉽게 또는 어렵게 만드는지에 대한 이해를 포함하는데 이는 다양한 나이와 배경을 지닌 학생들이 가장 많이 배우는 주제에 대한 이해를 가지고 오는 개념이나 선행개념을 아는 것이다. 또한, 그들의 선행개념이 오개념일 때, 교사들은 전략적인 지식이 필요할 것이다(Shulman, 1986). 이 때, PCK는 내용과 교수법의 특별한 혼합물(amalgam)로서 교사들만이 가진 특별한 형태의 전문적 이해이며, 내용학자와 교육학자를 가장 잘 구분시켜 주는 범주로서 정의되었다(Shulman, 1987, 재인용, 송근영, 2014, 18쪽).

> 송근영은 이러한 Shulman의 PCK 정의는 일반 교육학만을 강조하던 교사 지식의 개념에서 교과 내용을 감안한 교육학의 개념으로의 전환과 동시에 교사들만의 독특한 지식의 존재를 강조함으로써 교사의 전문성을 확인했다는 측면에서 의미있다고 말한다(2014, p.18).

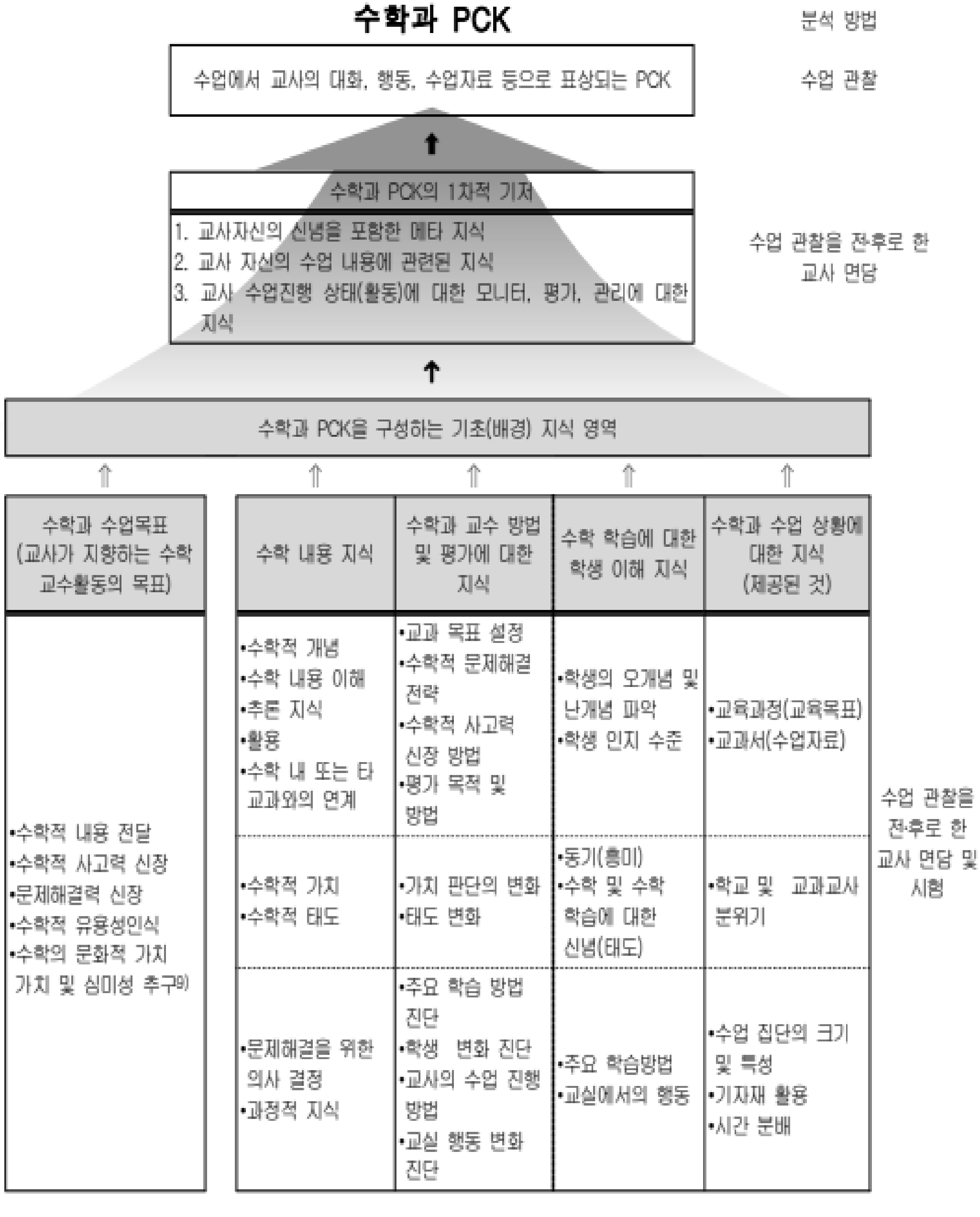
김현미·류희수(2012)는 수학 수업 전문성의 중심인 PCK를 다음과 같이 설명하

였다.

> 교사의 수학 수업 전문성의 중심은 수학 내용을 지도하기 위한 교과 내용 지식과 교과 내용 지식을 학생들에게 전달하기 위해 필요한 방법적 지식, 다양한 상황 속에서 효과적으로 전달하는 상황 지식 그리고 학생과 관련된 지식들이 종합적으로 결합되어 수업에 나타는 내용 교수 지식이라고 할 수 있다. PCK는 교과 내용 지식, 일반 교수방법적 지식 등의 여러 지식 영역들의 영향을 받아 재구성되며 수업 중에 나타나는 통합적이고 실천적 지식이다(김현미·류희수, 2012, p.198).

최승현(2007)은 수업 실행에서 수학과 내용 지식, 교수법 지식, 학생 이해 지식, 상황 지식 등의 부문별 지식이 결합되어 나타나는 교사의 종합적인 실천지인 내용 교수 지식에 대한 중요성을 강조하였다. 최승현(2007)은 유능한 교사는 교과내용을 학생들의 이해할 수 있는 형태로 변환시켜 수업을 진행하므로 이를 위해 구체적인 교과내용 맥락에 맞추어 교수 지식을 변경함으로써 고유의 PCK를 개발하게 된다고 말한다. 또한, PCK는 기술적 지식으로 간주되며, 교수활동과 관련하여 교사들의 축적된 지혜를 나타내는 통합된 지식으로 정의된다(최승현, 2007).

> PCK는 풍부한 교수법적 지식과 내용 지식의 결합이며, 이들 두 가지는 서로를 형성하고 상호작용하여 가르치는 활동이 조직되고 계획되고, 분석되고 제시되는 특정한 방법 덕분에 주어진 맥락에서 학생들이 특정한 내용을 더 잘 이해할 수 있도록 무엇이 어떻게 가르쳐질 것인지가 의도적으로 개발된다(Loughran et al., 2004, 재인용: 최승현, 2007, p.39). … 종합하면, PCK에는 교과 내용 지식, 교육학 지식, 학생 변인, 상황 변인 등 다양한 영역들이 통합적으로 영향을 미친다(임청환, 2003; Gess-Newsome, 1999; Loughran et al., 2004; Marks, 1990, 재인용: 최승현, 2007, p.39)고 정리할 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 수학과 내용 교수 지식(PCK)의 정의

주. 출처 최승현. (2007). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구. 연구보고 RRI 2007-3-2. 서울 : 한국교육과정평가원. (p.50)

교육과정 지식은 교육과정에 관한 지식으로, 교육과정은 특정 교과를 가르치기 위해 정해진 넓은 범위의 프로그램이다. 교육과정과 관련된 사용가능한 자료의 다양성, 특별한 상황에서 교육 자료 또는 교육과정의 사용을 위한 지시와 사용 금지 지시 등이 있다(Shulman, 1986).

송근영(2014)은 PCK의 하위요소에 대해서 연구자들 마다 조금씩 다르게 정의하고 있으며 명확히 합의된 것은 없다고 말한다. 이에 따라 본 연구에서는 많은 연구자들이 공통적으로 포함시키고 있는 PCK의 하위 요소인 교수 방법에 관한 지식과 학생 이해에 관한 지식으로 살펴보겠다. 또한, SMK는 수학 내용 지식으로 학교 교육과정에 대한 지식을 기반으로 개념에 대한 정의, 사례의 구분, 연결성 등을 포함하는 지식(최승현, 2007)으로 살펴보겠다.

4. 분수의 의미에 관한 선행논문

수학교육에서 분수에 관한 연구는 꾸준히 진행되어왔다. 분수에 관한 연구 중 분수의 의미에 관한 선행논문의 종류에는 크게 네 가지로 볼 수 있다. 교과서 분석, 초등교사 또는 예비 초등교사의 분수 지식 분석, 초등교사 또는 예비 초등교사의 분수 지도법을 통한 교수내용지식에 관한 연구, 분수의 의미 및 분수 개념에 관한 학생들의 이해 분석이 있다.

첫째, 정은실(2005)은 분수 개념의 의미를 분석해보고, 분수 개념의 생성 과정을 역사 발생적으로, 심리적으로 분석하여 교과서의 분수 개념 도입과 관련한 내용을 비판적으로 분석해보며 교육적 시사점에 대해 논의하였다(p. 123). 정은실(2005)은 학생들은 서로 다른 의미와 상황을 체험해보아야 하지만 분수 개념의 생성 과정과 관련이 깊은 양분수(측정으로서의 분수)는 실제로 교과서에서는 전혀 다루지 않다고 말한다(p. 131). 또한, 정은실(2009)은 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교 분석을 통해 분수 개념의 지도 방안을 탐색하였다(p.25). 분수 개념의 여러 가지 의미를 싱가포르와 비교 분석하였다. 이 연구에서는 싱가포르의 교과서와 달리 우리나라 교과서에서는 등분할 활동이 부족하며 직관적으로 등분할을 다뤘으며 이산량의 등분할을 다루는 시기의 차이가 크다고 말한다. 또한 몫분수를 다루는 소재가 자연스럽지 못하며 비율분수를 기계적인 표현으로

다룬다고 말하고 있다(p. 40). 강홍규(2013)는 분수의 다양한 의미를 개념(비율, 작용소, 나눗셈)과 모델(전체-부분, 측정, 분배)의 두 범주로 분류하여 이들이 수학 교과서에서 어떻게 나타나는지를 조사하였다. 교육과정 속 분수의 지도 순서를 살펴보며 측정모델은 다루고 있지 않고, 대체적으로 모델을 먼저 다루고 고학년에서 개념을 다룬다고 말한다(p. 442).

둘째, 이종욱(2005)은 현직 초등교사 12명의 분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용지식을 살펴보고 있다. 그의 연구에서 초등 교사들은 분수를 부분-전체의 의미로만 대부분 이해하고 있으며 연산자, 비, 측정의 의미로 이해하는 경우가 적었다. 또한, 분수를 넓이, 길이, 집합 모델로 표현할 수는 있으나 상대적으로 집합 모델로 표현하는 비율이 낮았다고 한다. 분수의 의미와 분수의 연산을 설명하는 양상을 보며 초등교사의 교과 지식의 수준이 교수법적 내용 지식에 영향을 주고 있으며 수학 교과에 대한 교과 지식이 교수법적 지식보다 더욱 필요한 지식이라 주장한다(p 82-83). 김유경·방정숙(2012)은 3명의 초임교사들의 수학 수업 속 교수학적 내용 지식을 수학내용지식, 학생이해지식, 교수법에 대한 지식 측면에서 상세히 분석하였다. 교사들의 PCK는 하위 영역 간에 서로 영향을 미치며 복합적으로 작용한다고 보았으며 각 교사에 따라 구현하려고 하는 수업의 모습이 다르며 수업에 나타난 PCK도 차이가 있었다고 하였다.

셋째, 김경은(2009)은 분수에 관한 예비 초등 교사의 교수학적 내용 지식을 학습자 이해와 교수 방법을 중심으로 분석하였다. 예비 초등교사들 역시 분수를 부분-전체의 의미로만 대부분 이해하고 있었다(p. 90). 분수의 의미 중 지각적 방해 요소가 있는 부분-전체의 의미를 잘못된 지도방법으로 제시하는 경우가 많았다(p. 94). 김현미·류희수(2012)는 분수와 소수 관련 초등 예비 교사들의 PCK 실태를 분석하였다. 예비 교사들은 분수나 소수의 의미를 다양하게 알지 못했고, 학생들에게 다양한 의미와 시각적 모델 및 교구를 제시하는 것에 어려움을 느낀다고 분석하며 예비 초등교사 스스로 단순한 계산 결과가 아닌, 개념과 원리를 알고 학생수준에 맞는 방법으로 지도할 수 있는 PCK 신장이 요구된다고 주장하였다(p. 217). 서관석·전경순(2000)은 예비 초등교사들의 분수로 나누기라는 주제에 대한 내용적 지식수준과 교수학적 지식수준을 분석하였다. 현재 초등학교 예비 교사들은 알고리즘을 기반으로 연산 활동에 대한 지식은 소

유하고 있으나 분수의 개념과 분수와 관련된 연산에 대한 근본적 이해는 부족하다고 말하였다.

넷째, 김유경(2012)은 3학년 학생들을 대상으로 연속량과 이산량 맥락에서 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해를 분석하였다. 이지영(2014)은 분수의 다양한 의미에서 초등학교 6학년 학생들이 각각 단위를 어떻게 이해하고 있는지를 연구하였다. 분수의 의미로는 전체-부분으로서의 분수, 몫으로서의 분수와 비율로서의 분수, 연산자로서의 분수, 측정으로서의 분수 순으로 정답률을 보였으며 각 각의 분수에서 단위를 어떻게 이해하고 있는지를 알아보았다. 교육과정 전반에 걸쳐 분수의 다양한 의미에서 단위를 전체와 구분하고, 단위를 학생 스스로 구성하는 활동을 통해 단위에 대해 유연하게 추론할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 주장한다(p. 99). 권성룡(2003)은 5-6학년을 대상으로 주어진 분수와 분수식으로 설명할 수 있는 상황을 설정하게 함으로써 학생의 분수 개념이미지를 조사하였다. 또한, 분수가 포함된 문제해결과 분수와 분수식으로 문장제 문제를 만들어 보게 함으로써 학생의 분수개념 이용을 살펴보았다. 분수에 대한 학생들의 개념이미지는 부분-전체에 제한되어 있었으며 이로 인해 다른 하위개념에 대한 이해가 부족하다고 말하며 학생의 분수이해를 위해 다양한 하위개념에 대한 균형 있는 이해를 돕는 학습활동이 필요하다고 주장하였다 (259쪽). 홍은숙·강완(2008)은 분수의 개념에 대해 아직 배우지 않은 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식을 조사하고 분석하여 비형식적 지식을 분수 개념 지도에 어떻게 활용할 수 있는지에 대해 살펴보았다. 노한종(2014)은 4학년 학생들의 동치분수에 관한 이해를 살펴보고 이를 바탕으로 이분모 분수 연산에 어떻게 적용하는지를 살펴보았다. 4학년 학생들은 동치분수에 관해 어느 정도 이해를 하고 있으며 동치분수를 이해하고 있는 학생들이 이분모 분수의 연산을 대체적으로 해결할 수 있고, 동치분수에 대한 이해가 제대로 되지 않을 때 이분모 분수의 연산에서 다양한 오개념이 발생할 수 있음을 알 수 있었다고 말하였다. 이지영(2010)은 초기 대수적 관점에 따라 6학년 학생들의 분수 연산 감각을 분석하였다. 학생들은 분수 연산에 대해 개념적으로 이해하나 분수 연산의 알고리듬에 대해서 비형식적으로 이해하는 모습을 보이므로 학생에게 분수 연산에서 기본이 되는 연산의 의미(예, 분수의 곱셈의 경우-묶음)나 분수 연산의 알고리듬에서 핵심이 되는

연산의 의미(예, 분수의 곱셈인 경우–넓이)를 중심으로 다양한 의미의 문장제에 대한 폭넓은 경험을 제공해야한다고 말하였다.

지금까지의 연구들이 분수의 의미에 대한 교육과정의 한계점, 초등교사와 예비교사의 분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용 지식, 학생의 분수의 의미에 대한 이해에 대한 중요한 정보를 제공하였으나 이들 연구는 몇 가지 점에서 한계를 가진다.

첫째, 대부분의 연구는 현직교사와 예비교사의 교과지식의 실태를 분석하여 교사교육에 시사점을 주고 있지만 지도서와 교사의 지식과의 관계를 살펴보고 있지 않았다. 대한민국의 교육을 받은 많은 교사들의 분수에 관한 수학적 지식 자체도 중요하나 교육대학교 4년과 현장에서 지도서를 통한 수학적 지식과 교수내용지식은 교사의 분수에 대한 수학적 지식과 교수 내용 지식에 영향을 주었을 것이라 생각한다. 현직 초등 교사들이 분수 수업을 위한 수학적 지식과 교수 내용 지식을 지도서를 통해 얻는다는 사실을 인정한다면 지도서와 교사의 지식과의 관계와 관련한 연구가 이루어져야 할 것이다.

둘째, 현직교사를 대상으로 교사의 지식 실태를 분석한 연구가 부족하다. 대부분의 교사 대상의 연구는 예비 초등 교사였으며 이종욱(2005)의 연구는 현직교사를 대상으로 하였으나 대학원생 12명 소규모로 연구하였다. 김유경·방정숙(2012)은 3명의 초임교사들의 수학 수업 속 교수학적 내용 지식을 수학내용지식, 학생이해지식, 교수법에 대한 지식 측면에서 상세히 분석하였다. 교사교육이 성공적으로 이루어지기 위해서는 현직교사의 지식 실태를 객관적으로 분석한 연구가 필요하다고 생각한다.

셋째, 분수에 관한 연구 중 분수의 의미에 관한 연구가 다른 연구에 비해 현저히 적다. 학생들이 어려워하는 개념 중의 하나인 만큼 학생의 오개념, 분수의 연산, 분수 지도법 등과 관련된 연구는 다양하다. 그러나 이들의 앞서 가장 중요한 수학 교과 지식은 분수의 개념일 것이다. 분수의 연산에 앞서 분수의 의미를 정확하게 인지했을 때 다양한 실생활 속의 상황을 분수로 표현하고 적용할 수 있다는 사실을 인정한다면 분수의 의미에 관한 현 상황에 대한 정확한 분석이 필요할 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 목적은 분수의 5가지 의미에 대한 현 초등학교 교사들의 전반적인 이해를 파악하는 것이다. 현 초등학교 교사들이 어떠한 분수의 의미를 갖고있는지에 대한 수학적 지식과 교수학적 내용 지식을 조사하기 위해 2020년 제주에 위치한 초등학교 교사 100명을 무작위로 대상을 삼았다.

2. 연구 문제

본 연구는 교과서 속 분수의 의미와 초등학교 교사들이 가지고 있는 분수의 의미와의 관계를 고찰하기 위해 다음과 같은 연구문제를 제시하였다.

① 초등학교 교과서 속 분수의 의미는 어떻게 다뤄지고 있는가?
② 분수의 의미에 대한 초등학교 교사들의 교과지식(SMK와 PCK)은 어떠한가?

초등학교 교과서 속 분수의 의미가 분수 영역 속에서 어떻게 구현되고 있는지를 살펴보고자 각 학년 분수 영역과 관련된 단원들을 차시별로 분석한다. 각 차시 속에 분수의 의미를 분석하고, 각 차시의 학습 목표와 관련한 분수와 이를 설명하는 전개 방향 속의 분수를 살펴본다.

교사들이 분수 문제 속의 분수의 다양한 의미를 파악하고 있는지, 이를 학생들에게 어떻게 지도하고 있는지 분석하기 위한 5가지의 분수의 의미가 내재된 설문지를 만들어 다섯 분의 선생님들께 설문지 사전검사를 한 후 다섯 분의 선생님들의 피드백을 참고하여 연구자는 다시 설문지를 수정•보완하였다. 검사항목은 문제마다 다양한 분수의 의미를 찾는 방향이 아닌 분수의 의미를 제대로 갖지 않았을 때 생길 수 있는 학생들의 오개념, 각 분수의 의미를 이해함에 있

어 중요한 부분 등으로 문제를 수정하였다. 수정 후 질문내용과 평가내용은 다음과 같다. 초등교사의 수학 내용 지식과 다양한 교수학습 방법, 학생에 대한 이해, 분수의 의미 지도에 대한 교사들의 생각 등을 알아보기 위하여 모두 주관식으로 제작되었다.

초등교사의 분수의 의미에 대한 교과지식을 알기 위해 다음과 같이 문항을 설정하였다. 1·2·8번 문항은 교사의 SMK를 파악하기 위한 문항이다. 1번 문항은 교사들이 가지고 있는 분수의 의미에 관한 지식을 파악하고자 하는 문항이다. 2번 문항은 전체-부분의 관계로서의 분수에서 중요한 전체-단위 설정을 초등학교 교사들이 어떻게 하고 있는지 살펴보며 교사들의 유연한 분수감각을 살펴보고자 한다. 8번 문항은 주어진 막대를 이용하여 새로운 길이 막대를 구할 때 교사들의 문제 해결 방법을 분석하여 교사들의 유연한 분수감각을 살펴보고자 한다. 3·4·5·6번 문항을 통해 각 각의 분수의 의미를 지닌 문제를 교사들은 어떻게 학생들에게 지도하는지 살펴보며 교사들의 PCK를 분석하고자 한다. 7·9·10번 문항은 분수의 의미 지도 순서, 분수의 의미 지도의 필요성과 어려움을 교사들의 입장에서 직접 듣기 위해 문항을 설정하였다.

〈표 Ⅲ-1〉 문항별 질문내용

문항번호	질문내용
1번	분수의 여러 가지 의미 (수학 내용 지식)
2번	전체-부분의 관계로서의 분수 - 분수감각: 단위화와 등분할 (수학 내용 지식)
3번	측정으로서의 분수 - 1m(기준 단위)를 만들어 단위 등분할 (교수 방법에 관한 지식)
4번	몫으로서의 분수 - 학생의 오개념과 관련한 몫의 의미 지도방법 (학생 이해에 관한 지식)
5번	연산자로서의 분수 - 연산자로서의 분수의 의미와 시각적 모델 (교수 방법에 관한 지식)
6번	비율로서의 분수 - 학생의 오개념과 관련한 지도방법 (학생 이해에 관한 지식)
7번	분수의 의미 지도 순서와 이유
8번	분수 감각 - 단위 (수학 내용 지식)
9번	다양한 의미의 분수 지도의 필요성
10번	다양한 의미의 분수 지도의 어려움

<표 Ⅲ-2> 문항별 평가항목

문항번호	평가항목
1번	5가지의 의미를 문장 또는 그림으로 표현할 수 있는가?
2번	분수 감각: 단위의 유연화 - 단위의 개수와 단위의 종류에 따른 분류
3번	1m 기준 단위를 설정하는가?
4번	5÷2의 몫의 결과인 분수를 몫 자체로 인지하지 않고 몫과 나머지로 구분시킬 때의 지도방법을 바르게 설명하는가? - 나눗셈의 결과인 몫의 의미와 기준을 이해시킬 수 있는가? - 포함제를 이용하여 설명하는가?
5번	정확한 연산자로서의 분수 설명방법인가?
6번	비율로서의 분수에서 중요한 기준량에 관한 설명이 있는가? 이는 타수가 기준량이 아닌 숫자 자체가 기준량으로서 분수의 덧셈이 되지 않는데 되지 않는 이유를 설명하는가?
7번	분수의 의미 지도 순서
8번	분수 감각: 분할-반복의 방법/ 통분의 방법
9번	다양한 의미의 분수 지도의 필요성
10번	다양한 의미의 분수 지도의 어려움

3. 연구 방법

가. 교과서 분석

교과서 분석을 통해 '분수의 계열'을 살펴보며 '분수의 의미'와 관련된 교과서 진행방향을 살펴보고자 한다. 연구문제를 연구하기 위해 분수 단원을 분수의 의미와 관련하여 분석함으로써 교과서와 지도서 속 분수의 의미를 살펴보고, 분수의 의미가 어떻게 구현되고 있는지를 분석한다. 이를 통해, 현 교육과정의 분수 의미 지도 순서와 교사들이 생각하는 분수 의미 지도 순서를 비교하고자 한다. 또한, 교사의 교수 내용 지식에 큰 영향을 주는 수업자료인 지도서 속 분수의 의미 지도와 교사들의 분수의 의미에 관한 수학적 지식과 교수학적 내용 지식과 함께 살펴보기 위해 교과서를 분석하고자 한다.

나. 설문지 분석

초등교사의 PCK 중 분수의 의미의 수학적 내용 지식과 교수 내용 지식에 대한 전반적인 실태를 분석하기 위해 조사 연구 방법을 실시하였다. 분수의 다양한 의미와 관련하여 교과서 속 문제에서 분수의 다양한 의미를 찾도록 하고자 하였으나 교사들은 대개 학생들의 이해를 위한 가장 효율적인 지도방법을 제시하는 경향이 있으므로 5가지 분수의 중점 내용과 학생들의 오개념을 바탕으로 교사의 분수의 의미에 대한 이해를 살펴볼 수 있는 교과서 속 문항들을 선정하고 연구자가 자체적으로 문항을 만들었다. 설문조사를 통해 분수의 5가지 의미를 교사들이 얼마나 잘 이해하고 있으며 교사들의 분수의 의미에 관한 수학적 지식과 교수 내용 지식을 분석하고자 한다.

Ⅳ. 연구의 실제

1. 교과서 분석

가. 3학년 1학기

분수 개념의 발생과 분수의 5가지 의미, 동분모분수 간의 크기 비교와 분수 지도 모델을 설명하고 있다. 분수는 측정의 상황에서 처음 발생하였으나, 3학년 1학기 교과서에서는 분수 도입을 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 측면에서 제시하고 있다.

1. 분수

가. 분수 개념의 발생

분수의 발생은 기원전 2000년경까지 거슬러 올라간다. 분수의 어원은 fractus로 쪼갠다는 의미인데 인류가 같이 모여 살면서 공동으로 얻은 소득을 똑같이 분할하는 과정에서 발생한 것으로 보인다. 실제로 『린드 파피루스』에서 "7개의 빵을 8사람에게 나누어 줄 때 한 사람이 받는 몫은 얼마인가?"와 같은 문제를 해결할 때 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$과 같은 단위분수들의 합으로 나타낸 분수 표현을 썼다는 것을 알 수 있다. 한편 분수는 측정의 상황에서 발생한 것으로도 생각되는데 어떤 단위로 크기를 재어 측정할 때 정확하게 단위의 몇 배로 측정할 수 없는 길이는 단위를 똑같이 나눈 부분을 단위로 측정하여 측정 결과를 더 자세하게 나타내었다. 이렇게 발생된 분수를 상인이나 무역업자들은 자유롭게 사용하였으나 그리스의 수학자들은 1이라는 단위는 더 이상 쪼갤 수 없는 신성한 것으로 생각해서 분수를 수나 양 사이의 비로만 생각하였다.

[그림 Ⅳ-1] 분수 개념의 발생

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (293쪽) 교육과학기술부. 2019.

분수의 5가지 의미를 분수의 도입과 함께 짧게 기술하고 있다.

|측정의 의미|

양의 측정 과정에서 나타나는 자투리를 나타내는 것으로 측정하려는 양이 주어진 단위의 정확히 몇 배가 아닐 때 주어진 단위를 똑같이 분할하여 측정 결과를 자세히 나타내는 것이 이에 해당된다.

|몫의 의미|

자연수를 자연수로 나누었을 때의 몫을 뜻하는 것으로 빵 3개를 8명이 나누어 먹을 때 한 사람의 몫을 나타내는 $\frac{3}{8}$이 이에 해당된다.

|비의 의미|

두 양의 상대적인 크기인 비를 나타내는 것으로 남학생 10명, 여학생 20명으로 이루어진 학급에서 남학생과 여학생을 곱셈적으로 비교하여 여학생에 대한 남학생의 비율을 $\frac{10}{20}$, 즉 $\frac{1}{2}$로 나타내거나 전체 학생 수에 대한 여학생의 비율을 $\frac{20}{30}$, 즉 $\frac{2}{3}$로 나타내는 것이 이에 해당한다.

이 단원에서는 이러한 분수의 의미 중 전체-부분의 의미를 중심으로 다룬다.

|측정의 의미|

양의 측정 과정에서 나타나는 자투리를 나타내는 것으로 측정하려는 양이 주어진 단위의 정확히 몇 배가 아닐 때 주어진 단위를 똑같이 분할하여 측정 결과를 자세히 나타내는 것이 이에 해당된다.

|몫의 의미|

자연수를 자연수로 나누었을 때의 몫을 뜻하는 것으로 빵 3개를 8명이 나누어 먹을 때 한 사람의 몫을 나타내는 $\frac{3}{8}$이 이에 해당된다.

|비의 의미|

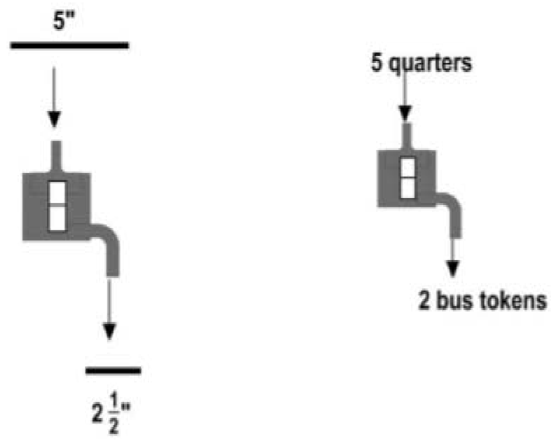
두 양의 상대적인 크기인 비를 나타내는 것으로 남학생 10명, 여학생 20명으로 이루어진 학급에서 남학생과 여학생을 곱셈적으로 비교하여 여학생에 대한 남학생의 비율을 $\frac{10}{20}$, 즉 $\frac{1}{2}$로 나타내거나 전체 학생 수에 대한 여학생의 비율을 $\frac{20}{30}$, 즉 $\frac{2}{3}$로 나타내는 것이 이에 해당한다.

이 단원에서는 이러한 분수의 의미 중 전체-부분의 의미를 중심으로 다룬다.

[그림 Ⅳ−2] 분수의 의미

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (293-294쪽) 교육과학기술부. 2019.

지도서에서는 연산자의 의미로서의 분수를 $\frac{a}{b}$만큼 확대하거나 축소하는 것으로만 표현한다. 연산자로서의 분수는 input-output 함수로서 다음 기계처럼 표현할 수 있다. 분수 자체가 연산자로서 input이 함수 기계에 들어가 output으로 나오게 될 때 연산자가 분수의 수임을 설명하고 있지 않다.

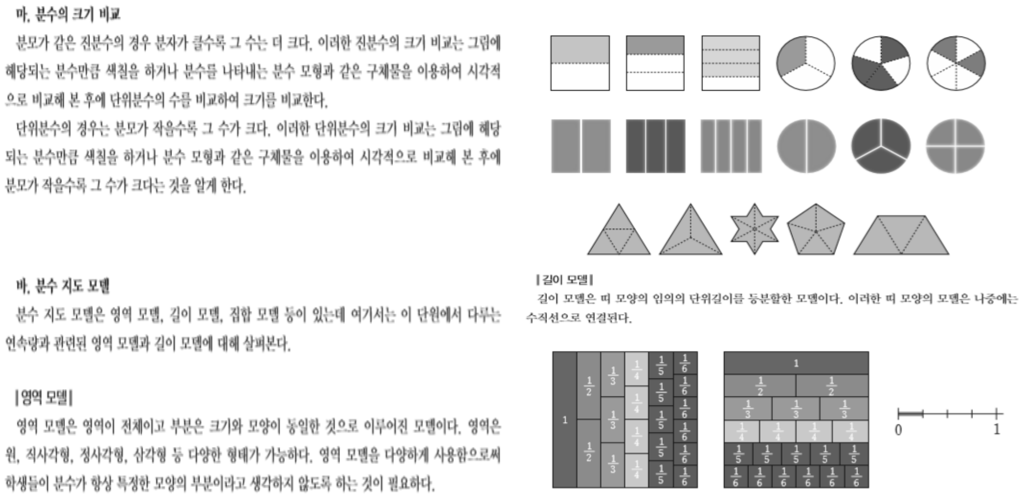


[그림 Ⅳ−3] 연산자로서의 분수 표현

주. 출처 **Teaching Fractions And Ratios for Understanding, Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers** (p. 154) Susan J. Lamon, 저. 2006. Mahwah: New Jersey.

동분모 분수의 크기 비교 시 단위분수의 수를 비교하여 크기를 비교한다고 설명하며 측정으로서의 분수로 설명하나 따로 측정으로서의 분수의 관점임을 나타내고 있지 않다.

분수지도 모델에는 영역 모델, 길이 모델, 집합 모델 등이 있다.



마. 분수의 크기 비교

분모가 같은 진분수의 경우 분자가 클수록 그 수는 더 크다. 이러한 진분수의 크기 비교는 그림에 해당되는 분수만큼 색칠을 하거나 분수를 나타내는 분수 모형과 같은 구체물을 이용하여 시각적으로 비교해 본 후에 단위분수의 수를 비교하여 크기를 비교한다.

단위분수의 경우는 분모가 작을수록 그 수가 크다. 이러한 단위분수의 크기 비교는 그림에 해당되는 분수만큼 색칠을 하거나 분수 모형과 같은 구체물을 이용하여 시각적으로 비교해 본 후에 분모가 작을수록 그 수가 크다는 것을 알게 한다.

바. 분수 지도 모델

분수 지도 모델은 영역 모델, 길이 모델, 집합 모델 등이 있는데 여기서는 이 단원에서 다루는 연속량과 관련된 영역 모델과 길이 모델에 대해 살펴본다.

| 영역 모델 |

영역 모델은 영역이 전체이고 부분은 크기와 모양이 동일한 것으로 이루어진 모델이다. 영역은 원, 직사각형, 정사각형, 삼각형 등 다양한 형태가 가능하다. 영역 모델을 다양하게 사용함으로써 학생들이 분수가 항상 특정한 모양의 부분이라고 생각하지 않도록 하는 것이 필요하다.

| 길이 모델 |

길이 모델은 띠 모양의 임의의 단위길이를 등분할한 모델이다. 이러한 띠 모양의 모델은 나중에는 수직선으로 연결된다.

[그림 Ⅳ-4] 분수 지도 모델

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (294-295쪽) 교육과학기술부. 2019.

1) 각 차시 속 분수

가) 1차시: 단원 도입

1보다 작은 수를 찾으며 분수의 필요성을 알아보는 차시이다. 나눌 수 있는 구체물을 보여주며 이를 나누는 활동을 통해 나누어진 수를 어떻게 표현할 수 있을지 살펴보고자 한다.

(1) 열쇠고리 만들기 체험: “난 열쇠고리 전체를 색칠하지 않고 반만 색칠했어.”

이는 전체를 반으로 나눈 것 중의 반이라는 의미로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.

(2) 종이 띠 만들기 체험: 똑같은 길이의 종이 띠를 안내해 주는 대로 잘라서

꽃 모양 만들기.

이는 수직선, 길이의 관점에서 주어진 영역에서 단위로 자르고 기준점으로부터 얼마만큼 더 긴지를 살펴보고 있으므로 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.

(3) 건강 검진 센터: 눈금과 눈금 사이에 있는 지혜의 키 재기.

이는 눈금과 눈금 사이에 있는 칸들 중의 몇 칸을 구성했는지 파악하므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.

나) 2차시: 똑같이 나누어 볼까요

※ 학습목표: 전체를 똑같이 나눌 수 있다.

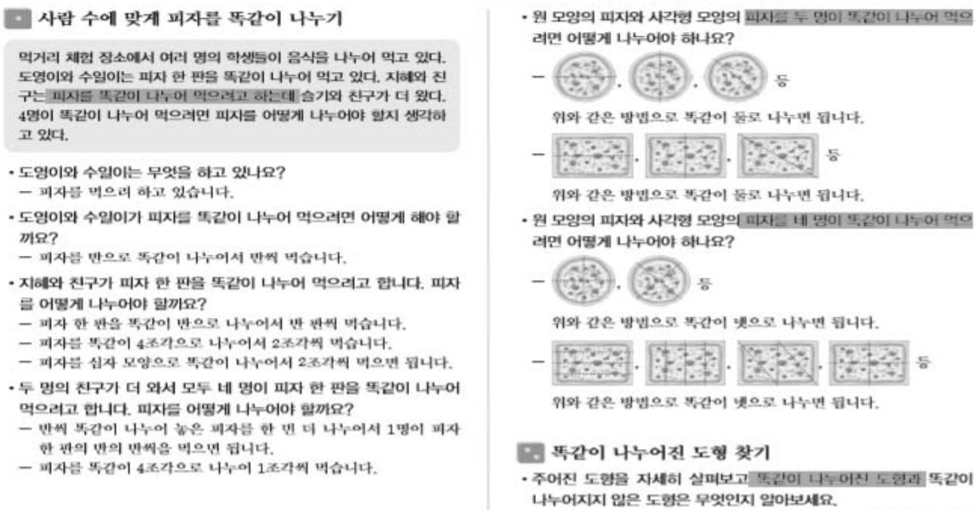
'[4수01-01] 양의 등분할을 통하여 분수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다'는 성취기준을 달성하기 위해 피자, 도형 등 전체를 똑같이 나누어 보는 활동을 통해 조각의 크기와 모양이 모두 같을 때 똑같이 나누어졌다는 **등분할**의 의미를 알고자 한다. 등분할의 의미를 정확히 이해함으로써 후에 **전체-부분의 관계로서의 분수**와 **몫으로서의 분수**의 기본을 다질 수 있다.

(1) 활동 1: 사람 수에 맞게 피자를 똑같이 나누기.

이는 사람 수에 맞게 똑같이 나누어 후에 각 사람마다 가질 수 있는 피자의 양을 분수로 표현할 수 있으므로 **몫으로서의 분수**의 개념을 함축하고 있다. 피자 한 판을 사람 수에 맞게 똑같이 나누는 상황을 통해 나온 결과값은 **몫으로서의 분수**를 의미한다. 하지만 이를 분수로 표현하는 것이 아닌 똑같이 나누는 상황만을 보여주므로 몫으로서의 분수를 의미하기보다는 **등분할**의 개념을 익히고자 한다고 볼 수 있다.

(2) 활동 2: 똑같이 나누어진 도형 찾기.

등분할이 되려면 나누어진 조각의 크기가 모두 같아야만 한다는 것을 보여주는 활동이다. 영역을 합동인 부분으로 등분할하는 경험을 통하여 분수 도입을 위한 기반을 다진다.



사람 수에 맞게 피자를 똑같이 나누기

먹거리 체험 장소에서 여러 명의 학생들이 음식을 나누어 먹고 있다. 도영이와 수일이는 피자 한 판을 똑같이 나누어 먹고 있다. 지혜와 친구는 피자를 똑같이 나누어 먹으려고 하는데 슬기와 친구가 더 왔다. 4명이 똑같이 나누어 먹으려면 피자를 어떻게 나누어야 할지 생각하고 있다.

- 도영이와 수일이는 무엇을 하고 있나요?
  - 피자를 먹으려 하고 있습니다.
- 도영이와 수일이가 피자를 똑같이 나누어 먹으려면 어떻게 해야 할까요?
  - 피자를 반으로 똑같이 나누어서 반씩 먹습니다.
- 지혜와 친구가 피자 한 판을 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 피자를 어떻게 나누어야 할까요?
  - 피자 한 판을 똑같이 반으로 나누어서 반 판씩 먹습니다.
  - 피자를 똑같이 4조각으로 나누어서 2조각씩 먹습니다.
  - 피자를 십자 모양으로 똑같이 나누어서 2조각씩 먹으면 됩니다.
- 두 명의 친구가 더 와서 모두 네 명이 피자 한 판을 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 피자를 어떻게 나누어야 할까요?
  - 반씩 똑같이 나누어 놓은 피자를 한 번 더 나누어서 1명이 피자 한 판의 반의 반씩을 먹으면 됩니다.
  - 피자를 똑같이 4조각으로 나누어 1조각씩 먹습니다.
- 원 모양의 피자와 사각형 모양의 피자를 두 명이 똑같이 나누어 먹으려면 어떻게 나누어야 하나요?
  - 등

    위와 같은 방법으로 똑같이 둘로 나누면 됩니다.
  - 등

    위와 같은 방법으로 똑같이 둘로 나누면 됩니다.
- 원 모양의 피자와 사각형 모양의 피자를 네 명이 똑같이 나누어 먹으려면 어떻게 나누어야 하나요?
  - 등

    위와 같은 방법으로 똑같이 넷으로 나누면 됩니다.
  - 등

    위와 같은 방법으로 똑같이 넷으로 나누면 됩니다.

똑같이 나누어진 도형 찾기

- 주어진 도형을 자세히 살펴보고 똑같이 나누어진 도형과 똑같이 나누어지지 않은 도형은 무엇인지 알아보세요.

[그림 Ⅳ-5] 등분할

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (300쪽) 교육과학기술부. 2019.

다) 3차시: 분수를 알아볼까요

※ 학습목표:

- 전체와 부분의 의미와 관계를 이해할 수 있다.

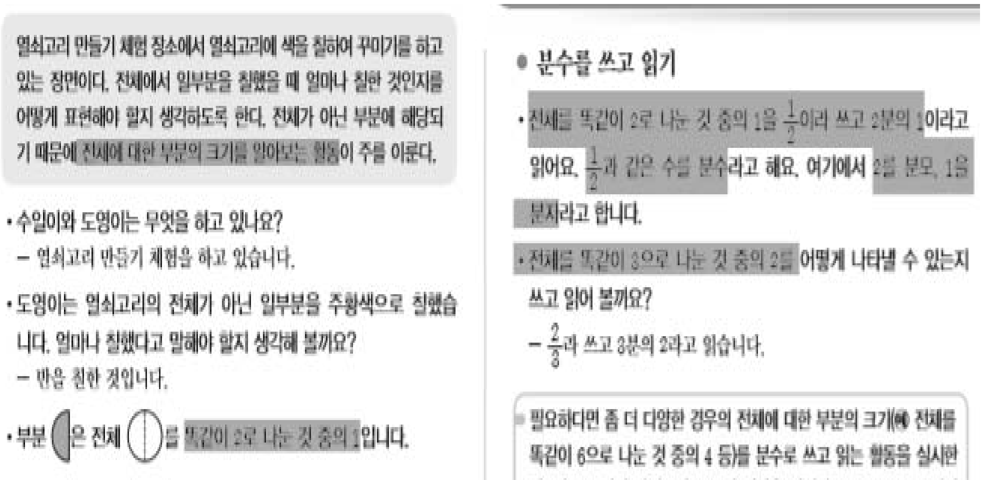
- 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 개념을 이해할 수 있다.

- 분수를 바르게 쓰고 읽을 수 있다.

1차시에 나왔던 열쇠고리 체험 부스 모습의 연장선이다. 열쇠고리의 색칠한 부분이 전체의 얼마인지 알아보는 활동을 통해 분수를 처음 도입하고 있다. '[4수01-01] 양의 등분할을 통하여 분수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다'는 성취기준을 달성하기 위해 1차시에서 배운 등분할의 상태를 전체와 부분의 의미와 관계로 나타내며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수를 도입한다.

(1) 활동 1: 열쇠고리의 색칠한 부분과 전체 알아보기.

부분과 전체를 알아보고, 색칠한 부분은 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 몇인지를 확인하며 전체에 대한 부분의 크기를 알아보고 있다. 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 의미를 이해하며 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.


열쇠고리 만들기 체험 장소에서 열쇠고리에 색을 칠하여 꾸미기를 하고 있는 장면이다. 전체에서 일부분을 칠했을 때 얼마나 칠한 것인지를 어떻게 표현해야 할지 생각하도록 한다. 전체가 아닌 부분에 해당되기 때문에 전체에 대한 부분의 크기를 알아보는 활동이 주를 이룬다.

• 수일이와 도영이는 무엇을 하고 있나요?
– 열쇠고리 만들기 체험을 하고 있습니다.

• 도영이는 열쇠고리의 전체가 아닌 일부분을 주황색으로 칠했습니다. 얼마나 칠했다고 말해야 할지 생각해 볼까요?
– 반을 칠한 것입니다.

• 부분 은 전체 를 똑같이 2로 나눈 것 중의 1입니다.

● 분수를 쓰고 읽기

• 전체를 똑같이 2로 나눈 것 중의 1을 $\frac{1}{2}$이라 쓰고 2분의 1이라고 읽어요. $\frac{1}{2}$과 같은 수를 분수라고 해요. 여기에서 2를 분모, 1을 분자라고 합니다.

• 전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중의 2를 어떻게 나타낼 수 있는지 쓰고 읽어 볼까요?
– $\frac{2}{3}$라 쓰고 3분의 2라고 읽습니다.

필요하다면 좀 더 다양한 경우의 전체에 대한 부분의 크기(예 전체를 똑같이 6으로 나눈 것 중의 4 등)를 분수로 쓰고 읽는 활동을 실시한

[그림 Ⅳ-6] 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 의미 이해하기

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (302쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 분수를 쓰고 읽기.

전체에 대한 부분의 크기를 분수로 나타내며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.

라) 4차시: 분수를 알아볼까요

※ 학습목표:

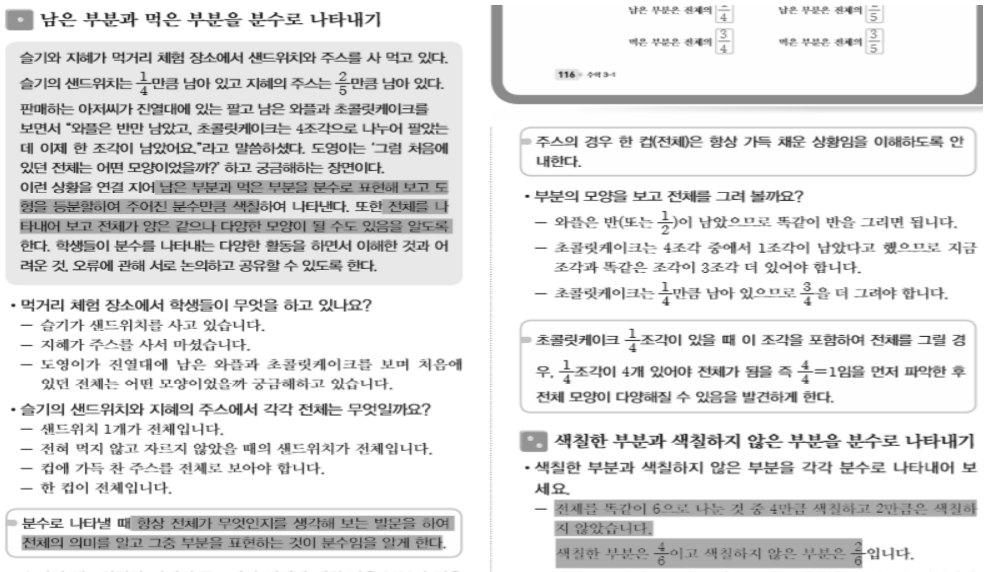
- 그림을 보고 알맞은 분수로 나타내고, 주어진 분수만큼 도형에 나타낼 수 있다.

- 부분을 보고 전체를 알 수 있다.

3차시의 연장선이다. 남은 부분과 먹은 부분을 분수로 나타냄으로써, 부분을 통해 전체를 알아보고 각 각의 부분이 전체의 부분인 것을 확인하고 분수로 표현한다. 지도서에서는 '분수로 나타낼 때 항상 전체가 무엇인지를 생각해보는 발문을 하여 전체의 의미를 알고 그중 부분을 표현하는 것이 분수임을 알게 한다'라고 말하고 있다. 이는 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 몇을 분수로 표현하는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수를 바라보고 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수에서 학생들이 오개념을 갖지 않도록 다양한 활동을 하고 있다.

(1) 활동 1: 남은 부분과 먹은 부분을 분수로 나타내기.

와플과 초콜릿케이크의 남은 부분을 통해 전체가 얼마인지 유추하고, 전체에 대한 남은 부분을 전체의 얼마인지 분수로 나타냄으로써 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수의 개념을 형성하고 있다. 분수로 나타낼 때 항상 전체가 무엇인지를 생각해보는 발문과 부분을 보고 전체를 그려보는 활동을 통해 전체의 의미를 알고 그 중 부분을 표현하는 것이 분수임을 학생 스스로 알게 한다. 따라서, 활동 1은 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 개념을 살펴볼 수 있다.



남은 부분과 먹은 부분을 분수로 나타내기

슬기와 지혜가 먹거리 체험 장소에서 샌드위치와 주스를 사 먹고 있다. 슬기의 샌드위치는 $\frac{1}{4}$만큼 남아 있고 지혜의 주스는 $\frac{2}{5}$만큼 남아 있다. 판매하는 아저씨가 진열대에 있는 팔고 남은 와플과 초콜릿케이크를 보면서 "와플은 반만 남았고, 초콜릿케이크는 4조각으로 나누어 팔았는데 이제 한 조각이 남았어요."라고 말씀하셨다. 도영이는 '그럼 처음에 있던 전체는 어떤 모양이었을까?' 하고 궁금해하는 장면이다.
이런 상황을 연결 지어 남은 부분과 먹은 부분을 분수로 표현해 보고 도형을 등분할하여 주어진 분수만큼 색칠하여 나타낸다. 또한 전체를 나타내어 보고 전체가 양은 같으나 다양한 모양이 될 수도 있음을 알도록 한다. 학생들이 분수를 나타내는 다양한 활동을 하면서 이해한 것과 어려운 것, 오류에 관해 서로 논의하고 공유할 수 있도록 한다.

- 먹거리 체험 장소에서 학생들이 무엇을 하고 있나요?
  - 슬기가 샌드위치를 사고 있습니다.
  - 지혜가 주스를 사서 마셨습니다.
  - 도영이가 진열대에 남은 와플과 초콜릿케이크를 보며 처음에 있던 전체는 어떤 모양이었을까 궁금해하고 있습니다.
- 슬기의 샌드위치와 지혜의 주스에서 각각 전체는 무엇일까요?
  - 샌드위치 1개가 전체입니다.
  - 전혀 먹지 않고 자르지 않았을 때의 샌드위치가 전체입니다.
  - 컵에 가득 찬 주스를 전체로 보아야 합니다.
  - 한 컵이 전체입니다.

분수로 나타낼 때 항상 전체가 무엇인지를 생각해 보는 발문을 하여 전체의 의미를 알고 그중 부분을 표현하는 것이 분수임을 알게 한다.

남은 부분은 전체의 $\frac{\square}{4}$ 남은 부분은 전체의 $\frac{\square}{5}$
먹은 부분은 전체의 $\frac{3}{4}$ 먹은 부분은 전체의 $\frac{3}{5}$

116 수학 3-1

주스의 경우 한 컵(전체)은 항상 가득 채운 상황임을 이해하도록 안내한다.

- 부분의 모양을 보고 전체를 그려 볼까요?
  - 와플은 반(또는 $\frac{1}{2}$)이 남았으므로 똑같이 반을 그리면 됩니다.
  - 초콜릿케이크는 4조각 중에서 1조각이 남았다고 했으므로 지금 조각과 똑같은 조각이 3조각 더 있어야 합니다.
  - 초콜릿케이크는 $\frac{1}{4}$만큼 남아 있으므로 $\frac{3}{4}$을 더 그려야 합니다.

초콜릿케이크 $\frac{1}{4}$조각이 있을 때 이 조각을 포함하여 전체를 그릴 경우, $\frac{1}{4}$조각이 4개 있어야 전체가 됨을 즉 $\frac{4}{4}=1$임을 먼저 파악한 후 전체 모양이 다양해질 수 있음을 발견하게 한다.

색칠한 부분과 색칠하지 않은 부분을 분수로 나타내기

- 색칠한 부분과 색칠하지 않은 부분을 각각 분수로 나타내어 보세요.
  - 전체를 똑같이 6으로 나눈 것 중 4만큼 색칠하고 2만큼은 색칠하지 않았습니다.
    색칠한 부분은 $\frac{4}{6}$이고 색칠하지 않은 부분은 $\frac{2}{6}$입니다.

[그림 Ⅳ-7] 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 나타내기

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (304쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 색칠한 부분과 색칠하지 않은 부분을 분수로 나타내기

다양한 도형을 전체로 제시함으로써 분수에서 전체는 하나의 모양과 크기일 것이라는 학생들의 오개념을 방지한다. 이 때, 전체를 하나의 도형이 아닌 색칠하지 않은 부분 혹은 색칠한 부분으로 따로 생각하는 경우가 없도록 학생 스스로 전체와 부분들이 각각 무엇인지 확인함으로서 **전체-부분의 관계로서의 분수**를 정립할 수 있다.

(3) 활동 3: 주어진 분수만큼 색칠하여 나타내기.

주어진 분수를 보고 주어진 도형에 색칠하는 활동이다. 분수에서 분모는 전체, 분자는 부분이라는 의미를 인지하고, 주어진 도형을 분모인 전체로 나눈 후, 그 중 분자인 부분을 색칠해보는 활동이라 할 수 있다.

마) 5차시: 분모가 같은 분수의 크기를 비교해 볼까요

※ 학습목표: 분모가 같은 분수의 크기를 비교할 수 있다.

1차시에 나왔던 종이 띠를 이용한 꽃 만들기 체험 부스의 연장선이다. '[4수01-12] 분모가 같은 분수끼리, 단위분수끼리 크기를 비교할 수 있다.'는 성취기준을 달성하기 위해 꽃잎 한 장과 잎 한 장의 종이 띠의 길이를 비교함으로써 분수를 비교하고 있다. 분수를 비교할 때 종이 띠라는 연속적인 수직선을 이용함으로써 길이를 표현하는 종이 띠에서 시작점을 같게 한 후 시작점으로부터의 길이를 살펴보고 있으므로 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 그러나 각 각의 길이를 표현함에 있어 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 몇으로 분수를 표현하고 있으므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 정의를 하고 크기를 비교함에 있어서는 단위분수가 몇 개임을 확인하는 **측정으로서의 분수**의 관점에서 살펴본 것이라 볼 수 있다.

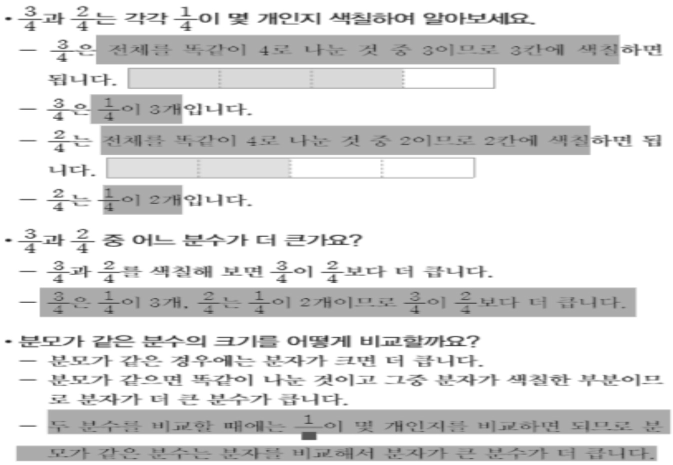
(1) 활동 1: 꽃잎과 잎을 만들 때 필요한 종이 띠 길이 비교하기.

꽃잎 한 장은 종이 띠 한 장의 $\frac{3}{4}$만큼이 필요하고 잎 한 장은 종이 띠 한 장의 $\frac{2}{4}$만큼이 필요하다. 두 분수 중 어느 것이 더 큰지 종이 띠의 구체물을 이용해 실제로 길이를 비교해보고, 그 후 수직선/직사각형 모델을 이용하여 길이를 비교한다.

꽃잎은 3($\frac{1}{4}$-단위)의 거리 또는 주어진 영역의 3($\frac{1}{4}$-단위)이며 잎은 2($\frac{1}{4}$-단위)의 거리 또는 주어진 영역의 2($\frac{1}{4}$-단위)이므로 이러한 비교는 **측정으로서의 분수**의 관점에서 살펴본 것이라 볼 수 있다. 하지만 단위분수의 표현을 측정으로서의 분수로 따로 설명하고 있지 않다.

그러나 꽃잎 한 장은 종이 띠 한 장을 똑같이 4로 나눈 것 중 3이므로 $\frac{3}{4}$만

큼이 필요하고 잎 한 장은 종이 띠 한 장을 똑같이 4로 나눈 것 중 2이므로 $\frac{2}{4}$ 만큼이 필요하다고 말한다. 이를 길이모델로 표현한 상태는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.



- $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{4}$는 각각 $\frac{1}{4}$이 몇 개인지 색칠하여 알아보세요.
  - $\frac{3}{4}$은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중 3이므로 3칸에 색칠하면 됩니다.
  - $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 3개입니다.
  - $\frac{2}{4}$는 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중 2이므로 2칸에 색칠하면 됩니다.
  - $\frac{2}{4}$는 $\frac{1}{4}$이 2개입니다.
- $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{4}$ 중 어느 분수가 더 큰가요?
  - $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{4}$를 색칠해 보면 $\frac{3}{4}$이 $\frac{2}{4}$보다 더 큽니다.
  - $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 3개, $\frac{2}{4}$는 $\frac{1}{4}$이 2개이므로 $\frac{3}{4}$이 $\frac{2}{4}$보다 더 큽니다.
- 분모가 같은 분수의 크기를 어떻게 비교할까요?
  - 분모가 같은 경우에는 분자가 크면 더 큽니다.
  - 분모가 같으면 똑같이 나눈 것이고 그중 분자가 색칠한 부분이므로 분자가 더 큰 분수가 큽니다.
  - 두 분수를 비교할 때에는 $\frac{1}{\blacksquare}$이 몇 개인지를 비교하면 되므로 분모가 같은 분수는 분자를 비교해서 분자가 큰 분수가 더 큽니다.

[그림 Ⅳ-8] 동분모 분수의 크기 비교

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (306쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 문제 상황을 파악하여 두 분수의 크기를 비교하기.

분수 막대, 분수 원판, 종이 띠 등 다양한 구체물을 활용하여 분수의 길이를 비교할 수 있음을 안다. 주어진 영역의 몇 개(각 단위)의 길이를 비교하므로 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 바라보았다.

바) 6차시: 단위분수의 크기를 비교해볼까요

※ 학습목표: 단위분수의 크기를 비교할 수 있다.

'[4수01-12] 분모가 같은 분수끼리, 단위분수끼리 크기를 비교할 수 있다.'는 성취기준 중 단위분수의 크기를 비교하기 위한 차시이다. 단위분수는 분자가 1인 분수이므로 단위분수의 크기를 비교할 때 구체물인 종이 띠를 이용하여 기준점을 맞춘 후 길이를 비교하는 방법과 수직선을 이용하여 0에서부터의 거리를 이용하여 길이를 비교하는 방법을 사용할 수 있다. 이는 **측정으로서의 분수**

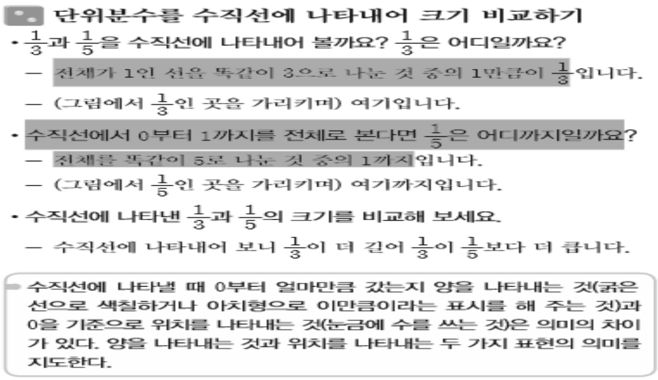
의 관점에서 분수를 바라보는 것이다.

(1) 활동 1: 종이 띠 조각의 길이 비교하는 방법 생각하기.

종이 띠를 이용하여 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$을 비교하기 위해, 종이 띠를 똑같이 나누어 접는다. 일정한 길이의 종이 띠 전체를 똑같이 나누어 2등분을 하고, 3등분을 하는 모습은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 정의하는 관점에서 바라볼 수 있다. 또한, 이를 비교하는 모습은 구체물인 종이 띠를 이용하여 기준점을 맞춘 후 길이를 비교하는 방법이므로 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 바라보는 것이다.

(2) 활동 2: 단위분수를 수직선에 나타내어 크기 비교하기.

수직선에서 0과 1사이를 전체로 본다면 각 단위분수의 길이는 똑같이 분모로 나눈 것 중의 1만큼으로 표현하는 상태는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 정의하는 관점이다. 그러나 단위분수간의 비교를 위해 수직선상에서 0으로부터의 길이를 비교한다면 이는 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 정의하는 관점이다. 지도서에서는 '전체가 1인 선을 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1만큼이 $\frac{1}{3}$'로 표현하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 정의한다. **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 정의하고 수직선에서 길이를 비교할 수 있으나 이러한 관점을 따로 제시하고 있지는 않다.



단위분수를 수직선에 나타내어 크기 비교하기

- $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{5}$을 수직선에 나타내어 볼까요? $\frac{1}{3}$은 어디일까요?
  — 전체가 1인 선을 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1만큼이 $\frac{1}{3}$입니다.
  — (그림에서 $\frac{1}{3}$인 곳을 가리키며) 여기입니다.
- 수직선에서 0부터 1까지를 전체로 본다면 $\frac{1}{5}$은 어디까지일까요?
  — 전체를 똑같이 5로 나눈 것 중의 1까지입니다.
  — (그림에서 $\frac{1}{5}$인 곳을 가리키며) 여기까지입니다.
- 수직선에 나타낸 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{5}$의 크기를 비교해 보세요.
  — 수직선에 나타내어 보니 $\frac{1}{3}$이 더 길어 $\frac{1}{3}$이 $\frac{1}{5}$보다 더 큽니다.

수직선에 나타낼 때 0부터 얼마만큼 갔는지 양을 나타내는 것(굵은 선으로 색칠하거나 아치형으로 이만큼이라는 표시를 해 주는 것)과 0을 기준으로 위치를 나타내는 것(눈금에 수를 쓰는 것)은 의미의 차이가 있다. 양을 나타내는 것과 위치를 나타내는 두 가지 표현의 의미를 지도한다.

[그림 Ⅳ-9] 단위분수의 크기 비교

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (308쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 단위분수를 수직선에 나타내고 크기 비교하기.

단위분수간의 비교를 위해 수직선상에서 0으로부터의 길이만큼을 표시하여 비교하므로 이는 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 바라보고 있다.

(4) 활동 4: 단위분수의 크기 비교하기.

단위분수는 분모가 작을수록 커짐을 일반화하여 크기를 비교한다.

사) 7차시: 소수를 알아볼까요

※ 학습목표:

- 분모가 10인 분수를 통하여 소수를 알 수 있다.

- 소수를 쓰고 읽을 수 있다.

'[4수01-13] 분모가 10인 진분수를 통하여 소수 한 자리 수를 이해하고 읽고 쓸 수 있다.'는 성취기준을 위한 차시이다. 1cm보다 작은 단위를 찾기 위해 1cm라는 길이를 분할하여 측정 결과를 자세히 나타내어 보다 작은 단위 길이를 찾고자하는 상황은 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 또한, $\frac{1}{10}$이라는 단위분수가 7개 있을 때는 $\frac{7}{10}$이라고 표현하는 것 역시 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 그러나 분모가 10인 분수를 통하여 소수를 설명하기 위해 1cm를 전체로서 똑같이 10등분하여 그 중 1인 부분을 $\frac{1}{10}$ = 0.1로 설명하고 있으므로 분모가 10인 분수를 소수로 표현하는 방법은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라 볼 수도 있다. 수직선을 10으로 나눈 것 중 7이므로 $\frac{7}{10}$이라고 표현하는 것은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.

따라서, **측정으로서의 분수** 상황을 통해 분수를 수직선상에서 살펴보지만, 이를 설명할 때에 있어 **측정으로서의 분수**와 **전체-부분의 관계로서의 분수** 모두 사용하고 있다.

● **분모가 10인 분수를 소수로 나타내기**

- 수로 나타내기 위해 전체 1 cm를 똑같이 둘, 셋, 넷, 다섯으로 나누어 보았는데 그 길이에 딱 맞는 정확한 분수는 아직 없네요. 조금 더 정확하게 나타내기 위해 더 나누어 보면 어떨까요? 몇으로 나눌까요?
  — 더 많이 나누어 보면 좋겠습니다.
  — 10으로 나누어 보면 좋겠습니다.
- 전체를 더 많이 나눌수록 정확한 값을 찾기 좋겠군요. 오늘은 앞에서 1 cm를 똑같이 10으로 나누면 1 mm가 되었던 것과 같이 1 cm를 똑같이 10으로 나누어서 연두색 선의 길이를 분수로 나타내어 볼까요?
  — (10등분 된 수직선에서 연두색 선의 길이를 확인하며) 똑같이 10으로 나눈 것 중 7이므로 $\frac{7}{10}$입니다.
  — $\frac{1}{10}$이 7개인 것과 같으니까 $\frac{7}{10}$입니다.

[그림 Ⅳ-10] 분모가 10인 분수를 소수로 나타내기

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (310쪽) 교육과학기술부. 2019.

아) 10차시: 생각수학, 누가 더 많이 먹었을까요

※ 학습목표: 전체가 서로 같을 때와 다를 때 분수가 무엇을 의미하는지 그림 그리기 전략과 이유를 설명하는 의사소통 방법을 통해 문제를 해결할 수 있다.

전체가 같을 때와 다를 때 분수의 의미를 살펴보며 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라 볼 수 있다. 전체의 크기가 달라진다면 분수의 크기도 달라짐을 알 수 있다.

자) 12~13차시: 탐구수학. 분수를 좀 더 알아볼까요

※ 학습목표:

- 분수의 특성을 좀 더 자세히 이해할 수 있다.

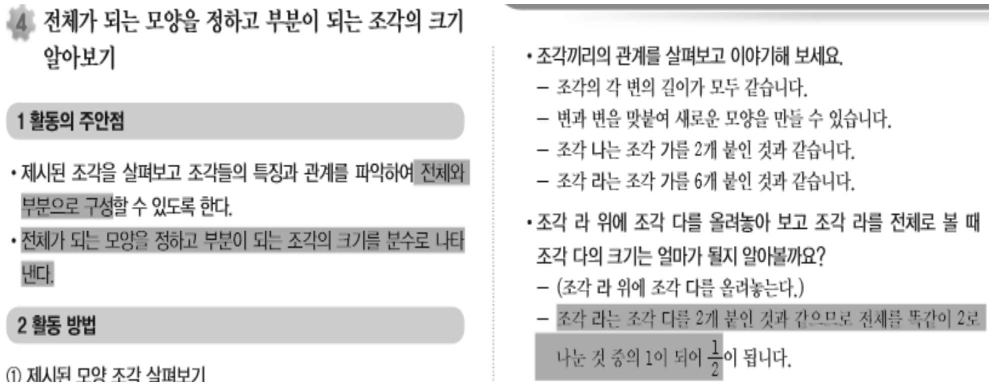
- 전체와 부분을 좀 더 자세히 이해할 수 있다.

(1) 활동 2: 파이를 나누는 방법을 통해 등분할의 개념을 한번 더 살펴본다.

(2) 활동 3: 전체의 크기가 같은 파이를 등분하여 먹은 파이의 양을 살펴본다. 전체를 등분한 수가 달라서 각 학생들이 먹은 조각, 부분은 다르지만 모두 동일한 양의 파이를 먹었다. 동일한 양의 파이를 먹었지만 학생들이 먹은 파이의 양을 서로 다른 분수로 나타낸 것을 통해 전체를 몇 부분으로 나누는지에 따라 다르게 분수가 표현됨을 알 수 있게 한다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**

로 볼 수 있다.

(4) 활동 4: 전체가 되는 모양을 정하고 부분이 되는 조각의 크기를 살펴보고 분수로 표현한다. 이 역시 부분이 되는 조각이 합쳐져 전체로 만들고 있으므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 볼 수 있다.


4 전체가 되는 모양을 정하고 부분이 되는 조각의 크기 알아보기

1 활동의 주안점

• 제시된 조각을 살펴보고 조각들의 특징과 관계를 파악하여 전체와 부분으로 구성할 수 있도록 한다.
• 전체가 되는 모양을 정하고 부분이 되는 조각의 크기를 분수로 나타낸다.

2 활동 방법

① 제시된 모양 조각 살펴보기

• 조각끼리의 관계를 살펴보고 이야기해 보세요.
– 조각의 각 변의 길이가 모두 같습니다.
– 변과 변을 맞붙여 새로운 모양을 만들 수 있습니다.
– 조각 나는 조각 가를 2개 붙인 것과 같습니다.
– 조각 라는 조각 가를 6개 붙인 것과 같습니다.
• 조각 라 위에 조각 다를 올려놓아 보고 조각 라를 전체로 볼 때 조각 다의 크기는 얼마가 될지 알아볼까요?
– (조각 라 위에 조각 다를 올려놓는다.)
– 조각 라는 조각 다를 2개 붙인 것과 같으므로 전체를 똑같이 2로 나눈 것 중의 1이 되어 $\frac{1}{2}$이 됩니다.

[그림 Ⅳ-11] 전체-부분의 관계로서 전체가 되는 모양을 정하고 부분이 되는 조각의 크기 알아보기

주. 출처 **수학 3-1 교사용 지도서** (324쪽) 교육과학기술부. 2019.

(5) 활동 5: 부분으로 전체가 되는 모양을 유추하고자 한다. 부분의 크기를 알고 전체와 부분의 관계를 파악하여 전체를 구성하므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 볼 수 있다.

2) 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 3학년 1학기 분수는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미로 도입하고 있음을 알고 있다. 5차시의 경우, 동분모 분수간의 크기 비교를 위해서는 측정으로서의 분수 관점으로 단위분수로 나타내고 길이를 비교하나 전체를 등분할하여 그 중의 몇

부분인지 살펴보며 전체-부분의 관계로서의 분수로만 기술하며 진행하고 있음을 알 수 있었다. 6차시의 경우 역시 단위분수의 크기를 비교하는 측정으로서의 분수의 학습 목표를 가졌으나 전체-부분의 관계로서의 분수로 단위분수를 설명하고 측정으로서의 분수로 길이를 비교한다. 7차시의 경우, 소수를 배우고자 전체-부분의 관계로서의 분수 관점의 학습목표를 가졌으나 각 각의 소수를 단위분수의 개수를 통해 설명하므로 이는 측정으로서의 분수로 진행하고 있다.

〈표 Ⅳ-1〉 3학년 1학기 6단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	등분할			등분할	
3차시	●				
4차시	●				
5차시	○	●			
6차시	○	●			
7차시	●	○			
10차시	●				
12~13차시	●				

나. 3학년 2학기

3학년 2학기 지도서에는 분수는 전체에 대한 부분, 비, 몫, 연산자 등과 같이 여러 가지 의미가 있어 초등학생에게 어려운 개념이며 '전체에 대한 부분'의 의미로 시작하여 점진적으로 여러 가지 분수의 의미를 경험하도록 지도한다고 말한다.(3-2 지도서, 228쪽). 이 단원에서는 집합모델을 통해 이산량에 대한 분수를 설명한다. 이산량에 대한 분수 표현을 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 측면에서 제시하고 있다. 전체 단위를 어떻게 설정하느냐에 따라 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 다르게 표현된다. 이산량과 길이를 등분할하여 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수의 의미를 이해하고 전체에 대한 분수만큼을 구한다.

1. 이산량의 등분할을 통한 분수의 이해

수학 학습에서 분수는 많은 아이들에게 어려운 장애물이 되어 왔다. 그러한 이유로는 분수에 대한 개념적 이해가 충분히 이루어지기 전에 기호화와 형식화 및 계산에 치중해 왔다는 것을 들 수 있다(Reys, Suydam, Lindquist, & Smith, 1998; Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2004). 아이들이 분수를 의미 있게 이해하도록 하기 위해서는 구체적인 상황에서 의미를 찾아 견고한 개념적 이해를 구성하도록 하는 것이 좋다. 역사적으로 분수는 측정과 분배의 맥락에서 도입되었지만, 초등학교 교육과정에서는 부분-전체(part-whole), 몫, 그리고 비의 맥락에서 다루어 오고 있다. 이 중에서 부분-전체의 의미는 전체를 똑같은 부분으로 나누어(등분할) 전체 중에서 부분이 차지하는 양을 고려한다. 부분-전체로서 분수는 영역 모델을 시작으로 집합(이산량), 길이를 사용하고 있다. 이전 학기에 학생들은 영역 모델을 활용하여 분수를 도입하고 그 의미를 탐구해 왔다. 이 단원에서는 집합(이산량), 길이를 등분할하여 부분-전체에 대한 관계를 분수로 나타내는 학습을 하게 된다.

[그림 Ⅳ-12] 초등학교 교육과정 속에서 다루고 있는 분수와 부분-전체로서 분수

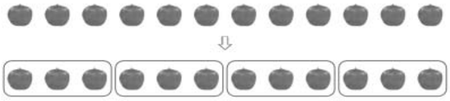
주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (235쪽) 교육과학기술부. 2019.

전체에 대한 분수만큼을 구할 때, 이산량의 분수 배만큼을 구하는 상황이므로 **연산자로서의 분수**로 분수를 바라보고 있다. 전체에 대한 분수만큼을 그림으로 표현할 때 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수를 도입하지만 분수만큼을 알고자 하는 목표는 **연산자로서의 분수**로 분수를 바라볼 수 있다. 하지만, 지도서에서는 이산량으로 제시된 모든 양을 전체로, 똑같이 나누어진 양을 부분으로 보고, 이 관계를 분수로 표현하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 나타낸다. 이후 분수의 곱셈에서 형식화하는 것을 연산자로서의 분수로 바라본다. 함혜림(2013)은 고학년에서는 주로 넓이모델을 이용하여 연산자 분수를 다루고 있어, 묶음의 의미로 분수를 제대로 이해하지 못한 학생들은 분수의 곱셈을 배운 이후에도 여전히 이산량 모델의 연산자 분수를 그림으로 잘 표현하지 못하였다고 말한다.

> 연산자 분수는 분수 개념으로서 독립적인 가치를 지니고 있으며, 연산자 분수를 통해 이산량을 동일한 묶음으로 나누어, '몇 묶음 중의 몇 묶음'을 분수라 함을 가르칠 수 있다. 그러므로 연산자 분수를 가르칠 때에는 단순히 계산에 치우쳐서는 안되며, 본래의 조작적 의미(전체-부

분 분수 개념)를 충실하게 가르쳐야 한다 (함혜림, 2013, p. 62)

따라서, 지도서에서는 이산량으로 제시된 모든 양을 전체로, 똑같이 나누어진 양을 부분으로 보고, 이 관계를 분수로 표현함에 있어 **전체-부분의 관계로서의 분수**와 **연산자로서의 분수**를 함께 나타내야할 것이다.



집합(이산량) 모델로 분수를 이해하기 위하여 위 그림에서 사과 전체인 12개를 단위인 1로 인식하여야 하고, 이를 3개씩 묶으면 전체가 4부분으로 등분할된다는 것을 이해해야 한다. 이를 통해 사과 6개는 전체 12개를 3개씩 똑같이 묶었을 때 2부분이므로 $\frac{2}{4}$가 된다는 것을 알아야 한다. 더불어 같은 전체를 나타내는 12개를 6개씩 똑같이 묶으면 2묶음이 되고, 사과 6개는 한 묶음(부분)이므로 $\frac{1}{2}$이 된다는 것과 같은 전체에 대한 이산량에서도 부분을 어떻게 묶는가에 따라 같은 부분의 양일지라도 다른 분수로 표현된다는 것을 알아야 한다.

이산량의 의미로 분수를 다룰 때 유의해야 할 것은 '이산량을 등분할하여 부분을 분수로 나타내기'와 '자연수의 분수 배만큼 알기' 차시의 배열과 방법이다. 이 단원에서는 이산량을 이용하여 부분-전체의 관계를 분수로 나타내고 있다. 따라서 이산량으로 제시된 모든 양을 전체로, 똑같이 나누어진 양을 부분으로 보고, 이 관계를 분수로 표현할 수 있어야 한다. 이러한 이산량 분수에 대한 이해를 바탕으로 이산량의 분수 배만큼을 구하는 상황이 주어지면 그 의미에 충실하여 전체를 똑같은 몇 개의 부분으로 나누고, 그 부분을 인식하여 자연수의 분수 배만큼을 구할 수 있다. 예를 들어 12의 $\frac{1}{2}$은 12개를 똑같이 2부분으로 나누었을 때 1부분을 나타내므로 6이 되는 것이다. 이것은 이후에 분수의 곱셈에서 $12\times\frac{1}{2}=6$으로 형식화될 수 있다.

[그림 Ⅳ-13] 전체-부분의 관계로서의 분수로 '분수 배만큼' 설명

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (235쪽) 교육과학기술부. 2019.

대분수를 도입하기 위해 단위분수의 개수를 헤아려 가분수를 대분수로 표현한다. 이는 **측정으로서의 분수**로 가분수와 대분수를 표현한다. 대분수와 가분수의 크기 비교를 위해 수직선모델을 통해 **측정으로서의 분수**로 크기를 비교한다. 지도서에서는 측정으로서의 분수 또는 연산자로서의 분수로 살펴본다는 말은 따로 쓰여 있지 않다.

전술한 두 가지 대분수 도입 방식은 각각 특징을 가지고 있으며, 대분수와 가분수의 상호 변환에 영향을 준다. 먼저 '1과 $\frac{3}{4}$을 $1\frac{3}{4}$'으로 대분수를 도입할 경우에는 대분수와 가분수의 변환을 다루기 위해서는 분수 모형을 이용하여 자연수로 나타내어지는 단위 영역을 등분한하여 단위 분수에 해당되는 각 부분을 세어 봄으로써 대분수를 가분수로 변환시키거나, 역으로 등분할된 분수 모형에 가분수만큼 차례로 색칠한 후에 전체가 색칠된 모형의 수를 헤아려 가분수를 대분수로 변환해야 한다. 이러한 방식에서는 선수 학습 내용으로 동분모 덧셈을 다루지 않아도 된다. 그렇지만 대분수의 형식적인 수학적 개념을 다루지 못하는 한계가 있어 이를 보완할 수 있는 방안이 더불어 제시되어야 한다.

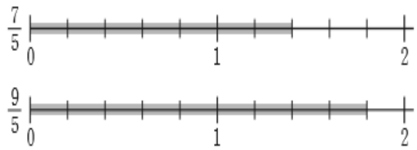
[그림 Ⅳ-14] 대분수 도입과 대분수와 가분수의 변환

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (236쪽) 교육과학기술부. 2019.

대분수와 가분수의 크기 비교 시 수직선 모델을 활용하는데 이는 전체-부분의 관계로서의 분수의 관점보다는 **측정으로서의 분수**의 관점으로 대분수와 가분수를 표현하여 크기를 비교하는 것이다.

3. 대분수와 가분수의 크기 비교

대분수와 가분수의 크기 비교는 분수에서 '~보다 작다.', '~보다 크다.'와 같은 개념을 분수 막대나 수직선 모델을 이용하여 개념적으로 이해시킬 필요가 있다. 분수 막대는 분수의 크기를 직관적으로 이해하는 데 도움이 되지만 궁극적으로 분수를 하나의 수로 인식하도록 하기 위해서는 수직선 모델을 활용하는 것이 바람직하다. 분수를 수직선 모델의 선 위에 위치시키는 것이 쉬운 내용은 아니지만, 이후에 수 개념의 확장이라는 측면에서는 수직선 모델을 활용하는 것이 바람직할 것이다. 또한 분수 막대와 수직선 모델의 상호 보완적인 활용을 위해 아래 그림과 같이 통합적인 모델을 활용하는 것도 바람직해 보인다.



[그림 Ⅳ-15] 대분수와 가분수의 크기 비교

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (237쪽) 교육과학기술부. 2019.

단원지도사항에는 분수를 지도할 때 전체를 인식하는 것이 중요하므로 상황이 바뀔 때마다 전체가 무엇인지 인식하도록 지도해야한다고 말한다(3-2 지도서, 232쪽). 이는 분수의 개념이 교과서 속에 다양하게 나옴에도 불구하고 상황에 따라 다양하게 바라보지 않고, **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에 초점을 두었다고 볼 수 있다.

1) 각 차시 속 분수

가) 1차시: 단원 도입

이산량에 대한 분수를 처음으로 도입한다. 3-1 전체를 하나의 도형과 같은 영역으로 파악하다가 처음으로 이산량 자체를 전체로 바라본다. 이산량을 분수로 표현함에 전체-부분과의 관계로서의 분수로 설명하고자 단원을 시작한다.

나) 2차시: 분수로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 이산량에서 등분할 개념을 이해하고 부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수로 나타낼 수 있다.

이산량에서 등분할 개념을 이해하고 부분-전체로의 관계(part-whole)로서 부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수로 나타내고자한다. 학생들이 이산량의 사물 1개를 전체로 바라보지 않고 사물 전체를 하나의 전체로 바라보고, 전체를 등분할하여 부분의 양을 그룹으로 생각하여 분수로 표현하고자 한다. 따라서 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 볼 수 있다.

(1) 활동 1: 감 6개를 똑같이 나누는 방법에 대해 생각 나누기.

학생들의 선개념 속 전체는 하나의 영역이었으나 처음으로 감 6개라는 이산량을 ‘전체’로 바라보고 있다. 6개를 앞서 하나의 영역을 등분할한 것처럼 똑같이 나누는 등분할 방법에 대해 이야기한다. 이산량의 분수를 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 설명하고자 기반을 다진다고 볼 수 있다.

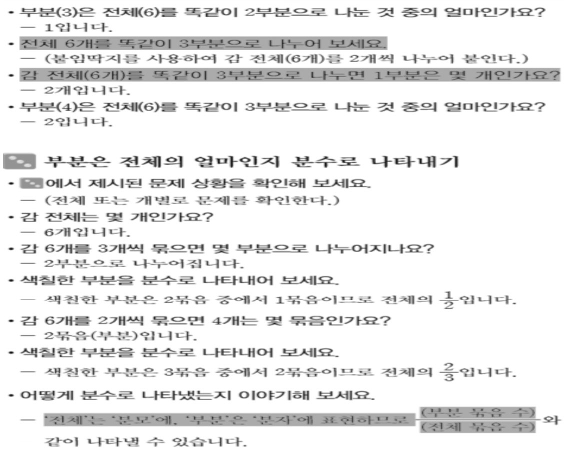
(2) 활동 2: 감 6개를 똑같이 나누고 부분은 전체의 얼마인지 이해하기.

붙임딱지를 사용하여 감 전체를 똑같이 2부분으로 나눈 후, 그 중 1부분을 똑같이 2부분으로 나눈 것 중의 1인 것을 확인하며 **전체-부분의 관계로서의 분**

수관점에서 이산량의 분수를 시작한다.

(3) 활동 3: 부분은 전체의 얼마인지 분수로 나타내기.

감 6개를 똑같이 2등분, 3등분한 후 색칠한 부분이 전체 몇 묶음 중에서 몇 묶음인지 확인하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**를 표현한다.



- 부분(3)은 전체(6)를 똑같이 2부분으로 나눈 것 중의 얼마인가요?
  — 1입니다.
- 전체 6개를 똑같이 3부분으로 나누어 보세요.
  — (붙임딱지를 사용하여 감 전체(6개)를 2개씩 나누어 붙인다.)
- 감 전체(6개)를 똑같이 3부분으로 나누면 1부분은 몇 개인가요?
  — 2개입니다.
- 부분(4)은 전체(6)를 똑같이 3부분으로 나눈 것 중의 얼마인가요?
  — 2입니다.

부분은 전체의 얼마인지 분수로 나타내기

- 에서 제시된 문제 상황을 확인해 보세요.
  — (전체 또는 개별로 문제를 확인한다.)
- 감 전체는 몇 개인가요?
  — 6개입니다.
- 감 6개를 3개씩 묶으면 몇 부분으로 나누어지나요?
  — 2부분으로 나누어집니다.
- 색칠한 부분을 분수로 나타내어 보세요.
  — 색칠한 부분은 2묶음 중에서 1묶음이므로 전체의 $\frac{1}{2}$입니다.
- 감 6개를 2개씩 묶으면 4개는 몇 묶음인가요?
  — 2묶음(부분)입니다.
- 색칠한 부분을 분수로 나타내어 보세요.
  — 색칠한 부분은 3묶음 중에서 2묶음이므로 전체의 $\frac{2}{3}$입니다.
- 어떻게 분수로 나타냈는지 이야기해 보세요.
  — '전체'는 '분모'에, '부분'은 '분자'에 표현하므로 $\frac{(\text{부분 묶음 수})}{(\text{전체 묶음 수})}$와 같이 나타낼 수 있습니다.

[그림 Ⅳ-16] 이산량의 분수를 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (240쪽) 교육과학기술부. 2019.

(4) 활동 4: 색칠한 부분을 분수로 나타내기.

색칠한 부분을 분수로 나타낸다. '전체 5묶음 중 1묶음이기 때문에 $\frac{1}{5}$이다.' 전체 몇 묶음인지 확인하고 그 중 몇 묶음이 색칠되어 있는지 확인 후 분수로 표현하기 때문에 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점이다.

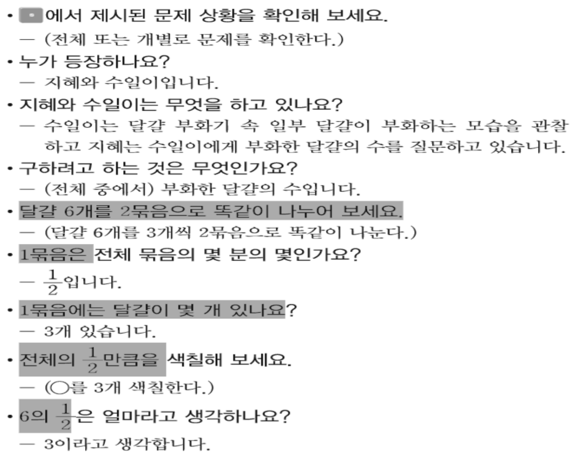
다) 3차시: 분수만큼은 얼마일까요

※ 학습목표: 이산량에서 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알 수 있다.

앞서 이산량의 분수를 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 설명하였다면, 이 차시에서는 이산량에서 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알아보고자 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로 도입을 하지만 전체에 대한 분수만큼을 알아보고자 하는 목표를 달성하기 위해서는 **연산자로서의 분수**로 분수를 바라보고 있다.

(1) 활동 1: 부화한 달걀은 몇 개인지 생각 나누기.

수일이의 달걀 6개 중에서 $\frac{1}{2}$만큼 부화했는데 전체 중에서 부화한 달걀의 수를 알고자 한다. 전체 6개 중 $\frac{1}{2}$만큼 달걀이 부화했으므로 6개를 전체가 2묶음으로 똑같이 등분할한다. 2묶음 중 1묶음을 색칠한 후, 6의 $\frac{1}{2}$은 색칠한 동그라미의 수임을 인지한다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 학생들에게 분수만큼을 설명한다. 그러나, 6의 $\frac{1}{2}$은 3으로 자연수에 대한 분수만큼을 수로 표현할 때는 **연산자로서의 분수**로 바라볼 수 있다.


- ▪에서 제시된 문제 상황을 확인해 보세요.
  — (전체 또는 개별로 문제를 확인한다.)
- 누가 등장하나요?
  — 지혜와 수일이입니다.
- 지혜와 수일이는 무엇을 하고 있나요?
  — 수일이는 달걀 부화기 속 일부 달걀이 부화하는 모습을 관찰하고 지혜는 수일이에게 부화한 달걀의 수를 질문하고 있습니다.
- 구하려고 하는 것은 무엇인가요?
  — (전체 중에서) 부화한 달걀의 수입니다.
- 달걀 6개를 2묶음으로 똑같이 나누어 보세요.
  — (달걀 6개를 3개씩 2묶음으로 똑같이 나눈다.)
- 1묶음은 전체 묶음의 몇 분의 몇인가요?
  — $\frac{1}{2}$입니다.
- 1묶음에는 달걀이 몇 개 있나요?
  — 3개 있습니다.
- 전체의 $\frac{1}{2}$만큼을 색칠해 보세요.
  — (◯를 3개 색칠한다.)
- 6의 $\frac{1}{2}$은 얼마라고 생각하나요?
  — 3이라고 생각합니다.

[그림 Ⅳ-17] 도입: 전체-부분의 관계로서의 분수

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (242쪽) 교육과학기술부. 2019.

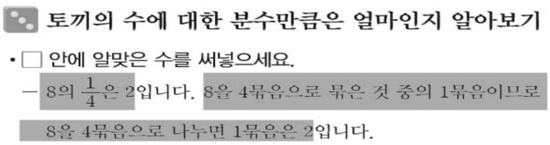
(2) 활동 2: 병아리의 수에 대한 분수만큼을 알아보기.

두 번째 활동의 진행방향이 9의 $\frac{1}{3}$을 알아보기 위해 먼저, 전체의 $\frac{1}{3}$만큼 묶는다. 묶은 후 전체 3부분 중 1부분이므로 그 묶음 속 이산량의 개수는 3이 된다고 진행한다. 전체와 부분의 관계를 살펴보며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 학생들이 이해하지만, 결국 9의 $\frac{1}{3}$만큼은 3이라는 모습은 **연산자로서의 분**

수로 바라볼 수 있다.

(3) 활동 3: 토끼의 수에 대한 분수만큼은 얼마인지 알아보기.

자연수에 대한 분수만큼을 의미하는 바는 **연산자로서의 분수**로 바라보나, 학생들이 문제를 풀 때 전체를 몇 묶음으로 묶은 것 중의 몇 묶음인지로 설명하므로 방법에 있어서는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.


토끼의 수에 대한 분수만큼은 얼마인지 알아보기

• □ 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

— 8의 $\frac{1}{4}$은 2입니다. 8을 4묶음으로 묶은 것 중의 1묶음이므로

8을 4묶음으로 나누면 1묶음은 2입니다.

[그림 Ⅳ-18] 학습목표는 연산자로서의 분수지만

전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (242쪽) 교육과학기술부. 2019.

라) 4차시: 분수만큼은 얼마일까요

※ 학습목표: 길이에서 부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수로 나타내고 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알 수 있다.

앞서 이산량의 분수를 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 설명하였다면, 이 차시에서는 이산량이 아닌 연속량인 길이를 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 설명한다. 연속량인 길이에서 부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수로 나타내는 설명방법은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있으나 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알아보고자 하는 목표를 달성하기 위해서는 **연산자로서의 분수**로 분수를 바라보고 있다.

(1) 활동 1: 사육장 1칸의 길이 구하기.

연속량인 사육장의 길이를 5칸으로 나누고자 한다. 사육장 한 칸의 길이는 전체를 5등분으로 나눈 것 중의 1이므로 막대모델의 $\frac{1}{5}$을 색칠한다. 그 후 10의 $\frac{1}{5}$만큼이 얼마인지를 구하고 2m라는 답을 구한다. 전체의 종류가 이산량에서 연속량으로 바뀌었지만 활동 전개 과정은 이산량의 분수와 일맥 상통하다고 할

수 있다. 연속량 분수지만 막대모델 속 기준점으로부터의 거리나 길이를 알고자 활동을 진행하지 않기 때문에 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 정의하고 있지 않다. 전체를 등분할하여 그 중의 부분으로서 분수를 표시하고 분수만큼을 구하고 있기 때문에 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 정의하고 있다고 생각한다. 10의 $\frac{1}{5}$만큼의 길이를 구하기 위한 목표는 **연산자로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

• 전체의 $\frac{1}{5}$만큼을 색칠해 보세요.
— (종이띠를 똑같이 5부분으로 나누어 한 칸을 색칠한다.)
• 5부분으로 똑같이 나누면 1부분의 길이는 전체의 몇 분의 몇인가요?
— $\frac{1}{5}$입니다.
• 한 부분의 길이는 얼마인가요?
— 2m입니다.
• 10의 $\frac{1}{5}$은 얼마라고 생각하나요?
— 2입니다.
• 사육장 한 칸의 길이는 몇 m로 해야 하는지 이야기해 보세요.
— 10의 $\frac{1}{5}$은 2이므로 사육장 한 칸의 길이는 2m로 해야 합니다.

학생들이 1m보다 큰 연속량(길이)의 전체를 고려하여 부분을 생각하게 하고 부분이 전체의 얼마인지 분수로 표현하게 한다.

[그림 Ⅳ-19] 연속량의 분수를 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (244쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 사육장의 길이에 대한 분수만큼을 알아보기.

활동 1에 이어 이번에는 사육장 전체 길이의 $\frac{3}{5}$만큼은 얼마인지 구하고자 한다. 수직선과 함께 제시된 막대 모델을 5등분으로 나눈 후 그 중의 3부분을 색칠하고, 10의 $\frac{3}{5}$만큼은 6m라고 문제를 해결한다. 이 역시 활동 1처럼 **측정으로서의 분수**의 관점에서 분수를 정의하고 있지 않고, **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 설명하고 10의 $\frac{3}{5}$만큼의 길이를 구하기 위한 목표는 **연산자로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

(3) 활동 3: 6cm의 종이 띠를 분수만큼 색칠하고 분수만큼 구하기.

6cm의 막대모델을 3등분하여 그 중의 1부분, 그 중의 2부분인 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$만큼을 구하고자한다. 활동 1과 2에서 배웠던 방법대로 학생은 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 문제를 해결한다. 이를 구하기 위한 목표는 **연산자로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

마) 5차시: 여러 가지 분수를 알아볼까요

※ 학습목표: 진분수와 가분수를 알고 분류할 수 있다.

'[4수01-11] 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수를 알고, 그 관계를 이해한다.'는 성취기준을 위해 진분수와 가분수를 처음으로 도입한다. 진분수, 가분수와 같은 분수의 종류가 처음 나오며 막대모델을 이용하여 **측정으로서의 분수** 관점에서 분수를 표현한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**관점에서는 전체를 넘어가는 가분수의 개념을 설명하기 어렵기 때문에 전체를 등분할하여 전체 부분 중의 몇 부분인지 **전체-부분의 관계로서의 분수**관점보다는 단위분수가 몇 개인지 세어 **측정으로서의 분수** 관점에서 분수를 표현한다. 일정한 분모와 함께 분자의 크기를 변화시킴으로써 분수의 종류를 설명한다. 그러나 따로 **측정으로서의 분수**라고 설명되어 있지 않다.

(1) 활동 1: 사과 조각을 분수로 나타내는 방법에 대해 생각 나누기.

사과 $\frac{1}{4}$개를 1,2,3,4,5개만큼 색칠하고, 분수로 나타낸다. 학생들은 **전체-부분의 관계로서의 분수**관점에서 사과 $\frac{1}{4}$을 사과 1개를 4등분하여 그 중의 1개라고 인식하고 분수로 표현한다. $\frac{1}{4}$이 늘어나는 수만큼 분수의 분자의 수가 커지고 분모는 그대로인 것을 인지한다. 이 때, 분모가 4인 분수를 수직선에 나타내는데, 0과 1사이를 4등분할하여 그 중의 1개는 $\frac{1}{4}$, 2개는 $\frac{2}{4}$, 3개는 $\frac{3}{4}$, 4개는 $\frac{4}{4}$, 5개는 $\frac{5}{4}$로 표현한다. 전체를 등분하여 그 중의 부분을 분수로 표현하므로 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 표현한다고 생각할 수 있다. 이 단원에서는 이산량의 분수를 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 바라본다고 지도서에 명시된 것처럼 분수로 표현함에 있어 등분할하여 그 중의 몇

부분인지로 생각할 수도 있으나 0으로부터 1칸, 2칸, 3칸, 4칸, 5칸의 양의 거리의 분수로 보았기 때문에 수직선상의 표현에 있어서 이 분수는 **측정으로서의 분수**로도 살펴보는 것이 더 부합하다고 생각한다. 분자가 분모보다 작은 분수를 진분수, 분모와 같거나 분모보다 큰 분수를 가분수, 그리고 자연수의 개념을 약속한다. 분수의 종류를 설명할 때 **전체-부분의 관계로서의 분수**에 기반해서 학생들이 분수를 바라보지만 전체를 넘어가는 상황의 가분수를 도입하기 위해서는 각 단위분수가 몇 개인지를 보여주는 과정에 있어서 수직선을 이용하는 모습은 **측정으로서의 분수**로 바라본 것이라 생각한다.

• 사과 $\frac{1}{4}$개를 1, 2, 3, 4, 5개만큼 색칠하고 분수로 나타내어 보세요.
- ($\frac{1}{4}$을 1, 2, 3, 4, 5개만큼 색칠하고 분수로 나타낸다.)

• 어떻게 나타냈는지 이야기해 보세요.
- $\frac{1}{4}$이 1개이면 1칸, 2개이면 2칸, 3개이면 3칸, 4개이면 4칸, 5개이면 5칸을 색칠합니다.
- $\frac{1}{4}$이 늘어나는 수만큼 분수의 분자의 수가 커지고 분모는 그대로입니다.

• 분모가 4인 분수를 수직선에 나타내어 보세요.
- $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$입니다.

학생들이 진분수와 가분수를 그림과 수직선에 나타내고 분수로 표현한 것을 연결하여 생각하게 한다. 그리고 분수에서 분모는 그대로인데 분자만 변하는 이유를 생각하게 지도한다.

[그림 Ⅳ-20] 가분수를 측정으로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (246쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 3: 진분수와 가분수만큼 색칠하기.

분수만큼 색칠함에 있어 학생들은 **전체-부분의 관계로서의 분수**에 기반하여 $\frac{5}{6}$는 막대모델과 수직선상에서 전체 6등분 중의 5등분으로 색칠할 것이다. 하지만 이 때, $\frac{1}{6}$ 단위로서 0으로부터 5까지의 단위거리로 생각한다면 **측정으로서의 분수**로도 살펴볼 수 있는 기회를 제공한다 생각한다. $\frac{11}{6}$을 표현하기 위해서 전체를 6등분하였을 때 전체보다 더 큰 분수가 되므로 **측정으로서의 분수**

로서 $\frac{1}{6}$이 11개 있는 것으로 가분수를 표현해야한다.

바) 6차시: 여러 가지 분수를 알아볼까요

※ 학습목표: 대분수를 알고 대분수를 가분수로, 가분수를 대분수로 나타낼 수 있다.

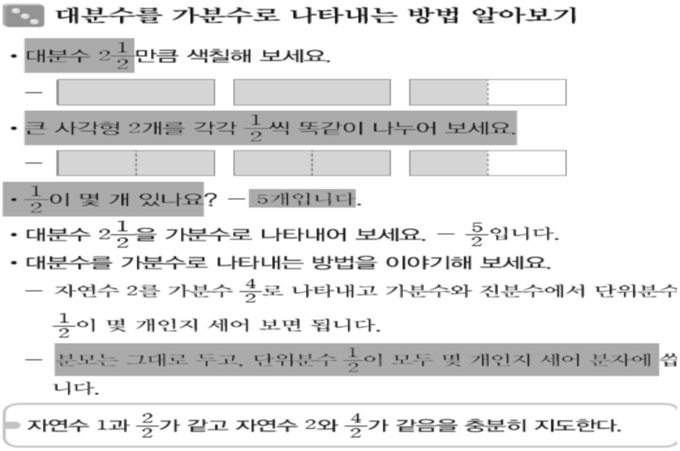
'[4수01-11] 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수를 알고, 그 관계를 이해한다.'는 성취기준을 위해 대분수를 처음 도입하고, 대분수와 가분수를 변환하는 방법을 익히는 차시이다. 전체를 등분하여 **전체-부분의 관계로서의 분수**에 기반하여 대분수 개념을 도입한다. 이를 각 부분, 단위분수가 몇 개인지를 통해 가분수를 표현하고, 가분수를 자연수와 진분수로 나누어 대분수로 표현하는 방법은 **측정으로서의 분수**에 기반하여 대분수와 가분수를 변환하고 있다고 할 수 있다.

(1) 활동 1: 사용한 사과를 분수로 나타내는 방법에 대해 생각나누기.

사과주스를 만드는데 사과 1개와 $\frac{1}{4}$개를 사용한다. 분수만이 아닌 자연수와 분수가 함께 있을 때 분수로 표현하려면 어떻게 해야 하는지를 생각하며 대분수의 필요성을 느낀다. 이를 막대모델을 통해 제시하는데 사과 1개는 막대 1개, 그리고 $\frac{1}{4}$개는 다른 막대 1개를 4등분한 것 중 1부분을 색칠하여 시각적으로 **전체-부분의 관계로서의 분수**에 기반하여 제시한다. 막대 1개인 자연수 1과 막대 1개를 4등분 한 것 중 1부분인 $\frac{1}{4}$인 진분수를 합쳐 대분수의 개념을 도입한다.

(3) 활동 3: 대분수를 가분수로 나타내는 방법 알아보기.

대분수 $2\frac{1}{2}$만큼 색칠할 때, 막대모델 2개와 막대모델 1개를 2등분 한 것 중 1부분을 색칠한다. 자연수 2인 막대모델 2개를 각각 2등분하여 $\frac{1}{2}$ 단위로 모든 막대모델을 표현한다. 대분수 $2\frac{1}{2}$에는 $\frac{1}{2}$단위가 5개 있으므로 $\frac{5}{2}$가 된다. 이는 **측정으로서의 분수**로 기반하여 대분수에서 가분수로 변환한다.



대분수를 가분수로 나타내는 방법 알아보기

• 대분수 $2\frac{1}{2}$만큼 색칠해 보세요.

—

• 큰 사각형 2개를 각각 $\frac{1}{2}$씩 똑같이 나누어 보세요.

—

• $\frac{1}{2}$이 몇 개 있나요? — 5개입니다.

• 대분수 $2\frac{1}{2}$을 가분수로 나타내어 보세요. — $\frac{5}{2}$입니다.

• 대분수를 가분수로 나타내는 방법을 이야기해 보세요.

— 자연수 2를 가분수 $\frac{4}{2}$로 나타내고 가분수와 진분수에서 단위분수 $\frac{1}{2}$이 몇 개인지 세어 보면 됩니다.

— 분모는 그대로 두고, 단위분수 $\frac{1}{2}$이 모두 몇 개인지 세어 분자에 씁니다.

자연수 1과 $\frac{2}{2}$가 같고 자연수 2와 $\frac{4}{2}$가 같음을 충분히 지도한다.

[그림 Ⅳ-21] 대분수를 측정으로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (248쪽) 교육과학기술부. 2019.

(4) 활동 4: 가분수를 대분수로 나타내는 방법 알아보기.

가분수 $\frac{7}{3}$을 대분수로 변환하기 위해 활동 3과 마찬가지로 막대모델을 이용한다. 각 막대 모델을 3등분하여 앞에서부터 $\frac{1}{3}$단위를 7개 색칠한다. 주어진 영역(단위)이 7개가 있고 이를 표현하는 함축된 과정 속에는 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있는 기회를 제공한다 생각한다. $\frac{1}{3}$이 3개 있으면 전체가 되어 전체로 형성된 $\frac{3}{3}$이 2묶음인 자연수 2와 진분수 $\frac{1}{3}$로 바꿀 수 있다.

사) 7차시: 분모가 같은 분수의 크기를 비교해 볼까요

※ 학습목표: 분모가 같은 여러 가지 분수의 크기를 비교할 수 있다.

'[4수01-12] 분모가 같은 분수끼리, 단위분수끼리 크기를 비교할 수 있다.' 성취기준과 관련된 차시이다. 더 긴 지지대를 알아봄에 있어 이산량이 아닌 길이라는 연속량을 수직선을 통해 표현한다. 수직선을 등분할하여 0으로부터 $\frac{1}{5}$단위가 양의 거리로 파악되므로 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 분수간의 크

기 비교를 함에 있어 막대모델을 나열하여 크기 비교를 하는 모습은 **측정으로서의 분수**로 볼 수 있을 것이다.

(1) 활동 1: 분모가 같은 가분수의 크기 비교하기.

$\frac{7}{5}$m와 $\frac{9}{5}$m를 수직선에 표현하고 길이를 비교한다. 1m라는 기준 단위를 0과 1사이를 5등분하여 그 중의 1인 $\frac{1}{5}$ 단위분수를 만든다. $\frac{7}{5}$은 $\frac{1}{5}$이 7개, $\frac{9}{5}$m는 $\frac{1}{5}$이 9개로 두 분수간의 길이 비교는 0이라는 기준점으로부터 양의 거리를 측정하고 있기 때문에 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 시각적인 모델을 통해 학생들은 가분수 간의 크기 비교시 분모가 같다면 분자의 크기가 길 때 더 큰 분수임을 인지한다.

- ▢에서 제시된 문제 상황을 확인해 보세요.
  — (전체 또는 개별로 문제를 확인한다.)
- 구하려고 하는 것은 무엇인가요?
  — 길이가 더 긴 지지대를 알아보려고 합니다.
- $\frac{7}{5}$과 $\frac{9}{5}$ 중에서 어느 분수가 더 크다고 생각하나요?
  — $\frac{9}{5}$라고 생각합니다. 왜냐하면 $\frac{9}{5}$는 $\frac{1}{5}$이 9개가 있고, $\frac{7}{5}$은 $\frac{1}{5}$이 7개가 있으므로 $\frac{9}{5}$가 $\frac{7}{5}$보다 크다고 생각합니다.
- $\frac{7}{5}$ m와 $\frac{9}{5}$ m를 수직선에 나타내어 보세요.
  — (수직선에 $\frac{7}{5}$과 $\frac{9}{5}$를 표시한다.)
- $\frac{7}{5}$과 $\frac{9}{5}$ 중에서 어느 분수가 더 크다고 생각하나요?
  — $\frac{9}{5}$입니다.
- 분모가 같은 가분수의 크기를 비교하는 방법을 이야기해 보세요.
  — 분모가 같은 가분수끼리의 크기 비교에서는 분자의 크기가 큰 가분수가 더 큽니다.

[그림 Ⅳ-22] 가분수의 크기 비교를 측정으로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (250쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 분모가 같은 대분수의 크기 비교하기.

$2\frac{1}{4}$와 $1\frac{3}{4}$의 크기를 비교함에 있어 막대모델을 이용한다. 전체인 자연수는 막

대 전체로 표현하고, 진분수는 전체를 등분하여 그 중의 남은 부분을 표현한다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수를 표현하는 모습이다. 그러나 분수 간의 크기를 비교함에 있어 막대 모델의 전체 크기가 더 큰 분수를 찾는 모습은 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다. 분수가 같은 대분수에서는 전체인 자연수가 더 큰 분수가 크다는 사실을 인지한다.

(3) 활동 3: 분모가 같은 가분수와 대분수의 크기 비교하기.

분모가 같은 가분수와 대분수의 크기를 비교하기 위해 가분수를 대분수로 혹은 대분수를 가분수로 표현하여 크기 비교를 한다. 활동 1,2를 통해 일반화된 지식으로 학생들은 분수의 크기를 비교한다.

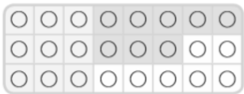
아) 8차시: 생각수학, 분수만큼은 얼마인지 알아볼까요

※ 학습목표: 여러 가지 분수를 활용하여 실생활 문제를 해결하고 어떻게 해결하였는지 설명할 수 있다.

이는 2,3차시에 배웠던 이산량에서 등분할하여 전체에 대한 부분만큼은 얼마인지에 관한 실생활문제를 해결하는 차시이다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로 전체와 부분을 묶지만 전체에 대한 분수만큼을 알아보고자 하는 목표를 달성하기 위해서는 **연산자로서의 분수**로 분수를 바라보고 있다.

• 자신이 세운 계획에 따라 문제를 해결한 방법을 설명해 보세요.

— 그림을 그려 보면 24를 8묶음으로 나눈 것 중의 3묶음은 9이고, 24를 3묶음으로 나눈 것 중의 1묶음은 8입니다. 따라서 24에서 분수만큼을 제외하면 나머지는 7입니다.



— 24를 8묶음으로 나눈 것 중의 3묶음이 9이고, 24를 3묶음으로 나눈 것 중의 1묶음은 8이므로 24−9−8=7입니다.

— 어머니는 전체를 3묶음으로 나눈 것 중의 1묶음을 드셨고 아버지는 3묶음으로 나눈 것 중의 1묶음인 8개보다 많이 드셨으므로 도영이가 가장 적게 먹었습니다.

[그림 Ⅳ-23] '분수만큼'을 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 장면

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (252쪽) 교육과학기술부. 2019.

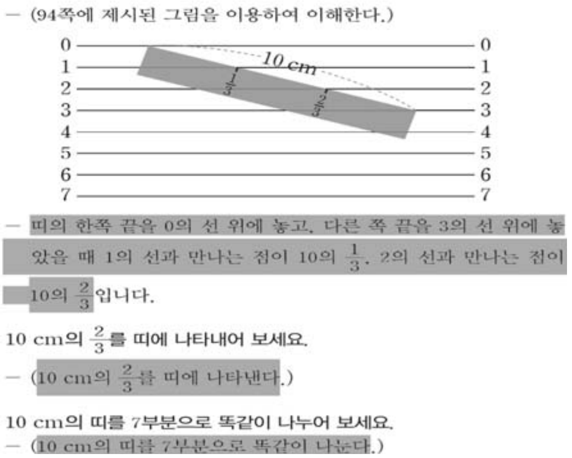
자) 10차시: 탐구수학, 선을 따라 분수만큼 가 볼까요

※ 학습목표:

- 띠를 이용하여 전체에 대한 분수만큼은 얼마인지 알고 설명할 수 있다.

- 분수를 이해하고 '선을 따라 분수만큼 가기' 놀이에 참여할 수 있다.

10cm의 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$를 그림에 나타내기 위해 10cm 띠의 한쪽 끝을 0의 선 위에 놓고, 다른 쪽 끝을 3의 선 위에 놓아 1의 선과 만날 때는 $\frac{1}{3}$, 2의 선과 만날 때는 $\frac{2}{3}$라고 한다. 이는 띠의 길이를 등분할하는 모습을 통해 10cm의 띠를 7등분하는 과정을 10cm의 $\frac{1}{7}$로 추론할 수 있다. 0부터의 만나는 점까지의 거리를 단위분수로 나타내어 **측정으로서의 분수**로 길이의 분수만큼을 구하고자 하나 연속량의 분수만큼을 나타내는 목표는 **연산자로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.


— (94쪽에 제시된 그림을 이용하여 이해한다.)

— 띠의 한쪽 끝을 0의 선 위에 놓고, 다른 쪽 끝을 3의 선 위에 놓았을 때 1의 선과 만나는 점이 10의 $\frac{1}{3}$, 2의 선과 만나는 점이 10의 $\frac{2}{3}$입니다.

10 cm의 $\frac{2}{3}$를 띠에 나타내어 보세요.

— (10 cm의 $\frac{2}{3}$를 띠에 나타낸다.)

10 cm의 띠를 7부분으로 똑같이 나누어 보세요.

— (10 cm의 띠를 7부분으로 똑같이 나눈다.)

[그림 Ⅳ-24] 3-2. 4단원. 10차시

주. 출처 **수학 3-2 교사용 지도서** (256쪽) 교육과학기술부. 2019.

2) 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위

한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 3학년 2학기 분수는 분수만큼을 알아보며 연산자로서의 분수의 관점에서 학습목표를 제시하고 있음을 알 수 있다. 그러나, 연산자로서의 분수로 진행하는 것이 아닌 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 전체에 대한 분수만큼을 표현하고 있다. 5~6차시의 경우, 진분수와 가분수를 알아보고자 측정으로서의 분수를 기반으로 살펴본다. 등분할하여 그 중의 몇인지로도 살펴보지만 단위분수가 몇 개인지를 통해 가분수와 대분수 개념을 알아보고, 이들을 변환한다. 7차시의 경우, 분수간의 크기 비교를 위해서는 측정으로서의 분수 관점으로 단위분수로 나타내고 길이를 비교하나 지도서에 측정으로서의 분수의 의미를 이용하고 있음을 따로 기술하고 있지 않다.

<표 Ⅳ-2> 3학년 2학기 4단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	●				
3차시	○		●		
4차시	○		●		
5차시	○	●			
6차시	○	●			
7차시		●			
8차시	○		●		
10차시	○		●		

다. 4학년 2학기

3학년 1학기에서 학습한 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 의미, 2학기에서 학습한 **측정으로서의 분수**를 이용한 대분수와 가분수의 의미를 기본으로 가분수가 단위분수의 분자 개수만큼을 인지하여 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 배우는 단원이다. 자연수에서 배운 덧셈과 뺄셈이 분수로 확장되나 자연수와 분수는 확장된 수체계이기 때문에 '분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리'와 같은 오

개념을 형성하지 않도록 다양한 모델을 통해 구체적인 조작활동을 하여 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 배운다. 초등학생들은 분수를 수가 아닌 단순한 기호로 받아들일 수 있기 때문에 이 단원에서 분수를 연산이 가능한 수로 바라볼 수 있도록 지도해야한다.

실생활에서 분수의 덧셈과 뺄셈이 필요한 상황을 접한다. 이미 학생들은 첨가나 합병, 제거나 비교 상황으로 자연수의 덧셈과 뺄셈의 의미를 학습했다. 마찬가지로 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미도 이런 상황과 동일하다. 즉, 자연수에서 배운 덧셈과 뺄셈이 분수가 포함된 덧셈과 뺄셈으로 확장되는 것이다.

분수의 덧셈과 뺄셈 계산 원리를 이해하기 위해서는 3학년 1학기에서 학습한 분수의 의미, 3학년 2학기에서 학습한 대분수와 가분수의 의미를 잘 알아야 한다. 특히 가분수, 예를 들어 $\frac{7}{5}$을 '$\frac{1}{5}$이 7개인 분수'로 파악하는 것이 필요하다. 이는 분수의 덧셈과 뺄셈을 자연수의 덧셈과 뺄셈과 관련짓는 연결 고리가 된다. 그뿐만 아니라 분수의 덧셈과 뺄셈 계산 원리를 이해하기 위해서는 주어진 분수를 영역 모델이나 수직선 모델에 나타낼 수 있고, 영역 모델이나 수직선 모델로 나타낸 분수가 무엇인지 알아야 한다.

이 단원은 분수가 포함된 수의 연산을 처음으로 학습하는 단원으로 이 단원에서 의미 있는 학습이 이루어지지 못하면 이후에 학습하는 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈도 의미 있는 학습이 이루어질 수 없다. 영역 모델, 분수 길이 모델, 수직선 모델로 분수의 덧셈과 뺄셈의 결과를 구하는 구체적 조작 활동이 반드시 필요하다. 이런 활동을 통해 계산 원리를 형식화해야 한다. 계산 원리는 자연수끼리 더하거나 빼고 분수 부분끼리 더하거나 빼는 것이다. 또한 분수의 곱셈과 나눗셈에서는 가분수로 고쳐 계산하는 것이 필요하고 중학교 이후의 계산에서는 가분수의 계산을 주로 다루기 때문에 두 분수를 가분수로 고쳐 더하거나 빼는 계산 방법도 함께 지도해야 한다. 분수의 덧셈과 뺄셈을 하기 전에 그 결과가 '~쯤 될 것 같다' 또는 '~와 ~ 사이가 될 것 같다'로 어림해 보는 것도 필요하다.

[그림 Ⅳ-25] 4-2. 1단원. 단원개관

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (120쪽) 교육과학기술부. 2019.

1. 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 중요성

분수는 자연수로만 나타낼 수 없는 양의 크기를 나타내는 표현 방법이다. 유리수는 두 정수의 비로 나타낼 수 있는 수로, 분수와 소수로 표현할 수 있다. $\frac{1}{\sqrt{2}}$은 분수이지만 유리수는 아니기 때문에 분수와 유리수는 동일한 개념이 아니다. 초등학교에서는 유리수인 분수만을 다룬다. 수는 크기 비교가 가능하고 연산이 가능한 체계로 볼 수 있다. 이 단원에서 학습하게 되는 분수의 덧셈과 뺄셈은 실생활에서 생기는 문제를 해결하는 방법일 뿐만 아니라 유리수를 이해하기 위해 필요한 한 단계로 볼 수 있다. 자연수에서 유리수로 수의 범위가 확장되더라도 자연수에서의 연산의 의미가 변화되는 것은 아니다. 대신에 자연수에서 학습한 덧셈과 뺄셈의 적용 범위가 확대되는 것이다. 자연수에서 덧셈과 뺄셈의 의미를 제대로 학습했더라도 구체적인 실생활 장면에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 도입하여 지도하는 것이 중요하다. 초등학생들은 분수를 수로 생각하는 것이 아니라 단순한 기호로 받아들이기 때문이다. 연산의 결과를 구하는 계산을 능숙하게 할 수 있도록 지도하는 것도 필요하지만, 자연수의 계산에서처럼 계산 결과가 타당한지를 검토할 수 있는 어림 활동이 필요하다.

분수의 덧셈과 뺄셈은 분모가 같은 분수와 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈으로 나누어진다. 분모가 다른 덧셈과 뺄셈은 동치분수의 개념과 이를 바탕으로 하는 통분과 약분의 개념도 추가로 필요하지만 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈이 핵심적으로 필요하다. 이뿐만 아니라 분수를 특정 양을 나타내는 기호가 아니라 연산이 가능한 수로 바라볼 수 있게 해 주는 첫 단계로 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 지도하는 것은 중요하다.

[그림 Ⅳ-26] 4-2. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 중요성

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (126쪽) 교육과학기술부. 2019.

전체-부분의 관계로서의 분수로 분수를 표현하나 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 단위분수가 몇 개인 분수로 바라보므로 **측정으로서의 분수**로 분수의 덧셈과 뺄셈을 한다. 그러나 지도서 단원 배경 지식에서 설명하는 분수의 의미는 측정으로서의 분수가 아니라 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미로 설명한다. 단위분수의 개념을 설명해주지만 단위분수가 분수의 덧셈과 뺄셈에 중요하다고만 이야기할 뿐 단위분수의 개념이 측정으로서의 분수에서 나왔음을 설명하지는 않고 있다.

3. 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 위한 선행 지식

가. 분수의 의미

전체를 똑같이 나눈 것 중의 일부분의 크기를 나타내는 분수의 전체－부분의 의미는 분수의 덧셈과 뺄셈에서 중요하다. 분수에서 등분할의 의미를 모르거나 교사나 수학책에 등분할된 모델만 제시된다면 학생들이 알고 있는 분수의 의미는 퇴보하거나, 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈 이후에

학습하게 되는 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 이해가 단지 그 계산 절차를 암기하여 적용하는 도구적 이해에 머물 수 있다. 따라서 학생들이 직접 등분할하여 분수로 나타내는 활동을 통하여 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미와 계산 원리를 이해하도록 지도해야 한다.

[그림 Ⅳ-27] 4-2. 단원 배경 지식 속 분수의 의미

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (126-127쪽) 교육과학기술부. 2019.

다. 단위분수

분자가 1인 분수, 즉 단위분수가 분수의 크기 비교에서처럼 분수의 덧셈과 뺄셈에서도 중요한 역할을 한다. 주어진 분수를 단위분수가 몇 개인 분수로 생각하는 것은 분수의 덧셈과 뺄셈을 학생들이 익히 알고 있는 자연수의 덧셈과 뺄셈으로 자연스럽게 연결할 수 있게 해 준다. 다음 두 상황은 자연수에서의 덧셈과 분수에서의 덧셈이지만 단위분수로 인해 본질적으로 같은 상황이 된다.

빨간 사과 5개와 초록 사과 3개를 더하면 사과는 모두 8개가 있다.	(사과 5개) + (사과 3개) = (사과 8개)
$\frac{5}{9}+\frac{3}{9}$은 $\frac{1}{9}$이 5개인 것과 $\frac{1}{9}$이 3개인 것을 더한 것이므로 $\frac{1}{9}$이 모두 8개가 된다.	($\frac{1}{9}$이 5개) + ($\frac{1}{9}$이 3개) = ($\frac{1}{9}$이 8개)

라. 가분수와 대분수

1보다 큰 분수는 대분수와 가분수로 나타낼 수 있다. 초등학교에서 분수의 덧셈과 뺄셈 결과를 대분수로 나타내도록 전통적으로 지도해 왔다. 그 이유는 가분수보다는 대분수가 그 분수의 크기를 직관적으로 파악할 수 있기 때문이다. 대분수를 가분수로 변환하여 계산하면 훨씬 계산이 간단해진다. 분수의 곱셈과 나눗셈은 주어진 대분수를 가분수로 변환해야 계산 원리를 적용할 수 있기 때문에 분수의 덧셈과 뺄셈에서도 대분수로 계산하는 방법과 대분수를 가분수로 변환하여 계산하는 방법 모두 지도하는 것이 필요하다. 이 두 방법은 분수의 덧셈과 뺄셈의 구체적 활동이나 이를 나타낸 영역 모델을 활용한 그림에서도 다르게 표현된다.

[그림 Ⅳ-28] 4-2. 단원 배경 지식 속 측정으로서의 분수이지만
이와 관련된 표현이 없는 단위분수, 가분수와 대분수

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (127쪽) 교육과학기술부. 2019.

1) 각 차시 속 분수

가) 1차시: 단원 도입

분수의 덧셈과 뺄셈을 본격적으로 시작하기에 앞서 그림 속 친구들이 하고 있는 일 중 덧셈과 뺄셈으로 나타낼 수 있는 상황을 생각하며 분수의 덧셈과 뺄셈 역시 자연수의 덧셈과 뺄셈처럼 연산 가능한 수임을 알 수 있게 한다. 또한 3학년 때 배운 분수의 의미, 분수의 종류를 파악하며 **등분할 개념**과 **전체-부분의 관계로서의 분수**를 다시 한번 상기시킨다.

나) 2차시: 분수의 덧셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 두 진분수의 합을 구하는 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

'[4수01-16] 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.'는 성취기준을 달성하기 위해 실생활 속에서 진분수의 합을 구하는 상황인 유리창을 꾸미는 장면으로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수의 의미를 다시 떠올리고, 덧셈의 결과가 전체의 얼마인지 구하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수의 덧셈의 상황을 바라보고 있다. 두 진분수의 합을 구하는 원리와 형식을 이해하고 계산하고자 하는 학습목표는 단위분수가 몇 개인지로 바라보며 **측정으로서의 분수**로 진분수간의 덧셈을 한다.

(1) 활동 1: 실생활에서 두 진분수끼리의 덧셈 알아보기.

수일이는 유리창의 유리 4장 중 2장을 꾸몄고, 도영이는 1장을 꾸몄습니다. 수일이가 꾸민 유리창의 부분은 전체의 $\frac{2}{4}$장, 도영이가 꾸민 유리창의 부분은 전체의 $\frac{1}{4}$장임을 시각적인 영역모델을 통해 제시하고 있다. 각 각 유리창 전체를 4등분하고 그 중 2장과 1장을 색칠한 후 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 각 분수를 구한다. 꾸민 부분은 전체의 얼마인지 알아보는 상황은 덧셈의 상황이므로 식으로 표현한다면 $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$임을 표현할 수 있다. 4장 중 3장을 꾸몄으므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 $\frac{3}{4}$만큼 꾸몄음을 알 수 있다. $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$을

$\dfrac{2+1}{4}$로 분모가 같은 분수끼리의 덧셈에서는 결국 전체를 같은 수로 등분하였기 때문에 분자끼리의 합이 결국 분모가 같은 분수를 더한 결과라는 사실을 발견하고 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수로 바라보았다고 생각할 수 있다.

진분수간의 덧셈을 $\dfrac{2}{4}$는 $\dfrac{1}{4}$ 단위가 2개, $\dfrac{1}{4}$은 $\dfrac{1}{4}$ 단위가 1개이므로 총 $\dfrac{1}{4}$이 3개인 $\dfrac{3}{4}$으로 구하고 있다. 이는 단위분수의 개수를 통해 덧셈결과를 구하고 있으므로 **측정으로서의 분수**로 바라본다.

- 실생활 속에서 진분수의 합을 구하는 상황을 통해서 진분수의 합을 구하는 계산 원리를 생각하도록 유도하며 차시의 내용을 도입한다.
- 생활 속에서 일을 나눠서 하거나 서로 도와가며 일을 하는 상황의 예를 찾아본다.
- 이 차시는 유리창을 꾸미는 장면으로 $\boxed{\text{전체의 부분으로서의 분수를}}$ 제시하고 있다. 분수의 개념을 다시 떠올리고, 분수의 합을 구하는 계산 원리를 개념적으로 이해할 수 있도록 해 본다. 또한 함께하는 나눔의 가치를 더불어 생각해 본다.

• 주어진 상황을 읽고 말해 보세요. 수일이와 도영이는 무엇을 하고 있나요?
— 수일이와 도영이가 유리창을 꾸미고 있습니다.
• 수일이와 도영이가 꾸민 유리는 각각 몇 장인가요?
— 수일이가 2장을 꾸몄고, 도영이가 1장을 꾸몄습니다.
• 수일이와 도영이가 꾸민 부분을 그림에 나타내어 보세요.
— (그림에 나타낸다.)
• 수일이와 도영이가 꾸민 부분은 각각 전체의 얼마인지 분수로 나타내어 보세요.
— 분수로 나타낼 수 있습니다. <u>수일이는 전체 4장 중의 2장이므로</u> $\frac{2}{4}$이고, <u>도영이는 전체 4장 중의 1장이므로 $\frac{1}{4}$</u>입니다.
• 수일이와 도영이가 꾸민 부분은 전체의 얼마인지 구하는 식을 써 보세요.
— $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$입니다.
• <u>$\frac{2}{4}$는 $\frac{1}{4}$이 몇</u> 개인가요?
— <u>$\frac{1}{4}$이 2개</u>입니다.
• <u>$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 모두 몇 개인가요?</u>
— <u>$\frac{1}{4}$이 3개입니다.</u>

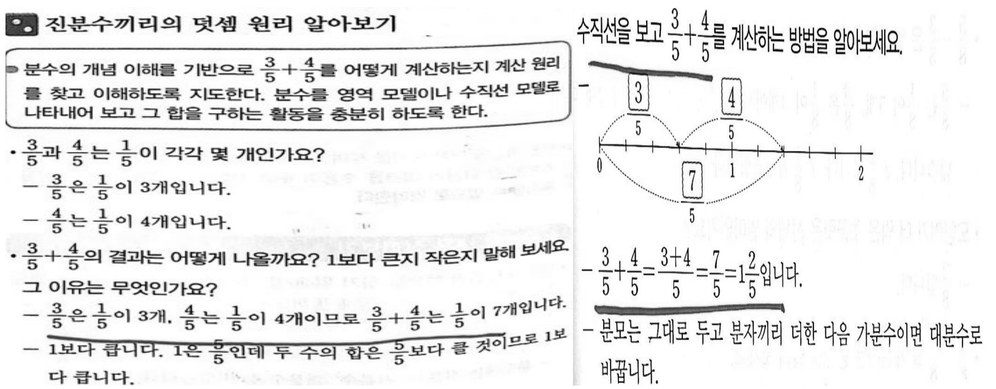
[그림 Ⅳ-29] 전체-부분으로서의 분수와 측정으로서의 분수로
두 진분수의 덧셈 설명

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (130쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 진분수끼리의 덧셈 원리 알아보기.

$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}$는 분모가 같은 진분수이기 때문에 전체를 5등분했다는 사실이 기저에 있다. $\dfrac{3}{5}$은 $\dfrac{1}{5}$이 3개, $\dfrac{4}{5}$는 $\dfrac{1}{5}$이 4개이므로 이들을 더한 결과는 $\dfrac{1}{5}$이 7개인

$\frac{7}{5}$임을 알 수 있다. 진분수끼리의 합이 진분수가 아닌 가분수가 되어 학생들이 전체를 서로 다르게 생각할 수 있어 구체적인 모델이 필요하다. 여기서는 수직선 모델을 사용하는데 0과 1을 5등분하여 한 영역이 $\frac{1}{5}$임을 파악하고 수직선상에서 3칸을 간 후 4칸을 가게 된다. 각 분수 자체는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 바라볼 수 있으나 수직선상에서 0으로부터 3칸을 간 후 4칸을 가는 과정, 총 $\frac{1}{5}$단위가 7칸 가서 $\frac{7}{5}$이 된 것은 0으로부터의 단위의 거리의 합을 나타내고 있기 때문에 **측정으로서의 분수**로서 나타냈다고 생각할 수 있다. 계산 결과가 1보다 큰 가분수의 결과 값으로 나왔기 때문에 가분수를 대분수로 변환하며 $\frac{1}{5}$은 전체를 5등분 한 것 중 1부분이기 때문에 전체 1이 되기 2위해선 5등분 한 것 중 5부분이 필요하고 나머지인 $\frac{2}{5}$는 진분수로서 $1\frac{2}{5}$ 대분수 결과를 도출하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 변환한다.



[그림 Ⅳ-30] 측정으로서의 분수로 두 진분수의 덧셈 설명

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (130-131쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 진분수의 덧셈하기.

학생들이 분모가 같은 진분수의 덧셈은 분모는 그대로 두고 분자끼리 더한

다음 가분수이면 대분수로 바꾼다는 계산 원리를 활용하여 계산한다. 단위분수의 개수를 통해 덧셈결과를 구하고 있으므로 **측정으로서의 분수**의 관점에서 스스로 계산 과정을 설명함으로써 계산 원리를 다시 한번 정리한다.

다) 3차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

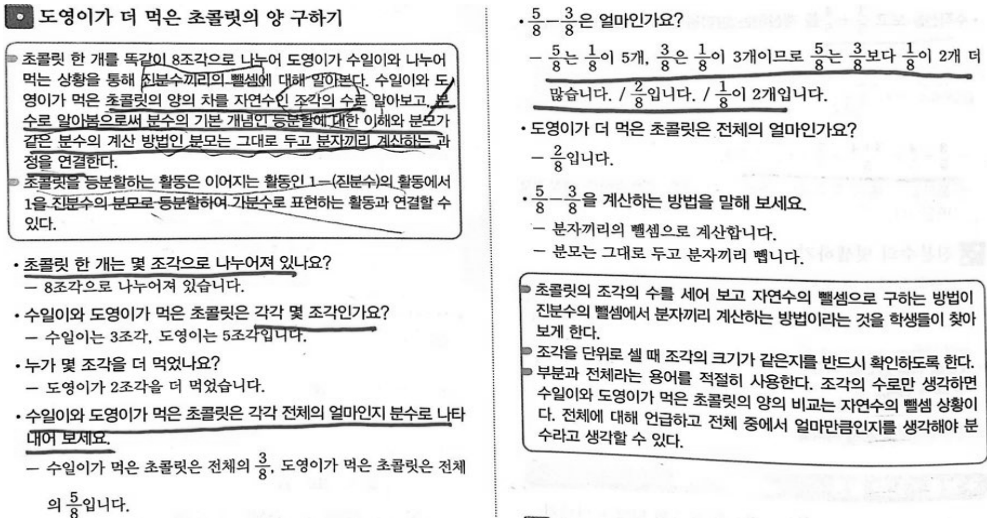
※ 학습목표: 두 진분수의 차, 1과 진분수의 차를 구하는 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

'[4수01-16] 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.'는 성취기준을 달성하기 위해 막대모델을 통해 분모가 같은 진분수의 뺄셈을 처음 도입하는 차시이다. 막대모델 뿐 아니라 수직선모델을 통해 1-(진분수)의 계산 원리를 알아보고 계산해본다. 학습목표를 이루기 위해서는 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수의 개수를 세어 계산하므로 **측정으로서의 분수**의 관점으로 바라볼 수 있다.

(1) 활동 1: 도영이가 더 먹은 초콜릿의 양 구하기.

도영이와 수일이는 초콜릿 1개를 똑같이 8조각으로 나누어 그 중의 3조각은 수일이가, 그 중의 5조각은 도영이가 먹었다. 도영이가 더 먹은 초콜릿은 전체의 얼마인지 알아보고자 한다. 문제 자체에서 각각 전체의 얼마인지 분수로 나타내고, 더 먹은 초콜릿은 전체의 얼마인지 물어본다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 각각의 학생이 먹은 초콜릿 조각만큼을 분수로 제시한다. 수일이는 초콜릿 8조각 중 3조각, 도영이는 5조각 먹었으므로 $\frac{3}{8}$,$\frac{5}{8}$ **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 각 분수를 구한다. 도영이가 수일이보다 얼마나 더 먹었는지 알아보는 상황은 뺄셈의 상황이므로 식으로 표현한다면 $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$임을 표현할 수 있다. 자연수로서 5조각과 3조각의 차이이므로 2조각으로서 전체 8조각 중 2조각만큼 즉, **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 $\frac{2}{8}$만큼 차이가 남을 알 수 있다. 또한 $\frac{5}{8}$는 $\frac{1}{8}$단위가 5개, $\frac{3}{8}$은 $\frac{1}{8}$단위가 3개이므로 차는 $\frac{1}{8}$단위가 2개인

$\frac{2}{8}$로도 알 수 있다. 이는 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다. 또한, 교과서에서 $\frac{5}{8}$는 $\frac{3}{8}$보다 $\frac{1}{8}$이 몇 개 더 많은지 물어봄으로써 단위분수로 분수의 뺄셈을 계산하므로 **측정으로서의 분수**로 살펴볼 수 있다.



도영이가 더 먹은 초콜릿의 양 구하기

초콜릿 한 개를 똑같이 8조각으로 나누어 도영이가 수일이와 나누어 먹는 상황을 통해 진분수끼리의 뺄셈에 대해 알아본다. 수일이와 도영이가 먹은 초콜릿의 양의 차를 자연수인 조각의 수로 알아보고, 분수로 알아봄으로써 분수의 기본 개념인 등분할에 대한 이해와 분모가 같은 분수의 계산 방법인 분모는 그대로 두고 분자끼리 계산하는 과정을 연결한다.

초콜릿을 등분할하는 활동은 이어지는 활동인 1−(진분수)의 활동에서 1을 진분수의 분모로 등분할하여 가분수로 표현하는 활동과 연결할 수 있다.

- 초콜릿 한 개는 몇 조각으로 나누어져 있나요?
  — 8조각으로 나누어져 있습니다.
- 수일이와 도영이가 먹은 초콜릿은 각각 몇 조각인가요?
  — 수일이는 3조각, 도영이는 5조각입니다.
- 누가 몇 조각을 더 먹었나요?
  — 도영이가 2조각을 더 먹었습니다.
- 수일이와 도영이가 먹은 초콜릿은 각각 전체의 얼마인지 분수로 나타내어 보세요.
  — 수일이가 먹은 초콜릿은 전체의 $\frac{3}{8}$, 도영이가 먹은 초콜릿은 전체의 $\frac{5}{8}$입니다.
- $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$은 얼마인가요?
  — $\frac{5}{8}$는 $\frac{1}{8}$이 5개, $\frac{3}{8}$은 $\frac{1}{8}$이 3개이므로 $\frac{5}{8}$는 $\frac{3}{8}$보다 $\frac{1}{8}$이 2개 더 많습니다. / $\frac{2}{8}$입니다. / $\frac{1}{8}$이 2개입니다.
- 도영이가 더 먹은 초콜릿은 전체의 얼마인가요?
  — $\frac{2}{8}$입니다.
- $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$을 계산하는 방법을 말해 보세요.
  — 분자끼리의 뺄셈으로 계산합니다.
  — 분모는 그대로 두고 분자끼리 뺍니다.

초콜릿의 조각의 수를 세어 보고 자연수의 뺄셈으로 구하는 방법이 진분수의 뺄셈에서 분자끼리 계산하는 방법이라는 것을 학생들이 찾아보게 한다.

조각을 단위로 셀 때 조각의 크기가 같은지를 반드시 확인하도록 한다.

부분과 전체라는 용어를 적절히 사용한다. 조각의 수로만 생각하면 수일이와 도영이가 먹은 초콜릿의 양의 비교는 자연수의 뺄셈 상황이다. 전체에 대해 언급하고 전체 중에서 얼마만큼인지를 생각해야 분수라고 생각할 수 있다.

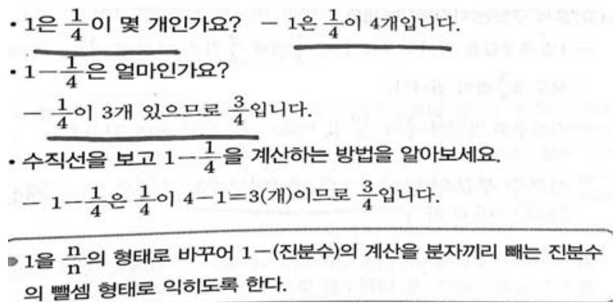
[그림 Ⅳ-31] 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수로
두 진분수의 뺄셈 설명

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (132쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 1-(진분수)의 계산 원리 이해하기.

사각형의 크기를 1로 정하고, 사각형 속에서 $\frac{1}{4}$을 나타낸다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 사각형 전체를 4등분하여 그 중 1부분을 표시한다. 전체 1에는 이러한 $\frac{1}{4}$이 4개가 있고, 1-$\frac{1}{4}$은 전체인 1이 4등분 한 것 중 4부분이므로 $\frac{4}{4}$-$\frac{1}{4}$임을 알 수 있다. 또한, 시각적으로 4등분한 전체 사각형에서 1부분을 빼면 3부분이 남으므로 이는 4부분 중 3부분인 $\frac{3}{4}$로 표현한다. 수직선을 통해 이

를 구할 때는 0과 1사이를 4등분하여 1이 4등분 한 것 중 4부분이므로 전체는 $\frac{4}{4}$이고, 그 중 1부분을 뺐으므로 왼쪽으로 $\frac{1}{4}$만큼 이동하게 된다. 이는 분수를 바라보는 관점은 **전체-부분의 관계로서의 분수**이지만 뺄셈하는 과정은 0으로부터 $\frac{1}{4}$단위가 3칸 이동했으므로 $\frac{3}{4}$으로 바라보고 있기 때문에 **측정으로서의 분수**로 생각할 수도 있을 것이다.



• 1은 $\frac{1}{4}$이 몇 개인가요? — 1은 $\frac{1}{4}$이 4개입니다.
• $1-\frac{1}{4}$은 얼마인가요?
— $\frac{1}{4}$이 3개 있으므로 $\frac{3}{4}$입니다.
• 수직선을 보고 $1-\frac{1}{4}$을 계산하는 방법을 알아보세요.
— $1-\frac{1}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 $4-1=3$(개)이므로 $\frac{3}{4}$입니다.

1을 $\frac{n}{n}$의 형태로 바꾸어 1−(진분수)의 계산을 분자끼리 빼는 진분수의 뺄셈 형태로 익히도록 한다.

[그림 Ⅳ-32] 측정으로서의 분수로 1-(진분수) 설명

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (133쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 진분수의 뺄셈하기.

학생들이 분모가 같은 진분수의 뺄셈은 분모는 그대로 두고 분자끼리 빼는 계산 원리를 활용하여 계산한 후 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 스스로 계산 과정을 설명함으로써 계산 원리를 다시 정리한다. 자연수인 1에서 뺄 때는 전체임을 생각하며 분자와 분모가 같다는 것을 유의한다.

라) 4차시: 분수의 덧셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 분수의 덧셈 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

실생활 속에서 대분수의 합을 구하는 상황인 떡볶이와 라면에 필요한 물의 양을 파악하는 장면으로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 대분수의 의미를 다시 떠올리고, 덧셈의 결과에 전체가 얼마 만큼인지, 또한 전체의 얼마인지 구하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 분수의 덧셈의 상황을 바라보고 있다. 결

과를 어림하는 활동을 통해 학생들이 전체와 부분에 대한 양감을 느낄 수 있도록 한다. 그러나 덧셈의 과정은 단위분수가 몇 개인지를 살펴보고 가분수를 대분수로 변환하고 있기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라봐야할 것이다.

(1) 활동 1: 실생활에서 대분수의 덧셈 알아보기.

떡볶이에는 물$1\frac{1}{4}$컵, 라면에는 $2\frac{2}{4}$컵을 사용했을 때, 사용한 물의 양을 알아보기 위해 막대모델을 통해 대분수를 표현한다. 떡볶이에는 막대모델 전체인 1과 전체를 4등분한 것 중 1부분을, 라면에는 막대모델 전체인 1이 2개와 전체를 4등분한 것 중 2부분을 막대모델을 이용해 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 대분수를 표현한다. 사용한 컵은 막대모델 전체가 3개, 전체를 4등분 한 것 중 3부분인 $3\frac{3}{4}$컵이다. 즉, 1컵과 2컵을 더하고, $\frac{1}{4}$컵과 $\frac{2}{4}$컵을 더하여 자연수는 자연수끼리, 진분수는 진분수끼리 합을 구하는 계산 원리를 도출할 수 있다. 덧셈을 하는 과정은 컵의 수가 몇 개인지를 살펴보고 있으므로 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

분수의 덧셈을 예로 들기 좋은 상황 중의 하나는 음식 만들기일 것이다. 학생들이 좋아하는 간식인 떡볶이나 라면을 만들 때 사용하는 물의 양을 더하는 상황을 통해서 대분수의 덧셈 상황을 제시한다.
덧셈의 결과를 어림하는 활동을 해 보고, 대분수의 덧셈 원리를 영역 모델을 통해 탐색하도록 한다.

- 지혜와 슬기가 함께 떡볶이와 라면을 만들고 있어요. 사용한 물의 양은 각각 얼마인가요?
  — 떡볶이에는 $1\frac{1}{4}$컵, 라면에는 $2\frac{2}{4}$컵 사용했습니다.
- 떡볶이와 라면을 만드는 데 사용한 물의 양을 구하려면 어떻게 해야 할까요? 구하는 식을 써 보세요.
  — 두 수를 더합니다. / $1\frac{1}{4}+2\frac{2}{4}$입니다.
- 사용한 물의 양이 4컵보다 많은지 적은지 말하고, 그 이유를 말해 보세요.
  — 떡볶이에는 1컵보다 많은 물을 사용하고, 라면에는 2컵보다 많은 물을 사용했으므로 3컵보다는 많습니다.
  — 떡볶이와 라면에 사용한 물의 양의 분수 부분을 더해도 1보다 작으므로 4컵보다는 적을 것 같습니다.

학생들이 다양하게 어림한 활동을 서로 이야기하도록 한다.
어림하는 활동은 양감에 대한 것일 수도 있고, 연산에 대한 암산을 기반으로 해도 좋다. 나름의 논리를 서로 이야기하게 하고, 의견을 나눌 수 있도록 한다.

[그림 Ⅳ-33] 대분수의 덧셈

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (134쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 진분수 부분의 합이 1보다 큰 (대분수) + (대분수)의 계산 원리 알아보기.

우선, 분수의 크기에 대한 양감을 기르기 위해 $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}$가 4보다 큰지 작은지 어림을 하게 한다. 이 때, 학생들은 자연수끼리의 합은 3이므로 진분수끼리의 합에 주목하게 될 것이다. 3등분으로 나눈 것 중의 2부분씩 총 4부분이 있으므로 4보다 크다고 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 어림할 것이다. 막대모델을 통해 이를 증명하게 되는데 2가지 방법으로 학생들에게 계산 원리를 익히도록 한다. 덧셈의 결과가 가분수로 나오기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라보아야 학생의 개념이 바르게 정립될 수 있을 것이다.

① 첫 번째 방법은, 자연수 부분과 진분수 부분을 나누어 계산한다.

$2\frac{2}{3}$를 막대모델 전체가 2개, 막대모델 전체를 3등분 한 것 중 2부분 색칠한다. $1\frac{2}{3}$를 막대모델 전체가 1개, 막대모델 전체를 3등분 한 것 중 1부분 색칠하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 막대모델을 표현한다. 자연수는 자연수끼리 합하고, 진분수끼리 합을 구한다. 이 때, 진분수끼리의 합이 가분수의 형태가 되므로 $\frac{4}{3}$이 3등분 한 것 중 3부분을 묶고, 1부분이 있음을 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이해하므로 대분수 $1\frac{1}{3}$로 바꾸어 $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}=(2+1)+(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})=3+\frac{4}{3}=3+1\frac{1}{3}=4\frac{1}{3}$로 계산한다. 덧셈의 결과가 가분수로 나오기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라보아야 학생의 개념이 바르게 정립될 수 있을 것이다.

② 두 번재 방법은, 가분수로 바꾸어 분자 부분만 더해서 계산한다.

$2\frac{2}{3}$는 막대 모델이 전체로서 2와 3부분으로 등분할 한 것 중 2부분이다. 이 때, 막대 모델의 전체가 2개인 것을 모두 3부분으로 등분할하여 3부분으로 나눈 것 중 8부분이므로 $\frac{8}{3}$ **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 파악하게 된다. $1\frac{2}{3}$는 앞과 마찬가지로 모두 3부분으로 등분할하여 3부분으로 나눈 것 중 5부분이므로 $\frac{5}{3}$이므로 이 둘의 합은 가분수끼리의 합으로 $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$이

다. 이 때, 가분수를 대분수로 변환하기 위해 3부분 중 3부분이 자연수이므로 3부분씩 묶어 4개의 전체와 1부분을 만들어 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 대분수 $4\frac{1}{3}$의 계산결과가 나온다. 덧셈의 과정이 가분수로 나오기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라보아야 학생의 개념이 바르게 정립될 수 있을 것이다.

(3) 활동 3: (대분수) + (대분수), (대분수) + (가분수) 계산하기.

분수의 덧셈에는 다양한 계산방법이 있으므로 학생들이 막대모델, 형식화된 계산 원리 등을 이용해 계산 연습을 할 수 있다. 특히, 대분수와 가분수는 서로 바꿀 수 있으며 변환할 때, 분모만큼 분자를 묶어 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체로 만들 수 있다. 가분수가 나오는 상황에서 단위분수를 이용하여 덧셈과정을 해결하므로 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

마) 5차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

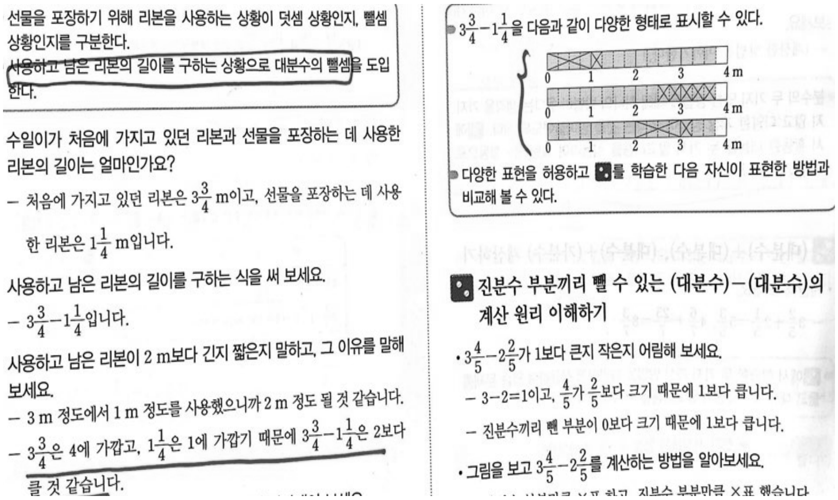
※ 학습목표: 받아내림이 없는 두 분수의 뺄셈 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

3차시에서 두 진분수의 차, 1과 진분수의 차를 구해보았다면 이번 차시에서는 받아내림이 없는 대분수간의 뺄셈을 살펴본다. 막대모델을 통해 대분수를 표현하며, 뺄셈 상황이므로 분수만큼 전체의 부분들을 제거하며 값을 구한다.

(1) 활동 1: 분수의 뺄셈 상황 이해하기.

리본이 $3\frac{3}{4}$m가 있는데 포장하는데 $1\frac{1}{4}$m를 사용했을 때 사용하고 남은 리본의 길이를 구하고자 한다. 사용하고 남은 리본의 길이를 구하고 있으므로 뺄셈 상황으로 바라볼 수 있다. 우선, 분수의 길이에 대한 양감을 기르기 위해 얼마만큼 남았을지 어림해본다. 처음에 가지고 있던 리본의 길이를 막대모델로 나타내고 사용한 리본의 길이만큼 x표를 하는데 이 때, 자연수 부분을 빼고, 진분수 부분을 뺄 수 있다. 분수를 바라보고, 막대모델을 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 4등분 하고 그 중의 부분들로 표현한다. $3\frac{3}{4}$은 전체가 3개와 전체를 4등분으로 나눈 것 중의 3부분이므로 전체인 3을 각 각 4부분으로 등분할하여 길이모델로 표현하면 총 15부분으로 $\frac{15}{4}$가 되고, $1\frac{1}{4}$은 전체를 4등분한

것 중 4부분과 1부분이므로 4등분한 것 중 5부분인 $\frac{5}{4}$ 이므로 15부분 중 5부분을 x치면 10부분이 남는다. 이를 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 부분들을 전체로 묶게 되면 4부분씩 하나의 전체가 되어 2개의 전체와 4부분 중 2부분이 남아 $2\frac{2}{4}$ 계산결과가 나온다. 이는 전체의 막대모델을 모두 등분할했기 때문에 대분수를 가분수로 변환하여 문제를 해결하였다고 생각한다. 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 자연수는 자연수끼리 빼고, 남은 진분수는 진분수끼리 뺀다.



선물을 포장하기 위해 리본을 사용하는 상황이 덧셈 상황인지, 뺄셈 상황인지를 구분한다.
사용하고 남은 리본의 길이를 구하는 상황으로 대분수의 뺄셈을 도입한다.

수일이가 처음에 가지고 있던 리본과 선물을 포장하는 데 사용한 리본의 길이는 얼마인가요?
– 처음에 가지고 있던 리본은 $3\frac{3}{4}$ m이고, 선물을 포장하는 데 사용한 리본은 $1\frac{1}{4}$ m입니다.

사용하고 남은 리본의 길이를 구하는 식을 써 보세요.
– $3\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}$입니다.

사용하고 남은 리본이 2 m보다 긴지 짧은지 말하고, 그 이유를 말해 보세요.
– 3 m 정도에서 1 m 정도를 사용했으니까 2 m 정도 될 것 같습니다.
– $3\frac{3}{4}$은 4에 가깝고, $1\frac{1}{4}$은 1에 가깝기 때문에 $3\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}$은 2보다 클 것 같습니다.

$3\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}$을 다음과 같이 다양한 형태로 표시할 수 있다.

다양한 표현을 허용하고 2를 학습한 다음 자신이 표현한 방법과 비교해 볼 수 있다.

2 진분수 부분끼리 뺄 수 있는 (대분수)−(대분수)의 계산 원리 이해하기

• $3\frac{4}{5}-2\frac{2}{5}$가 1보다 큰지 작은지 어림해 보세요.
– $3-2=1$이고, $\frac{4}{5}$가 $\frac{2}{5}$보다 크기 때문에 1보다 큽니다.
– 진분수끼리 뺀 부분이 0보다 크기 때문에 1보다 큽니다.

• 그림을 보고 $3\frac{4}{5}-2\frac{2}{5}$를 계산하는 방법을 알아보세요.

[그림 Ⅳ-34] 대분수의 뺄셈

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (136쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 진분수 부분끼리 뺄 수 있는 (대분수) - (대분수)의 계산 원리 이해하기.

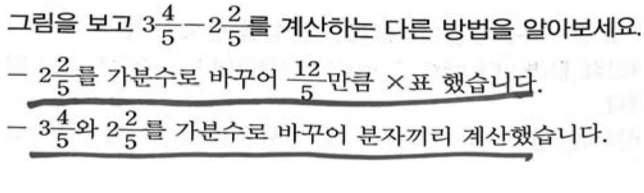
$3\frac{4}{5}$-$2\frac{2}{5}$가 1보다 큰지 작은지 어림을 통해 분수에 대한 양감을 기른다. 이때, 학생들은 자연수끼리의 차는 1이고, 진분수끼리의 차에 주목하게 될 것이다. 5등분으로 나눈 것 중의 4부분씩에서 2부분을 빼므로 1보다 크다고 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 어림할 것이다. 막대모델을 통해 이를 증명하게 되는데 2가지 방법으로 학생들에게 계산 원리를 익히도록 한다.

① 첫 번째 방법은, 자연수 부분과 진분수 부분을 나누어 계산한다.

막대모델을 통해 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 막대모델을 표현한다. 자연수는 자연수끼리, 진분수는 진분수끼리 빼 값을 구한다. $3\frac{4}{5}$는 전체 막대가 3개와 1개는 5부분으로 나눈 것 중의 4부분으로 표현한다. $2\frac{2}{5}$는 전체 막대가 2개와 5부분으로 나눈 것 중의 2부분이므로 자연수는 자연수끼리, 진분수는 진분수끼리 빼주면 자연수 전체 막대는 1개와 전체를 5부분으로 나눈 것 중의 2부분이 남아 $1\frac{2}{5}$을 구할 수 있다.

② 두 번째 방법은, 가분수로 바꾸어 분자 부분만 빼서 계산한다.

$3\frac{4}{5}$는 막대 모델이 전체로서 3과 5부분으로 나눈 것 중의 4부분이다. 이 때, 막대 모델의 전체가 3개인 것을 모두 5부분으로 등분할하여 15부분과 4부분이므로 19부분이 되며 $\frac{19}{5}$ **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 파악하게 된다. 그러나 전체보다 부분이 크게 될 경우 전체-부분의 관계로서의 분수로 바라보는 것보다는 **측정으로서의 분수**로 바라보는 것이 더 자연스러울 것이다. $2\frac{2}{5}$는 앞과 마찬가지로 모두 5부분으로 등분할하여 5부분으로 나눈 것 중 12부분이므로 $\frac{12}{5}$이므로 이 둘의 차는 $\frac{7}{5}$이다. 이 때, 가분수를 대분수로 변환하기 위해 5부분 중 5부분이 자연수이므로 5부분씩 묶어 1개의 전체와 2부분을 만들어 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 대분수 $1\frac{2}{5}$의 계산결과가 나온다.


그림을 보고 $3\frac{4}{5}-2\frac{2}{5}$를 계산하는 다른 방법을 알아보세요.

— $2\frac{2}{5}$를 가분수로 바꾸어 $\frac{12}{5}$만큼 ×표 했습니다.

— $3\frac{4}{5}$와 $2\frac{2}{5}$를 가분수로 바꾸어 분자끼리 계산했습니다.

[그림 Ⅳ-35] 대분수의 뺄셈

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (136쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: (대분수) - (대분수), (대분수) - (가분수) 계산하기.

분수의 뺄셈에는 다양한 계산방법이 있으므로 학생들이 막대모델, 형식화된 계산 원리 등을 이용해 계산 연습을 할 수 있다. 특히, 대분수와 가분수는 서로 바꿀 수 있으며 변환할 때, 분모만큼 분자를 묶어 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체로 만들 수 있다.

바) 6차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

※ 학습목표: (자연수)-(분수)의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

(자연수) - (분수)의 계산 원리를 이해하기 위해 막대모델과 수직선모델을 이용한다. 자연수를 분수로 바꾸는 과정에서 분수에서의 받아내림이 적용되기 때문에 학생들이 분수 개념을 분명하게 인식해야한다. 분수에서의 받아내림을 위해서는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 등분할하여 분수로 표현하는 원리를 이해해야한다. 전체는 단위분수가 분자만큼 있을 때 형성되고, 단위분수의 개수로 살펴보므로 **측정으로서의 분수**의 개념도 필요하나 이에 대한 설명은 없다.

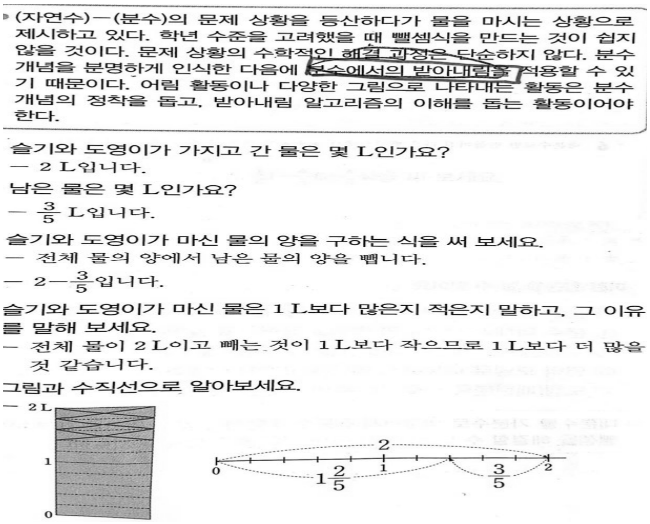
(1) 활동 1: 문제 상황을 이해하고 식 만들기.

처음에 2L의 물을 가지고 있었다. 등산 후 물이 $\frac{3}{5}$L가 남았는데 그렇다면 마신 물이 몇 L인지 구하기 위해서 학생들은 뺄셈 상황이라는 것을 인식해야한다. $2-\frac{3}{5}$을 구하기 위해 2가지 모델, 넓이모델과 길이모델을 이용한다.

① 넓이모델: 넓이모델이 2개인데 물의 양은 연속량이므로 2개를 붙여서 그린다. 그 중 $\frac{3}{5}$만큼 빼야하기 때문에 전체인 2개를 5등분으로 등분할한다. 1은 5등분으로 나눈 것 중의 5등분이므로 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 2는 10부분이 있을 것이다. 이 중에서 3부분만큼 빼므로 남은 부분은 7부분이므로 $\frac{7}{5}$이다. 이 때, 조심해야할 것은 10개의 부분이 붙어 있다고 해서 전체를 5부분이 아닌 10부분으로 생각할 수 있는데 **전체-부분의 관계로서의 분수**개념에서 전체-부분과의 관계를 생각하며 전체를 5등분했다는 사실을 잊지말아야한다. 또한, 막대모델 좌측에 자연수를 표시함으로써 위에서부터 3부분을 빼면 0으로부터 $1\frac{2}{5}$를 바로 구할 수 있는데 이는 0으로부터의 단위의 개수로 생각할 수 있

으므로 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

② 수직선모델: 연속량인 물의 양을 나타내기 위해 수직선모델을 이용할 수 있다. 뺄셈이므로 전체의 양인 2L에서 좌측으로 점을 이동시킨다. 0~2까지 각 자연수를 5등분으로 등분할 한 후 2 전체에서 5등분으로 나눈 것 중의 3등분만큼 이동하여 0으로부터 이동한 점까지의 거리를 구하면 된다. 수직선상의 자연수를 등분하여 전체를 부분으로 바꾸는 개념은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 바라볼 수 있으나 0으로부터의 양의 거리를 바라보는 계산 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다.


(자연수)−(분수)의 문제 상황을 등산하다가 물을 마시는 상황으로 제시하고 있다. 학년 수준을 고려했을 때 뺄셈식을 만드는 것이 쉽지 않을 것이다. 문제 상황의 수학적인 해결 과정은 단순하지 않다. 분수 개념을 분명하게 인식한 다음에 분수에서의 받아내림을 적용할 수 있기 때문이다. 어림 활동이나 다양한 그림으로 나타내는 활동은 분수 개념의 정착을 돕고, 받아내림 알고리즘의 이해를 돕는 활동이어야 한다.

슬기와 도영이가 가지고 간 물은 몇 L인가요?
— 2 L입니다.
남은 물은 몇 L인가요?
— $\frac{3}{5}$ L입니다.
슬기와 도영이가 마신 물의 양을 구하는 식을 써 보세요.
— 전체 물의 양에서 남은 물의 양을 뺍니다.
— $2-\frac{3}{5}$입니다.
슬기와 도영이가 마신 물은 1 L보다 많은지 적은지 말하고, 그 이유를 말해 보세요.
— 전체 물이 2 L이고 빼는 것이 1 L보다 작으므로 1 L보다 더 많을 것 같습니다.
그림과 수직선으로 알아보세요.

[그림 Ⅳ-36] (자연수)-(분수)의 영역모델과 수직선모델

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (138쪽) 교육과학기술부. 2019.

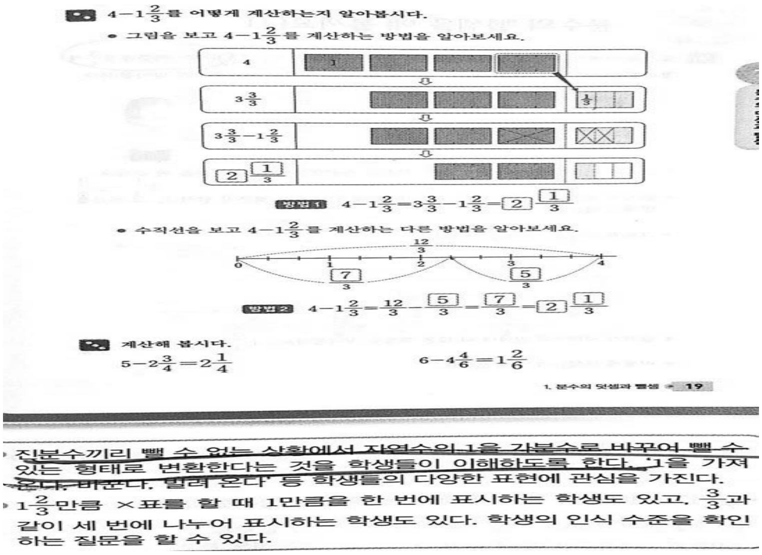
(2) 활동 2: (자연수) - (대분수)의 계산 원리 이해하기.

$4-1\frac{2}{3}$ 계산을 위해 2가지 방법을 이용한다.

① 막대모델: 4를 전체 막대 4개로 표현한다. 4에서 진분수를 빼기 어려우므로 자연수의 받아내림처럼 분수의 받아내림을 적용하고자 한다. 앞서 1-(진분수)는 배웠으므로 4의 자연수 중 1은 진분수로 바꾼다. **전체-부분의 관계로서**

의 분수로서 막대모델 그 자체의 전체는 3개와 남은 하나의 모델은 3등분하여 그 중의 3부분으로 표현한다. $4-1\frac{2}{3}=3\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}$으로 바뀌었으므로 자연수는 자연수끼리, 진분수는 진분수끼리 계산한다.

② 수직선모델: 뺄셈이므로 전체가 1인 전체 단위가 4까지 필요하다. $1\frac{2}{3}$를 빼기 위해 모든 단위를 $\frac{1}{3}$단위로서 3등분하면 자연수 4는 12부분, 12($\frac{1}{3}$단위)가 된다. $1\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$단위로 3등분하면 자연수 1은 3부분과 나머지 부분해서 5부분, 5($\frac{1}{3}$단위)가 된다. 이들의 차는 0으로부터의 양의 거리 7($\frac{1}{3}$단위)가 되므로 $\frac{7}{3}$이 된다. 이러한 계산 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다. $\frac{7}{3}$을 대분수로 변환할 때 전체가 $\frac{1}{3}$단위가 3부분이 필요하므로 3부분씩 묶어 2개의 전체를 만들고 $\frac{1}{3}$이 남아 $2\frac{1}{3}$이 되는 과정은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라볼 수 있다.


$4-1\frac{2}{3}$를 어떻게 계산하는지 알아봅시다.

• 그림을 보고 $4-1\frac{2}{3}$를 계산하는 방법을 알아보세요.

방법 1 $4-1\frac{2}{3}=3\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}=\boxed{2}\frac{\boxed{1}}{3}$

• 수직선을 보고 $4-1\frac{2}{3}$를 계산하는 다른 방법을 알아보세요.

방법 2 $4-1\frac{2}{3}=\frac{12}{3}-\frac{\boxed{5}}{3}=\frac{\boxed{7}}{3}=\boxed{2}\frac{\boxed{1}}{3}$

계산해 봅시다.

$5-2\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}$ $6-4\frac{4}{6}=1\frac{2}{6}$

1. 분수의 덧셈과 뺄셈 19

• 진분수끼리 뺄 수 없는 상황에서 자연수의 1을 가분수로 바꾸어 뺄 수 있는 형태로 변환한다는 것을 학생들이 이해하도록 한다. '1을 가져온다, 바꾼다, 빌려 온다' 등 학생들의 다양한 표현에 관심을 가진다.

• $1\frac{2}{3}$만큼 ×표를 할 때 1만큼을 한 번에 표시하는 학생도 있고, $\frac{3}{3}$과 같이 세 번에 나누어 표시하는 학생도 있다. 학생의 인식 수준을 확인하는 질문을 할 수 있다.

[그림 Ⅳ-37] (자연수)-(분수)의 영역모델과 수직선모델

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (139쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: (자연수) - (분수) 계산하기.

분수의 뺄셈 중 진분수끼리 뺄 수 없을 때 자연수의 1을 가분수로 바꾸어 계산하는 원리를 이용하여 계산 연습을 할 수 있다. 이 때, 분모와 분자가 어떤 값이 되는지 유의하며 계산한다.

사) 7차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 받아내림이 있는 두 분수의 뺄셈 계산 원리와 형식을 이해하고 계산할 수 있다.

받아내림이 있는 대분수간의 뺄셈을 구하고자 한다. 자연수 1을 가분수로 바꾸어 계산하는 받아내림 원리를 이용한다. 전체를 정하고 분모와 분자의 크기가 같을 때, 즉, 전체를 몇 부분으로 나눈 것 중의 몇 부분으로 표현하므로 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 받아내림을 하고 있다. 전체를 빌려와 가분수로 표현하고 있으므로 **측정으로서의 분수**의 관점에서도 살펴봐야한다.

(1) 활동 1: 대분수의 뺄셈 상황 이해하기.

슬기는 책장을 $4\frac{1}{4}$개, 지혜는 $2\frac{3}{4}$개 정리했을 때, 슬기가 지혜보다 얼마나 더 많은 책장을 정리했는지 알아보고자 한다. 슬기와 지혜가 정리한 책장의 수를 비교하고 있으므로 차이를 비교하는 뺄셈 상황이다. 슬기가 지혜보다 더 정리한 책장이 2개보다 많은지 적은지 어림하며 4-2는 2이지만 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{3}{4}$을 뺄 수 없기 때문에 자연수에서 빌려올 것을 생각하여 2보다 더 작을 것이라고 어림할 수 있다. 막대모델과 수직선모델을 통해 이를 증명하며 학생들에게 계산 원리를 익히도록 한다.

① 막대모델: **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 4개의 막대모델과 4등분으로 나누어진 1개의 모델로 표현하고, 4등분으로 나누어진 1개의 모델은 4부분 중 1부분을 색칠한다. $2\frac{3}{4}$을 빼기 위해 먼저, $\frac{3}{4}$을 빼기 위한 작업으로 전체 막대 모델 1개를 4등분으로 나눈다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 받아내림을 한다. 이제는 $3\frac{5}{4}$가 있으므로 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 뺄셈을 하여 계산할 수 있다. 이 때, 진분수간의 뺄셈에서 단위분수가 몇 개임

을 살펴봐야하므로 **측정으로서의 분수**로도 볼 수 있어야한다.

② 수직선모델: 수직선상에서 $4\frac{1}{4}$을 표현한다. 분모가 4이므로 각 각의 자연수들은 4등분한다. 뺄셈이므로 전체가 1인 전체 단위가 5까지 필요하다. $2\frac{3}{4}$를 빼기 위해 모든 단위를 $\frac{1}{4}$단위로서 4등분하면 $4\frac{1}{4}$는 17부분, 17($\frac{1}{4}$단위)가 된다. $2\frac{3}{4}$는 $\frac{1}{4}$단위로 4등분하면 자연수 2는 8부분과 나머지 부분해서 11부분, 11($\frac{1}{4}$단위)가 된다. 이들의 차는 0으로부터의 양의 거리 6($\frac{1}{4}$단위)가 되므로 $\frac{6}{4}$이 된다. 이러한 계산 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다. $\frac{6}{4}$을 대분수로 변환할 때 전체가 $\frac{1}{4}$단위가 4부분이 필요하므로 4부분씩 묶어 1개의 전체를 만들고 $\frac{2}{4}$가 남아 $1\frac{2}{4}$이 되는 과정은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

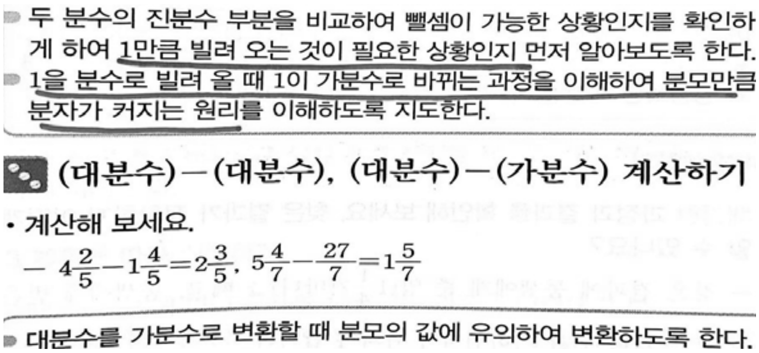
(2) 활동 2: 진분수 부분끼리 뺄 수 없는 (대분수) - (대분수)의 계산 원리 설명하기.

$3\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}$ 계산 결과가 2보다 큰지 작은지 어림하며 3-은 1이지만 $\frac{1}{3}$에서 $\frac{2}{3}$를 뺄 수 없기 때문에 자연수에서 빌려올 것을 생각하여 2보다 더 작을 것이라고 어림할 수 있다. 막대모델과 수직선모델을 통해 이를 증명하며 학생들에게 계산원리를 익히도록 한다.

① 막대모델: **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 3개의 막대모델과 3등분으로 나누어진 1개의 모델로 표현하고, 3등분으로 나누어진 1개의 모델은 3부분 중 1부분을 색칠한다. $1\frac{2}{3}$의 진분수 부분인 $\frac{2}{3}$를 빼기 위해 먼저, $3\frac{1}{3}$의 자연수 3 중에서 1을 빌려온다. 전체 막대 모델 1개를 3등분으로 나눈다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 받아내림을 한다. 이제는 $2\frac{4}{3}$이 있으므로 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 뺄셈을 하여 계산할 수 있다. 전체모델 2에서 한 개를 x표하고, 받아내림을 한 분수 부분인 $\frac{4}{3}$는 $\frac{1}{3}$단위가 4개이므로 $\frac{2}{3}$를

빼기위해 $\frac{1}{3}$단위가 2개를 x표한다. 즉, $3\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}-1\frac{2}{3}=(2-1)+(\frac{4}{3}-\frac{2}{3})=1\frac{2}{3}$이다. 단위분수로 살펴보는 관점은 **측정으로서의 분수**이다.

② 수직선모델: 수직선상에서 $3\frac{1}{3}$을 표현한다. 분모가 3이므로 각 각의 자연수들은 3등분한다. 뺄셈이므로 전체가 1인 전체 단위가 4까지 필요하다. $1\frac{2}{3}$를 빼기 위해 모든 단위를 $\frac{1}{3}$단위로서 3등분하면 $3\frac{1}{3}$는 10부분, 10($\frac{1}{3}$단위)가 된다. $1\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$단위로 3등분하면 자연수 1은 3부분과 나머지 부분해서 2부분, 5($\frac{1}{3}$단위)가 된다. 이들의 차는 0으로부터의 양의 거리 5($\frac{1}{3}$단위)가 되므로 $\frac{5}{3}$이 된다. 이러한 계산 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다. $\frac{5}{3}$을 대분수로 변환할 때 전체가 $\frac{1}{3}$단위가 3부분이 필요하므로 3부분씩 묶어 1개의 전체를 만들고 $\frac{2}{3}$가 남아 $1\frac{2}{3}$이 되는 과정은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라볼 수 있다.



▶ 두 분수의 진분수 부분을 비교하여 뺄셈이 가능한 상황인지를 확인하게 하여 1만큼 빌려 오는 것이 필요한 상황인지 먼저 알아보도록 한다.

▶ 1을 분수로 빌려 올 때 1이 가분수로 바뀌는 과정을 이해하여 분모만큼 분자가 커지는 원리를 이해하도록 지도한다.

(대분수)－(대분수), (대분수)－(가분수) 계산하기

• 계산해 보세요.

— $4\frac{2}{5}-1\frac{4}{5}=2\frac{3}{5}$, $5\frac{4}{7}-\frac{27}{7}=1\frac{5}{7}$

▶ 대분수를 가분수로 변환할 때 분모의 값에 유의하여 변환하도록 한다.

[그림 Ⅳ-38] 받아내림이 있는 대분수의 뺄셈

주. 출처 **수학 4-2 교사용 지도서** (141쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: (대분수) - (대분수), (대분수) - (가분수) 계산하기.

분수의 뺄셈 중 대분수의 부분인 진분수끼리 뺄 수 없을 때 자연수의 1을 가분수로 바꾸어 계산하는 원리를 이용하여 계산 연습을 할 수 있다. 이 때, 분모와 분자가 어떤 값이 되는지 유의하며 계산한다.

2) 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 4학년 2학기 분수는 측정으로서의 분수의 의미를 이용하여 학습목표인 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리와 형식을 이해하고 계산한다. 각 각의 분수를 전체-부분의 관계로서의 분수로 제시를 하고, 측정으로서의 분수 관점에서 그 안의 단위분수가 몇 개있는지를 통해 덧셈과 뺄셈을 계산한다.

<표 Ⅳ-3> 4학년 2학기 1단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	○	●			
3차시	○	●			
4차시	○	●			
5차시	○	●			
6차시	○	●			
7차시	○	●			

라. 5학년 1학기

분수의 사칙연산을 위한 기본적인 개념을 배운다. 2단원 '약수와 배수', 4단원 '약분과 통분'을 배운 후 5단원 '분수의 덧셈과 뺄셈'에 들어간다.

2단원에서는 자연수의 범위에서 약수와 배수를 알아보고, 곱의 관계를 통하여 약수와 배수의 관계를 이해하게 한다(5-1 지도서, 150쪽). 분수에 관한 추론 중 **비례적 추론**, **상대적 사고, 승법적 사고**를 형성할 수 있을 것이다. 5-1 4단원 약분과 통분의 기초이자 분수의 개념 중 **연산자로서의 분수**와 **비율로서의 분수**에 영향을 준다. 또한, 약수를 설명함에 있어 **등분할**과 **몫으로서의 분수**를 찾아볼 수 있다. 연산자로서의 분수는 분수를 곱셈과 나눗셈의 결과로 바라보고 있고, 비율로서의 분수는 두 변량 사이의 곱의 관계를 나타낸다. 똑같이 나눈다는 등분할의 개념과 한 사람당 가질 수 있는 양을 의미하는 몫으로서의 분수까지 분수의 기초를 살펴볼 수 있는 단원이다. 이 단원은 자체가 분수의 개념을 설명하는 것은 아니지만 분수의 개념을 이해하기 위한 기초 단원으로 생각하면 좋을 것이다.

4단원에서는 크기가 같은 분수를 만드는 활동인 약분과 통분은 여러 가지 분모로 표현되는 다양한 분수를 비교하고 나아가 연산을 함에 있어 기본적이고 중요한 개념이 된다(5-1 지도서, 212쪽). 동치분수를 만들며 분수에서는 분수의 성질에 따라 약분과 통분이 가능하다는 것이다. 약수와 배수 단원을 통해 학생들은 분수를 이해하기 위한 다양한 추론과정을 경험했고, 이를 바탕으로 동치분수를 만들며, 분수의 사칙연산을 위한 기본을 다진다. 또한, 단원 배경 지식에서 자연수와 다른 분수의 특징을 다음과 같이 기술하고 있다.

1. 자연수와 다른 분수의 몇 가지 특징

분모가 다른 분수의 연산으로 나아가기 전에 학생들은 자연수와 다른 분수의 몇 가지 특징을 이해하고 있어야 한다.

첫째, 자연수 체계에서는 하나의 수로 물건의 수를 나타내게 되는데, 이를테면 5개의 구슬을 나타내는 데 '다섯' 또는 '5'라고 나타낸다. 그러나 분수에서는 분모에 따라 여러 가지 동치분수로 나타낼 수 있다. 예를 들어 피자 한 판의 절반은 $\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ 등으로 표현할 수 있다.

둘째, 분수의 덧셈과 같은 경우에는 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{3+3}=\frac{3}{6}$과 같은 잘못된 계산 과정이 나타날 수 있는데 이는 자연수 체계에서의 습관 때문에 더 자연스럽게 느껴질 수 있다.(교육부, 2015).

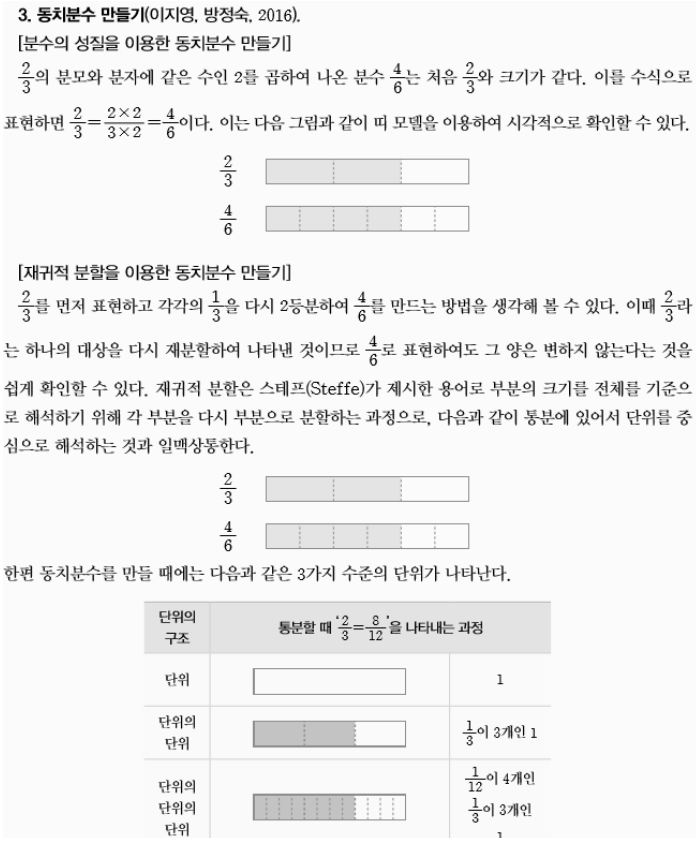
셋째, 분수는 가법적 사고(덧셈이 기반이 되는 사고)와 달리 승법적 사고(곱셈이 기반이 되는 사고)를 기반으로 하고 있다. 이로 인해 자연수 체계에 익숙한 학생들이 직관적으로 분수의 성질을 이해하는 데 있어서 어려움을 겪는다. 예를 들어, 자연수 체계에서는 곱셈을 하면 그 값이 더 커지고, 나눗셈을 하면 그 값이 더 작아지는 데 비해 분수의 곱셈에서는 그 값이 더 작아지기도 하고, 분수의 나눗셈은 그 값이 더 커지는 경우가 생긴다.(김성준 외 7인, 2013).

따라서 학생들은 분수를 학습할 때 구체물, 그림 등의 다양한 자료와 표현 방법을 이용하여 분수를 나타내고 표현해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있어야 한다.

[그림 Ⅳ-39] 자연수와 다른 분수의 특징

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (219쪽) 교육과학기술부. 2019.

분수의 약분과 통분은 실생활에서 찾기 어려운 개념이다. 왜냐하면 분수가 가지고 있는 자료값에 초점을 두기보다는 계산의 편리성을 위해 조작된 형태이기 때문이다(5-1 지도서, 212). 이는 후에 **연산자로서의 분수**로 분수를 이해하고 분수의 사칙연산을 위한 선행 학습 개념에 의의를 가진다. 특히, 약분은 분수의 곱셈과 나눗셈, 통분은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 및 분수 비교에 유용하다. 통분을 위해 필요한 동치분수 만드는 방법을 2가지로 제시한다. 첫째, 분수의 성질을 이용한다. 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 분수의 크기가 같음을 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 표현하고 시각적으로 살펴본다. 둘째, 재귀적 분할을 이용한다. 재귀적 분할은 스테프(Steffe)가 제시한 용어로 부분의 크기를 전체를 기준으로 해석하기 위해 각 부분을 다시 부분으로 분할하는 과정으로 통분에 있어서 단위를 중심으로 해석하는 것과 같은 맥락이다(2003, 2004 재인용: 5-1 지도서, 220쪽). 전체를 기준으로 해석하기 위해 분할하는 관점은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 살펴볼 수 있으나 또한 단위분수가 몇 개인지를 살펴보며 **측정으로서의 분수**로도 볼 수 있다.



3. 동치분수 만들기(이지영, 방정숙, 2016).

[분수의 성질을 이용한 동치분수 만들기]

$\frac{2}{3}$의 분모와 분자에 같은 수인 2를 곱하여 나온 분수 $\frac{4}{6}$는 처음 $\frac{2}{3}$와 크기가 같다. 이를 수식으로 표현하면 $\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$이다. 이는 다음 그림과 같이 띠 모델을 이용하여 시각적으로 확인할 수 있다.

$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

[재귀적 분할을 이용한 동치분수 만들기]

$\frac{2}{3}$를 먼저 표현하고 각각의 $\frac{1}{3}$을 다시 2등분하여 $\frac{4}{6}$를 만드는 방법을 생각해 볼 수 있다. 이때 $\frac{2}{3}$라는 하나의 대상을 다시 재분할하여 나타낸 것이므로 $\frac{4}{6}$로 표현하여도 그 양은 변하지 않는다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 재귀적 분할은 스테프(Steffe)가 제시한 용어로 부분의 크기를 전체를 기준으로 해석하기 위해 각 부분을 다시 부분으로 분할하는 과정으로, 다음과 같이 통분에 있어서 단위를 중심으로 해석하는 것과 일맥상통한다.

$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

한편 동치분수를 만들 때에는 다음과 같은 3가지 수준의 단위가 나타난다.

단위의 구조	통분할 때 '$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$'을 나타내는 과정	
단위		1
단위의 단위		$\frac{1}{3}$이 3개인 1
단위의 단위의 단위		$\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 3개인

[그림 Ⅳ-40] 동치분수 만들기

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (220쪽) 교육과학기술부. 2019.

4-2 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루었다. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 기준이 되는 단위가 같으므로 분자끼리의 덧셈과 뺄셈으로 범자연수 연산의 연장선에서 문제를 해결할 수 있었지만 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 공통분모 도입의 필요성에 따라 분수 연산에 대한 보다 깊은 이해가 필요하다(5-2 지도서, 244쪽). 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 공통분모를 만들기 위해서는 학생들의 동치분수에 대한 정확한 이해가 기반이 되어야한다. 이 때, 기준이 되는 단위가 달라지므로 분수 연산에 대한 양감 및 수감각의 이해가 선행되지 않으면 자연수 연산의 확장만으로는 분수 연산의 이해에

어려움을 겪게 된다(5-1 지도서, 250쪽). 그동안 배워 온 선수 학습에서의 **전체-부분의 관계로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비례적 추론, 상대적 사고, 승법적 사고, 단위화, 나누기와 비교하기, 등분할** 등의 추론 과정을 통해 학생들이 **분수에 대한 양감과 수 감각**이 필요하다.

이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 **단위화**가 중요한 개념이다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체라는 1개의 단위를 **등분할**하고 재단위화하여 분수가 형성된다. 이러한 분수를 동치분수로 만들기 위해 다시 재단위화를 하여 단위의 단위의 단위로 단위가 쪼개진다. 이는 앞서 말한 재귀적 분할의 과정으로 볼 수 있다. 단위를 쪼갬으로써 새로운 공통 단위인 공통분모를 이용하여 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

1) 각 차시 속 분수 - 2단원. 약수와 배수

가) 1차시 - 단원도입

카드놀이 하는 학생들을 다르게 함으로써 한 사람이 가질 수 있는 카드의 양이 달라질 수 있음을 인지한다. 이는 모든 학생이 똑같은 카드를 받는 **등분할**의 개념과 한 사람당 가지는 카드의 양이라는 나눗셈의 몫의 개념을 찾아 볼 수 있다. 또한, 한 사람이 가지는 카드의 양과 사람의 수 사이에는 **상대적 사고**의 추론 과정이 있다. 학생 수가 늘어남에 따라 카드의 개수는 줄어듦에 있어서는 **비례적 추론** 과정을 찾아볼 수 있다. 등분할의 개념은 후에 **몫으로서의 분수** 도입으로 이어진다. 도미노 놀이를 하고 있는 학생들은 공통의 규칙을 찾으며 공배수를 배워 약분과 통분의 기본 개념을 찾아볼 수 있다.

나) 2차시 - 약수와 배수를 찾아볼까요

※ 학습목표:

- 약수의 의미를 알고 자연수의 약수를 구할 수 있다.

- 배수의 의미를 알고 자연수의 배수를 구할 수 있다.

'[6수01-02] 약수, 공약수, 최대공약수의 의미를 알고 구할 수 있다.'와 '[6수01-03] 배수, 공배수, 최소공배수의 의미를 알고 구할 수 있다.'의 성취기준 중 약수와 배수의 의미를 학습하고자 구체물을 똑같이 나누는 방법인 **등분할**을 통

해 나눗셈식을 나타내 약수를 알아보고, 등분할된 구체물을 여러 사람에게 나눠 주며 곱셈식을 나타내 배수를 알아본다.

(1) 활동 1: 구체물을 똑같이 나누는 방법 알아보기.

카드 12장을 똑같이 나누어 주는 상황에서 몇 명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 찾아본다. 약수란 12를 나머지 없이 나머지가 0이 되도록 나누어떨어지게 하는 수이다. 분수 이해를 위한 추론 중 나머지가 없이 **똑같이 나누는** 경험(Fair sharing)을 통해 **등분할**(Partitioning)의 개념을 확립할 수 있다. 등분할을 통해 똑같이 나눌 수 있는 수가 약수임을 알 수 있다.

• 카드 12장을 1명에게 준다면 1명이 가지는 카드는 몇 장인가요?
– 12장입니다.
• 카드 12장을 2명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보세요.
– 6장씩 나누어 줄 수 있습니다.
• 카드 12장을 3명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보세요.
– 4장씩 나누어 줄 수 있습니다.
• 카드 12장을 4명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보세요.
– 3장씩 나누어 줄 수 있습니다.
• 카드 12장을 5명에게 똑같이 나누어 줄 수 있는지 알아보세요.
– 똑같이 나누어 줄 수 없습니다.
• 카드 12장을 몇 명에게 남김없이 똑같이 나누어 줄 수 있는지 모두 말해 보세요.
– 1명, 2명, 3명, 4명, 6명, 12명입니다.

[그림 Ⅳ-41] 등분할

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (162쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 나눗셈식을 이용하여 약수 구하기.

12를 나누어 떨어지게 하는 수를 나눗셈식을 통해 찾고, 이를 12의 약수임을 인지한다. 약수는 하나만 있는 것이 아니라 여러 가지가 있음을 확인하며 사람 수가 늘어남에 따라 똑같이 받을 수 있는 카드의 수는 줄어듦으로써 분수 이해를 위한 추론 중 변량 사이의 **곱의 관계**와 **상대적 사고**를 내재적으로 이해할 수 있다. 이는 분수의 이해의 기본이 되는 추론과정들이다.

· 카드 12장을 친구 몇 명에게 남김없이 똑같이 나누어 줄 수 있는지
나눗셈식을 이용하여 알아보세요.
— 나눗셈식에서 12를 나누어떨어지게 하는 수를 모두 구합니다.
· 12를 나누어떨어지게 하는 수를 구하는 나눗셈식은 무엇인가요?
— 12÷1=12입니다.
— 12÷2=6입니다.
— 12÷3=4입니다.
— 12÷4=3입니다.
— 12÷6=2입니다.
— 12÷12=1입니다.

[그림 Ⅳ-42] 곱의 관계와 상대적 사고

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (162쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 나눗셈식을 이용하여 18의 약수 찾아보기.

18의 약수를 찾기 위해 나눗셈식을 이용한다. 18을 나누어떨어지게 하는 수를 찾음으로써 곱의 관계에 있는 수들을 확인하며 **승법적 사고**를 형성할 수 있다.

(4) 활동 4: 곱셈식을 이용하여 배수 알아보기.

카드놀이를 하려면 1명에게 4장의 카드가 필요하다. 2명, 3명일 때 필요한 카드는 몇 장인지 알아보고자 한다. 4를 1배, 2배. 3배하는 곱셈적인 사고에서 배 관계를 익힐 수 있다. 그동안 학생들은 합관계를 이용한 덧셈에 기반한 전략(building up strategy)을 많이 이용했다. 이 역시 학생들은 1명일 때는 4장, 2명일 때는 4장 더 필요하므로 4+4=8장이 필요하다고 생각할 수 있다. 따라서, 언어적으로 '4를 1배한 수는 4이며 이는 4x1=4', '4를 3배한 수는 12이며 4x3=12' 표현함으로써 학생들이 곱셈에 기반한 **승법적 사고** 및 **비례적 추론** 과정을 익힐 수 있다. 비례적 추론을 많이 할수록 학생들은 문제 해결함에 있어 과정이 적어진다.

4를 몇 배 한 수를 곱셈식으로 알아보세요.
— 4를 1배 한 수는 4입니다. 4×1=4
— 4를 2배 한 수는 8입니다. 4×2=8
— 4를 3배 한 수는 12입니다. 4×3=12
— 4를 4배 한 수는 16입니다. 4×4=16
— 4를 5배 한 수는 20입니다. 4×5=20

[그림 Ⅳ-43] 승법적 사고와 비례적 추론

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (164쪽) 교육과학기술부. 2019.

(5) 활동 5: 수 배열표에서 배수 찾기.

수 배열표에서 6의 배수를 찾아보고 곱셈식으로 표현함으로써 변화를 **승법적 사고**로 바라본다. 이는 비례적 추론 중 **정비례** 추론과정이다.

다) 3차시 - 곱을 이용하여 약수와 배수의 관계를 알아볼까요

※ 학습목표: 곱을 이용하여 약수와 배수의 관계를 이해한다.

(1) 활동 1: 두 수의 곱으로 나타내어 약수와 배수의 관계 알아보기.

'[6수01-04] 약수와 배수의 관계를 이해한다.'의 성취기준을 학습하는 차시이다. 카드 15장을 똑같이 나눌 수 있는 **나누기(fair sharing)**을 통해 어떻게 묶는지에 따라 다른 곱관계가 나오는 것을 확인할 수 있다. 1장씩 묶었을 때 15묶음, 3장씩 묶었을 때 5묶음이 나오는 것을 확인함으로써 곱셈식을 표현하며 **승법적 사고**를 자극하고, 변화에 있어 덧셈이 아닌 곱셈으로 연결되며 단위가 바뀜에 따라 묶음의 수가 바뀌는 **상대적 사고**를 가질 수 있다. 15=3x5를 보고 15는 3과 5의 배수이며, 3과 5는 15의 약수임을 확인하며 곱을 이용하여 약수와 배수의 관계를 직관적으로 인지한다.

(2) 활동 2: 여러 수의 곱으로 나타내어 약수와 배수의 관계 알아보기.

12를 두 수의 곱이 아닌 여러 수의 곱으로 다양하게 나타내며 12는 어떤 수의 배수이며, 12의 약수는 어떤 수들이 있는지 찾아본다. 수를 유연하게 다루며 **곱관계**의 수감각을 키운다. 각 각의 수가 곱관계로 연결되어 있으며 약수와 배수의 관계를 다시 정립하며 학생들이 후에 나올 분수의 사칙연산을 위한 **상대적 사고** 내재할 수 있을 것이다.

(3) 활동 3: 여러 수의 곱으로 나타내어 약수와 배수의 관계 설명하기.

직접 설명함으로써 학생들이 곱관계에 있는 약수와 배수를 확립한다.

라) 4차시 - 공약수와 최대공약수를 구해 볼까요

※ 학습목표:

- **공약수와 최대공약수의 의미를 알고 이를 구할 수 있다.**
- **공약수와 최대공약수의 관계를 이해한다.**

공약수와 최대공약수는 후속 학습인 약분을 위해 꼭 알아야하는 개념이다.

(1) 활동 1: 비어 있는 두 곳을 한 가지 색으로 채울 수 있는 조각 찾아보기.

12칸과 8칸의 빈 곳을 같은 크기의 조각으로 채운다. 이 때, 12=1+2+3+6 절대적 사고에 기반하지 않고 1칸, 2칸 각 각의 조각들로 가득 채우며 **상대적 사고**에 기반하여 약수를 파악해야한다. 12칸은 1칸, 2칸, 3칸, 4칸, 6칸 조각을 이용하여 약수를 구하며 8칸은 1칸, 2칸, 4칸, 8칸 조각을 이용하여 약수를 구한다. 비어 있는 두 곳을 모두 채울 수 있는 조각들과 그 중에 가장 큰 조각의 크기를 구함으로서 공통된 약수를 구한다.

(2) 활동 2: 공통된 약수 찾아보기.

8과 12의 공통된 약수를 찾고, 그중에서 가장 큰 수를 찾아 공약수와 최대공약수의 개념을 처음 도입한다. 이는 후속 학습인 약분과 동치분수에서 필요한 과정이다.

(3) 활동 3: 공약수와 최대공약수의 관계 설명하기.

공약수 중 가장 큰 공약수가 최대공약수임을 알고, 후에 약분 시 최대공약수를 이용하면 약분 과정을 줄일 수 있을 것이다.

마) 5차시 - 최대공약수를 구하는 방법을 알아볼까요

※ 학습목표:

- 최대공약수를 구하는 방법을 알고 이를 구할 수 있다.

두 수/여러 수의 곱으로 이루어진 수들의 최대공약수를 구하기 위해 2가지 방법을 이용한다.

① 곱셈식을 이용하여 곱셈식 안에 공통으로 들어 있는 가장 큰 수 찾기: **승법적 사고**를 기반으로 각 수를 곱관계의 수로 표현한다.

② 두 수/여러 수를 공통으로 나눌 수 있는 수 중 가장 큰 수 찾기: 소인수분해를 이용하여 공통으로 들어있는 수들을 곱하여 최대공약수를 구한다. 이는 수를 유연하게 이용하며 **승법적 사고**와 **비례적 추론**의 기반의 수감각을 키울 수 있다.

바) 6차시 - 공배수와 최소공배수를 구해 볼까요

※ 학습목표:

- 공배수와 최소공배수의 의미를 알고 이를 구할 수 있다.

- **공배수와 최소공배수의 관계를 이해한다.**

공배수와 최소공배수는 후속 학습인 통분을 위해 꼭 필요한 개념이다.

(1) 활동 1: 같은 색 나무 도막이 놓인 곳을 찾는 방법 알아보기.

같은 색 나무 도막이 나란히 놓인 경우를 찾음으로써 공통된 배수를 찾아본다.

(2) 활동 2: 공통된 배수 찾아보기.

2와 3 각 각의 배수를 찾아보고 공통의 배수를 찾는다. 각 수를 1배, 2배. 3배 하는 곱셈적인 사고에서 배관계를 익힐 수 있다. 그동안 학생들은 합관계를 이용한 덧셈에 기반한 전략(building up strategy)을 많이 이용했다면 공배수와 최소공배수를 찾기 위해 학생들이 곱셈에 기반한 **승법적 사고** 및 **비례적 추론** 과정을 익힐 수 있다.

(3) 활동 3: 공배수와 최소공배수의 관계 설명하기.

자연수에서의 배수는 끊임없이 커질 수 있으므로 최대가 아닌 공배수 중 가장 작은 수가 최소공배수가 됨을 이해한다.

사) 7차시 - 최소공배수를 구하는 방법을 알아볼까요

※ 학습목표: 최소공배수를 구하는 방법을 알고 이를 구할 수 있다.

두 수/여러 수의 곱으로 이루어진 수들의 최소공배수를 구하기 위해 2가지 방법을 이용한다.

① 곱셈식을 이용하여 곱셈식 안에 (공통으로 들어 있는 수) x (공통으로 들어 있지 않은 모든 수): **승법적 사고**를 기반으로 각 수를 곱관계의 수로 표현한다.

② (두 수/여러 수를 공통으로 나눌 수 있는 수 중 가장 큰 수) x (나머지 모든 수) : 소인수분해를 이용하여 공통으로 들어있는 수들을 곱하여 최대공약수를 구한다. 최대공약수와 나머지 수들을 곱한다. 이는 수를 유연하게 이용하며 **승법적 사고**와 **비례적 추론**의 기반의 수감각을 키울 수 있다.

아) 8차시 - 도전 수학. 목장에 울타리를 설치해 볼까요

※ 학습목표:

- **최대공약수와 관련된 문제를 해결하고 어떻게 해결하였는지 설명할 수 있다.**
- **조건을 바꾸어 문제를 만들고 이를 해결할 수 있다.**

울타리를 설치하는 데 필요한 말뚝의 수를 구하기 위해 두 수의 최대공약수를 구하여 문제를 해결한다. 학생들이 그 동안 가진 **똑같이 나누기**, **승법적 사고**, **비례적 추론** 과정을 통해 문제 상황에서 최대공약수를 구하는 문제임을 인지하는 것이 가장 중요하다. 말뚝을 일정한 간격으로 박으려면 공약수 간격으로 말뚝을 박아야 하므로, 두 수의 최대공약수 간격으로 말뚝을 박을 때 가장 적게 박을 수 있다.

자) 9차시 - 얼마나 알고 있나요

약수와 배수의 의미를 알아보고, 약수와 배수의 관계를 이해함으로써 분수에 관한 추론 중 **비례적 추론**, **상대적 사고**, **승법적 사고**를 형성한다. 최대공약수와 최소공배수를 구하는 방법을 익힘으로써 후속 학습인 동치분수를 만드는 방법, 약분과 통분의 기초를 익힐 수 있다.

차) 10차시 - 탐구 수학, 십간십이지를 알아볼까요

※ 학습목표:

- 십간십이지의 의미를 살펴보고, 배수, 공배수를 이용하여 십간십이지와 관련된 문제를 해결할 수 있다.

- 십간십이지에서 규칙을 찾아 설명할 수 있다.

십간은 10의 배수, 십이지는 12의 배수로서 간지가 몇 년 마다 반복되는지 구하기 위해서는 두 수의 최소공배수를 구하여 문제를 해결한다. 학생들이 그 동안 가진 **승법적 사고**, **비례적 추론** 과정을 통해 문제 상황에서 최소공배수를 구하는 문제임을 인지하는 것이 가장 중요하다. 십간은 10의 배관계에 있고, 십이지는 12의 배관계에 있으므로 공통으로 처음 만나기 위해서는 10과 12의 최소공배수일 때 처음 반복됨을 알 수 있다.

2) 각 차시 속 분수 - 약분과 통분

가) 1차시: 단원 도입

단원 도입에서는 동치분수 만드는 방법, 분수와 소수의 크기 비교, 이분모분수의 크기 비교를 위한 호기심을 자극한다. 같은 크기의 색 띠를 만들기 위해

자르는 방법을 보여주는 막대모델과 고구마를 심은 텃밭의 크기는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 등분할하여 분수를 표현한다. 이를 맞대어 크기가 같음을 확인함에 있어 같은 시작점으로부터의 거리를 확인하므로 이는 **측정으로서의 분수**로 표현하였다. 또한, 비커 속 물의 양을 측정함에 있어 전체를 10등분하여 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 물의 양을 표시할 수 있으며 이는 0으로부터 물의 높이를 측정하는 것이기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라 볼 수도 있다.

나) 2차시: 크기가 같은 분수를 알아볼까요

※ 학습목표: 크기가 같은 분수를 이해하고 찾을 수 있다.

이 차시에서는 '[6수01-05] 분수의 성질을 이용하여 크기가 같은 분수를 만들 수 있다.' 성취기준을 달성하고자 크기가 같은 분수를 직관적으로 이해하도록 한다. 분수의 형태는 다르지만 분수의 크기가 같은 분수를 시각적으로 제시함으로써 크기가 같은 분수를 살펴본다. 크기가 같은 분수를 설명함에 있어 **전체-부분의 관계로서의 분수**와 **측정으로서의 분수**를 이용한다.

(1) 활동 1: 분모가 다른 두 분수 살펴보기.

왼쪽 어항에는 어항의 $\frac{1}{3}$만큼, 오른쪽 어항에는 어항의 $\frac{2}{6}$만큼 물을 채우고자 할 때, 물의 양을 비교한다. 전체인 어항의 크기가 같으므로 전체를 3등분한 것 중 1부분과 6등분 한 것 중 2부분의 높이를 비교한다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수를 이해하지만 같은 기준점으로부터의 높이를 비교하여 같음을 인지함으로 **측정으로서의 분수** 측면으로도 바라볼 수 있다. 채운 물의 양만큼 색칠하여 두 분수의 크기가 같음을 인지한다.

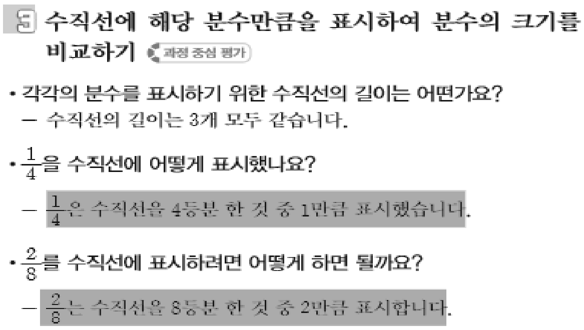
(2) 활동 2: 분모가 다른 두 분수의 크기 비교하기.

$\frac{3}{9}$과 $\frac{1}{3}$의 크기를 원 모델에 색칠한다. 전체 원을 9등분 한 것 중 3 부분과 전체 원을 3등분 한 것 중 한 부분을 살펴보고 직관적으로 두 분수가 같다는 것을 알게된다. 분수의 형태는 다르지만 분수의 크기는 같음을 인지한다. 자연수에서는 하나의 수는 하나로 일정하지만, 분수에서는 하나의 분수를 여러 개의 분수로 표현할 수 있기 때문에 학생들이 오개념을 갖지 않도록 다양한 모델을

제시한다. 다양한 모델들은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 표현된다.

(3) 활동 3: 수직선에 해당 분수만큼을 표시하여 분수의 크기를 비교하기.

분수만큼 수직선에 표시하여 각 분수의 길이가 같음을 확인한다. 분수의 형태는 다르지만 **측정으로서의 분수**로서 0으로부터 양의 거리가 모두 같기 때문에 분수의 크기는 모두 같다. 0과 1 사이를 각 분모만큼 등분할해서 차지하는 분자만큼 분수로 표현했기 때문에 **전체-부분의 관계로서의 분수**로도 살펴 볼 수 있다.



5 **수직선에 해당 분수만큼을 표시하여 분수의 크기를 비교하기** (과정 중심 평가)

• 각각의 분수를 표시하기 위한 수직선의 길이는 어떤가요?
— 수직선의 길이는 3개 모두 같습니다.

• $\frac{1}{4}$을 수직선에 어떻게 표시했나요?
— $\frac{1}{4}$은 수직선을 4등분 한 것 중 1만큼 표시했습니다.

• $\frac{2}{8}$를 수직선에 표시하려면 어떻게 하면 될까요?
— $\frac{2}{8}$는 수직선을 8등분 한 것 중 2만큼 표시합니다.

[그림 Ⅳ-44] 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 수직선에 분수 표시하기

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (224쪽) 교육과학기술부. 2019.

다) 3차시: 크기가 같은 분수를 알아볼까요

※ 학습목표: 분수의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 분모와 분자를 0이 아닌 같은 수로 나누어 크기가 같은 분수를 만들 수 있다.

동치분수 만드는 방법에는 2가지가 있다. '[6수01-05] 분수의 성질을 이용하여 크기가 같은 분수를 만들 수 있다.' 성취기준 속에서는 분수의 성질을 이용한다.

① 분수의 성질을 이용한 동치분수 만들기: 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어서 동치분수를 만든다. 이는 막대 모델을 이용하여 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수의 전체는 같으나 전체를 몇 부분으로 등분할하여 그 중의 몇 부분인지 찾으며 동치분수임을 확인할 수 있다.

② 재귀적 분할을 이용한 동치분수 만들기: 재귀적 분할은 스테프가 제시한 용어로 부분의 크기를 전체를 기준으로 해석하기 위해 각 부분을 다시 부분으

로 분할하는 과정(5-1 지도서, 220쪽)으로, 각 단위를 다시 **단위화** 함으로써 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 분수를 다시 재구성하는 것이다. ①방법과 ②방법은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 단위를 중심으로 바라보는 것은 비슷하나, 각 단위를 단위화하는 과정에 있어 처음부터 전체의 단위를 다시 재구성하는 것은 ①방법이라면, ②방법은 색칠된 분자의 부분을 단위화 함으로써 부분을 다시 분할하는 것이다. 이 때, 단위분수를 이용하므로 **측정으로서의 분수**로도 살펴 볼 수 있다.

(1) 활동 1: 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 크기가 같은 분수 만들기.

세 사람이 같은 길이의 색 띠를 일정한 간격으로 잘라서 사용하려고 한다. 준기가 색 띠의 $\frac{1}{2}$을 잘라서 사용했다. 지혜와 슬기는 얼마나 잘라야 하는지 알아본다. 지혜는 막대 모델이 4칸으로, 슬기는 6칸으로 등분할 되어있다. 준기의 막대모델에서는 전체를 2등분한 것 중 1부분이 색칠되어있다. 분수의 크기가 동일하기 위해 지혜는 2($\frac{1}{4}$단위)칸, 슬기는 3($\frac{1}{6}$단위)칸을 색칠한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로 단위를 다르게 정함으로써 단위화를 하나 크기를 비교함에 있어서는 **측정으로서의 분수**로 생각할 수 있다. $\frac{2}{4}$는 $\frac{1}{2}$의 분모와 분자에 각각 2를 곱하고, $\frac{3}{6}$은 $\frac{1}{2}$의 분모와 분자에 각각 3을 곱하여 만든다. 분모와 분자가 **승법적 사고**에 따라 변화한다.

(2) 활동 2: 분모와 분자를 0이 아닌 같은 수로 나누어 크기가 같은 분수 만들기.

수직선모델을 통해 $\frac{8}{24}$와 크기가 같은 분수를 표현한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**에 따라 0과 1사이를 24등분, 12등분, 6등분하여 전체를 등분할하였다. **측정으로서의 분수**에 따라 0으로부터의 양의 거리를 같도록 하여 크기가 같은 분수를 표시한다. 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수로 나눔으로써 **승법적 사고**에 따라 일정하게 변한다.

(3) 활동 3: 크기가 같은 분수 만들기.

승법적 사고에 따라 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눔으로써 크기가 같은 분수를 만든다.

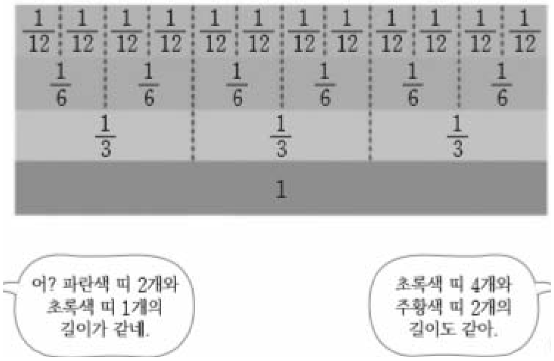
라) 4차시: 분수를 간단하게 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 약분의 뜻을 알고 분수를 약분할 수 있다.

'[6수01-06] 분수를 약분, 통분할 수 있다.' 성취기준 중 약분에 관한 차시이다. 약분은 분수를 나타내는 양을 변화시키지 않고 단순화함으로써 감각적으로 그 양을 쉽게 파악할 수 있게 해주며, 분수의 곱셈 및 나눗셈에서 계산을 효과적으로 수행할 수 있게 해준다(5-1 지도서, 212).

(1) 활동 1: 색 띠에서 크기가 같은 분수를 살펴보고 약분 알아보기.

색 띠들은 퀴즈네어 막대처럼 1이란 전체의 단위를 어떻게 정하느냐에 따라 단위의 개수가 다양함을 표현하였다. 각 단위에 따라 단위가 커질수록 단위의 개수는 일정하게 작아진다. 전체가 1이고, 모든 색 띠의 길이는 같으므로 분수의 크기는 같다. 그 중 $\frac{8}{12}$을 $\frac{1}{6}$단위와 $\frac{2}{3}$단위로서 새롭게 **단위화**한다면 $\frac{4}{6}$와 $\frac{2}{3}$이 된다. 이는 분자와 분모에 각각 2, 3으로 나누었으며 색 띠모델에서 각 단위를 다시 재귀적 분할하였다. 이 때, 나누어지는 수는 지난 3차시에서 0이 아닌 같은 수를 나눔으로써 크기가 같은 분수를 만드는데 이 때 0이 아닌 같은 수를 나누었던 분수의 성질과 함께 분모와 분자의 공통인 약수, 공약수임을 인지한다. 분모와 분자를 공약수로 나누어 간단한 분수로 만드는 것을 약분이라고 한다.



[그림 Ⅳ-45] 색 띠

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (228쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 약분한 분수 중에서 기약분수 알아보기.

공약수 중 최대공약수로 나누었을 때 분수의 형태가 가장 간단해진다. 최대공약수로 분모와 분자를 나눔으로써 분모와 분자의 공약수가 1뿐인 분수를 기약분수라 한다. 이는 각 각의 단위가 다양한 동치분수들이 **곱관계**에 따라 상대적으로 분수의 형태가 다양해지며 학생들이 **상대적 사고**를 가질 수 있도록 한다.

(3) 활동 3: 옳게 약분한 친구 찾아보기.

옳게 약분한 친구를 찾음으로써 학생들이 약분에 관한 오개념을 갖지 않도록 도와준다. 이는 **연산자로서의 분수**의 개념을 가진 후속학습 분수의 곱셈과 나눗셈에 영향을 준다.

(4) 활동 4: 기약분수 찾아보기.

기약분수는 크기가 같은 분수 중 가장 간단한 형태이므로 **연산자로서의 분수**의 개념을 가진 후속학습 분수의 곱셈과 나눗셈에 영향을 준다.

마) 5차시: 분모가 같은 분수로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 통분의 뜻을 알고 통분을 할 수 있다.

'[6수01-06] 분수를 약분, 통분할 수 있다.' 성취기준 중 통분을 학습하고자 하는 차시이다. 통분은 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때 분모를 같게 만드는 것으로, 통분을 해야 두 분수를 쉽게 비교할 수 있다(5-1 지도서, 212). 후에 이분모분수의 크기를 비교할 때 필요한 선행개념이다.

(1) 활동 1: 통분의 필요성 알아보기.

약분과 달리 직관적으로 크기 비교가 어려울 때 주어진 분수의 크기를 비교하기 위해 분수의 성질 '0이 아닌 같은 수를 분모, 분자에 곱하면 크기가 같은 분수가 된다'를 이용하여 각 분모, 분자에 같은 수를 곱하여 크기를 비교한다. 준기네 모둠은 텃밭의 전체를 3등분 한 것 중의 1부분, 연수네 모둠은 텃밭의 전체를 3등분 한 것 중의 2부분, 슬기네 모둠은 텃밭의 전체를 4등분 한 것 중의 3부분만큼 심었다. 준기와 연수 모둠의 분수의 크기를 비교하기 위해 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 같은 단위가 개수가 다름으로 연수 모둠의 텃밭의 크기가 더 크다. 연수와 슬기 모둠을 비교하기 위해 분모가 다르므로 분모를 일치시키고자 분모가 같도록 분수들을 쓴다. 분모가 일치한 것은 단위가 같다는 말

이므로 분자를 확인하여 크기를 비교할 수 있다. 크기가 같은 분수들 중에서 분모가 같은 분수끼리 짝 지었을 때 분모들은 각 분모의 공배수임을 알 수 있다.

- $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$의 크기는 어떻게 비교하나요?
  - 분모의 크기가 같으므로 분자의 크기를 비교합니다.
  - 분모가 같으므로 분자가 큰 분수가 더 큽니다.
- 연수네 모둠과 슬기네 모둠 중 고구마를 심은 텃밭이 더 넓은 모둠은 어느 모둠이라고 생각하나요?
  - 연수네 모둠은 전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중 2만큼 심었고, 슬기네 모둠은 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중 3만큼 심었기 때문에 슬기네 모둠이 고구마를 심은 텃밭이 더 넓을 것 같습니다.

[그림 Ⅳ-46] 이분모 분수의 크기 비교 시 통분의 필요성

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (230쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 분모를 같게 만들어 보기.

$\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 분모를 같게 만들기 위해 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 각각의 막대 모델을 4등분과 3등분으로 분할하여 크기가 같은 분수를 만든다. 분모의 크기를 3과 4의 최소공배수인 12로 같게 만들기 위해 각 각 3과 4로 곱하여 분모의 크기를 같게 만드는 것을 통분이라 한다.

(3) 활동 3: 통분하는 방법 알아보기.

통분하는 방법에는 2가지가 있다. 통분은 분수의 사칙연산을 위해 필요한 기본개념이다.

① 두 분모의 곱을 공통분모로 만들어 통분한다.

② 두 분모의 최소공배수를 공통분모로 만들어 통분한다.

바) 6차시: 분수의 크기를 비교해 볼까요

※ 학습목표: 분모가 다른 분수의 크기를 비교할 수 있다.

'[6수01-07] 분모가 다른 분수의 크기를 비교할 수 있다.' 성취기준에 관한 차시로서 3-1 '분수와 소수'단원에서 학생들은 분모가 같은 분수의 크기를 비교해 보았다면 이번 차시에서는 분모가 다른 분수의 크기를 비교해본다. 이분모분수의 크기를 비교하기 위해서는 분모가 다른 분수를 분모를 같게 만들어야한다.

통분을 이용하여 공통분모를 만든 후 분수의 크기를 비교할 수 있다.

(1) 활동 1: 두 분수의 크기를 비교하는 방법 알아보기.

슬기는 용돈의 $\frac{5}{9}$를 저금했고, 연수는 같은 용돈의 $\frac{7}{12}$를 저금했을 때 어느 학생이 더 많은 용돈을 저금했는지 확인하기 위해 두 분수간의 크기 비교를 한다. 분수간의 크기 비교에 앞서 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 슬기는 전체 용돈을 9등분 한 것 중 5부분, 연수는 전체 용돈을 12등분 한 것 중 7부분을 저금했다. 두 학생의 단위가 다르기 때문에 단위를 일치시켜야 분수간의 크기 비교를 할 수 있다. 물론 막대모델 등 시각적이며 직관적으로 분수의 크기를 비교할 수 있으나 정확한 크기 비교를 위해 통분이 필요하다. 통분을 통해 각 단위를 재단위화 함으로써 크기가 같은 분수를 만든다. $\frac{5}{9}$는 $\frac{1}{9}$단위가 5개있는데 이를 재단위화하여 $\frac{1}{36}$단위가 20개 있는 $\frac{20}{36}$이 된다. $\frac{7}{12}$은 $\frac{1}{12}$단위가 7개있는데 이를 재단위화하여 $\frac{1}{36}$단위가 21개 있는 $\frac{21}{36}$이 된다. 동분모분수의 크기 비교를 위해서는 **측정으로서의 분수**로서 각 단위의 거리를 비교하거나 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 각 단위의 개수를 확인하여 크기 비교가 가능하다. 교과서에서는 통분을 이용하기 때문에 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 각 단위의 개수를 확인하여 크기 비교한 것으로 보인다.

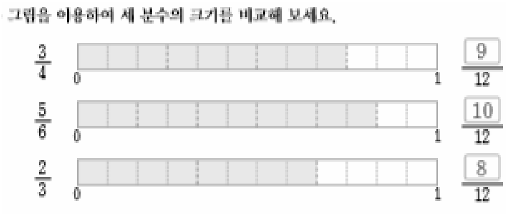
(2) 활동 2: 세 분수의 크기 비교하기.

세 분수의 크기를 비교하기 위해 교과서에서는 통분과 막대모델을 이용한다.

① 두 분수끼리 통분하여 크기를 비교한다: 두 분수끼리 통분한 다음 다른 분수와도 확인한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 재단위화함으로써 등분할하여 공통분모를 만든다. 그 후 각 단위의 개수를 확인하여 크기 비교가 가능하다.

② 막대모델과 같은 그림을 이용하여 동시에 세 분수의 크기를 비교한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체를 일치시킨 후 각 각의 분모만큼 등분할하여 분자만큼을 막대모델에 표현한다. 시각적으로 분수를 표현함으로써 분수의 크기를 직관적으로 비교한다. 학생들이 **전체-부분의 관계로서의 분수**와 등분할의 개념을 제대로 이해하고 있어야만 직관적인 비교가 가능할 것이다. 이 때,

시작점 0을 일치시킨 후 통분 후의 각 각의 모델 속 단위분수가 몇 개 있는지의 거리를 살펴보고 있기 때문에 **측정으로서의 분수**로도 살펴볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-47] 이분모 분수의 크기 비교

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (233쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 분수의 크기 비교하기.

분수 막대모델을 이용하여 학생들에게 이분모분수의 크기를 직관적으로 비교하고, 통분을 이용하여 동분모분수로 바꿔 크기를 비교할 수 있음을 내재화한다.

사) 7차시: 분수와 소수의 크기를 비교해 볼까요

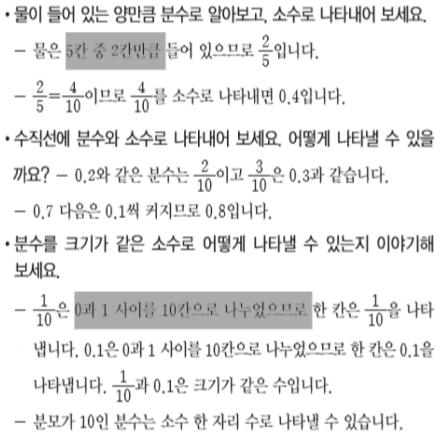
※ 학습목표: 분수와 소수의 관계를 이해하고, 분수와 소수의 크기를 비교할 수 있다.

'[6수01-12] 분수와 소수의 관계를 이해하고 크기를 비교할 수 있다.' 성취기준을 학습하고자 하는 차시이다. 3학년 때, 분수 중 전체를 10등분한 분모가 10인 진분수를 소수로 표현하는 방법을 배웠다. 이번 차시에서는 전체를 10등분으로 등분할된 분수가 아닌 분수를 통해 어떻게 소수로 표현할 수 있을지 배운다. 소수로 표현하기 위해 분모를 10으로 만들고자 학생들은 분할을 통한 재단위화를 한다.

(1) 활동 1: 비커에 들어 있는 물의 양을 보고 분수와 소수의 관계 알아보기.

비커에 들어있는 물의 양을 분수와 소수로 표현한다. $\frac{2}{5}$를 분수의 성질을 이용하여 분모가 10인 분수로 통분을 한다. $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0.4$이다. 수직선에 분수와 소수를 표현할 때, **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 $\frac{1}{10}$은 0과 1사이를 10칸으

로 나눈 것 중의 1칸이다. 0.1 역시 0과 1사이를 10칸으로 나눈 것 중의 1칸이므로 $\frac{1}{10}$과 0.1은 크기가 같다. **측정으로서의 분수**로서 수직선상의 $\frac{1}{10}$단위가 1개, 2개, 3개일 때의 양의 거리로 각 분수를 표현하고, 또한 이는 0.1단위가 1개, 2개, 3개일 때의 양의 거리로 표현되며 이들이 같음을 알 수 있다. 지도서에 설명방법은 다음 그림과 같이 **전체-부분의 관계로서의 분수**이다. 교과서의 제시방법 **측정으로서의 분수**로도 살펴볼 수 있다.


• 물이 들어 있는 양만큼 분수로 알아보고, 소수로 나타내어 보세요.
– 물은 5칸 중 2칸만큼 들어 있으므로 $\frac{2}{5}$입니다.
– $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$이므로 $\frac{4}{10}$를 소수로 나타내면 0.4입니다.
• 수직선에 분수와 소수로 나타내어 보세요. 어떻게 나타낼 수 있을까요? – 0.2와 같은 분수는 $\frac{2}{10}$이고 $\frac{3}{10}$은 0.3과 같습니다.
– 0.7 다음은 0.1씩 커지므로 0.8입니다.
• 분수를 크기가 같은 소수로 어떻게 나타낼 수 있는지 이야기해 보세요.
– $\frac{1}{10}$은 0과 1 사이를 10칸으로 나누었으므로 한 칸은 $\frac{1}{10}$을 나타냅니다. 0.1은 0과 1 사이를 10칸으로 나누었으므로 한 칸은 0.1을 나타냅니다. $\frac{1}{10}$과 0.1은 크기가 같은 수입니다.
– 분모가 10인 분수는 소수 한 자리 수로 나타낼 수 있습니다.

[그림 Ⅳ-48] 비커에 들어있는 양을 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수로 설명

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (233쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: $\frac{6}{20}$과 $\frac{12}{30}$의 크기 비교하기.

그동안 이분모분수를 통분을 이용해 동분모분수로 바꿨다면, 이번 활동에서는 약분을 통해 동분모분수로 만들고자 한다. $\frac{6}{20}$과 $\frac{12}{30}$를 약분하여 크기를 비교한다. 분수의 성질을 이용하여 분모와 분자에 2를 나누어 $\frac{3}{10}$을 만들고, 분모와 분자에 3을 나누어 $\frac{4}{10}$를 만들어 크기 비교를 한다. 동분모분수로 바뀌었기 때문에 크기 비교를 바로 할 수 있지만 이는 소수의 형태로도 바꿀 수 있기 때문

에 소수로 나타내어 크기를 비교할 수도 있다. 학생들은 크기 비교함에 있어 전 활동에서 수직선을 통해 비교하였음으로 **측정으로서의 분수**로 이는 단위분수의 개수를 살펴보고 수직선상에서 거리가 더 긴 분수가 더 큰 분수임을 인지한다고 볼 수 있다.

(3) 활동 3: $\frac{2}{5}$와 0.5의 크기 비교하기.

분수와 소수의 크기 비교를 위해서 분수를 소수로 바꾸거나 소수를 분수로 바꾸어 나타내어 크기를 비교한다.

아) 8차시: 도전 수학. 조건에 맞는 분수를 찾아볼까요

※ 학습목표: 분모가 다른 분수를 통분하여 분수의 크기를 비교할 수 있다.

$\frac{3}{8}, \frac{4}{9} < \square < \frac{1}{2}$ 조건에 해당되는 분수를 찾는 차시이다. 분수 간의 크기 비교를 위해 약분과 통분을 이용하여 동분모분수를 만드는 과정은 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 단위를 크게 하거나 작게 하는 과정이다. 분수 간의 크기 비교는 단위를 얼마만큼 가지고 있고, 같은 기준으로부터의 길이를 파악하기 때문에 **측정으로서의 분수**로 바라 볼 수 있다.

자) 9차시: 얼마나 알고 있나요

분수의 성질을 이용하여 크기가 같은 분수를 만들고 약분과 통분의 의미를 배운다. 이를 통해 분수 간의 크기 비교를 할 수 있다. 약분과 통분은 후속 학습인 분수의 사칙연산을 위한 기초이다. 분수의 사칙연산에서는 **연산자로서의 분수**의 개념 하에 그 간의 배워온 분수의 기초 과정들을 통해 분수를 시각적인 모델이 아닌 수학적으로 살펴본다.

차) 10차시: 탐구 수학. 생활 속에서 약분과 통분을 알아볼까요

※ 학습목표:

- 우리 주변에서 접할 수 있는 자료를 이용하여 약분할 수 있는 분수가 들어가는 문장을 만들 수 있다.

- 분자가 분모보다 1만큼 작은 분수를 탐구하고, 크기를 비교할 수 있다.

(1) 1번 문제: 이산량을 표현한 표와 그래프를 통해 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 전체와 부분을 정해 분수를 표현한다. 슬기네 학교 전체 학생 수를 전체로 정하고, 비빔밥을 좋아하는 학생 수를 부분으로 한다면, 슬기네 학교에서 비빔밥을 좋아하는 학생을 분수로 표현한 것이다.

(2) 2번 문제: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ 분수는 분자가 분모보다 1만큼 작다. 세 분수의 크기 비교 방법은 3가지로 표현되어 있다.

① 통분하여 크기를 비교한다: **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 이분모분수를 전체의 단위를 작거나 크게 만듦으로써 공통분모를 같게 하여 동분모분수로 만든다. 단위의 개수, 즉 분자의 크기를 이용하여 분수의 크기를 비교한다.

② 분수만큼 색칠하여 크기를 비교한다: **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 각 원을 3등분, 4등분, 5등분하여 직관적으로 크기를 비교한다.

③ **측정값으로서 분수**와 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 $\frac{2}{3}$는 전체에서 $\frac{1}{3}$(3등분으로 나눈 것 중의 1등분) 덜어내고, $\frac{3}{4}$은 전체에서 $\frac{1}{4}$(4등분으로 나눈 것 중의 1등분) 덜어내고, $\frac{4}{5}$는 전체에서 $\frac{1}{5}$(5등분으로 나눈 것 중의 1등분)만큼 덜어내므로 수직선상으로 생각하면 1에서 왼쪽으로 덜 간 분수가 가장 큰 분수이다. 1과의 차이, 즉 단위만큼의 차이를 확인한다.

3) 약분과 통분 단원의 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 5학년 1학기 4단원 '약분과 통분' 속 분수는 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수의 의미를 이용하여 설명한다.

<표 IV-4> 5학년 1학기 4단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	●	○			
3차시	●	○			
5차시	●				
6차시	●	●			
7차시	●	●			

4) 각 차시 속 분수 - 분수의 덧셈과 뺄셈

4학년 2학기의 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈에 이어 5학년 1학기에는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하게 된다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 기준이 되는 단위가 달라지므로 자연수 연산의 확장뿐만 아니라 어림을 통한 분수 연산에 대한 양감 및 수 감각의 이해가 선행되어야 한다(5-1 지도서, 250쪽). 이지영(2016)은 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서의 핵심 아이디어를 다음과 같이 제시한다. 첫째, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해하고, 고정된 전체 단위를 보다 명시적으로 지도한다. 둘째, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 두 번째 수준의 단위의 크기가 다르기 때문에 통분을 통해 세 번째 수준의 단위, 즉 새로운 단위가 필요하다는 것을 지도한다. 셋째, 재귀적 분할 과정을 통해 연산의 의미와 알고리즘에 대해 깊은 이해가 가능하므로 충분한 경험의 기회를 제공한다. 이러한 과정을 통해 학생들은 세 가지 수준의 단위를 이해하고 이를 융통적으로 사용하는 경험을 할 수 있다((Izsák et al., 2008, 재인용: 이지영, 방정숙, 2016, 630쪽).

가) 1차시: 단원 도입

실생활 요리상황과 포장상황을 통해 학생들이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈이 실생활에 필요함을 느끼게 한다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 정확한 계

산 원리를 아직 배우지 않았기 때문에 학생들이 계산결과를 어림함으로써 분수에 대한 양감과 수 감각을 키울 수 있도록 한다.

나) 2차시: 분수의 덧셈을 해 볼까요

※ 학습목표:

- 분모가 다른 진분수의 덧셈에서 통분의 필요성을 찾을 수 있다.

- 받아올림이 없는 분모가 다른 진분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

‘[6수01-08] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.’ 성취기준 중 이분모 분수의 덧셈을 시작하는 차시이다. 이분모 분수의 덧셈을 위해서는 통분의 필요성을 느껴야한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체라는 1개의 단위를 각 각의 단위로 **등분할**하며 재단위화하여 분수가 형성된다. 단위가 다르다면 분수간의 덧셈이 불가능하기 때문에 단위를 같게 만들기 위해 통분이 필요하다.

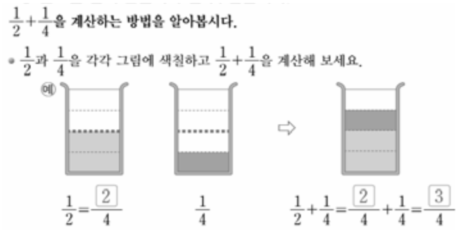
(1) 활동 1: 두 친구가 가지고 있는 우유의 양 어림하기.

분모가 다른 두 개의 분수의 덧셈에 앞서 우유 $\frac{1}{2}$컵과 우유 $\frac{1}{4}$컵을 합한 양이 얼마나 될지 어림을 한다. 어림함으로써 분수 연산에서의 수 감각을 기르는 게 목표인 활동이다. 우유의 양을 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이들을 표현하게 한다.

(2) 활동 2: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$을 계산하는 방법 알아보기.

$\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$을 각각 그림에 색칠하고 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$을 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 2등분, 4등분하여 표현한다. 단위가 다름으로 $\frac{1}{2}$을 한번 더 분할하여 $\frac{2}{4}$ 동치분수를 만들어 분모를 일치시킨다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다. 각각 등분할을 다르게 함으로써 같은 전체를 다른 기준으로 나누었기 때문에 각각의 제 2 수준의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 더하려면 분모를 같게 만들어야

할 것이라는 생각을 갖도록 한다. 통분을 통해 제 3 수준의 같은 단위를 만들게 된다. **측정으로서의 분수** 관점에서 3수준의 같은 단위의 단위분수의 개수를 세어 결과를 얻게 된다.



[그림 Ⅳ-49] 이분모 분수의 덧셈

주. 출처 **수학 5-1 교사용 지도서** (256쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 그림을 이용하여 $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ 계산하기.

막대모델을 이용하여 $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$를 계산한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 막대모델로 표현한다. 두 분수의 단위가 다르기 때문에 단위를 일치하기 위해 재단위화를 하며 통분을 한다. $\frac{1}{4}$은 1을 4등분 한 것 중 1부분이기 때문에 이를 3등분씩 다시 등분할하여 $\frac{1}{4}$단위는 $\frac{1}{12}$단위의 3개와 같다. $\frac{2}{3}$는 1을 3등분 한 것 중 2부분이기 때문에 이를 4등분씩 다시 등분할하여 $\frac{1}{12}$단위의 3개가 2묶음으로 $\frac{8}{12}$의 동치분수가 된다. **측정으로서의 분수** 관점에서 동분모분수의 덧셈 $\frac{3}{12}+\frac{8}{12}$이 되어 $\frac{1}{12}$단위가 11개가 되어 $\frac{11}{12}$이 되었다.

(4) 활동 4: $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$을 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

전 활동에서 시각적으로 이분모분수의 덧셈을 이해하고 통분의 필요성을 느껴 통분을 통해 동분모분수를 만들었다면 이번 활동에서는 2가지 수학적인 방법으로 이분모 분수의 덧셈을 계산한다.

① 두 분모의 곱을 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 두 분모의 곱을 공통분모로 하게 되면 서로의 분모만큼 등분할이 가능하므로 수 있으므로 재단위화가 되어 공통 단위를 갖게 된다.

② 두 분모의 최소공배수를 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 최소공배수는 두 분모의 공배수 중 가장 최소의 수이기 때문에 공통이 될 수 있는 최소의 수다. 이를 단위로 결정하여 동분모 분수를 만들어 계산한다.

(5) 활동 5: 실생활 상황에서 받아올림이 없는 분모가 다른 진분수의 덧셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 이분모 분수의 덧셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 받아올림이 없는 이분모 분수의 덧셈을 계산한다.

다) 3차시: 분수의 덧셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 받아올림이 있는 분모가 다른 진분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

받아올림이 있는 이분모 분수간의 덧셈은 2차시의 이분모 분수간의 덧셈과 같은 계산원리로 계산한다. 다만, 계산결과가 가분수의 형태로 나와 분자가 전체를 넘게 되어 **측정으로서의 분수** 관점에서 단위분수가 모여 전체로 바뀌어 자연수와 진분수의 형태인 대분수로 변환한다.

(1) 활동 1: 두 친구가 가지고 있는 검은깨의 양 어림하기.

받아올림이 있는 분모가 다른 두 개의 분수의 덧셈에 앞서 검은 깨 $\frac{1}{3}$컵과 $\frac{4}{5}$컵을 합한 양이 얼마나 될지 어림을 한다. 1보다 큰지 작은지 어림함으로써 분수 연산에서의 수 감각을 기르는게 목표인 활동이다. 검은 깨의 양을 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이들을 표현하게 한다. 각각 등분할을 다르게 함으로써 전체를 다른 기준으로 나누었기 때문에 각각의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 더하려면 분모를 같게 만들어야할 것이라는 생각을 갖도록 한다. 더불어 $\frac{4}{5}$컵이 거의 1컵에 가까우므로 $\frac{1}{3}$컵을 더하면 전체인 1컵을 넘을 거라고 예상한다.

(2) 활동 2: 그림을 이용하여 $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$를 계산하는 방법 알아보기.

$\frac{1}{3}$과 $\frac{4}{5}$를 각각 그림에 색칠하고 $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$를 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 3등분, 5등분하여 표현한다. 전체를 다른 단위로 등분할하였으므로 $\frac{1}{3}$를 한번 더 분할하여 $\frac{5}{15}$ 동치분수를 만든다. $\frac{4}{5}$도 한번 더 분할하여 $\frac{12}{15}$ 동치분수를 만든다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다. $\frac{5}{15}$를 표현한 비커에서 $\frac{12}{15}$를 더하기 위해 각 단위를 색칠하며 계산한다. 이들의 합이 전체가 넘으므로 전체를 등분할한 것 중 몇 개의 개념보다는 단위분수가 몇 개인지를 확인하는 **측정으로서의 분수**의 관점이 더 적합할 것이다. $\frac{1}{15}$단위가 15개 있으면 전체인 1이 되므로 17개가 15와 2로 쪼개져 1과 $\frac{2}{15}$가 된다.

(3) 활동 3: $\frac{3}{4}+\frac{7}{10}$을 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

전 활동에서 시각적으로 받아올림이 있는 이분모분수의 덧셈을 이해하고 단위를 재단위화하며 통분해 동분모분수를 만들었다면 이번 활동에서는 2가지 수학적인 방법으로 이분모 분수의 덧셈을 계산한다.

① 두 분모의 곱을 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 두 분모의 곱을 공통분모로 하게 되면 서로의 분모만큼 등분할이 가능하므로 수 있으므로 재단위화가 되어 공통 단위를 갖게 된다.

② 두 분모의 최소공배수를 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 최소공배수는 두 분모의 공배수 중 가장 최소의 수이기 때문에 공통이 될 수 있는 최소의 수다. 이를 단위로 결정하여 동분모 분수를 만들어 계산한다.

방법은 받아올림이 없는 이분모분수의 덧셈과 같으나 마지막 계산결과를 **측정으로서의 분수**의 관점에서 공통분모의 단위가 모여 전체가 되었을 때 자연수 1로 바꿔 자연수와 진분수로 구성된 대분수의 계산결과가 나온다.

(4) 활동 4: $\frac{2}{3}+\frac{8}{9}$을 두 가지 방법으로 계산하기.

3번째 활동에서 배운 계산원리를 적용하여 계산하며 받아올림이 있는 이분모 분수 덧셈을 한다.

(5) 활동 5: 실생활 상황에서 받아올림이 있는 분모가 다른 진분수의 덧셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 이분모 분수의 덧셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 받아올림이 있는 이분모 분수의 덧셈을 계산한다.

라) 4차시: 분수의 덧셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈에 관한 차시이다. 3차시의 이분모 분수간의 덧셈과 같은 계산 원리로 계산한다. 다만, 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어 있으므로 자연수는 전체로서 자연수끼리 진분수는 전체의 부분인 단위로서 진분수끼리 덧셈을 한다. 계산결과가 가분수의 형태로 나와 **측정으로서의 분수**로서 단위가 모여 전체로 바뀌어 자연수로 받아올림하여 대분수로 변환한다.

(1) 활동 1: 두 친구가 가지고 있는 쌀가루의 양 어림하기.

받아올림이 있는 분모가 다른 두 개의 대분수의 덧셈에 앞서 쌀가루 $1\frac{3}{5}$컵과 $1\frac{1}{2}$컵을 합한 양이 얼마나 될지 어림을 한다. 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어 있으므로 진분수의 분모가 다를지라도 자연수의 범위에서는 자연수끼리 더할 수 있음을 생각하여 어림한다. 자연수끼리 더하고 진분수끼리 더한 결과를 어림함으로써 분수의 크기에 대한 양감을 기를 수 있다. 쌀가루의 양을 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이들을 표현하게 한다. 각각 등분할을 다르게 함으로써 전체를 다른 기준으로 나누었기 때문에 각각의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 더하려면 분모를 같게 만들어야할 것이라는 생각을 갖도록 한다. 등분할하는 부분인 단위는 다르지만 전체인 1컵은 같아야한다.

(2) 활동 2: 그림을 이용하여 $1\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}$을 계산하는 방법 알아보기.

$1\frac{3}{5}$과 $1\frac{1}{2}$를 각각 그림에 색칠하고 $1\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}$를 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 5등분, 2등분하여 표현한다. 전체인 1컵은 일치하며 자연수인 1컵끼리의 합을 구한다. 진분수 부분의 합을 위해 단위를 같게 해야한다. 전체를 다른 단위로 등분할하였으므로 $\frac{3}{5}$을 한번 더 분할하여 $\frac{6}{10}$ 동치분수를 만든다. $\frac{1}{2}$도 한번 더 분할하여 $\frac{5}{10}$ 동치분수를 만든다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다. $1\frac{6}{10}$을 표현한 비커에서 $1\frac{5}{10}$를 더하기 위해 각 단위를 색칠하며 계산한다. $\frac{1}{10}$단위가 10개 있으면 전체인 1이 되므로 11개가 10와 1로 쪼개져 1과 $\frac{1}{10}$이 되어 자연수 1이 받아올림이 된다. 중요한 점은 대분수의 덧셈에서는 자연수와 진분수를 나누어 자연수는 자연수끼리 더하고 분수는 분수끼리 두 분수를 통분하여 계산한다.

(3) 활동 3: $2\frac{3}{4}+3\frac{5}{6}$를 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

2가지 수학적인 방법으로 분모가 다른 대분수의 덧셈을 계산한다.

① 자연수는 자연수끼리 분수는 분수끼리 계산한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체 모델인 자연수끼리 등분할되어 단위가 다른 분수끼리 계산하여 분수간의 덧셈을 쉽게 할 수 있다.

② 대분수를 가분수로 바꾸어 계산한다: **측정으로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체인 모델을 분수의 분모로 단위화한다. 통분을 통해 공통분모로 만들어 재단위화하여 덧셈한다. 최종결과 역시 가분수로 나올 것이기 때문에 분수의 분모와 분자가 같을 때 전체로 만들어 대분수로 바꾼다.

(4) 짝과 함께 $2\frac{2}{3}+1\frac{5}{9}$를 두 가지 방법으로 계산하고, 계산 방법 비교하기.

3번째 활동에서 배운 계산 원리를 적용하여 계산하며 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수 덧셈을 한다.

(5) 실생활 상황에서 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 받아올림이 있는 분모가 다른 대분수의 덧셈을 계산한다.

마) 5차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

※ 학습목표:

- **분모가 다른 진분수의 뺄셈에서 통분의 필요성을 찾을 수 있다.**
- **받아내림이 없는 분모가 다른 진분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.**

'[6수01-08] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.' 성취기준 중 이분모 분수의 뺄셈과 관련된 차시 시작이다. 이분모 분수의 뺄셈을 위해서는 통분의 필요성을 느껴야한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 전체라는 1개의 단위를 각 각의 단위로 **등분할**하며 재단위화하여 분수가 형성된다. 단위가 다르면 분수간의 뺄셈이 불가능하기 때문에 3 수준의 단위로 단위를 같게 만들기 위해 통분이 필요하다.

(1) 활동 1: 남은 설탕의 양 어림하기.

분모가 다른 두 개의 분수의 뺄셈을 하기 앞서 설탕 $\frac{3}{4}$컵에서 $\frac{1}{2}$컵을 사용하고 남은 설탕의 양이 얼마나 될지 어림을 한다. 어림함으로써 분수 연산에서의 수 감각을 기르는게 목표인 활동이다. 전체보다 작은 $\frac{3}{4}$컵에서 $\frac{1}{2}$컵을 사용하고 남는 설탕의 양이 궁금하므로 적어도 $\frac{1}{2}$보다 작을 것이다. 설탕의 양을 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이들을 표현하게 한다. 1컵을 전체 단위로서 이를 4등분한 것 중 3부분과 2등분한 것 중 1부분으로 각각 등분할을 다르게 함으로써 전체 단위를 다른 기준으로 나누었

기 때문에 각각의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 빼려면 분모를 같게 만들어야할 것이라는 생각을 갖도록 한다. 분모를 통분하여 공통분모로 만든 후 단위를 빼면서 남은 단위를 결과로 도출한다.

(2) 활동 2: $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$을 계산하는 방법 알아보기.

$\frac{3}{4}$과 $\frac{1}{2}$을 각각 그림에 색칠하고 $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$을 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 4등분, 2등분하여 표현한다. 단위가 다름으로 $\frac{1}{2}$을 한번 더 분할하여 $\frac{2}{4}$ 동치분수를 만들어 분모를 일치시킨다. 단위가 일치하면 뺄셈의 결과인 남은 부분을 단위로 표현한다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다.

(3) 활동 3: 그림을 이용하여 $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$ 계산하기.

막대모델을 이용하여 $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$을 계산한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 막대모델로 표현한다. 두 분수의 단위가 다르기 때문에 단위를 일치하기 위해 재단위화를 하며 통분을 한다. $\frac{4}{5}$는 1을 5등분 한 것 중 4부분이기 때문에 이를 2등분씩 다시 등분할하여 $\frac{1}{5}$단위는 $\frac{1}{10}$단위의 2개와 같으므로 4묶음으로 $\frac{8}{10}$의 동치분수가 된다. $\frac{1}{2}$는 1을 2등분 한 것 중 1부분이기 때문에 이를 5등분씩 다시 등분할하여 $\frac{1}{10}$단위의 5개가 1묶음으로 $\frac{5}{10}$의 동치분수가 된다. 동분모분수의 덧셈 $\frac{8}{10}-\frac{5}{10}$이 되어 $\frac{1}{10}$단위가 3개가 되어 $\frac{3}{10}$이 되었다.

(4) 활동 4: $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$을 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

전 활동에서 시각적으로 이분모분수의 뺄셈을 이해하고 통분의 필요성을 느껴 통분을 통해 동분모분수를 만들었다면 이번 활동에서는 2가지 수학적인 방법으로 이분모 분수의 뺄셈을 계산한다.

① 두 분모의 곱을 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 두 분모의 곱을 공통분모로 하게되면 서로의 분모만큼 등분할이 가능하므로 수 있으므로 재단위화가 되어 공통 단위를 갖게 된다.

② 두 분모의 최소공배수를 공통분모로 하여 통분한 후 계산한다: 최소공배수는 두 분모의 공배수 중 가장 최소의 수이기 때문에 공통이 될 수 있는 최소의 수다. 이를 단위로 결정하여 동분모 분수를 만들어 계산한다.

(5) 활동 5: 실생활 상황에서 받아내림이 없는 분모가 다른 진분수의 뺄셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 이분모 분수의 뺄셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 이분모 분수의 뺄셈을 계산한다.

바) 6차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈은 5차시의 이분모 분수간의 뺄셈과 같은 계산원리로 계산한다. 다만, 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어있으므로 자연수는 전체로서 자연수끼리 진분수는 전체의 부분인 단위로서 진분수끼리 뺄셈을 한다.

(1) 활동 1: 남는 쌀음료의 양 어림하기.

받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 하기앞서 쌀음료 $1\frac{1}{3}$L에서 $1\frac{1}{4}$L를 마시면 남는 쌀음료의 양이 얼마나 될지 어림을 한다. 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어 있으므로 진분수의 분모가 다를지라도 자연수의 범위에서는 자연수끼리 뺄 수 있음을 생각하여 어림한다. 자연수끼리 빼고 진분수끼리 뺀 결과를 어림함으로써 분수의 크기에 대한 양감을 기를 수 있다. 자연수부분은 같으므로 진분수 부분을 보며 어림을 할 것이다. **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 $\frac{1}{3}$인 1L를 3등분한 것 중 1부분에서 $\frac{1}{4}$인 1L를 4등분한 것 중 1부분을 뺏을 때 $\frac{1}{2}$보다 큰지 작은지 어림함으로써 분수 연산에서의 수 감각을 기르는게 목표인 활동이다. 쌀음료 양을 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체**-

부분의 관계로서의 분수로서 이들을 표현하게 한다. 각각 등분할을 다르게 함으로써 전체를 다른 기준으로 나누었기 때문에 각각의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 빼하려면 분모를 같게 만들어야할 것이라는 생각을 갖도록 한다.

(2) 활동 2: 그림을 이용하여 $1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$을 계산하는 방법 알아보기.

$1\frac{1}{3}$과 $1\frac{1}{4}$을 각각 그림에 색칠하고 $1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$를 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 3등분, 4등분하여 표현한다. 전체를 다른 단위로 등분할하였으므로 $\frac{1}{3}$를 한번 더 분할하여 $\frac{4}{12}$ 동치분수를 만든다. $\frac{1}{4}$도 한번 더 분할하여 $\frac{3}{12}$ 동치분수를 만든다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다. $1\frac{4}{12}$를 표현한 비커에서 $1\frac{3}{12}$을 빼기 위해 각 단위를 없애며 계산한다. 자연수 전체인 비커는 통째로 없어지므로 $\frac{1}{12}$단위가 1개인 $\frac{1}{12}$이 된다.

(3) 활동 3: $2\frac{2}{5}-1\frac{1}{4}$을 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

전 활동에서 시각적으로 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 이해하고 단위를 재단위화하며 통분해 동분모분수를 만들었다면 이번 활동에서는 2가지 수학적인 방법으로 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 계산한다.

① 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 빼서 계산한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체 모델인 자연수끼리 등분할되어 단위가 다른 분수끼리 계산하여 분수간의 뺄셈을 쉽게 할 수 있다.

② 대분수를 가분수로 나타내어 계산한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체인 모델을 분수의 분모로 단위화한다. 통분을 통해 공통분모로 만

들어 재단위화하여 뺄셈한다. 최종결과 역시 가분수로 나올 것이기 때문에 분수의 분모와 분자가 같을 때 전체로 만들어 대분수로 바꾼다.

방법은 받아올림이 없는 이분모분수의 덧셈과 같으나 마지막 계산결과를 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 공통분모의 단위가 모여 전체가 되었을 때 자연수로 바뀌어 자연수와 진분수로 구성된 대분수의 계산결과가 나온다.

(4) 활동 4: $2\frac{3}{4}-1\frac{3}{10}$을 두 가지 방법으로 계산하기.

3번째 활동에서 배운 계산원리를 적용하여 계산하며 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수 뺄셈을 한다.

(5) 활동 5: 실생활 상황에서 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 받아내림이 없는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 계산한다.

사) 7차시: 분수의 뺄셈을 해 볼까요

※ 학습목표: 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈은 6차시의 분모가 다른 대분수간의 뺄셈과 같은 계산원리로 계산한다. 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어있으므로 자연수는 전체로서 자연수끼리 진분수는 전체의 부분인 단위로서 진분수끼리 뺄셈을 한다. 다만, 진분수끼리의 뺄셈을 함에 있어 감수가 피감수보다 작으면 자연수 하나의 전체를 받아내림한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 받아내림이란 전체를 분수의 단위로 등분할하여 전체를 분모의 개수로 나눈 것 중의 분모만큼으로 바꾸는데, 이 때 전체보다 분자가 더 큰 가분수 형태가 나오므로 **측정으로서의 분수**의 관점에서 단위분수의 개수를 세어 가분수로 바꾼다. 감수가 피감수보다 크게 만들어 뺄셈을 가능하게 한다. 막대 모델을 통해 2개의 대분수의 크기를 비교하면 **측정으로서의 분수**의 관점에서 기준점으로부터 양의 거리를 비교하여 두 수 사이의 차이에 대한 양감을 느낄 수 있다.

(1) 활동 1: 두 친구가 사용한 리본의 길이 차 어림하기.

받아내림이 있는 분모가 다른 두 개의 대분수의 뺄셈을 하기 앞서 지혜는

$2\frac{1}{4}$m, 슬기는 $1\frac{1}{2}$m를 사용했을 때 두 친구가 사용한 리본의 길이를 비교하여 어림을 한다. 대분수는 자연수와 진분수로 구성되어 있으므로 진분수의 분모가 다를지라도 자연수의 범위에서는 자연수끼리 뺄 수 있음을 생각하여 어림한다. 자연수끼리 빼고 진분수끼리 뺀 결과를 어림함으로써 분수의 크기에 대한 양감을 기를 수 있다. 리본의 길이를 그림으로 표현함으로써 학생들에게 **전체-부분의 관계로서의 분수**로서 이들을 표현하여 시각적으로 두 리본의 길이의 차를 느낄 수 있다. 이는 다음 그림과 같이 두 수 사이의 차이에 대한 양감을 기를 수 있다. 동시에 각각 등분할을 다르게 함으로써 전체를 다른 기준으로 나누었기 때문에 각각의 단위가 다름을 학생들이 인지하여 분모가 다른 분수끼리 더하려면 분모를 같게 만들어야할 것이라는 생각을 갖도록 한다. 등분할하는 부분인 단위는 다르지만 전체인 1m는 같아야한다. 이들의 차를 막대모델끼리 맞붙여 비교함으로써 두 막대 모델의 색칠한 부분의 양의 거리를 바라볼 수 있으므로 이렇게 어림한 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

(2) 활동 2: 그림을 이용하여 $2\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}$을 계산하는 방법 알아보기.

$2\frac{1}{4}$과 $1\frac{1}{2}$를 각각 그림에 색칠하고 $2\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}$을 계산하도록 한다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 이들을 각 각 4등분, 2등분하여 표현한다. 전체인 1m는 일치하며 자연수끼리의 차를 구한다. 진분수 부분의 차를 위해 단위를 같게 해야한다. 전체를 다른 단위로 등분할하였으므로 $\frac{1}{2}$을 한번 더 분할하여 $\frac{1}{4}$동치분수를 만든다. 한번 더 **등분할**하는 과정은 단위를 **재단위화**하는 과정으로 시각적으로 계산 원리를 익힌 후, 두 분수를 통분하여 계산함을 인지한다. $2\frac{1}{4}$을 표현한 막대모델에서 $1\frac{2}{4}$를 빼기 위해 감수의 진분수가 피감수의 진분수보다 크므로 자연수 부분에서 받아내림을 통해 빌려와야한다. **전체-부분과의 관계로서의 분수**로서 2에서 1을 가져와 이를 같은 단위인 $\frac{1}{4}$로 만들기 위해 4등분으로 등분할하여 $\frac{4}{4}$와$\frac{1}{4}$이 되는데 이러한 가분수를 표현하기 위해서는 **측정으로서의 분수**관점이 필요하다. 분자가 분모보다 크므로 전체를 등분할하

여 전체보다 더 큰 부분이 있다고 제시하는 것은 불가능하므로 공통의 단위분수가 5개인 상태로 $1\frac{5}{4}$가 된다고 볼 수 있다. 피감수의 진분수가 감수의 진분수보다 커지고, 동분모분수가 되었으므로 계산 가능하다.

(3) 활동 3: $5\frac{1}{3}-3\frac{1}{2}$을 계산하는 서로 다른 방법 알아보기.

전 활동에서 시각적으로 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 이해하고 단위를 재단위화하며 통분해 동분모분수를 만들었다면 이번 활동에서는 2가지 수학적인 방법으로 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 계산한다.

① 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 빼서 계산한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체 모델인 자연수끼리 등분할되어 단위가 다른 분수끼리 계산하여 분수간의 뺄셈을 쉽게 할 수 있다. 진분수간의 뺄셈을 함에 있어 피감수의 진분수보다 감수의 진분수가 크다면 받아내림의 과정이 필요하다.

② 대분수를 가분수로 나타내어 계산한다: **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 대분수는 전체인 모델과 전체를 등분할하여 단위화한 모델로 구성되어 있다. 전체인 모델을 분수의 분모로 단위화한다. 통분을 통해 공통분모로 만들어 재단위화하여 뺄셈한다. 최종결과 역시 가분수로 나올 것이기 때문에 분수의 분모와 분자가 같을 때 전체로 만들어 대분수로 바꾼다. 방법은 받아내림이 없는 이분모분수의 뺄셈과 같으나 마지막 계산결과를 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 공통분모의 단위가 모여 전체가 되었을 때 자연수로 바뀌어 자연수와 진분수로 구성된 대분수의 계산결과가 나온다. $5\frac{1}{3}$에서 $3\frac{1}{2}$을 빼기 위해 모든 단위를 공통단위인 $\frac{1}{6}$단위로서 등분할하면 $5\frac{1}{3}$는 32부분, 32($\frac{1}{6}$단위)가 된다. $3\frac{1}{2}$는 $\frac{1}{6}$단위로 등분할하면 21부분, 21($\frac{1}{6}$단위)가 된다. 이들의 차는 0으로부터의 양의 거리 11($\frac{1}{6}$단위)가 되므로 $\frac{11}{6}$이 된다. 이러한 계산 결과 과정은 **측정으로서의 분수**로 바라볼 수 있다. $\frac{11}{6}$을 대분수로 변환할 때 전체가 $\frac{1}{6}$단위가 6부분이 필요하므로 6부분씩 묶어 1개의 전체를 만들고 $\frac{5}{6}$가 남아

$1\frac{5}{6}$가 되는 과정은 **전체-부분의 관계로서의 분수**로 바라볼 수 있다.

(4) 활동 4: $4\frac{5}{12}-1\frac{5}{8}$을 두 가지 방법으로 계산하기.

3번째 활동에서 배운 계산 원리를 적용하여 계산하며 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수 뺄셈을 한다.

(5) 활동 5: 실생활 상황에서 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈하기.

실생활 속에서 이루어지는 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈을 통해 수학의 실용성을 느끼며 앞서 배운 받아내림이 있는 분모가 다른 대분수의 뺄셈의 계산원리를 이용해 계산한다.

아) 8차시: 도전 수학. 과자 상자를 꾸미는 데 필요한 색종이의 양을 구해 볼까요

전체-부분의 관계로서의 분수로 대분수를 막대모델로 표현하여 문제를 해결한다. 또한, 식을 이용하여 통분을 하며 문제를 해결할 수 있다.

자) 9차시: 얼마나 알고 있나요

그동안 배워온 분수의 추론과정과 어림을 통한 연산에 대한 수감각, 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

차) 10차시: 탐구 수학, 분수 막대로 계산해 볼까요

문제에서는 그림을 통해 분수 막대를 제시한다. 분수막대는 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 전체와 부분을 정해 분수를 표현한다. 동일한 전체 안에 다른 단위로 단위화를 하여 전체를 표현한다. 분수막대를 통해 대분수를 표현하여 대분수간의 덧셈과 뺄셈을 계산하는데 이 때, 학생들이 잘 찾지 못하는 경우에는 분수 막대의 밑 선을 맞추어 길이가 같은 것을 직관적으로 찾을 수 있도록 안내한다(5-1 지도서, 276쪽). 직접 맞대어 비교하는 행동은 같은 기준점으로부터의 거리를 파악하므로 **측정값으로서 분수**관점이라 할 수 있다. 분수막대를 이용한 학생들의 자유로운 조작 및 사고 활동을 통해 분수의 양감 및 수 감각, 분수 연산의 기초 의미를 깨닫도록 할 수 있다(5-1 지도서, 276쪽).

5) 분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 추가적인 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 5학년 1학기 5단원 '분수의 덧셈과 뺄셈' 속 분수는 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수의 의미를 이용하여 설명한다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 위해 통분을 이용하여 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈으로 바꾼다. 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 위해서는 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수의 개수를 통해 계산한다.

<표 Ⅳ-5> 5학년 1학기 5단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	●	●			
3차시	○	●			
4차시	○	●			
5차시	●	●			
6차시	●				
7차시	○	●			

마. 5학년 2학기

그 동안 배운 분수의 개념은 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 표현하고 생각하였다. 이번 단원에서는 분수 자체는 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 바라보나 학생들이 **연산자로서의 분수** 관점에서 분수의 곱셈을 논리적으로 계산하는데 중점을 둔다. 3-1 지도서 분수의 의미 이후 5-2 지도서에 처음으로 '연산자' 단어가 제시된다.

이 단원에서는 학생들이 활동을 통해 분수의 곱셈 계산 원리를 스스로 생각하고 일반화할 수 있도록 하였다. 구체적으로 (분수)×(자연수)에서는 곱셈의 동수누가 의미를 통해 덧셈식을 곱셈식으로 나타내는 활동을 하고, (자연수)×(분수)에서는 곱셈의 배 의미를 통해 분수를 연산자로 이해할 수 있도록 하였다. (진분수)×(진분수)에서는 단위의 재개념화의 중요성을 파악할 수 있는 활동을 통해 전체의 부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보도록 하였고 분수의 곱셈 계산 원리를 일반화하도록 하였다. 마지막으로 대분수 곱셈을 제시하여 여러 가지 상황에 분수의 곱셈을 적용할 수 있도록 하였다. 이를 통해 수학적 사고력을 신장하고 역량 측면에서 문제 해결 능력, 창의·융합 능력, 태도 및 실천 능력을 기르도록 하였다.

[그림 Ⅳ-50] 분수의 곱셈 진행 방향

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (156쪽) 교육과학기술부. 2019.

분수의 곱셈에서의 형식적 지식은 '분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱한다'로 비교적 단순하나, 그 이유를 알고 분수 곱셈의 의미 및 알고리즘을 개념적으로 이해하기 위해서는 복잡한 사고 과정이 필요하다(5-2 지도서, 163쪽). 학생이 단위의 속성에 있어서 추가적인 변화에 직면한다(백선수, 김원경, 2005). 학생이 분수의 곱셈과 나눗셈에서 연산자의 의미를 접함에 따라 단위의 개념이 분자가 하나의 단위를 나타내고 분모가 또 다른 단위를 나타내는 단위의 비교로 바뀐다. 그리고 그들은 두 개의 원래의 단위를 비교하여 새로운 종류의 단위를 만든다(Schwarz, 1988, 재인용: 백선수, 김원경, 2005, 143쪽).

분수의 곱셈에 관한 핵심 아이디어는 3가지라 한다(5-2 지도서, 163쪽)

① 연산에 관여하는 세 가지의 양(피승수, 승수, 계산 결과)이 가리키는 대상의 단위가 서로 다르다.

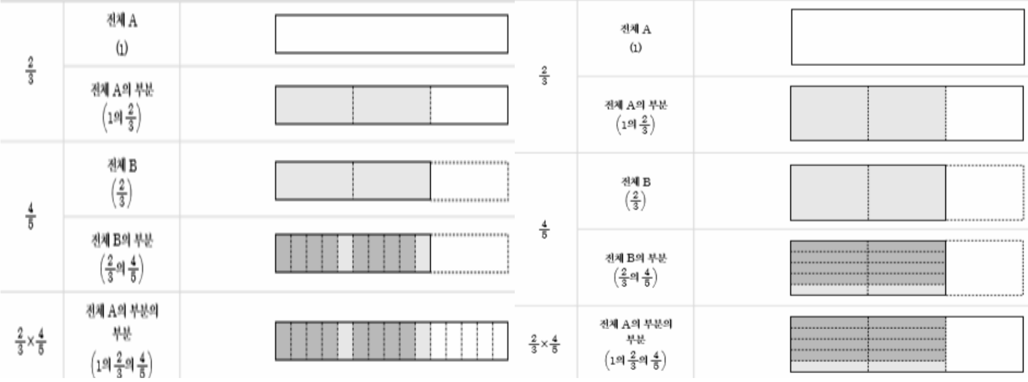
② 승수는 피승수에 작용하는 연산자 역할을 한다. 피승수를 전체 단위로 재개념화하고 승수의 분모만큼 나누고 분자만큼 취하는 과정에서 상황에 따라 다양한 분할 활동에 참여한다.

③ 계산 결과를 해석하기 위해 피승수의 전체 단위를 단위로 재개념화하고 반복 및 분할 활동을 "분모는 분모끼리 곱하고, 분자는 분자끼리 곱한다."라는 분수의 곱셈 알고리즘과 연결한다.

첫 번째 핵심아이디어는 분수의 덧셈과 뺄셈에서 3가지 양이 가리키는 대상의 단위가 서로 같음에 비해, 분수의 곱셈에서는 단위가 서로 다르다. 새로운

종류의 단위를 만드는 것이다. 연산자로서의 분수는 분수 자체를 연산자로서 input을 넣었을 때 output이 원래의 input을 축소 또는 확대하게 하는 연산자의 역할이다. 두 번째 핵심 아이디어는 승수와 피승수 모두를 연산자로 바라보지 않고 승수만을 연산자로 바라보고 있다.

지도서에서는 다음 그림과 같이 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ 분수의 곱셈을 길이 모델과 넓이 모델을 활용하여 설명하고 있다.



[그림 Ⅳ-51] 지도서 속 분수의 곱셈 모델

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (164쪽) 교육과학기술부. 2019.

다음 그림과 같이 피승수의 전체 단위는 1이다. 전체 1의 연산자 $\frac{2}{3}$만큼 축소되어 1의 $\frac{2}{3}$인 피승수가 있다. 이러한 피승수의 $\frac{4}{5}$만큼을 알아보는데, 이는 배 개념으로 분수의 곱셈으로 식을 만들 수 있다. 이 때, 학생들은 $\frac{4}{5}$를 만들기 위해서 단위를 전체 단위 1에서 피승수인 $\frac{2}{3}$로 재개념화 해야한다(5-2 지도서, 163쪽). $\frac{4}{5}$는 $\frac{2}{3}$의 연산자로 작용한다. $\frac{4}{5}$는 $\frac{2}{3}$를 5등분하고 그 중 4개를 취하는 행동(5-2 지도서, 163쪽)으로 **연산자로서의 분수**의 의미를 **전체-부분의 관계로서의 분수** 설명으로 마무리한다. 한편 분수의 곱셈 결과는 전체 직사각형

의 부분의 부분 크기를 구하는 것이므로 다시 전체 직사각형을 기본 단위로 하여 해석해야한다(5-2 지도서, 165쪽).

분수의 곱셈에 관한 학생들의 다양한 오류 및 오개념을 분석한 연구는 다음과 같다(백선수, 김원경, 2005, 이지영, 방정숙, 2014, 재인용: 5-2 지도서, 168쪽).

백선수, 김원경(2005)	이지영, 방정숙(2014)
• 단위에 대한 오류: 전체 단위 또는 1이 무엇인지 혼동하는 오류 • 분할에 대한 오류: 전체를 어떻게 분할할지 모르는 경우, 또는 잘못된 분할 • 분수의 곱셈의 의미에 대한 오류: ① 의미를 확장시키지 못하는 경우, 예를 들어 동수누가로 해결되지 못하는 분수의 곱셈에서 보이는 오류 ② 자연수의 곱셈처럼 계산 결과가 커진다고 생각하는 오개념	• $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$에서 $\frac{1}{3}$에만 $\frac{3}{4}$을 취하고 $\frac{3}{12}$이라고 답하는 경우 • $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$에서 계산 결과를 $\frac{2}{3}$를 중심으로 해석하여 $\frac{6}{8}$ 또는 $\frac{3}{4}$이라고 답하는 경우 • 각각을 표시하거나, 둘 중 하나의 분수만 표현한 경우

[그림 Ⅳ-52] 지도서 속 분수의 곱셈과 관련된 학생의 오류 및 오개념

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (168쪽) 교육과학기술부. 2019.

1) 각 차시 속 분수 - 분수의 곱셈

가) 단원도입

분수의 곱셈을 다양한 상황을 통해 나타낸다. 바루디(Baroody)와 코슬릭(Coslick)은 3가지 맥락을 중심으로 분수의 곱셈상황을 살펴본다고 하였다(Baroody, Coslick, 1998, 재인용; 5-2 지도서, 2019): 묶음 상황, 비율 상황, 넓이 상황이 있다.

① 콩 물을 $\frac{1}{4}$L씩 2번 담아 사용: 동수누가의 방법을 이용하여 $\frac{1}{4}$묶음이 2개가 있는 상황으로 분수의 덧셈에서 곱셈으로 연결이 가능하다.

② 상모 끈의 길이가 2m의 $\frac{1}{3}$: 승수가 $\frac{1}{3}$배의 의미를 갖는 상황으로, 2m를 2만큼 분할한 후에 1만큼 취하는 조작적인 과정으로 연산자로서의 분수로 바라본다.

③ 분수의 곱셈에서 직사각형 넓이 모델을 이용함으로써 넓이 상황을 이용할

것이라는 다양한 곱셈 상황을 예상할 수 있다.

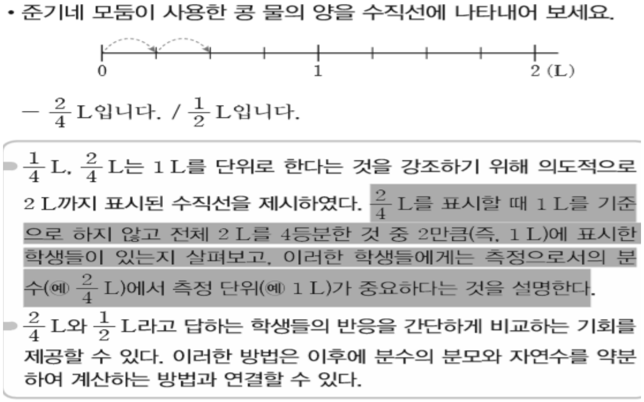
나) 2~3차시: (분수) x (자연수)를 알아볼까요

※ 학습목표: (분수)x(자연수)의 계산 원리를 이해하고 이를 계산할 수 있다.

'[6수01-09] 분수의 곱셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.'라는 성취기준의 시작이다. (분수) x (자연수)에서는 곱셈의 동수누가 개념을 통해 덧셈식을 곱셈식으로 나타내는 차시이다. (분수)를 묶음으로서 자연수만큼 반복하는 묶음 상황을 통해 곱셈임을 알 수 있다.

(1) 활동 1: (단위분수) x (자연수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

콩 물을 $\frac{1}{4}$L씩 2번 담아 사용했을 때, 준기네 모둠이 사용한 콩 물의 양을 수직선에 나타낸다. 0과 1 사이를 4등분하여 그 중의 1부분을 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 분수로 표현하나 이를 $\frac{1}{4}$묶음을 2번 이동함으로써 0으로부터 $\frac{1}{4}$단위가 2칸 이동하여 $\frac{2}{4}$L임을 해결하는 과정은 **측정으로서 분수** 관점이라 할 수 있다. 3-1 지도서의 분수의 의미 설명 이후 **측정으로서의 분수**를 제시한 것은 처음이다. 동수누가 개념을 통해 콩 물의 양을 덧셈식에서 곱셈식으로 이어지며 분수의 곱셈을 도입한다. 배개념을 통해 **승법적 사고**를 접한다.


• 준기네 모둠이 사용한 콩 물의 양을 수직선에 나타내어 보세요.

— $\frac{2}{4}$ L입니다. / $\frac{1}{2}$ L입니다.

- $\frac{1}{4}$ L, $\frac{2}{4}$ L는 1 L를 단위로 한다는 것을 강조하기 위해 의도적으로 2 L까지 표시된 수직선을 제시하였다. $\frac{2}{4}$ L를 표시할 때 1 L를 기준으로 하지 않고 전체 2 L를 4등분한 것 중 2만큼(즉, 1 L)에 표시한 학생들이 있는지 살펴보고, 이러한 학생들에게는 측정으로서의 분수(예 $\frac{2}{4}$ L)에서 측정 단위(예 1 L)가 중요하다는 것을 설명한다.
- $\frac{2}{4}$ L와 $\frac{1}{2}$ L라고 답하는 학생들의 반응을 간단하게 비교하는 기회를 제공할 수 있다. 이러한 방법은 이후에 분수의 분모와 자연수를 약분하여 계산하는 방법과 연결할 수 있다.

[그림 Ⅳ-53] (단위분수)x(자연수)

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (168쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: (진분수) x (자연수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

콩 물을 한 번에 $\frac{3}{4}$L씩 3번 담아 모두 사용했을 때, 사용한 콩 물의 양은 활동 1과 같은 맥락으로 0과 1 사이를 4등분하여 그 중의 3부분을 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 분수로 표현하나 이를 $\frac{3}{4}$묶음을 3번 이동함으로써 0으로부터 $\frac{1}{4}$단위가 3개씩 3번 반복하여 총 9칸 이동하여 0으로부터의 양의 거리를 분수의 곱셈 결과로 해결하는 과정은 **측정으로서 분수**관점이라 할 수 있다.

(3) 활동 3: 다양한 방법으로 (진분수) x (자연수) 계산하기.

활동 1과 2를 통해 분수의 곱셈 상황을 이해하고 시각적인 모델을 통해 분수의 곱셈 계산 원리를 이해한다. 이를 바탕으로 분수의 곱셈 방법 2가지를 제시한다.

① 분수의 곱셈을 다 한 후 약분: 연산자로서의 분수 관점에서 9라는 input을 넣어 전체를 함수처럼 x5를 한 후 x6이라는 조작적인 과정을 통해 나온 결과 output을 약분한다.

② 분수의 곱셈 과정에서 약분하며 해결: 연산자로서의 분수 관점에서 9라는 input을 넣어 전체를 함수처럼 x5를 한 후 x6이라는 조작적인 과정에서 input을 먼저 약분한 후 output 결과를 얻는다.

(4) 활동 4: (대분수) x (자연수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

연수네 모둠은 슬기네 모둠의 콩 물 $1\frac{1}{4}$L의 3배만큼 콩 물의 양을 사용했을 때, 연수네 모둠은 배개념을 통해 곱셈을 이용한다. 결과를 어림하며 대분수와 자연수의 곱셈에 대한 분수 감각을 기를 수 있다. 이를 2가지 방법으로 해결한다.

① 대분수를 가분수로 바꾸어 분수의 분모는 그대로 두고 분수의 분자와 자연수를 곱하여 계산한다: $1\frac{1}{4}$을 가분수로 바꾸어 $\frac{5}{4}$를 **측정으로서의 분수**관점에서 막대모델로 표시한다. 이러한 막대모델을 3배함으로써 계산한다. 이는 $\frac{1}{4}$ 단위가 5개인 묶음이 3번 반복된다. $\frac{1}{4}$단위가 4개일 때 1이 되므로, 1이 3개와

남은 $\frac{1}{4}$단위가 3개있다.

② 대분수를 자연수와 분수 부분으로 구별하여 승수를 곱한다: $1\frac{1}{4}$을 **전체-부분과의 관계로서의 분수**관점에서 1을 단위로서 이를 하나의 전체와 1을 4등분 한 것 중 1인 $\frac{1}{4}$을 막대모델로 나타낸다. 이러한 묶음의 3배이므로 1단위가 3개와 $\frac{1}{4}$단위가 3개로 계산한다.

다) 4~5차시: (자연수) x (분수)를 알아볼까요

※ 학습목표: (자연수)x(분수)의 계산 원리를 이해하고 이를 계산할 수 있다.

(자연수) x (분수)에서는 곱셈의 배 의미를 통해 분수를 연산자로 이해할 수 있도록 하였다(5-2 지도서, 156쪽). 비율상황은 승수가 배의 의미를 갖는 상황이다(5-2 지도서, 166쪽). **연산자로서의 분수**의 관점에서 자연수라는 연산자에 분수라는 연산자를 곱하며 분수의 분모만큼 나누고 분수의 분자만큼 곱하는 조작적인 과정을 취하는 분수이다.

시로 구성하였다. 1에서는 자연수가 분모의 배수인 (자연수)×(단위분수), (자연수)×(진분수)로 시작하여 분수의 연산자적 의미를 이해하도록 하고, 2에서는 자연수가 분모의 배수가 아닌 (자연수)×(단위분수), (자연수)×(진분수)에서 각각의 1을 등분할하는 활동이 필요하다는 것을 강조하였다. 3에서는 앞에서 학습한 내용을 바탕으로 (자연수)×(대분수)의 계산 원리를 이해하도록 하고 4에서는 학습한 내용을 연결하여 (자연수)×(분수)의 계산 원리를 정리할 수 있는 기회를 제공하였다. 교사는 상황에 따라 4차시는 1~2, 5차시는 3~6으로 구분하여 수업을 구성할 수 있으나 반드시 앞 차시의 내용과 연계하여 다음 차시를 다루어야 한다.

[그림 Ⅳ-54] 지도서 속 연산자로서의 분수 제시하는 부분

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (176쪽) 교육과학기술부. 2019.

(1) 활동 1: 자연수가 분모의 배수인 (자연수) x (진분수)의 계산원리를 이해하고 계산하기.

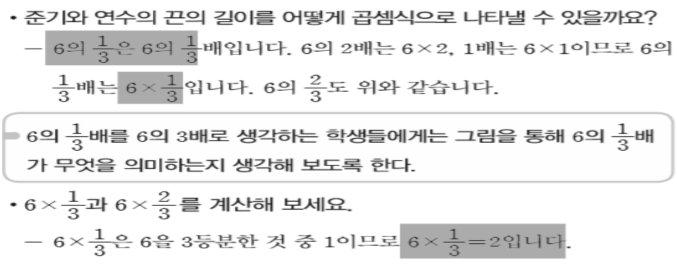
준기의 끈의 길이는 6m의 $\frac{1}{3}$이다. 연수의 끈의 길이는 6m의 $\frac{2}{3}$일 때, 준기

와 연수의 끈의 길이를 구하고자 한다. 준기는 연속량인 길이, 6m의 끈을 **전체-부분과의 관계로서의 분수**관점에서 3등분 한 것 중의 1만큼 가지고 있다. 연수는 6m의 끈을 **전체-부분과의 관계로서의 분수**관점에서 3등분 한 것 중의 2만큼 가지고 있다. 이를 막대 모델인 그림으로 표현하여 6의 $\frac{1}{3}$배를 알아본다. 곱셈식을 통해 자연수의 배개념에서 분수의 배개념으로 일반화하여 이를 이해하는데 분수의 배개념은 연산자로서 결과를 축소하거나 확대시킨다. 6m의 $\frac{2}{3}$는 6의 $\frac{2}{3}$이므로 6x$\frac{2}{3}$이다. **연산자로서의 분수**의 관점에서 6m의 길이는 3으로 나누고 2를 곱하는 조작적인 과정을 통해 축소한다.

[그림 Ⅳ-55] 전체-부분의 관계로서의 분수: (자연수)x(분수)

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (176쪽) 교육과학기술부. 2019.

지도서 속 막대모델을 통해 6을 3등분한 것 중 1만큼의 상태를 제시하는 것은 **전체-부분의 관계로서의 분수**이다.



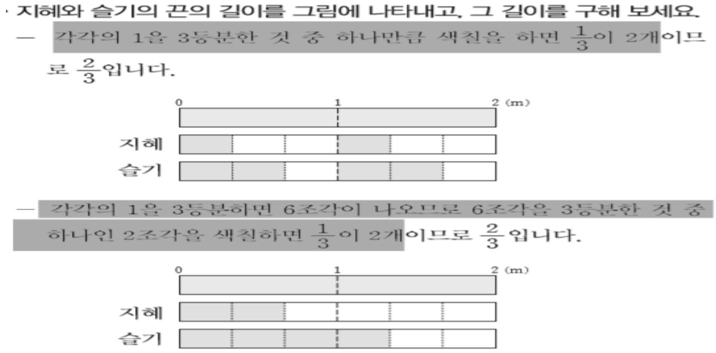
[그림 Ⅳ-56] 연산자로서의 분수: (자연수)x(분수)

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (176쪽) 교육과학기술부. 2019.

배 개념을 통해 6의 $\frac{1}{3}$만큼이 2라 제시하는 것은 **연산자로서의 분수**이다.

(2) 활동 2: 자연수가 분모의 배수가 아닌 (자연수) x (진분수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

지혜의 끈의 길이는 2m의 $\frac{1}{3}$이다. 슬기의 끈의 길이는 2m의 $\frac{2}{3}$일 때, 지혜와 슬기의 끈의 길이를 구하고자 한다. 지혜는 연속량인 길이, 2m의 끈을 **전체-부분과의 관계로서의 분수**관점에서 3등분 한 것 중의 1만큼 가지고 있다. 이 때, 2를 전체로 봐 등분할하는 것이 아닌 각 각의 1을 단위이자 전체로서 3으로 등분할하여 그 중의 1을 찾으면 재단위화를 한다. 즉, $\frac{1}{3}$이 2개인 $\frac{2}{3}$로 이는 **측정으로서의 분수** 개념이 함축되어 있다.



[그림 Ⅳ-57] 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수: (자연수)x(분수)

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (177쪽) 교육과학기술부. 2019.

슬기는 2m의 끈을 **전체-부분과의 관계로서의 분수**관점에서 3등분 한 것 중의 2만큼 가지고 있으나 이 때, 각 각의 1을 단위이자 전체로서 3으로 등분할하여 그 중의 2부분을 찾아 재단위화를 한다. 이를 막대 모델인 그림으로 표현하여 2의 $\frac{2}{3}$배를 알아본다. 곱셈식을 통해 자연수의 배개념에서 분수의 배개념으로 일반화하여 이를 이해하는데 분수의 배개념은 연산자로서 결과를 축소하거나

확대시킨다. 2m의 $\frac{2}{3}$는 2의 $\frac{2}{3}$이므로 2x$\frac{2}{3}$이다. **연산자로서의 분수**의 관점에서 2m의 단위가 1이므로 1이라는 input에 3을 곱하여 이에 3을 나누고 2를 곱하는 조작적인 과정을 통해 축소된 output을 구한다.

• $2\times\frac{1}{3}$을 계산해 보고, 친구들의 방법과 비교해 보세요.

– $2\times\frac{1}{3}$은 $1\times\frac{1}{3}$의 2배입니다. $2\times\frac{1}{3}=1\times\frac{1}{3}\times2=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$입니다.

– $2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times2=\frac{1\times2}{3}=\frac{2\times1}{3}=\frac{2}{3}$입니다.

– $2\times\frac{1}{3}=\frac{2\times1}{3}=\frac{2}{3}$입니다.

[그림 Ⅳ-58] 연산자로서의 분수: (자연수)x(분수)

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (177쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: (자연수) x (대분수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

2 x $1\frac{1}{3}$의 결과를 어림하며 분수 감각을 기른다. 이를 막대모델 그림을 통해 시각적으로 2가지 방법을 익힌다.

① 대분수를 가분수로 바꾸어 계산한다: 2 x $\frac{4}{3}$이므로 **연산자로서의 분수**의 관점에서 2의 $\frac{1}{3}$을 4배하며 확대된 답을 계산한다.

② 분배법칙을 이용한다: 2 x (1+$\frac{1}{3}$) 이므로 2의 1배와 2의 $\frac{1}{3}$배를 합하여 계산한다. 이 역시 **연산자로서의 분수**의 관점에서 분수의 곱셈을 바라보았다.

(4) 활동 4: (자연수) x (분수)의 계산 원리 설명하기.

배개념을 이용하여 **연산자로서의 분수**의 관점에서 승수가 연산자로서 피승수를 확대나 축소시킨다.

(5) 활동 5: 분수의 곱셈에서 계산 결과 어림하기.

(자연수) x (분수)를 계산할 때 배개념을 이용하여 **연산자로서의 분수**의 관점에서 output이 input의 확대나 축소를 야기한다. 이를 연습하며 계산결과를 어림하여 곱셈을 할 때 값이 항상 커지는 것이 아니라는 개념을 형성할 수 있다.

(6) 활동 6: (자연수) x (분수)의 여러 가지 문제 풀기.

연산자로서의 분수의 관점에서 분수의 곱셈을 바라보며 분수의 곱셈을 통해 결과가 확대되거나 축소됨을 인지한다.

라) 6~7차시: 진분수의 곱셈을 알아볼까요

※ 학습목표: 진분수 곱셈의 계산 원리를 이해하고 이를 계산할 수 있다.

(진분수) x (진분수)에서는 단위의 재개념화의 중요성을 파악할 수 있는 활동을 통해 전체의 부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보도록 하였고 분수의 곱셈 계산 원리를 일반화하도록 하였다(5-2 지도서, 156쪽). (진분수) x (진분수)에서는 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점과 곱셈의 의미를 확장하며 진행한다. '~중에 얼마만큼'이라는 전체-부분의 관계는 '~의 얼마만큼'으로 곱의 관계임을 알 수 있다. 단위를 다시 재조직하여 재단위화함으로써 진분수 간의 곱셈을 인지하고 해결한다. 또한, 1의 단위가 분수가 연산자의 역할을 하며 등분할하여 분수로 수가 축소한 후, 이를 다시 **연산자로서의 분수**를 통해 수가 축소된다. 결과값은 연산자로서의 분수로 인하여 축소되었지만 단위는 전체-부분의 관계로서 1임을 인지한다.

시로 구성하였다. 먼저 1에서는 (단위분수)×(단위분수)를 통해 전체의 부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보기 위해서 단위의 재개념화가 중요하다는 것을 이해하도록 하였다. 2에서는 이를 바탕으로 (진분수)×(단위분수)의 계산 방법을 스스로 찾아보도록 하고, 3에서는 앞에서 학습한 활동과 비교하여 (진분수)×(진분수)의 계산 원리를 설명하도록 하였다. 4에서는 학습한 내용을 연결하여 (진분수)×(진분수)의 계산 원리를 정리하는 기회를 제공하였고 5에서는 세 분수의 곱셈 상황에서 같은 원리를 적용할 수 있다는 것을 이해할

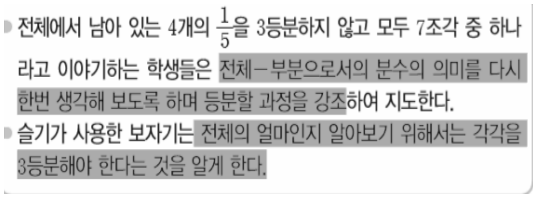
[그림 Ⅳ-59] (단위분수)x(단위분수)를 통한 단위의 재개념화의 중요성

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (180쪽) 교육과학기술부. 2019.

(1) 활동 1: (단위분수) x (단위분수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

슬기는 조각보를 만드는 데 전체 보자기의 $\frac{1}{5}$ 중에서 $\frac{1}{3}$을 사용했습니다. 슬기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 알아봅시다. 슬기가 사용한 보자기는

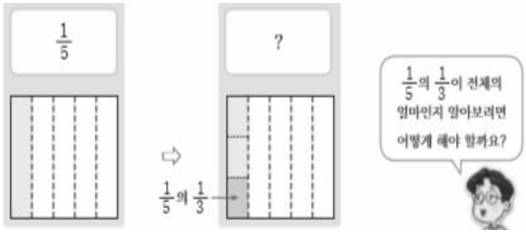
전체-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 전체 단위를 5등분한 것 중 1등분 중에서 다시 3등분하여 그 중의 1등분을 사용했다. 막대모델을 통해 이를 증명한다; $\frac{1}{5}$을 3등분 한 것 중 하나의 양이 얼마인지 알기 위해서 전체에서 남아 있는 4개의 $\frac{1}{5}$도 3등분하여 모두 15칸으로 나누어진 것 중 하나이므로 $\frac{1}{15}$임을 알 수 있다(5-2지도서, 180쪽). **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 단위분수간의 곱셈을 알아보고 분모는 분모끼리 곱하는 계산원리를 알 수 있다. 진분수의 곱셈이라는 연산자로서의 분수의 의미를 지닌 학습목표를 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명한다.


- 전체에서 남아 있는 4개의 $\frac{1}{5}$을 3등분하지 않고 모두 7조각 중 하나라고 이야기하는 학생들은 전체-부분으로서의 분수의 의미를 다시 한번 생각해 보도록 하며 등분할 과정을 강조하여 지도한다.
- 슬기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 알아보기 위해서는 각각을 3등분해야 한다는 것을 알게 한다.

[그림 Ⅳ-60] 전체-부분의 관계로서의 분수를 통한 단위분수 간의 곱셈 설명

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (180쪽) 교육과학기술부. 2019.

또한, 시각적 모델 역시 연산자로서의 분수의 관점에서 수가 축소됨을 보여주기 보다는 **전체-부분의 관계로서의 분수**에서 등분할하여 그 중의 얼마 부분인지로 표현한다.



[그림 Ⅳ-61] 전체-부분의 관계로서의 분수를 통한 단위분수간의 곱셈을 설명하는 모델

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (180쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: (진분수) x (단위분수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

지혜는 전체 보자기의 $\frac{4}{5}$중에서 $\frac{1}{3}$을 사용했습니다. $\frac{4}{5}$중의 $\frac{1}{3}$만큼 사용한 보자기의 양을 보여주는 것은 **연산자로서의 분수** 관점이다. 그러나, 지혜가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 알아보면 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 전체 단위를 5등분한 것 중 4등분 중에서 다시 3등분하여 그 중의 1등분을 사용했다. 이는 $\frac{1}{5}\text{x}\frac{1}{3}$의 4배이므로 $\frac{4}{15}$임을 알 수 있다. 막대모델을 통해 이를 증명한다; $\frac{4}{5}$를 3등분 한 것 중 하나의 양이 얼마인지 알기 위해서 전체에서 남아 있는 1개의 $\frac{1}{5}$도 3등분하여 모두 15칸으로 나누어진 것 중 4칸이므로 $\frac{4}{15}$임을 알 수 있다. **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 단위 분수간의 곱셈을 통해 분모는 분모끼리 곱하는 계산 원리를 알 수 있었다면, (진분수) x (단위분수)는 분자 배만큼 있기 때문에 분자끼리 역시 곱함을 알 수 있다. (진분수) x (단위분수)를 통해 연산자로서의 분수 관점에서 수가 축소함을 알 수 있다.

(3) 활동 3: (진분수) x (진분수)의 계산 원리를 이해하고 계산하기.

연수는 전체 보자기의 $\frac{4}{5}$ 중에서 $\frac{2}{3}$를 사용했을 때 $\frac{4}{5}\text{x}\frac{2}{3}$를 계산하는 방법을 알아보기 위해 먼저 계산 결과를 어림한다.

$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$가 얼마쯤일지 예상해 보세요.

— $\frac{4}{5}$에 1보다 더 작은 수를 곱했으므로 $\frac{4}{5}$보다 작은 값이 나올 것 같습니다.

— 1보다 작은 두 수를 곱했으므로 1보다 작은 값이 나올 것 같습니다.

[그림 Ⅳ-62] 연산자로서의 분수를 통한 진분수간의 곱셈결과 어림

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (181쪽) 교육과학기술부. 2019.

학생들은 곱셈을 통해 값이 커진다고 생각하는 경우가 많지만, 이는 곱셈을 통

해 계산 결과가 작아지며 $\frac{2}{3}$라는 연산자로서의 분수를 통해 $\frac{4}{5}$ 연산자의 곱셈 결과가 축소된다. 이는 **연산자로서의 분수**의 관점에서 분수의 결과가 함수처럼 확대가 되거나 축소되는 과정을 나타낸다. 어림을 통해 분수의 연산에서의 수감각을 기르며 자신의 계산결과에 대한 확신을 가질 수 있다. 어림 후 계산 과정을 막대모델을 통해 나타냄으로써 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점으로 표현한다: 전체 단위를 5등분하여 그 중의 4등분을 색칠한 후, 이를 3등분 한 것 중 2등분을 겹으로 색칠하여 겹으로 색칠한 부분이 전체의 얼마인지를 파악한다.

(4) 활동 4: (진분수) x (진분수)의 계산 원리 설명하기.

활동 1 (단위분수) x (단위분수)와 활동 2 (진분수) x (단위분수)의 계산원리를 이용하여 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하여 계산하는 계산원리를 이용한다.

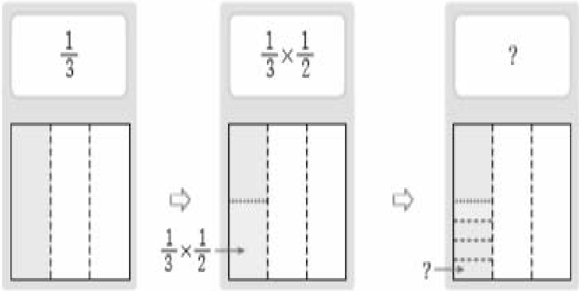
(5) 활동 5: 세 분수 곱셈의 계산 원리 설명하기.

준기는 전체 보자기의 $\frac{1}{3}$ 중에서 $\frac{1}{2}$을 자르고, 그 중에서 $\frac{3}{4}$을 사용하여 조각보를 만들었다. 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구해보자. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 세 분수의 곱셈으로 나타낼 수 있다. 막대모델을 통해 이를 시각적으로 제시하는데 그 과정은 **연산자로서의 분수**의 관점에서 설명할 수 있다.

①번 연산자: 전체를 표현하는 1 단위는 빠졌지만, 전체를 3등분하여 그 중의 1을 표현하여 $\frac{1}{3}$만큼 축소하였다.

②번 연산자: $\frac{1}{3}$을 2등분 중의 1부분으로 단위를 재조직하며 $\frac{1}{3}$을 연산자 $\frac{1}{2}$만큼 축소한다.

③ 연산자: 2번까지의 과정 후 4등분하여 3부분으로서 재단위화하며 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$로 계산결과는 또 축소된다. 2번까지의 계산결과를 4로 나누고 3으로 곱하는 과정이 포함된다.



[그림 Ⅳ-63] 연산자로서의 분수를 통한 진분수간의 곱셈 과정

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (183쪽) 교육과학기술부. 2019.

단위가 재개념화되며 ②번 연산자로서의 분수의 단위는 ①번 연산자로서의 분수였고, ③번 연산자로서의 분수의 단위는 전 과정들의 연산자가 되나 결과값은 원래의 1임을 인지해야한다. 지도서에서는 분수의 곱셈을 부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보는 것이라 말하며 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 말한다.

$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$를 그림으로 표현하지 못하는 경우	전체 직사각형에 $\frac{4}{5}$를 먼저 표현하도록 하고, $\frac{4}{5}$를 다른 전체로 보고 전체의 $\frac{2}{3}$를 표현해 보도록 한다. 부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보는 것이 분수의 곱셈이라는 것을 지도한다.

[그림 Ⅳ-64] 전체-부분의 관계로서의 분수로 진분수간의 곱셈 설명

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (183쪽) 교육과학기술부. 2019.

(6) 활동 6: (진분수) x (진분수)의 여러 가지 문제 풀기.

부분의 부분이 전체의 얼마인지 알아보는 것은 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 분수의 곱셈이라는 것을 인지하고 **연산자로서의 분수**의 관점에서 진분수간의 곱셈을 한다.

마) 8차시: 여러 가지 분수의 곱셈을 알아볼까요

※ 학습목표:

- (대분수)x(대분수)의 계산 원리를 이해하고 이를 계산할 수 있다.

- 여러 가지 분수의 곱셈의 계산 원리를 이해하고 이를 계산할 수 있다.

(1) 활동 1: 연수네 모둠이 가로가 $2\frac{2}{3}$m, 세로가 $1\frac{1}{4}$m 한지를 만들었을 때, 한지의 넓이가 얼마인지 알아보기.

직사각형 넓이를 구함으로써 대분수간의 곱셈을 한다. 어림을 통해 분수감각을 기른다. 이를 직사각형 모델로 나타내고 어떻게 계산하면 될지 생각한다. 연수와 준기 방법 모두 **연산자로서의 분수**의 관점에서 대분수간의 곱셈을 한다. 분수 자체를 연산자로 생각하여 대분수간의 곱셈을 하는데 분수 표현을 대분수로 하느냐 가분수로 바꾸어 계산하느냐에 차이이다.

① 연수의 방법: 대분수를 가분수로 나타내어 계산한다.

② 준기의 방법: $1\frac{1}{4}$을 자연수와 진분수로 구분하여 계산한다.

(2) 활동 2: 다음을 계산하고, 분수의 곱셈을 계산하는 방법을 이야기해 보기.

대분수 간의 곱셈은 진분수간의 곱셈과 다르게 **연산자로서의 분수**의 관점에서 확대된다. 계산결과의 양상은 다르게 나타나나 계산 원리는 동일하다. 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱하여 계산한다.

바) 9차시: 도전수학, 분수의 곱셈에서 규칙을 찾아 문제를 해결해 볼까요

(1) 활동 1: 색칠된 직사각형은 어떤 직사각형의 $\frac{1}{3}$이다. 크기가 1인 원래 직사각형을 그리면 색칠된 직사각형은 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 원래 직사각형을 3등분한 것 중 1부분이기 때문에 색칠된 직사각형을 3배함으로써 구한다. 이는 단위분수에 단위분수의 분모의 수만큼을 곱하면 크기(전체)가 1인 직사각형을 그릴 수 있도록 하였다(5-2 지도서, 186쪽).

(2) 활동 2: 색칠된 직사각형은 어떤 직사각형의 $\frac{3}{4}$이다. 크기가 1인 원래 직사각형을 그리면 색칠된 직사각형은 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 원래 직사각형을 4등분한 것 중 3부분이기 때문에 이 중의 1부분인 크기가 $\frac{1}{4}$

을 찾아 이를 4배함으로써 구한다. 이는 **연산자로서의 분수** 관점에서 $\frac{3}{4}$의 $\frac{4}{3}$배이므로 $\frac{3}{4}$x$\frac{4}{3}$=1이라는 전체가 나옴을 알 수 있다.

(3) 활동 3: 색칠된 직사각형은 어떤 직사각형의 $\frac{3}{2}$입니다. 크기가 1인 원래 직사각형을 그리기위해 색칠된 직사각형을 **측정으로서의 분수**의 관점에서 3등분하여 크기가 $\frac{1}{2}$인 직사각형을 만들고, 이를 2배하여 크기가 1(전체)인 직사각형을 만든다. 이는 **연산자로서의 분수** 관점에서 $\frac{3}{2}$ 연산자를 곱했을 때 색칠된 직사각형이 나오므로 크기가 1인 원래 직사각형에 x3과 ÷2의 조작적인 과정이 함축되어 있다. 따라서, 반대로 ÷3과 x2를 통해 원래의 직사각형을 구할 수도 있을 것이다.

사) 10차시: 얼마나 알고 있나요

이번 단원에서는 처음으로 지도서에서 '연산자로서의 분수'를 명시하여 나왔다. 물론 활동 속 시각적인 표현에서는 막대모델과 직사각형 모델을 통해 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 기술되는 점이 많으나 학생들이 **연산자로서의 분수** 관점에서 분수의 곱셈을 논리적으로 계산하도록 한다.

아) 11차시: 탐구수학, 분수의 곱셈을 이용하여 그림을 그려 볼까요

모둠이 색칠한 넓이를 **전체-부분의 관계로서의 분수**의 관점에서 표현한다. 색칠하지 않은 부분의 넓이를 분수의 곱셈을 이용하여 구하도록 하는데 이는 **연산자로서의 분수** 관점에서 분수의 곱셈을 논리적으로 계산하도록 했다고 볼 수 있다.

2) 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위

한 진행방향 속 추가적인 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 5학년 2학기 분수는 연산자로서의 분수의 의미가 중심을 이룬다. 특히, 처음으로 연산자로서의 분수의 의미가 지도서에 기술되어 있다.

<표 Ⅳ-6> 5학년 2학기 2단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2~3차시	○	●	○		
4~5차시	○	○	●		
6~7차시	○		●		
8차시			●		

바. 6학년 1학기

1) 각 차시 속 분수 - 분수의 나눗셈

3학년부터 5학년 1학기까지의 분수의 개념은 **전체-부분과의 관계로서의 분수** 관점에서 분수를 표현하고 생각하였다. 물론 **측정으로서의 분수**관점에서도 찾을 수는 있었다. 5학년 2학기의 분수의 곱셈에서는 학생들이 **연산자로서의 분수** 관점에서 논리적으로 계산하도록 하였다. 6학년 1학기에서는 학생들이 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수의 나눗셈을 도입한다. 자연수의 나눗셈에는 등분제 상황과 포함제 상황이 있는데 이 단원에서는 등분제 상황에서의 결과인 몫을 분수로 나타낸다. m과 n이 자연수일 때 $m \div n = \frac{m}{n}$이라는 분수가 몫으로서의 분수가 된다. 학생들이 **몫으로서의 분수 개념**을 이해하게 되면 그 후 (분수)÷(자연수)를 지도하게 된다.

2015년 교육과정에 따른 교과서에서는 분수의 나눗셈을 6학년 1학기와 2학기에 한 단원씩 두어 다루고 있다. 이 두 단원의 차이는 6학년 1학기에서는 제수가 자연수인 경우만 다루고 2학기에서는 제수가 분수인 경우를 다룬다는 점이다. 아울러 6학년 1학기에서는 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법, 즉 나눗셈의 몫으로서 분수를 지도한다. 즉, m, n이 자연수일 때 $m \div n$의 몫은 분수 $\frac{m}{n}$으로 나타낼 수 있다. 이는 다음 학기에 학습하게 될 (분수)÷(분수)에서 중요한 역할을 하므로 충실하게 지도해야 한다.

[그림 Ⅳ-65] 몫으로서의 분수

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (125쪽) 교육과학기술부. 2019.

가) 단원도입

나눗셈의 등분제 상황을 통해 분수의 나눗셈을 진행한다. 한 명이 가질 수 있는 양을 보며 **몫으로서의 분수 개념**으로 몫을 분수로 나타낸다.

나) 2차시: (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 몫이 1보다 작은 (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내는 원리를 이해하고 구할 수 있다.

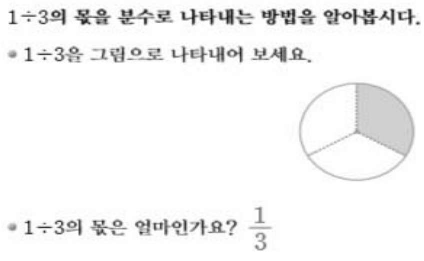
'[6수01-10] '(자연수)÷(자연수)'에서 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다.'성취기준을 기반으로 나눗셈의 계산결과인 몫이 자연수가 아닌 분수가 나오며 **몫으로서의 분수 개념**을 처음으로 도입한다.

(1) 활동 1: 실생활 상황에서 (자연수)÷(자연수) 알아보기.

같은 크기의 떡케이크 2개를 3명이 똑같이 나누어 먹으려고 한다. 한 명이 먹을 수 있는 떡케이크의 양을 구하기 위해 2÷3의 나눗셈 식을 구한다.

(2) 활동 2: 1÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법 알아보기.

1÷3을 그림으로 나타내면 원을 등분할하여 3등분한 것 중 1부분으로 표현된다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**을 통해 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다. **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**을 시각적인 모델로 나타내고, 이는 몫을 물어보았을 때의 분수와 같으므로 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다. $1 \div 3 = \frac{1}{3}$의 형태로, 몫은 1이 분자, 제수가 분모로 일반화된다.



[그림 Ⅳ-66] 전체-부분의 관계로서의 분수와 몫으로서의 분수

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (134쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 몫이 1보다 작은 (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내는 방법 알아보기.

2÷3의 몫을 분수로 나타내기 위해 원모델을 통해 시각적으로 먼저 표현한다. 원모델 2개를 각각 똑같이 3으로 나누어 $\frac{1}{3}$이 2개인 $\frac{2}{3}$임을 알 수 있다. 이는 **측정으로서의 분수** 관점에서 단위분수의 개수를 통해 몫으로서의 분수 결과를 표현한다. (자연수)÷(자연수)의 몫은 피제수는 분자, 제수는 분모로 하는 **몫으로서의 분수**가 된다.

(4) 활동 4: (자연수)÷(자연수)의 몫 구하기.

몫이 분수로 나오는 자연수간의 나눗셈을 시각적인 모델을 통해 표현함으로써 학생들이 가지고 있는 **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**으로 **몫으로서의 분수**를 구한다.

다) 3차시: (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 몫이 1보다 큰 (자연수)÷(자연수)를 분수로 나타내는 원리를 이해하고 구할 수 있다.

나눗셈의 계산결과인 몫이 자연수가 아닌 대분수가 나오며 2차시에서 배운 **몫으로서의 분수 개념**을 확장한다.

(1) 활동 1: 실생활 상황에서 (자연수)÷(자연수) 알아보기.

크기가 같은 한지 5장을 남김없이 4명이 똑같이 나누어 가지려고 한다. 한 명이 가지게 되는 한지의 양을 구하기 위해 5÷4의 나눗셈 식을 구한다. 한 명이 가지게 되는 정확한 한지의 양을 표현하기 위해 자연수가 아닌 분수로 나타내

며 **몫으로서의 분수 개념**을 이용한다. 이를 계산하기 위해 종이를 이용하여 구체물로 직접 나눠본다.

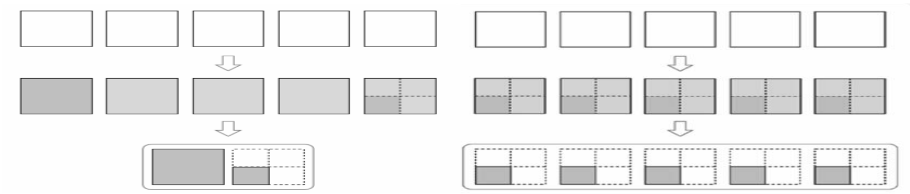
(2) 활동 2: (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법 알아보기.

5÷4를 그림으로 2가지 방법으로 나타낸다.

① 준기의 방법: 정사각형 5개를 4개로 똑같이 나누어야하므로 각각 1개씩 갖고 남은 1개를 4등분할하여 4등분한 것 중 1부분으로 표현된다. **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**을 생각할 수 있으나 시각적인 모델에서 전체 5개를 4등분하지 않기 때문에 전체-부분의 관계로 보기는 어렵고, 이는 몫을 물어보았을 때의 분수와 같으므로 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다고 생각한다. $5 \div 4 = 1\frac{1}{4}$의 형태로, 자연수와 진분수를 따로 구한다.

② 지혜의 방법: 정사각형 5개를 4개로 똑같이 나누어야하므로 5개의 정사각형(전체)을 각 각 4등분할하여 **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**으로 표현한다. 각 각의 정사각형 모델에서 4등분한 것 중 1부분을 가지고 와 $\frac{1}{4}$이 5개인 $\frac{5}{4}$라는 **측정으로서의 분수 개념**을 시각적인 모델로 나타내고, 이는 몫을 물어보았을 때의 분수와 같으므로 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다.

(자연수)÷(자연수)의 몫은 피제수는 분자, 제수는 분모로 하는 **몫으로서의 분수**가 된다. 몫이 대분수로 나오는 경우 가분수로 바꿀 수 있다.



[그림 Ⅳ-67] (자연수)÷(자연수)의 2가지 시각적 모델

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (136쪽) 교육과학기술부. 2019.

(3) 활동 3: 나눗셈의 몫을 분수로 나타내기.

(자연수)÷(자연수)의 몫은 피제수는 분자, 제수는 분모로 하는 **몫으로서의 분**

수가 되는 것을 상기하며 몫으로서의 분수를 구한다.

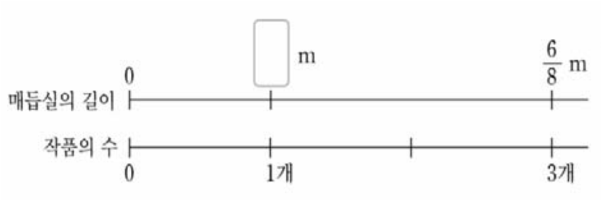
라) 4차시: (분수)÷(자연수)를 알아볼까요

※ 학습목표: (분수)÷(자연수)의 계산 과정을 이해하고 몫을 구할 수 있다.

'[6수01-11] 분수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.' 성취기준이 시작되는 차시이다. (분수)÷(자연수)를 시각적인 모델로 설명하기 위해 이중 수직선이 처음으로 나온다. 이중 수직선을 통해 등분제 상황의 **몫으로서의 분수**를 몫으로 구한다.

(1) 활동 1: 실생활 상황에서 (분수)÷(자연수) 알아보기.

매듭실 $\frac{6}{8}$m를 3등분하여 똑같은 작품 3개를 만들 때, 작품 하나에 사용된 매듭실의 길이는 등분제 상황으로 나눗셈을 통해 구할 수 있다. 이중 수직선을 통해 위의 수직선에는 매듭실의 길이, 밑의 수직선에는 작품의 수를 표현하여 수직선 모두 각 각 3등분으로 등분할한다. 작품의 수 1개일 때 매듭실의 길이가 궁금하므로 3개를 3등분하여 그 중의 1개일 때 매듭의 길이를 구하여 몫은 **몫으로서의 분수**가 되며 시각적인 모델은 **전체-부분의 관계로서의 분수**가 된다.



[그림 Ⅳ-68] 이중수직선

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (138쪽) 교육과학기술부. 2019.

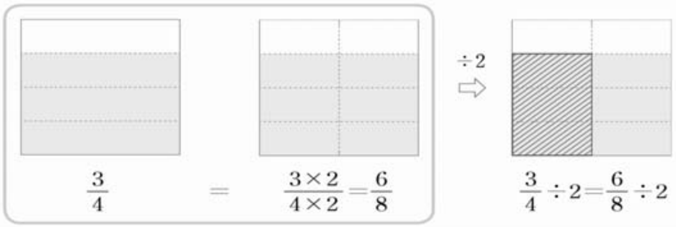
(2) 활동 2: 분자가 자연수의 배수인 (분수)÷(자연수)의 계산 원리 알아보기.

$\frac{6}{8}$÷3을 막대 모델 그림을 통해 시각적으로 표현한다. 막대 모델 전체를 8등분한 것 중 6부분을 가지고 와 $\frac{6}{8}$을 표현한 후 이를 3등분한다. 이는 **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**을 시각적인 모델로 나타내고, 몫을 물어보았을 때

의 분수와 같으므로 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다. $\frac{1}{8}$단위가 6개를 3등분하므로 $\frac{6 \div 3}{8}$로 계산할 수 있다.

(3) 활동 3: 분자가 자연수의 배수가 아닌 (분수)÷(자연수)의 계산 원리 알아보기.

앞서 활동을 통해 $\frac{3}{4}$÷2를 $\frac{3 \div 2}{4}$로 계산하고자 하나 3이 2로 나누어 떨어지지 않아 동치분수를 이용한다. **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**로서 $\frac{3}{4}$을 전체를 4등분한 것 중 3등분으로 표현하고 이는 전체를 8등분한 것 중 6등분과 크기가 같은 분수이므로 통분을 통해 분자가 자연수의 배수로 만들어 계산한다. 나눗셈의 결과인 몫은 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다.



[그림 Ⅳ-69] $\frac{3}{4}$÷2 시각적 모델

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (138쪽) 교육과학기술부. 2019.

(4) 활동 4: (분수)÷(자연수) 계산 익히기.

① 분자가 자연수의 배수일 때: 분자를 자연수로 나누어 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 분수를 표현한다.

② 분자가 자연수의 배수가 아닐 때: **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**을 통해 크기가 같은 분수를 만들어 **몫으로서의 분수**를 구한다.

마) 5차시: (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: (분수)÷(자연수)를 간단히 계산할 수 있는 원리를 이해하고 설

명할 수 있다.

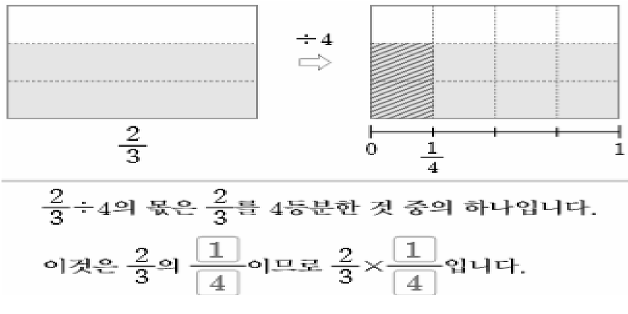
(분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 표현하여 계산하고자 한다. 그림을 통해 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸는 조작적인 과정은 **연산자로서의 분수 개념**으로 분수의 나눗셈을 표현한다.

(1) 활동 1: 실생활 상황에서 (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내어 계산하기.

식혜 $\frac{2}{3}$L를 4명이서 똑같이 나누어 마실 때, 한 명이 마실 수 있는 식혜의 양은 **몫으로서의 분수 개념**을 통해 몫이 분수로 표현된다. 분자가 자연수의 배수가 아니므로 크기가 같은 분수로 바꾸어 계산할 수 있다.

(2) 활동 2: $\frac{2}{3}\div4$를 분수의 곱셈으로 나타내어 계산하기.

① **연산자로서의 분수 개념**: $\frac{2}{3}\div4$를 전체 막대모델인 1을 연산자로서 $\frac{2}{3}$로 표현한 후 이를 ÷4로 함수처럼 조작적인 과정을 표현한다. $\frac{2}{3}\div4$의 몫은 $\frac{2}{3}$를 4등분 한 것 중 하나이므로 이는 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{4}$이므로 $\frac{2}{3}$x$\frac{1}{4}$로 표현할 수 있다. 따라서, $\frac{2}{3}$라는 분수가 4로 나누어져 1로 나오는 결과를 분수로 표현한다. $\frac{2}{3}$가 ÷4라는 조작적인 과정을 통해 축소된다.



[그림 Ⅳ-70] $\frac{3}{4}\div4$를 연산자로서의 분수 관점으로 바라보기

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (140쪽) 교육과학기술부. 2019.

② **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**: 전체를 3등분하여 그 중의 2부분을 $\frac{2}{3}$로 표현하고 이를 4등분한 것 중 하나로 표현한다. ÷4를 똑같이 4등분한 것 중의 하나로 설명한다.

÷4(무엇을 4로 나누는 것)는 무엇을 의미하나요?
— 무엇을 똑같이 4등분한 것 중의 하나입니다.

$\times\frac{1}{4}$(무엇에 $\frac{1}{4}$을 곱하는 것)은 무엇을 의미하나요?
— 무엇을 똑같이 4등분한 것 중의 하나입니다.

[그림 Ⅳ-71] $\frac{3}{4}\div 4$를 전체-부분의 관계로서의 분수 관점으로 바라보기

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (140쪽) 교육과학기술부. 2019.

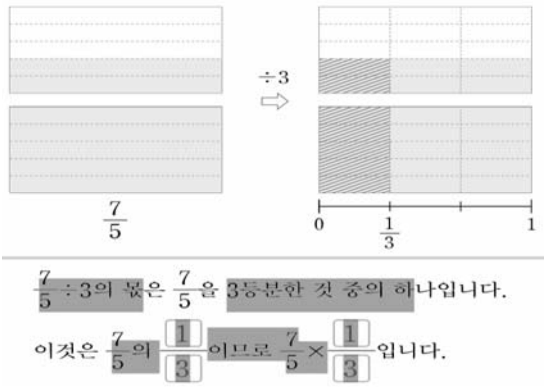
③ **몫으로서의 분수 개념**: 나눗셈의 등분제 상황에서 계산결과를 몫으로서의 분수로 구한다.

(3) 활동 3: $\frac{7}{5}\div 3$을 분수의 곱셈으로 나타내어 계산하기.

① **연산자로서의 분수 개념**: $\frac{7}{5}\div 3$을 전체 막대모델인 1을 연산자로서 $\frac{7}{5}$로 표현한 후 이를 ÷3로 함수처럼 조작적인 과정을 표현한다. $\frac{7}{5}\div 3$의 몫은 $\frac{7}{5}$을 3등분 한 것 중 하나이므로 이는 $\frac{7}{5}$의 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{7}{5}\text{x}\frac{1}{3}$로 표현할 수 있다. 따라서, $\frac{7}{5}$이라는 분수가 3으로 나누어져 1로 나오는 결과를 분수로 표현한다.

② **전체-부분의 관계로서의 분수 개념**: 전체인 1의 직사각형 모델 2개를 각각 5등분하여 하나는 전부를, 다른 하나는 2부분을 $\frac{7}{5}$로 표현하고 이를 3등분한 것 중 하나로 표현한다.

③ **몫으로서의 분수 개념**: 등분제 상황에서 계산결과를 몫으로서의 분수로 구한다.



[그림 Ⅳ-72] 몫으로서의 분수, 전체-부분의 관계로서의 분수와
연산자로서의 분수

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (141쪽) 교육과학기술부. 2019.

(4) 활동 4: (분수)÷(자연수) 계산하기.

(분수)÷(자연수)는 (분수)x$\frac{1}{(\text{자연수})}$로 표현할 수 있다.

바) 6차시: (대분수)÷(자연수)를 알아볼까요

※ 학습목표: (대분수)÷(자연수)의 계산 과정을 설명하고 몫을 구할 수 있다.

(분수)÷(자연수)의 방법을 확장하여 (대분수)÷(자연수)를 계산한다.

(1) 활동 1: (대분수)÷(자연수)의 상황 알아보기.

$4\frac{1}{3}$m는 2m의 몇 배인지 구하는 상황을 통해 (대분수)÷(자연수) 식을 구한다. 피제수가 대분수일 때 어떻게 하면 좋을지 생각한다.

(2) 활동 2: (대분수)÷(자연수)의 계산 방법 알아보기.

① 연수의 방법: **측정으로서의 분수 개념**으로서 피제수인 대분수를 가분수로 바꾸어 분자가 자연수의 배수로 크기가 같은 분수를 만들어 제수를 나눈다.

② 슬기의 방법: **측정으로서의 분수 개념**으로서 피제수인 대분수를 가분수로 바꾸고 **연산자로서의 분수 개념**으로서 제수를 연산자로서 $\frac{1}{\text{자연수}}$로 바꾸며 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

(3) 활동 3: 다양한 (대분수)÷(자연수)의 상황 알아보기.

넓이가 $2\frac{2}{3}\mathrm{m}^2$인 직사각형의 가로는 4m일 때, 직사각형의 세로를 구하기 위해 $2\frac{2}{3}\div4$라는 나눗셈 식을 만들어 상황에 따라 피제수를 크기가 같은 분수로 만들어 나누거나 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산한다.

(4) 활동 4: (대분수)÷(자연수) 계산하기.

① 분자가 자연수로 나누어떨어질 때에는 분자를 자연수로 나누어 구하는 것이 편하다.

② 분자가 자연수로 나누어떨어지지 않을 때에는 나눗셈을 곱셈으로 나타내어 계산하는 것이 편하다. (6-1 지도서, 143쪽)

사) 7차시: 도전 수학, 사용한 매듭실의 길이를 구해볼까요

※ 학습목표:

- 분수의 나눗셈과 관련된 실생활 문제를 해결하고 그 과정을 설명할 수 있다.

- 주어진 문제에서 필요 없는 정보를 찾을 수 있다.

매듭실을 4명에게 $1\frac{2}{5}$m씩 잘라 주었더니 $1\frac{3}{5}$m가 남았다. 남은 매듭실을 4명이 똑같이 나누어 반지 매듭을 만들 때, 한 명이 반지 매듭을 만드는 데 사용한 매듭실의 길이는 등분제 상황으로서 몫을 **몫으로서의 분수**로 구한다.

아) 8차시: 얼마나 알고있나요

나눗셈의 등분제 상황에서 등분할을 통해 **몫으로서 분수**를 구한다. 시각적인 모델을 통해 등분할을 할 때는 **전체-부분의 관계로서의 분수**와 연결하여 바라본다. m과 n이 자연수일 때 $\mathrm{m}\div\mathrm{n}=\frac{m}{n}$이라는 분수가 몫으로 계산결과가 된다. 이를 시작으로 m이 분수이고, n이 자연수일 때 학생들이 **몫으로서의 분수 개념**과 **연산자로서의 분수 개념**을 통해 $\mathrm{m}\div\mathrm{n}=\mathrm{m}\times\frac{1}{n}$이라는 조작적인 과정을 이해하게 되어 (분수)÷(자연수)를 계산한다.

자) 9차시: 탐구 수학, 필요한 재료의 양을 구해볼까요

※ 학습목표: 일상생활과 관련된 분수의 나눗셈 문제를 해결하는 활동을 통해 수학의 유용성을 알고 흥미를 가질 수 있다.

참치주먹밥 4인분을 만드는 데 필요한 재료와 재료의 양을 통해 1인분을 만드는데 필요한 재료의 양을 **몫으로서의 분수 개념**으로 몫을 분수로 표현한다.

2) 분수의 나눗셈 단원의 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 6학년 1학기 1단원 '분수의 나눗셈' 속 분수는 몫으로서의 분수에 관한 학습목표를 달성하고자 한다. 나눗셈의 결과인 몫을 구하기 위해 전체-부분의 관계로서의 분수를 이용한다. 5~6차시의 경우, 분수의 나눗셈을 곱셈으로 바꾸는 조작적인 과정을 보여주며 분수를 연산자로서 수를 확대/축소를 하게 한다.

<표 Ⅳ-7> 6학년 1학기 1단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	○			●	
3차시	○			●	
4차시	○			●	
5차시	○		○	●	
6차시	○		○	●	
7차시				●	

3) 각 차시 속 분수 - 비와 비율

두 양의 크기를 상대적으로 비교하는 상황에서 비의 개념을 도입하고 그 관계를 비와 비율로 표현한다. 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고

나타내고 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타냄으로서 처음으로 **비율로서의 분수 개념**이 나온다. 두 양을 비교할 때는 절대적 비교인 가법적 비교와 상대적 비교인 승법적 비교가 있다. 두 양의 승법적인 비교 관계를 나타낸 것이 비이고, 그 관계를 수로 나타낸 것이 비율이다(6-1 지도서, 236쪽).

가) 2차시: 두 수를 비교해 볼까요

※ 학습목표: 두 양의 크기를 뺄셈과 나눗셈으로 비교할 수 있다.

(1) 활동 1: 두 양의 크기 비교하기.

두 양을 비교하는 방법에는 뺄셈을 이용한 절대적 비교와 나눗셈을 이용하는 상대적 비교의 2가지 방법이 있음을 이해하도록 지도한다(6-1 지도서, 242쪽).

(2) 활동 2: 변하는 두 양의 관계 알아보기.

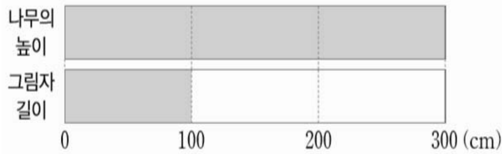
뺄셈을 이용한 절대적 비교와 나눗셈을 이용하는 상대적 비교의 차이점을 명확히 인지하도록 지도한다(6-1 지도서, 242쪽).

(3) 활동 3: 두 양의 크기를 비교하고 두 양의 관계에 대해 이야기하기.

이중수직선을 이용하여 두 양을 비교한다. 이중수직선의 표현은 각 각의 모델을 **전체-부분의 관계로서의 분수** 관점에서 나무의 높이와 그림자 두 개의 양을 표현하는데 두 양을 비교하므로 **비율로서의 분수**로 말할 수 있다. 나무의 높이와 그림자 두 개의 양을 상대적으로 비교하며 기준량을 어느 것으로 잡느냐에 따라 수로 표현이 달라진다.

① 나무의 높이가 기준량이라면 나무의 그림자 길이는 높이의 $\frac{1}{3}$배로 **비율로서의 분수**로 바라본다.

② 나무의 그림자가 기준량이라면 나무의 높이는 그림자 길이의 3배이다.



[그림 Ⅳ-73] 비율로서의 분수

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (243쪽) 교육과학기술부. 2019.

나) 3차시: 비를 알아볼까요

※ 학습목표:

- 비의 뜻을 알고 비의 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.

- 생활 속에서 비가 사용되는 상황을 이해한다.

'[6수04-02] 두 양의 크기를 비교하는 상황을 통해 비의 개념을 이해하고, 그 관계를 비로 나타낼 수 있다.' 성취기준을 학습하고자 하는 차시이다.

(1) 활동 1: 비가 필요한 상황을 파악하고, 비의 뜻 이해하기

포도주스 1병을 만들기 위해 물 3컵과 포도 원액 2컵이 필요하다. 상대적 비교를 하며 :의 기호와 기준량과 비교하는 양에 대해 배운다. **비율로서의 분수**로 바라보기 위해 비를 먼저 배운다.

(2) 활동 2: 문제 상황을 비로 나타낸 것의 옳고 그름을 이유를 들어 이야기하기.

판매 금액에 대한 기부 금액의 비를 표현할 때 기준량과 비교하는 양이 바뀌지 않도록 유의한다. 비를 나타낼 때 기호 :의 오른쪽에 있는 수가 기준량이고, '~에 대한'이라는 의미가 기준량을 나타냄을 이해하게 한다(6-1지도서, 245쪽).

(3) 활동 3: 거리의 비 구하기.

출발점에서부터 장애물까지의 거리와 장애물에서부터 도착점까지의 거리의 비를 구함으로써 기준량과 비교하는 양을 구해본다.

다) 4차시: 비율을 알아볼까요

※ 학습목표: 비율의 뜻을 알고, 비율을 구하여 크기를 비교할 수 있다.

'[6수04-03] 비율을 이해하고, 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타낼 수 있다.' 성취기준 중 비율의 의미를 학습하고자 하는 차시이다.

(1) 활동 1: 비율이 필요한 상황을 파악하고, 비율의 뜻 이해하기.

처음에 있던 도넛 수에 대한 판매한 도넛 수의 비를 구해보고, 판매한 도넛 수는 처음에 있던 도넛 수의 몇 배인지 분수와 소수로 표현함으로서 **비율로서의 분수**를 처음 도입한다.

(2) 활동 2: 길이의 비율을 구하여 크기 비교하기.

두 액자의 가로와 세로의 길이는 다르지만 세로에 대한 가로의 비율이 같은 경우를 보여준다. 즉, 기준량과 비교하는 양이 달라도 비율이 같을 수 있다는 사실을 알 수 있다.

(3) 활동 3: 실생활 상황에서 비율을 구하여 크기 비교하기.

실생활 상황에서 비율로서의 분수를 살펴보며 비율이 실생활에 사용되고 있음을 보여준다.

라) 5차시: 비율이 사용되는 경우를 알아볼까요

※ 학습목표: 실생활에서 비율이 사용되는 여러 가지 경우를 안다.

실생활 속에서 다양하게 사용되는 비율로서의 분수를 살펴봄으로써 비율로서의 분수의 유용성을 알 수 있다.

(1) 활동 1: 시간에 대한 거리의 비율 알아보기.

실생활에서 비율이 사용되는 경우 중 속력과 관련된 상황으로 걸린 시간을 기준량, 간 거리를 비교하는 양으로 하여 비율을 구한다(6-1 지도서, 248쪽).

(2) 활동 2: 넓이에 대한 인구의 비율 알아보기.

실생활에서 비율이 사용되는 경우 중 인구 밀도와 관련된 상황으로 넓이를 기준량, 인구를 비교하는 양으로 하여 비율을 구한다(6-1 지도서, 248쪽).

(3) 활동 3: 흰색 물감 양에 대한 검은색 물감 양의 비율 알아보기.

기준량은 흰색 물감 양이고, 비교하는 양은 검은색 물감 양이다. 회색 물감의 진하기를 비교함에 있어 비율의 크기를 비교한다. 지혜가 만든 회색 물감과 슬기가 만든 회색 물감의 기준량은 모두 흰색 물감 양이지만, 기준량 자체는 수치로서 각 각의 비율을 따로 구할 수 있다.

흰색 물감 양에 대한 검은색 물감 양의 비율을 구하지 못하는 경우	기준량은 흰색 물감 양, 비교하는 양은 검은색 물감 양임을 알고 $\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$으로 비율을 구해 보도록 지도한다.

[그림 Ⅳ-74] 비율로서의 분수

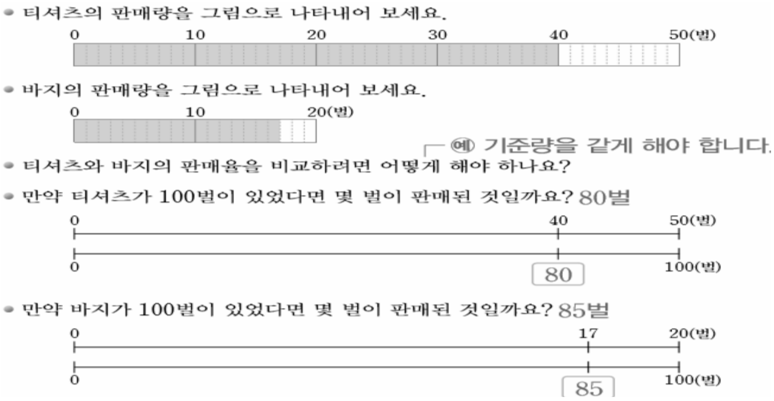
주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (249쪽) 교육과학기술부. 2019.

마) 6차시: 백분율을 알아볼까요

※ 학습목표: 백분율의 뜻을 알고, 비율을 백분율로 나타낼 수 있다.

(1) 활동 1: 백분율이 필요한 상황을 파악하고, 백분율의 뜻 이해하기.

알뜰 시장에서 티셔츠와 바지의 판매율을 비교하는 상황으로 기준량이 다를 때 비율의 크기를 비교한다. 판매율은 처음에 있던 물건 수에 대한 팔린 물건의 수의 비율을 의미한다(6-1 지도서, 250쪽). 티셔츠와 바지의 판매량을 비교할 때 기준량이 서로 다르기 때문에 단순히 판매된 수만 가지고는 판매량을 비교하기 어렵다는 사실을 인지할 수 있도록 지도해야한다(6-1 지도서, 234쪽). 여기에서 기준량은 수 자체로 바라봐야한다. 기준량을 같게 만들기 위해 이중수직선을 활용하여 기준량이 바뀔 때 비교하는 양도 바뀌어 각 각의 비율을 구하여 티셔츠와 바지의 판매율을 비교할 수 있도록 한다.



[그림 Ⅳ-75] 비율로서의 분수

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (251쪽) 교육과학기술부. 2019.

(2) 활동 2: 비율을 백분율로 나타내기.

티셔츠와 바지의 판매율을 나타내기 위해 기준량이 같아야하므로 기준량을 100으로 할 때의 비율을 백분율로 약속한다.

바) 7차시: 백분율이 사용되는 경우를 알아볼까요

※ 학습목표: 실생활에서 백분율이 사용되는 여러 가지 경우를 안다.

실생활에서 백분율이 사용되는 경우에는 할인율, 득표율, 소금물의 진하기 등이 있다. 각 각의 사례에서 기준량이 다를 때 비율을 비교하기 위해서는 기준량을 같게 만드는데 여기서는 백분율이므로 기준량을 100으로 만들어 비율을 구한다.

사) 8차시: 도전 수학, 수학으로 환경을 읽어 볼까요

※ 학습목표:

- 백분율을 이용하여 문제를 해결하고 문제 해결 방법을 설명할 수 있다.

- 백분율을 활용한 문제를 만들고 해결할 수 있다.

학생들에게 비율에서 비교하는 양과 기준량이 무엇인지, 왜 100을 곱하여 백분율을 구하는지 구체적인 발문을 통하여 학생이 비율과 백분율을 명확히 이해하는지 확인하는 차시이다(6-1 지도서, 254쪽).

아) 10차시: 탐구 수학, 글자의 비율을 생각하며 글씨체를 만들어 볼까요

※ 학습목표: 글자의 비율을 생각하며 나만의 글씨체를 만들 수 있다.

비율로서의 분수 관점에서 기준량과 비교하는 양의 비교로 가로에 대한 세로의 비율을 구한다.

4) 비와 비율 단원의 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 6학년 1학기 4단원 '비와 비율' 속 분수는 비율로서의 분수에 관한 학습목표를 달성하고자 한다.

<표 Ⅳ-8> 6학년 1학기 4단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시	○				●
3차시					●
4차시					●
5차시					●
6차시					●
7차시					●

사. 6학년 2학기

6학년 1학기의 분수의 나눗셈은 등분제 상황이었다면 이번 단원에서의 분수의 나눗셈은 포함제 상황과 새로운 의미인 단위 비율 결정 상황이다. 등분제 상황과 포함제 상황의 나눗셈의 결과가 분수로 나올 때 몫으로서의 분수를 구할 수 있다. 등분제 상황에서의 분수의 나눗셈은 1명이 가질 수 있는 몫을 찾기 때문에 몫으로서의 분수로 바라볼 수 있다. 등분제에서 나누는 수가 분수인 경우에는 등분제의 의미를 확장하거나 적절하게 새로운 의미를 도입할 필요가 있다(6-2 지도서, 129쪽). 2015 개정 교육과정에 새롭게 나온 단위 비율 결정 상황에서의 분수의 나눗셈은 분수의 연산이 어떻게 진행되고, 문제 상황이 어떤지에 따라 분수의 의미가 다양하다. 지도서에서는 이렇게 말한다.

> 분수의 나눗셈은 분수의 곱셈만큼 간단한 알고리즘으로 해결된다. 그러나 그 알고리즘을 관계적으로 이해시키는 것은 쉽지 않은 일이다. 이를 위해서는 분수의 나눗셈 지도의 각 단계에서 나눗셈의 의미와 분수의 개념, 그리고 자연수 나눗셈의 의미를 바탕으로 충분히 비형식적으로 계산하는 과정이 필요하다(6-2 지도서, 122쪽).

학생들이 가장 어려워하고 도구적으로 이해하고 있는 분수의 나눗셈을 관계적으로 이해하려면 분수의 개념을 정확히 인지하는 것이 필요할 것이다.

가) 2차시: (분수)÷(분수)를 알아볼까요

※ 학습목표: 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산 원리를 이해하고 계산 방법을 찾아 계산할 수 있다.

'[6수01-11] 분수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.'는 성취기준을 달성하기 위해 포함제 상황으로서의 **몫으로서의 분수**를 구하고자 한다. 이 차시는 동분모 분수의 나눗셈으로 포함제 상황의 몫으로서의 분수를 구하기 위해 2가지 방법을 제시한다; 나누어지는 수에서 나누는 수를 몇 번 덜어 낼 수 있는지 또는 단위분수로 몇 개인지 알아본다. 첫 번째 방법은 **몫으로서의 분수**로 볼 수 있으나 두 번째 방법은 몫으로서의 분수를 구하기 위해 **측정으로서의 분수**를 이용했다고 볼 수 있다. 따라서, 분수간의 나눗셈의 계산

원리를 이해하고자 하는 학습목표는 몫으로서의 분수를 구하는 상황이지만, 방법적인 측면에서는 측정으로서의 분수도 이용한다.

다음 그림과 같이 동분모 분수의 나눗셈에 앞서 제수를 분수가 아닌 자연수로 바꾸어 자연수의 나눗셈에서 분수의 나눗셈으로 확장시킨다.

1 실생활에서 (분수)÷(분수) 알아보기

- **어떤 상황인가요?**
  — 물 $\frac{3}{4}$ L를 한 컵에 $\frac{1}{4}$ L씩 나누어 담으려고 합니다.
- **구하려고 하는 것은 무엇인가요?**
  — 몇 개의 컵에 나누어 담을 수 있는지 알아보는 것입니다.
- **몇 개의 컵에 나누어 담을 수 있는지 알아보는 식을 어떻게 세울 수 있나요?**
  — 나눗셈을 이용하면 될 것 같습니다.
- **만약 물 3 L를 1 L씩 나누어 담는다고 생각하면 식을 어떻게 세울 수 있나요?**
  — 3÷1로 세울 수 있습니다.
- **무엇을 무엇으로 나누었나요?**
  — 물 전체의 양을 담는 물의 양으로 나누었습니다.
- **물 $\frac{3}{4}$ L를 한 컵에 $\frac{1}{4}$ L씩 나누어 담으면 몇 개의 컵에 담을 수 있는지 구하는 식을 써 보세요.**
  — $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$입니다.

> 나누어지는 수와 나누는 수가 분수인 경우에는 학생들이 분수 나눗셈식을 어떻게 세워야 할지 어려워할 수 있다. 나누는 수를 분수가 아닌 자연수로 바꾸어 생각하면 학생들이 식 세우기에 좀 더 쉽게 접근할 수 있다. 필요하다면 제시된 내용보다 다양한 상황을 주어 분수 나눗셈식을 세울 수 있도록 한다.

[그림 IV-76] 자연수의 나눗셈 확장으로서의 분수의 나눗셈

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (136쪽) 교육과학기술부. 2019.

학생이 문제 상황을 나눗셈으로 인식하여 식으로 만든 후에는 분모가 같은 (분수)÷(단위분수)의 계산 원리를 알아본다. 포함제 상황이므로 덜어내는 활동을 통해 **몫으로서의 분수**를 구한다. 분자끼리 나누어떨어지는 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산 원리 알아보기 위해 다음과 같은 시각적 모델을 제시한다. 몫으로서의 분수를 구하는 상황이지만 단위분수가 몇 개 있는지 확인하여 계산하므로 **측정으로서의 분수**를 방법으로 이용하기도 한다.

· 그림에 $\frac{6}{7}$을 나타내어 보세요. $\frac{6}{7}$은 $\frac{2}{7}$가 몇 개인가요?

— 3개입니다.

· $\frac{6}{7}$에서 $\frac{2}{7}$를 몇 번 덜어 낼 수 있나요? — 3번 덜어 낼 수 있습니다.

· $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$는 얼마라고 생각하나요? — 3입니다.

· 연수가 $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$를 다음과 같이 계산했습니다. □ 안에 알맞은 수를 써넣으세요. — 6, 2입니다.

· $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$를 어떻게 계산했는지 이야기해 보세요.

— $\frac{6}{7}$은 $\frac{1}{7}$이 6개이고 $\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 2개이므로 6개를 2개로 나누는 것과 같습니다. 따라서 3입니다.

— $\frac{6}{7}$에서 $\frac{2}{7}$를 3번 덜어 냈으므로 3입니다.

[그림 Ⅳ-77] 동분모 분수간의 포함제 상황의 계산 원리

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (136쪽) 교육과학기술부. 2019.

첫 번째 계산 원리는 **측정으로서의 분수**의 관점에서 단위분수가 몇 개있고, 단위분수의 개수를 나눈다. 두 번째 계산 원리는 **몫으로서의 분수** 관점에서 제수를 피제수에서 덜어낸다.

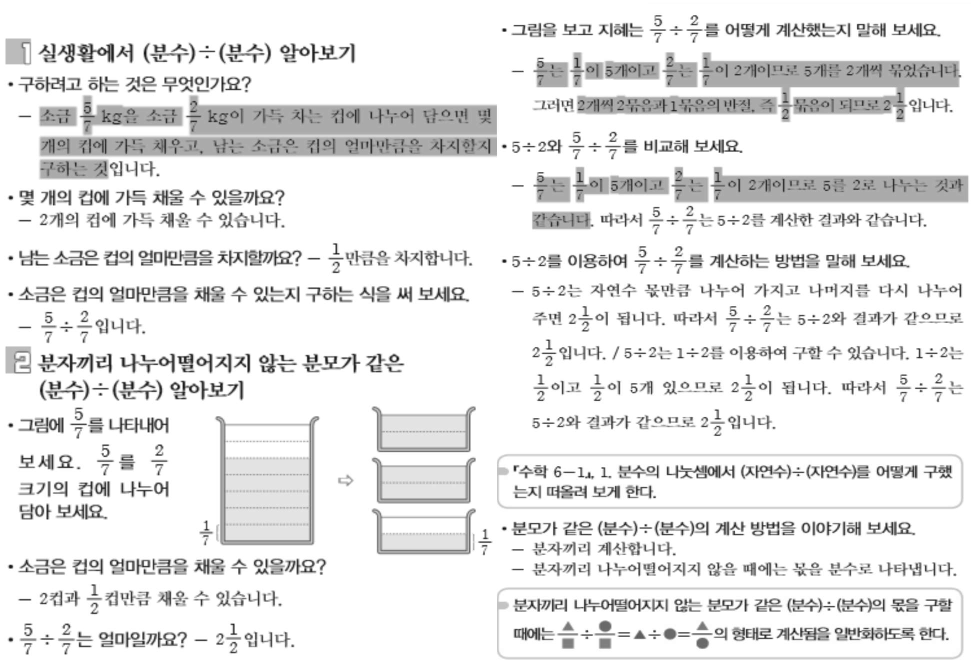
나) 3차시: (분수)÷(분수)를 알아볼까요

※ 학습목표: 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산 원리를 이해하고 계산 방법을 찾아 계산할 수 있다.

이 차시는 지난 차시의 동분모 분수의 나눗셈이 이어진다. 그러나 전 차시는 나머지가 없었지만 이번 차시는 나머지가 있고 나머지의 의미를 찾는다. 즉, 동분모 분수이지만 분자끼리 나누어떨어지지 않는 나눗셈의 결과를 구한다. 자연수의 나눗셈을 확장하여 분수의 나눗셈을 살펴본다. 다음 그림과 같이 구하고자 하는 것을 명확하게 하여 학생이 몫으로서의 분수를 결과로 구했을 때 **몫으로서의 분수**의 의미를 이해하도록 한다.

활동 1에서는 소금 $\frac{5}{7}$kg을 소금 $\frac{2}{7}$kg이 가득 차는 컵에 나누어 담고자 할 때 포함제 상황으로서의 나눗셈임을 알 수 있다. 2개의 컵에 가득 채우고, 남는 소금은 컵이 전체 단위로 컵의 절반만큼 차지하므로 $\frac{1}{2}$임을 인지한다. 남은 소

금을 구하기 위해 컵의 얼마만큼을 차지하는지 활동 2에서 시각적 모델로 살펴보는데 이 때 남은 소금의 양이 원래 컵의 반만 차지하며 분수만큼 축소했음을 알 수 있으므로 **연산자로서의 분수**로도 살펴볼 수 있다. 또한, 전체를 2등분한 것 중 1부분이므로 $\frac{1}{2}$이라고 말하며 **전체-부분의 관계로서의 분수**로도 살펴볼 수 있다. 여기서 중요한 점은 **몫으로서의 분수**를 구하기 위해 그동안 배운 다양한 분수의 의미를 이용한다는 것이다. 나머지가 자연수가 아니지만 같은 전체 단위를 활용하여 나머지 역시 몫으로서 표현한다. 활동 2에서 소금은 2컵과 $\frac{1}{2}$컵만큼 채울 수 있고, 따라서 몫은 $2\frac{1}{2}$ 분수 자체임을 알 수 있다. 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산 방법처럼 분자끼리 나누어떨어지지 않을 때에는 몫을 분수로 나타낸다(6-2 지도서, 138쪽).


1 실생활에서 (분수)÷(분수) 알아보기

• 구하려고 하는 것은 무엇인가요?
— 소금 $\frac{5}{7}$ kg을 소금 $\frac{2}{7}$ kg이 가득 차는 컵에 나누어 담으면 몇 개의 컵에 가득 채우고, 남는 소금은 컵의 얼마만큼을 차지할지 구하는 것입니다.

• 몇 개의 컵에 가득 채울 수 있을까요?
— 2개의 컵에 가득 채울 수 있습니다.

• 남는 소금은 컵의 얼마만큼을 차지할까요? — $\frac{1}{2}$만큼을 차지합니다.

• 소금은 컵의 얼마만큼을 채울 수 있는지 구하는 식을 써 보세요.
— $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$입니다.

2 분자끼리 나누어떨어지지 않는 분모가 같은 (분수)÷(분수) 알아보기

• 그림에 $\frac{5}{7}$를 나타내어 보세요. $\frac{5}{7}$를 $\frac{2}{7}$ 크기의 컵에 나누어 담아 보세요.

• 소금은 컵의 얼마만큼을 채울 수 있을까요?
— 2컵과 $\frac{1}{2}$컵만큼 채울 수 있습니다.

• $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$는 얼마일까요? — $2\frac{1}{2}$입니다.

• 그림을 보고 지혜는 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$를 어떻게 계산했는지 말해 보세요.
— $\frac{5}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 5개이고 $\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 2개이므로 5개를 2개씩 묶었습니다. 그러면 2개씩 2묶음과 1묶음의 반절, 즉 $\frac{1}{2}$묶음이 되므로 $2\frac{1}{2}$입니다.

• 5÷2와 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$를 비교해 보세요.
— $\frac{5}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 5개이고 $\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 2개이므로 5를 2로 나누는 것과 같습니다. 따라서 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$는 5÷2를 계산한 결과와 같습니다.

• 5÷2를 이용하여 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$를 계산하는 방법을 말해 보세요.
— 5÷2는 자연수 몫만큼 나누어 가지고 나머지를 다시 나누어 주면 $2\frac{1}{2}$이 됩니다. 따라서 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$는 5÷2와 결과가 같으므로 $2\frac{1}{2}$입니다. / 5÷2는 1÷2를 이용하여 구할 수 있습니다. 1÷2는 $\frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{2}$이 5개 있으므로 $2\frac{1}{2}$이 됩니다. 따라서 $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$는 5÷2와 결과가 같으므로 $2\frac{1}{2}$입니다.

『수학 6－1』, 1. 분수의 나눗셈에서 (자연수)÷(자연수)를 어떻게 구했는지 떠올려 보게 한다.

• 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 계산 방법을 이야기해 보세요.
— 분자끼리 계산합니다.
— 분자끼리 나누어떨어지지 않을 때에는 몫을 분수로 나타냅니다.

분자끼리 나누어떨어지지 않는 분모가 같은 (분수)÷(분수)의 몫을 구할 때에는 $\frac{▲}{■} \div \frac{●}{■} = ▲ \div ● = \frac{▲}{●}$의 형태로 계산됨을 일반화하도록 한다.

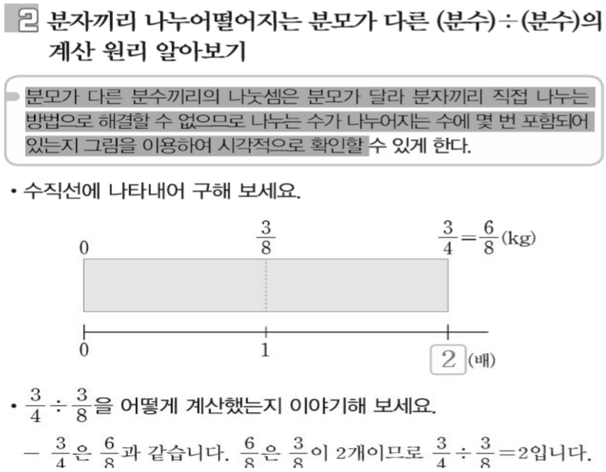
[그림 Ⅳ－78] 분자끼리 나누어떨어지지 않는 동분모 분수간의
포함제 상황의 계산 원리

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (138쪽) 교육과학기술부. 2019.

다) 4차시: (분수)÷(분수)를 알아볼까요

※ 학습목표: 분모가 다른 (분수)÷(분수)의 계산 원리를 이해하고 계산할 수 있다.

이분모 분수의 나눗셈을 계산하기 위해 2~3차시에서 배웠던 동분모 분수의 나눗셈을 활용한다. 이분모 분수를 동분모 분수로 만들어 계산하기 위해 통분이 필요함을 인지한다. 동분모 분수는 포함제 상황에서 덜어내며 분자끼리 나누어 해결한다. 길이모델과 수직선을 함께 활용하는 시각적 모델을 사용하여 학생의 이해를 돕는다.



[그림 Ⅳ-79] 이분모 분수간의 포함제 상황의 계산 원리

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (140쪽) 교육과학기술부. 2019.

라) 5차시: (자연수)÷(분수)를 알아볼까요

※ 학습목표: (자연수)÷(분수)의 계산 원리를 이해하고 계산 방법을 찾아 계산할 수 있다.

조개 6kg을 캐는 데 $\frac{3}{4}$시간이 걸릴 때, 1시간동안 캘 수 있는 조개의 무게를 알아보고자 한다. 박교식 등(2004)은 (분수)÷(자연수)일 경우에만 등분제 상황이 적절하고, (분수)÷(분수)인 경우에는 등분제 상황이라기보다는 단위 비율 결정 상황이라고 하는 것이 적절하다고 하였다(재인용, 6-2 지도서, 2019, 130쪽). (자

연수)÷(분수)를 해결하고자 하는 상황을 등분제 상황보다 확장된 의미의 단위 비율 결정 상황에서 도입한다. 단위 비율 결정 상황은 단위의 비율을 구하는 것으로, 이 문제에서는 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구하며 1시간이 기준량이 되어 kg/시간으로 살펴볼 수 있다. 제수가 분수인 경우, 학생들이 문제를 이해하고 식을 세우는데 어려울 수 있으므로 단순화 전략을 이용하여 자연수의 나눗셈에서는 어떻게 했는지 먼저 생각한다. 이에 관한 설명은 다음 그림에 나와 있다.

가. (자연수)÷(분수)

단위 비율 결정 상황에서 (자연수)÷(분수)를 해결할 때는 결국 자연수의 곱셈과 나눗셈 혼합 계산이 된다. 다음 단위 비율 결정 상황의 예를 통해 살펴보자.

[나눗셈 상황: 단위 비율 결정 상황]
지혜네 반 학생들이 조개 6 kg을 캐는 데 $\frac{3}{4}$시간이 걸렸습니다. 지혜네 반 학생들이 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 알아봅시다.

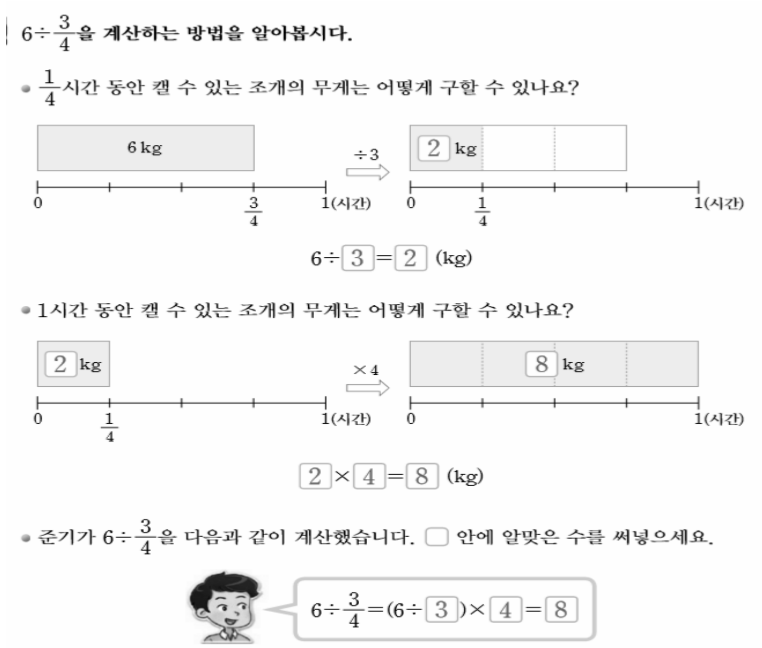
이 상황은 $6\div\frac{3}{4}$으로 나타낼 수 있다. 초등학생들은 이 상황이 나눗셈으로 표현할 수 있음을 모를 수 있다. 이 상황이 나눗셈 상황임을 지도하기 위해서는 단순화 전략이 필요하다. 상황에 주어진 분수를 간단한 자연수로 바꾸어 어떤 연산이 필요한지를 살펴보는 것이다. 예를 들어, '조개 6 kg을 캐는 데 2시간이 걸린다면 1시간 동안 캘 수 있는 조개는 몇 kg일까?'로 생각해 보면 주어진 상황이 나눗셈 상황임을 이해할 수 있다.

이 상황을 가지고 $6\div\frac{3}{4}$을 계산하기 위해서, 즉 여기서 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구하기 위해서는 먼저 $\frac{1}{4}$시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구할 필요가 있다. 여기서는 6÷3으로 구할 수 있다. $\frac{1}{4}$시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 알게 되면 4배를 하여 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구할 수 있다. 이 문제 상황에서는 (6÷3)×4가 된다. 이를 구체적으로 지도하려면 다음과 같은 그림과 발문이 필요하다.

[그림 Ⅳ-80] (자연수)÷(분수) 단위 비율 결정 상황 속 문제 해결
주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (130-131쪽) 교육과학기술부. 2019.

조개의 무게를 걸린 시간으로 나누었을 때 1시간동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구할 수 있음을 인지하고 식을 해결한다. 계산하는 방법을 알아보고자 아래의 그림처럼 길이모델 중 막대모델과 수직선모델을 활용한다. 막대모델에는 조개의 무게를 표현하고, 수직선모델에는 시간을 표현한다. $\frac{3}{4}$시간 동안 6kg의 조개를 캤으며 $\frac{3}{4}$시간은 $\frac{1}{4}$시간의 3배이므로 $\frac{1}{4}$시간 동안은 (6kg÷3)으로 구한다.

1시간은 $\frac{1}{4}$시간의 4배이므로 $\frac{1}{4}$시간동안 캘 수 있는 조개의 양 (2kgx4)를 하면 된다. 몫으로서의 분수 계산 원리 속에 3차시와 같이 **연산자로서의 분수**(배 개념), **측정으로서의 분수**(단위분수), **전체-부분의 관계로서의 분수**(막대모델 표현) 등 다양한 의미의 분수를 활용한다.



[그림 Ⅳ-81] (자연수)÷(분수) 단위 비율 결정 상황 속 문제 해결

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (143쪽) 교육과학기술부. 2019.

바) 6차시: (분수)÷(분수)를 (분수)x(분수)로 나타내어볼까요

※ 학습목표: 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 나타내어 계산할 수 있다.

전 차시에 이어 (분수)÷(분수)를 단위 비율 결정 상황을 통해 제시한다. 이를 알아보기 위해 문제의 조건을 자연수로 바꾸어 나눗셈 식임을 인지한다.

나. (분수)÷(분수)

(분수)÷(분수)로 나타낼 수 있는 다음 단위 비율 결정 상황에서 분수 나눗셈 알고리즘을 지도하는 방법을 살펴보자.

> [나눗셈 상황: 단위 비율 결정 상황]
> 준기가 캔 조개 $\frac{4}{5}$ kg를 통에 담아 보니 통의 $\frac{2}{3}$가 채워졌습니다. 한 통을 가득 채울 수 있는 조개의 무게를 알아봅시다.

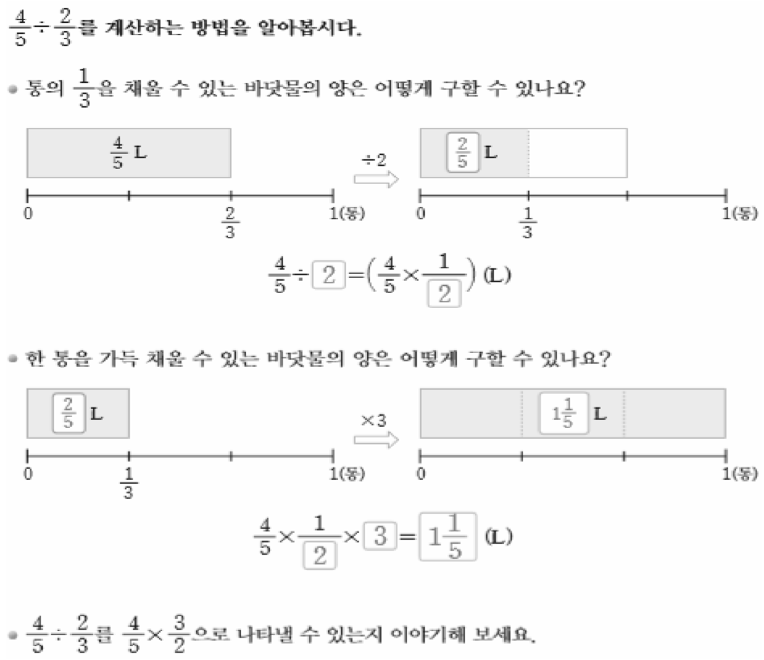
이 상황은 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$로 해결할 수 있다. 이 상황이 나눗셈으로 표현할 수 있음은 앞서 살펴본 (자연수)÷(분수)에서 다룬 단순화 전략을 사용할 수 있다.

이 단위 비율 결정 상황에서 즉, 한 통의 무게를 구하려는 상황에서 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$임을 지도하기 위해서는 $\frac{1}{3}$통을 채울 수 있는 조개의 무게를 구하는 것이 필수적이고, 이는 $\frac{4}{5}$를 2로 나눈 무게를 구해야 한다. 이는 $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$ (kg)이다. $\frac{1}{3}$통을 채울 수 있는 조개의 무게를 알면 한 통을 가득 채울 수 있는 조개의 무게는 쉽게 구할 수 있다. 통의 무게를 3배 하여 주면 된다. 전체적으로 위에 주어진 상황에서 한 통의 무게는 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{5} \div 2\right) \times 3 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$가 된다.

[그림 Ⅳ-82] (분수)÷(분수) 단위 비율 결정 상황 속 문제 해결

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (131-132쪽) 교육과학기술부. 2019.

계산하는 방법을 알아보고자 아래의 그림처럼 길이모델 중 막대모델과 수직선모델을 활용한다. 막대모델에는 바닷물의 무게를 표현하고, 수직선모델에는 통을 표현한다. $\frac{4}{5}$L로 통의 $\frac{2}{3}$를 채웠을 때, 통의 $\frac{2}{3}$는 통의 $\frac{1}{3}$의 2배이므로 채울 수 있는 바닷물의 양은 막대모델을 2등분한 것 중 1부분으로 구할 수 있다. $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5} \text{x} \frac{1}{2}$로 구한다. 한 통은 통의 $\frac{1}{3}$의 3배이므로 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양은 $\frac{4}{5} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 3$을 하면 된다. 몫으로서의 분수를 계산하기 위해 3차시와 같이 **연산자로서의 분수**(배 개념), **측정으로서의 분수**(단위분수), **전체-부분의 관계로서의 분수**(막대모델 표현) 등 다양한 의미의 분수를 활용한다. 이 과정을 통해 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 나타낼 수 있는 원리를 지도하고 있다(6-2 지도서, 122쪽).



[그림 Ⅳ-83] (분수)÷(분수) 단위 비율 결정 상황 속 문제 해결

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (145쪽) 교육과학기술부. 2019.

사) 7차시: (분수)÷(분수)를 계산해볼까요

※ 학습목표: (자연수)÷(분수), (가분수)÷(분수), (대분수)÷(분수)의 계산 과정을 이해하고 몫을 구할 수 있다.

분수의 나눗셈 중에서 피제수가 자연수 및 가분수, 대분수, 제수가 분수인 경우를 다루며 나눗셈의 결과인 몫으로서의 분수를 구하고자 한다. 3~6학년까지 배운 다양한 분수의 의미 및 추론 과정을 학습한 학생들의 분수감각을 통해 더 이상 시각적 모델을 제시하지 않고 계산 방법을 이해할 수 있도록 한다. 측정으로서의 분수 관점에서 대분수를 가분수로 바꾼다. **연산자로서의 분수** 관점에서 분수 안의 나눗셈과 곱셈의 조작적인 과정으로 수를 확대한다. 학생들이 가장 어려워하는 부분인 만큼 학생의 오류와 지도 방안이 다음 그림과 같이 나온다. 단순히 알고리즘만 아는 것이 아닌 원리를 이해할 수 있도록 한다.

학습 정보	지도 방안 예시
대분수를 가분수로 바꾸어 계산함을 잘 이해하고 바르게 계산하는 경우	친구에게 대분수를 가분수로 나타내어 계산하는 과정을 설명하게 하고 다양한 문제 상황을 만들어 보는 활동을 제시한다.
단순히 알고리즘만 말하는 경우	식의 형태보다는 그림을 통해 그 의미에 더 집중하여 어떻게 곱셈으로 바뀔 수 있는지 되짚어 볼 수 있게 한다.
계산하는 방법을 전혀 모르는 경우	분수와 나눗셈의 의미를 먼저 지도하고 다양한 구체물과 전 차시 활동을 통해 분수의 나눗셈을 되짚어 보게 한다.

[그림 Ⅳ-84] 학생의 오류 및 지도방법

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (147쪽) 교육과학기술부. 2019.

아) 8차시: 도전 수학, 배터리를 충전하는 데 걸리는 시간을 알아볼까요

※ 학습목표:

- 분수의 나눗셈과 관련된 실생활 문제를 해결하고 그 과정을 설명할 수 있다.

- 나누는 수와 나누어지는 수를 찾아 식을 세워 문제를 해결할 수 있다.

(자연수)÷(분수)의 결과인 몫을 **연산자로서의 분수** 관점과 **측정으로서의 분수** 관점으로 해결한다. 아래의 왼쪽 그림은 연산자로서의 분수 관점으로, 20이라는 수에 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸어 연산자인 분수를 곱하여 분수 안의 ÷8과 x5의 조작적인 과정으로 문제를 해결해간다. 아래의 오른쪽 그림은 측정으로서의 분수 관점에서 $\frac{5}{8}$만큼 충전하는데 20분이 걸렸으므로 단위 분수인 $\frac{1}{8}$만큼 충전할 때의 시간을 구한 후 이를 8배하여 완전히 충전되는데 걸리는 시간을 구한다. 몫으로서의 분수를 구하기 위해 그동안 배운 연산자로서의 분수, 측정으로서의 분수의 의미를 이용할 수 있다.

배터리 전체를 충전하는 데 걸리는 시간을 구하는 문제이므로 $20\div\frac{5}{8}$로 식을 세울 수 있습니다. $20\div\frac{5}{8}=\overset{4}{\cancel{20}}\times\frac{8}{\underset{1}{\cancel{5}}}=32$이므로 배터리를 완전히 충전하는 데 걸리는 시간은 32분입니다.

배터리를 $\frac{5}{8}$만큼 충전하는 데 20분이 걸렸으므로, $\frac{1}{8}$만큼 충전하는 데 4분이 걸립니다. 따라서 배터리를 완전히 충전하는 데 걸리는 시간은 $4\times8=32$(분)입니다.

[그림 Ⅳ-85] (자연수)÷(분수) 문제 해결 방법

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (148쪽) 교육과학기술부. 2019.

자) 10차시: 탐구 수학, $1 \div \frac{1}{2}$을 그림으로 나타내어 볼까요

※ 학습목표: 주변 사람들이 분수의 나눗셈을 그림으로 나타내어 구하는 방법을 조사하고, 이를 나만의 방법으로 설명할 수 있다.

주변 사람들의 분수의 나눗셈을 그림으로 표현한 것을 보며 자신만의 그림과 글로 설명할 수 있도록 한다. 학생들이 직접 그림과 글로 설명함으로써 분수의 나눗셈에 대해 학생들이 관계적 이해를 할 수 있도록 한다.

학습 정보	지도 방안 예시
$1 \div \frac{1}{2}$의 해결 방법을 곱셈식으로만 알고 있는 경우	색종이 등의 구체물을 사용하여 직접 나누어 보는 활동을 통해 나눗셈의 의미를 떠올리게 하여 분수의 나눗셈을 곱셈식으로만 해결할 수 있는 것이 아니라는 것을 알게 한다.
$1 \div \frac{1}{2}$의 해결 방법은 알고 있으나 그림으로 표현하는 것을 어려워하는 경우	1을 전체라고 생각하고 전체를 나누어 보는 상황(예 사과 1개를 $\frac{1}{2}$개씩 나누어 주기)을 제시하여 그림으로 떠올려 보게 한다.
$1 \div \frac{1}{2}$을 그림과 글로 잘 설명한 경우	$1 \div \frac{1}{2}$을 나타내는 그림과 설명하는 글을 친구들 앞에서 설명하게 한다. 그리고 주어진 문제의 조건을 바꾸어 문제를 설명할 수 있는 다양한 방법을 찾아보게 한다.

[그림 Ⅳ-86] 학생의 오류 및 지도방법

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (153쪽) 교육과학기술부. 2019.

2) 각 차시별 분수의 의미

각 차시별 분수의 의미는 다음의 표와 같다. 해당 차시의 학습목표를 중심으로 학습목표에 부합하는 분수의 의미는 ●로 표시하였다. 학습목표를 이루기 위한 진행방향 속 분수의 의미는 ○로 표시하였다. 아래의 표를 살펴보면 6학년 2학기 1단원 ‘분수의 나눗셈’ 속 분수는 몫으로서의 분수에 관한 학습목표를 달성하고자 한다. 그 동안 배웠던 모든 분수의 의미를 다양하게 활용한다.

〈표 Ⅳ-9〉 6학년 2학기 1단원 차시별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
2차시		○		●	
3차시	○		○	●	
4차시	○		○	●	
5차시	○	○	○	●	
6차시	○	○	○	●	
7차시		○	○	●	

아. 단원별 분수의 의미

3~6학년 교육과정 속 분수영역을 분수의 의미를 기반으로 분석해보았다. 표의 상단에는 단원에 따른 분수의 의미로 교과서에 제시된 순서대로 전체-부분의 관계로서의 분수, 측정으로서의 분수, 연산자로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수로 제시하여 각 차시 별로 학습 목표와 학습 목표를 전개하기 위해 사용한 다양한 분수의 의미를 살펴보았다. 그 결과, 각 단원에서의 학습 목표와 사용한 분수의 의미는 다음의 표와 같이 나왔다.

현 교육과정에서 분수의 5가지 의미를 모두 다루는 모습을 보이고 있었다. 각각의 분수의 의미를 설명함에 있어 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수를 이용하는 모습을 볼 수 있다. 유난히, 연산자로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수에 비해 전체-부분의 관계로서의 분수 의미를 가지고 있는 단원들이 많았다. 즉, 연산자로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수는 상대적으로 적게 다뤄지고 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수로 분수를 도입하고 설명하지만 3학년 이후로 갈수록 단위분수를 많이 이용하며 측정으로서의 분수를 주로 이용하고 있다. 이는 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수의 중요성이 높다고 여겨진다. 그러나 측정 상황과 같은 측정으로서의 분수보다는 단위분수 자체를 이용하는 측정으로서의 분수를 많이 이용한다. 전체-부분의 관계로서의 분수뿐만 아니라 다른 분수의 의미에 관해 깊은 이해가 필요할 것

이다. 그러나 측정으로서의 분수 의미에 관해 지도서에 설명하는 부분은 없었다. 이지영과 방정숙은 우리나라 교과서에서는 측정으로서의 분수 자체를 학습하는 내용이 거의 없다고 말한다(2014).

<표 Ⅳ-10> 단원별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
3-1.6. 분수와 소수	●	○		○	
3-2.4. 분수	●	○	○		
4-2.1. 분수의 덧셈과 뺄셈	○	●			
5-1.4. 약분과 통분	●	○			
5-1.5. 분수의 덧셈과 뺄셈	●	●			
5-2.2. 분수의 곱셈	○	●	●		
6-1.1. 분수의 나눗셈	○	○	○	●	
6-1.4. 비와 비율					●
6-2.1. 분수의 나눗셈	○	○	○	●	

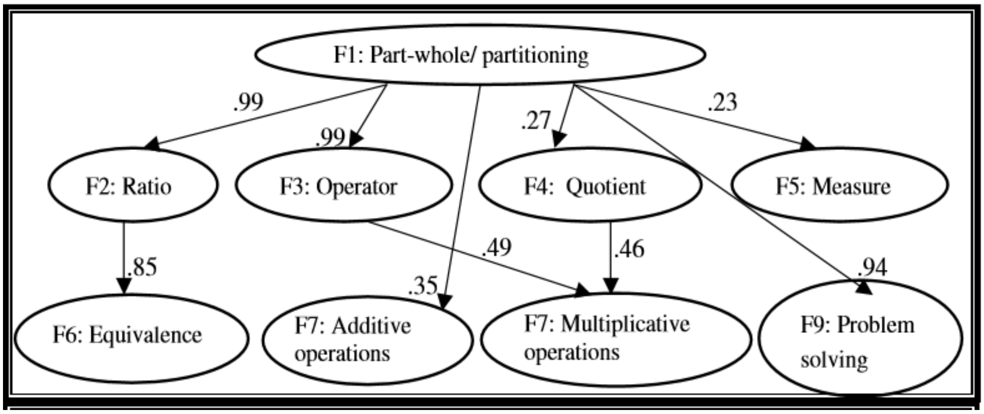
아래의 표는 학년별로 분수의 의미를 정리한 표이다. 현 교육과정에서 분수의 5가지 의미를 모두 다루는 모습을 단적으로 볼 수 있다. 그러나 분수의 개념 자체보다는 분수의 연산 속에서 내재되어 있는 분수의 개념을 찾을 수 있다. 지도서에서 역시 어느 분수의 의미에 관한 내용인지 구체적인 설명이 없는 경우가 종종 있었다. Charalambous와 Pitta-Pantazi는 아래의 그림을 제시하며 다음과 같이 말하였다.

> 분수의 부분-전체의 의미는 필수적으로 여겨지나 분수의 나머지 개념들의 이해를 발전시키기 위한 충분한 상태는 아니니다(Baturo & Cooper, 1999; Brousseau et al., 2004; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005). … 이 연구는 다섯 개의 분수의 의미 해석을 마스터하는 것이 분수 연산의 능숙함을 획득하는데 기여한다는 가정에 대한 지지를 제공한다(Charalambous& Pitta-Pantazi, 2005, pp239).

한국의 교육과정에서 분수는 전체-부분의 관계로서의 분수로 도입한다. 나머지 분수들 해석, 분수의 연산 및 문제 해결에 있어서 전체-부분의 관계로서의 분수를 기반으로 한다. 물론 다른 의미의 분수들도 나오지만 구체적인 설명이 없다. 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미는 필수적이나 나머지 분수를 이해하기 위해서는 충분하지 않으며, 다섯 개의 분수의 의미를 정확하게 이해하지 못할 경우 분수의 연산 및 후속 학습에 있어서 어려움을 느낄 수 밖에 없을 것이다.

<표 IV-11> 학년별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
3학년	●	○	○	○	
4학년	○	●			
5학년	●	●	●		
6학년	○	○	○	●	●



[그림 Ⅳ-87] 분수의 5개 하위구조와 분수연산 및 문제해결과의 연결 경로

주. 출처 Revisiting a theoretical model on fractions: Impications for teaching and research. (p. 237) Charalambos Y. Charalambous, Demetra Pitta-Pantazi. 2005. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2**(pp 233-240). Melbourne: PME.

2. 설문지 결과 분석

설문지의 문항을 크게 2개로 분류하였다. 초등 교사들의 교과 지식을 SMK와 PCK 중심으로 파악하고자 분수의 의미 및 분수 감각과 분수 지도방법으로 분류하여 설문지 결과를 분석하고자 한다. 첫 번째 항목인 분수의 의미 및 분수 감각에 관한 문제는 교사들의 수학 내용 지식을 살펴볼 수 있다. 분수 지도방법에 관한 문제에서는 분수에 관한 PCK 중 교수 방법에 관한 지식, 학생 이해에 관한 지식을 살펴볼 수 있다.

2.1 SMK(Subject Matter Content Knowledge)

가. 1번. 분수의 5가지 의미

가) 분수의 5가지 의미에 대한 전반적인 경향.

분수의 5가지 의미별 교사들의 반응을 분석한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 100명의 교사 모두 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수의 의미를 표현하고 있다. 몫으로서의 분수는 46명의 교사, 측정으로서의 분수는 41명의 교사, 비율로서의 분수는 34명의 교사가 각각의 분수의 의미를 표현하고 있으며 13명의 교사들이 연산자로서의 분수를 통해 분수의 의미를 나타낸다. 그림 [Ⅳ-]와 같이 분수의 의미에 대해 전체-부분, 몫, 측정, 비율, 연산자의 순으로 이해하고 있으며 모든 교사들이 분수의 의미를 떠올렸을 때 전체-부분의 관계로서의 분수로 기술한다는 사실을 알 수 있었다. 전체-부분의 관계로서의 분수를 제외하고는 모두 50명 이하의 교사들이 각 각의 분수의 의미를 서술하는 모습은 교육과정 속 분수 개념에서 가장 기초적이고 핵심적인 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미 이해에 비해 상대적으로 몫, 측정, 비, 연산자로서의 의미에 대한 깊은 이해가 적고 교사들의 분수의 의미에 대한 이해는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미에 한정적인 것으로 바라 볼 수 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수를 제외한 분수의 의미 중 연산자로서의 분수의 의미를 서술한 교사는 특히나 낮았다.

이는 지도서의 분수의 의미에 관한 기술과 연관 지어 생각해볼 수 있다. 3학년 1학기 지도서의 분수 개념의 발생(그림 Ⅳ-1)과 분수의 의미(그림 Ⅳ-2)를 짧게 제시한 이후로 지도서에서 분수의 의미를 구체적으로 기술하는 부분이 없다. 5학년 2학기 지도서에 연산자로서의 분수라는 표현이 짧게 처음으로 나오며, 6학년 1학기 지도서에 몫으로서의 분수에 관한 설명이 나오고, 6학년 1학기 지도서에 비율이 나오나 비율로서의 분수와 관련하여 설명하고 있지는 않다.

〈표 Ⅳ-12〉 분수의 의미 종류에 따른 분류 (중복 허용)

① 전체-부분의 관계로서의 분수	② 측정으로서의 분수	③ 몫으로서의 분수	④ 비율로서의 분수	⑤ 연산자로서의 분수
100	41	46	34	13

흥미로웠던 점은 교사와 학생 모두 전체-부분의 관계로서의 분수를 중심으로 분수의 개념을 이해하는 모습을 보이고 있다는 점이다. 권성룡(2003)은 초등학생 5-6학년 대상으로 분수 개념에 관한 연구를 실시하였는데 분수 $\frac{3}{5}$로 나타낼 수 있는 상황을 3가지 제시하라는 문제에서 반 정도의 아동이 분수가 적용되는 상황을 제시하지 못하였고, 옳은 반응 중 부분-전체가 차지하는 비율은 5학년과 6학년 각각 91.1%와 90.6%였다고 한다(263쪽). 아래의 그림은 학생들의 반응을 나타낸 표이다.

<표 III-1> 문제 1에 대한 아동들의 반응

5학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	41	41.4
몫	4	4.0
측도	0	0.0
비	0	0.0
연산자	0	0.0
오답[1]	54	54.5
계	99[1]	100.0

6학년	빈도수	백분율(%)
부분-전체	125	64.1
몫	4	2.1
측도	7	3.6
비	2	1.0
연산자	0	0.0
오답	57	29.2
계	195	100.0

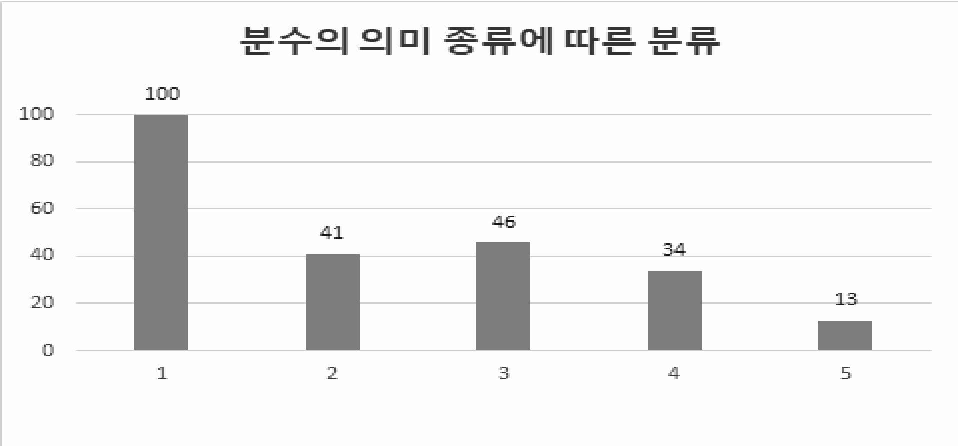
[그림 Ⅳ-88] 분수 $\frac{3}{5}$로 나타낼 수 있는 상황에 대한 아동들의 반응

주. 출처 초등학생의 분수 이해에 관한 연구 (p. 263). 권성룡. 2003. **학교수학. 5**(2), 259-273

> 분수개념의 이해를 위해서는 분수의 다양한 의미, 즉 다양한 하위개념을 이해하는 것이 필요하다. … 분수개념의 이해를 위해서는 부분-전체뿐만 아니라 몫, 비, 측도, 연산자 등의 하위개념에 대한 이해도 필요하므로 각 하위개념에 익숙해질 수 있는 여러 가지 상황을 아동들이 경험할 수 있도록 해 주는 것이 필요하다. 특히 부분-전체의 입장에서 분수개념을 이해한 아동들이 다른 하위개념이 도입되었을 때 기존의 개

념과 새로운 개념을 통합하여 분수에 대한 개념 이해를 넓힐 수 있는 충분한 시간과 활동이 제공될 필요가 있다 (권성룡. 2003. 264쪽)

교사의 분수의 의미에 대한 SMK가 전체-부분의 관계로서의 분수로만 제한이 된다면 학생의 분수 개념 역시 제한될 수밖에 없을 것이다. 교과서 분석을 살펴보면 학년에 따라 각 각의 분수의 개념이 제시되고 있다. 3학년에 제시되는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미와 측정으로서의 분수의 의미를 통해 새로운 분수의 개념을 배울 때 이를 통합하여 분수에 대한 개념 이해를 넓히며 지도서에서 이러한 분수의 개념과 분수의 의미 지도에 대한 구체적인 제시가 필요할 것이다.



[그림 Ⅳ-89] 분수의 의미 종류에 따른 분류

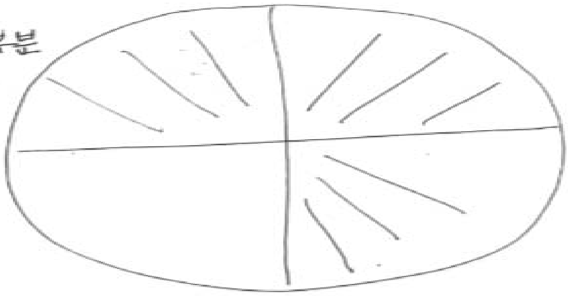
나) 전체-부분의 관계로서의 분수

(1) 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미

전체-부분의 크기를 이해하고 이들 사이의 관계를 통해 분수를 정의하는 것은 전체-부분으로서의 분수의 핵심적인 개념이다(김유경, 2012). 100명의 교사들 모두 전체-부분의 관계로서의 분수로 $\frac{3}{4}$을 표현하였다. 이는 교사들이 전체-부분의 관계로서의 분수를 핵심으로 분수를 이해하는 모습이라 생각할 수 있다. 대부분의 선생님들은 다음 그림과 같이 전체를 똑같이 4부분으로 등분할하

여 그 중 3부분을 표현함으로서 $\frac{3}{4}$이라는 분수를 설명하고 있다.

<표 Ⅳ-13> 교사들의 전체-부분의 관계로서의 분수 예

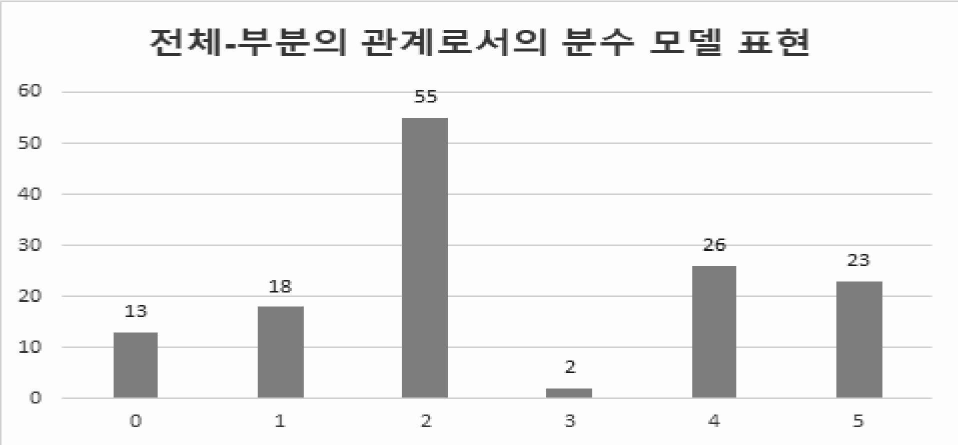
1) 철수는 케이크를 똑같이 4조각으로 잘랐습니다. 그 후 그중 3조각을 먹었습니다. 철수가 먹은 케이크는 전체 케이크의 몇분의 몇인가요?
1) 전체에 대한 부분 4개로 나눈것 중의 3개 

(2) 전체-부분의 관계로서의 분수의 모델 표현

3학년 1학기 분수의 100명의 초등 교사들 중 100명 모두 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미를 알고 있었다. 100명의 교사들이 전체-부분의 관계로서의 분수를 그림으로 표현하는 모델을 어떻게 알고 있는지 지도서 속 분수 지도모델을 기준으로 분석해보았다. 3학년 1학기 지도서에는 영역모델, 길이모델, 3학년 2학기 지도서에는 집합모델이 제시되어 있다. 분수 지도모델은 크게 연속모델과 이산모델로 분류할 수 있는데, 연속모델에는 영역모델과 길이모델, 이산모델에는 집합모델이 있다. 분수의 의미와 관련해서 전체-부분의 관계로서의 의미를 가진 표현과 함께 있는 분수 모델을 살펴보았다.

<표 Ⅳ-14> 전체-부분의 관계로서의 분수 모델 표현(중복허용)

모델	없음	직사각형 모델	원모델	그 외 모양	길이모델	집합모델
수(명)	13	18	55	2	26	23
백분율(%)	9.5%	13.1%	40.1%	1.5%	19%	16.8%



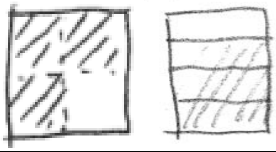
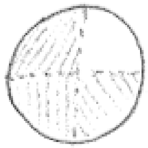
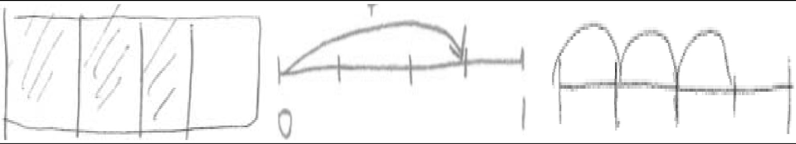
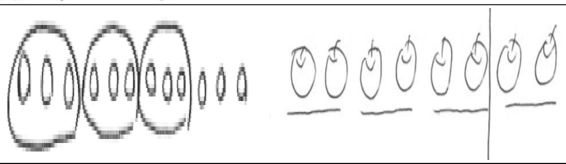
[그림 Ⅳ-90] 전체-부분의 관계로서의 분수 모델 표현

<표 Ⅳ-14>는 교사들이 어떤 분수 모델을 이용하여 전체-부분의 관계로서의 분수를 표현했는지에 관한 표이다. 분수 모델을 그리지 않은 경우 '없음'으로 분류하였다. 위 표에서 알 수 있듯이 75명의 교사들은 영역모델을 통해 전체-부분의 관계로서의 분수를 표현하였다. 그 중 55명의 교사들은 원모델, 18명의 교사들은 직사각형모델, 2명의 교사들은 삼각형과 같은 그 외 모양의 모델을 통해 전체-부분의 관계로서의 분수를 표현했다. 교사들 중 약 40%는 <표 Ⅳ-15>와 같이 원 모양의 영역모델로 전체-부분의 관계로서의 분수를 설명하였다. 약 13%의 교사들은 직사각형 모양의 영역모델로 분수를 설명하였는데, 정사각형 모양의 영역모델도 직사각형 모양의 영역모델로 포함하여 생각하였다. 영역모델은 [그림 Ⅳ-4]에서 볼 수 있다시피 분수를 처음 배우는 초등학교 3학년 교육과정에서 공식적으로 다루고 있는 모델이다(이종욱, 2005).

길이 모델은 영역모델 중 직사각형 모델과 길이모델의 구분이 명확하지 않은 부분에 대해서는 이종욱(2005)과 같이 하였다. 직사각형의 한 부분의 가로가 상대적으로 긴 직사각형일 때는 길이 모델로 보았으며 세로가 상대적으로 긴 직사각형일 때는 넓이 모델로 해석하였다(이종욱, 77쪽). 여기에서 넓이 모델은 영역모델로 바라볼 수 있다. 이렇게 볼 때, 26명의 교사들은 길이 모델을 사용하였다. 즉, 전체의 19%의 교사는 길이 모델을 사용하였으며 영역 모델에 비해 부족하지만 전체-부분의 관계로서의 분수를 길이 모델로 표현하고 있음을 알 수 있다. 길이 모델에는 막

대 모양의 모델과 수직선모델이 있었다. 수직선모델을 살펴볼 때 0과 1사이를 등분할하여 $\frac{1}{4}$이 3번 이동했음을 나타내면 측정으로서의 분수에서 수직선모델로 보았으며 여기서의 수직선모델은 수직선 위의 전체를 4로 나눈 것 중의 세 부분의 상태 또는 단위분수와 전체를 규명하지 않고 4부분 중 3부분을 표현한 모델이다. <표 Ⅳ-15>과 같이 전체-부분의 관계로서의 분수를 길이 모델 중 막대 모양의 모델로 표현한 교사는 25명이었다. 길이 모델을 사용한 교사들은 대부분 교과서 속 막대모양의 길이모델을 이용하여 표현함을 알 수 있었다. 이는 영역 모델만큼은 아니지만 상당수의 교사들이 $\frac{3}{4}$을 표현함에 있어 막대모양의 길이모델을 사용함을 알 수 있다. <표 Ⅳ-15>와 같이 길이 모델의 표현에서 막대 모양의 직사각형 모델이 아닌 수직선 모델을 통한 전체-부분의 관계로서의 분수 표현을 한 교사들도 있었다.

〈표 Ⅳ-15〉 교사들의 전체-부분의 관계로서의 분수 모델

모델	그림
직사각형 모델	
원모델	
그 외 모양	
길이모델	
집합모델	

<표 Ⅳ-15>와 같이 이산량을 등분할하여 전체-부분의 관계로서의 분수를 집합모델로 표현한 교사들은 23명이 있었다. 이산량으로 4개를 전체로 보고 그 중의 3개로 나타내는 모델이나 3의 배수를 전체로 보아 그 중에 9개와 같이 3개씩 4묶음 중 3묶음처럼 묶음의 수로서 표현하고 있다. 이는 3학년 2학기 이산량의 분수를 집합모델을 이용하여 전체-부분의 관계로서의 분수로 표현하며 공식적으로 다루고 있음과 관련지어 생각할 수 있을 것이다. 이와 관련하여 흥미로웠던 점은 영역모델과 길이모델의 연속모델은 중복을 허용하여 101개의 표현이 나왔으며 집합모델의 이산모델은 23개의 표현이었다는 것이다. 전체-부분의 관계로서의 분수를 표현할 때 교사들은 이산모델보다 연속모델을 더 많이 이용하여 표현함을 알 수 있다. 이산량 모델은 후에 연산자로서의 분수를 설명할 때 유용하고 중요한 모델이므로 지도서와 교과서를 통해 학생과 교사들에게 충분한 경험의 기회를 제공해야한다.

따라서, $\frac{3}{4}$를 표현할 때, [그림 Ⅳ-90]을 살펴보면 교사들은 교과서의 분수 도입 때 나온 영역모델을 가장 많이 이용했으며 길이 모델 중 막대 모양의 모델을 이용하여 표현하기도 했다. 이산량의 분수를 등분할하여 집합모델을 통해 $\frac{3}{4}$을 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 설명하기도 하였다. 전체적으로 교사들은 이산모델보다 연속모델을 더 많이 이용하여 표현함을 알 수 있었다. 이는 교사가 분수를 그림으로 표현함에 있어 분수 지도모델이 지도서의 기반으로 이루어졌다고 볼 수 있다.

다) 측정으로서의 분수

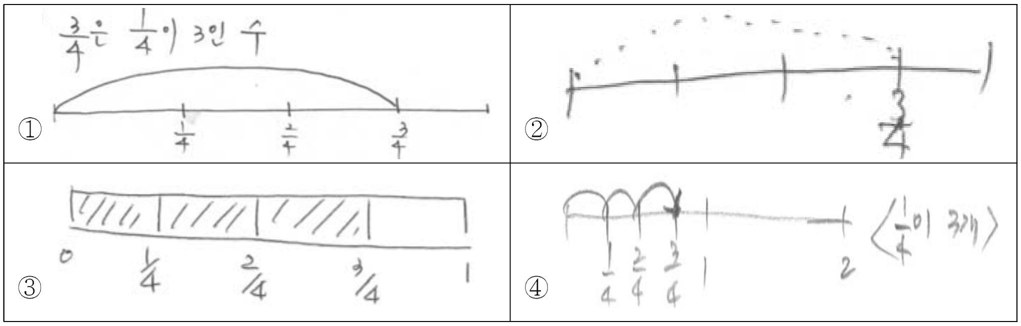
(1) 측정으로서의 분수의 의미

측정으로서의 분수는 측정 상황에서 측정 단위 이하의 양을 재기 위한 목적으로 나온 분수이다. 측정으로서의 분수의 관점에서는 <표 Ⅱ-1>과 같이 $\frac{3}{4}$을 수직선에서 0으로부터 3($\frac{1}{4}$-단위)의 거리 또는 주어진 영역의 3($\frac{1}{4}$-단위)를 의미한다. 측정으로서의 분수를 표현할 때 중요한 것은 다음과 같다; 측정 단위(기준 단위)이하의 양을 표현하기 위해 기준 단위를 설정하는가, 단위 분수를

반복하여 거리/영역을 표현하는가.

100명 중 41명의 교사들이 측정으로서의 분수의 의미 또는 모델을 표현하였다. 41명의 교사들은 대부분 <표 Ⅳ-16>과 같은 모델과 설명을 통해 측정으로서의 분수를 설명하였다. 아래 표의 왼쪽 그림의 설명은 단위분수인 $\frac{1}{4}$이 3개 있는 의미로 측정으로서의 분수를 설명한다. 옳은 설명이지만 그림은 $\frac{1}{4}$마다 포물선을 3번 그리는 것이 아닌 한번에 $\frac{3}{4}$만큼 포물선을 그린 경우가 대다수였다. 이는 전체-부분의 관계로서 4로 나눈 것 중의 3과 혼동이 올 수 있다. <표 Ⅳ-16>의 ②번은 0과 1 사이, 즉 1이라는 기준 단위에서 이 단위 이하의 양을 재기 위해 재단위화하는 모습을 보여줄 수 있다고 생각할 수도 있으나 기준 단위를 설정하지 않고, 포물선을 한번에 그려 이 역시 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미와 혼동하여 측정으로서의 분수를 표현했다고 볼 수 있다. 앞서 말한 측정으로서의 분수를 바라볼 때 중요한 점을 바탕으로 정확하게 <표 Ⅳ-16>의 4번처럼 측정으로서의 분수를 설명한 교사는 5명뿐이었다. 단위분수를 이용하여 분수를 설명할 때 가분수의 개념을 자연스럽게 도입할 수 있으므로 측정으로서의 분수의 의미는 상당히 중요하지만 41%의 교사들이 측정으로서의 분수의 의미를 이해하고 있고, 측정으로서의 분수의 의미를 인지하고 있는 교사가 41%이며 교사들은 측정으로서의 분수를 대략적으로 이해하고 있으나 깊은 이해에는 제한이 있다고 살펴볼 수 있다. 이는 3-1학기 지도서에 측정으로서의 분수의 의미가 자세히 설명되지 않고 [그림 Ⅳ-2]와 같이 단 2줄로 측정으로서의 분수를 설명하는 것과 연관이 있어 보인다.

〈표 Ⅳ-16〉 교사들의 측정으로서의 분수 예



(2) 측정으로서의 분수의 모델 표현

<표 Ⅳ-17> 측정으로서의 분수 모델 표현

모델	없음	직사각형모델	수직선모델
수(명)	3	8	29
백분율(%)	7.5%	20.0%	72.5%

다음의 표에서 알 수 있듯이 37명의 교사들은 분수 모델을 통해 측정으로서의 분수를 표현하였다. 그 중 8명은 <표 Ⅳ-16>의 ③번과 같은 길이모델 중 직사각형 모델, 29명은 ④번과 같은 길이모델 중 수직선 모델을 이용하여 $\frac{3}{4}$을 표현하였다. 측정으로서의 분수의 의미를 나타낸 교사 중 72.5%가 수직선모델을 활용하였음을 알 수 있고, 20%의 교사가 직사각형모델을 활용하였음을 알 수 있다.

라) 몫으로서의 분수

(1) 몫으로서의 분수의 의미

나눗셈의 결과인 몫을 분수로 나타내는 몫으로서의 분수는 등분제 상황과 포함제 상황에서 구할 수 있다. 몫으로서의 분수의 의미를 서술한 교사들은 46명으로 전체-부분의 관계로서의 분수 다음으로 많은 교사들이 의미를 알고 있었다. 이는 3학년 1학기 똑같이 나누어주는 등분할의 상황에서 분수를 도입하고 6학년 1학기에 배우는 몫으로서의 분수의 의미와 관련이 있다. 피자 또는 사과 등 음식을 똑같이 나누어 먹는 상황을 통해 교사들은 $\frac{3}{4}$을 표현하는데, 흥미로운 점은 등분제 상황을 통한 분수의 나눗셈의 결과인 몫으로서의 분수를 나타내는 모습을 보이고 있다는 사실이다. <표 Ⅳ-18>과 같이 3을 4로 나눈 것 중의 하나 또는 3을 4 사람에게 똑같이 나누어주었을 때 한 사람이 가지는 양으로 몫으로서의 분수를 표현하는 등분제 상황으로만 몫으로서의 분수를 표현한다. 6학년 2학기 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 분수인 경우 포함제 상황을 주

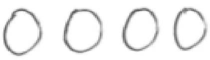
로 다루고, 등분제 상황은 등분제의 의미를 확장하거나 단위 비율 결정 상황으로 구분 짓는다. 그러나 $\frac{3}{4}$ 역시 길이가 3m인 끈을 4m씩 자르면 몇 도막이 되는지를 살펴보며 충분히 포함제의 상황에서도 기술 할 수 있음에도 불구하고 등분제 상황으로만 기술되는 것은 상황이 자연스럽지 않은 이유도 있겠지만 한편으로는 3학년 1학기와 6학년 1학기 지도서의 '사람 수에 맞게 피자를 똑같이 나누기'활동, '한 명이 가지게 되는 한지의 양 구하기'활동처럼 등분제 상황으로만 나타내고 있음의 영향이 아닐까라는 생각이 든다. 한편, 6학년 1학기의 몫으로서의 분수 개념 중 6차시 중 5차시는 등분제 상황이고 1차시 '대분수는 자연수의 몇 배인지 구하기'활동만이 포함제 상황으로 살펴볼 수 있다. 따라서, 교과서와 지도서에서 포함제 상황에서 몫으로서의 분수와 관련한 실생활 속 문장제에 대한 폭넓은 경험을 제공해야 할 것이다.

<표 Ⅳ-18> 교사들의 몫으로서의 분수 예

①	3조각의 식빵을 4명이 나눠먹을 때 한 사람이 먹는 식빵의 양은?
②	자연수 3을 자연수 4로 나눈 몫이다.

또한, $\frac{3}{4}$을 표현함에 있어 <표 Ⅳ-19> 와 같이 분수의 분모와 분자를 반대로 $\frac{4}{3}$를 서술하는 교사들도 있었다.

<표 Ⅳ-19> 분모와 분자가 바뀐 몫으로서의 분수 예

①	4m 끈을 3명이서 똑같이 나누어 가지려고 할 때, 한 명이 갖는 끈이 길이
②	피자 4판을 3명에서 나누어 먹을 때, 한 명이 몇 판 먹을수 있을까?  ← 피자입니다.

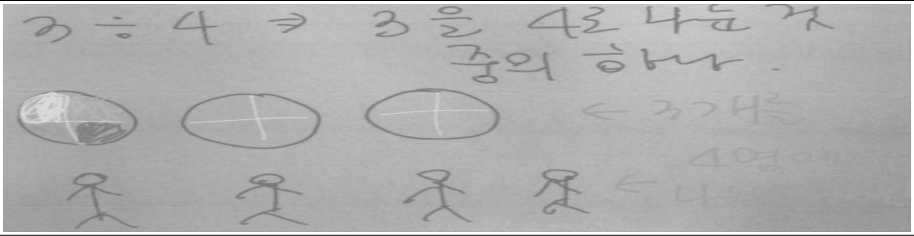
(2) 몫으로서의 분수의 모델 표현

〈표 Ⅳ-20〉 몫으로서의 분수 모델 표현

모델	없음	있음
수(명)	32	13
백분율(%)	71.1%	28.9%

다음의 표와 같이 32명의 교사, 약 71%의 교사들은 모델 없이 문제를 통해 $\frac{3}{4}$을 기술하였고, 13명의 교사, 약 39%의 교사들은 모델 또는 그림을 통해 $\frac{3}{4}$을 기술하였다. 그림은 <표 Ⅳ-21>와 같이 등분제 상황 몫으로서의 분수의 이해를 원활하게 도와주는 모습을 보였다.

〈표 Ⅳ-21〉 교사들의 몫으로서의 분수 모델 표현 예

①	
②	

마) 비율로서의 분수

(1) 비율로서의 분수의 의미

비율로서의 분수의 의미를 서술한 교사들은 100명 중 34명으로 연산자로서의 분수 다음으로 적은 교사들이 의미를 알고 있었다. 이는 6학년 1학기에 비와 비율의 개념이 처음 나오는 현 교육과정과 관련지어 생각할 수 있다. 두 수를 비교할 때, 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 하며 교사들은 <표

Ⅳ-22>와 같이 비율로서의 분수를 서술한다. 비와 비율 개념은 구별되는 개념으로, 두 양의 승법적인 비교 관계를 나타낸 것이 비이고, 그 관계를 수로 나타낸 것이 비율이다(6-1 지도서, 236쪽). 그러나, <표 Ⅳ-23>와 같이 비와 비율을 혼동하여 쓰는 경우도 있었다.

〈표 Ⅳ-22〉 교사들의 비율로서의 분수 예

①	학급에 여학생이 4명 남학생이 3명일 때, 여학생에 대한 남학생의 비율
②	기준량 4 에 대한 비교량 3
③	비율 3 : 4 비교하는양 기준량 → "안경쓴 친구 4명에 대한 안 쓴 친구 3명의 비"를 비율로 나타내는 것 $\frac{3}{4}$

〈표 Ⅳ-23〉 비와 비율이 혼동된 경우

①	남학생 3명, 여학생 4명 여학생에 대한 남학생의 비
②	3과 4의 비 → 3 : 4

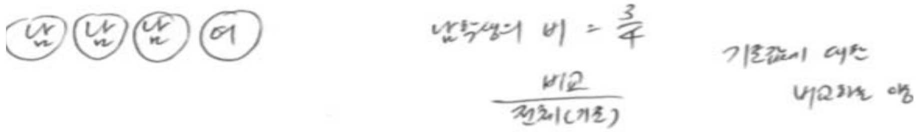
(2) 비율로서의 분수의 모델 표현

〈표 Ⅳ-24〉 비율로서의 분수 모델 표현

모델	없음	있음
수(명)	30	5
백분율(%)	85.7%	14.3%

다음의 표와 같이 30명의 교사, 약 86%의 교사들은 모델 없이 문제를 통해 $\frac{3}{4}$을 비율로서의 분수로 기술하였고, 5명의 교사, 약 14%의 교사들은 모델 또는 그림을 통해 $\frac{3}{4}$을 비율로서의 분수로 기술하였다. 그림은 <표 Ⅳ-25> 같이 2개의 양을 승법적 비교를 통해 표현하고 있다.

<표 Ⅳ-25> 비율로서의 분수 모델 표현

①	
②	

바) 연산자로서의 분수

(1) 연산자로서의 분수의 의미

연산자로서의 분수의 의미를 서술한 교사들은 100명 중 13명으로 가장 적었다. 이는 연산자로서의 분수의 의미가 교사들에게 익숙하지 않은 개념이라고 볼 수 있다. 3학년 1학기 지도서에서는 연산자로서의 분수의 의미를 $\frac{a}{b}$만큼 확대하거나 축소하는 것으로 연속량과 이산량의 분수만큼을 나타내는 것이 이에 해당한다고 말한다(293쪽). 그러나 지도서에 이 문장과 5학년 2학기 2단원 분수의 곱셈의 4차시(지도서 176쪽)에 (자연수)x(단위분수)와 (자연수)x(진분수)를 분수의 연산자적 의미를 이해하도록 한다는 문장 말고는 분수의 연산자적 의미를 설명하는 부분은 없다. 즉, 교사들이 수학수업에 있어 가장 많이 참고하는 지도서에 연산자로서의 분수를 짧게 설명하여 교사의 이해를 돕지 못하고 있다고 생각할 수 있는 것이다. 3학년 2학기 이산량과 연속량의 분수만큼은 분명 연산자로서의 분수임에도 불구하고 전체-부분의 관계로서의 분수로 해석하고 있다. 물론, 학년 특성을 고려하여 연산자로서의 분수의 의미를 이해하기 어려워 3-2

학기에 전체-부분의 관계로서의 분수로만 해석할 수 있으나 5학년 2학기 분수의 곱셈에서 분수의 연산자적 의미를 이용하므로 5학년 2학기 지도서에 교사들의 분수의 연산자적 의미를 이해를 돕는 구체적인 설명이 필요할 것이다.

〈표 Ⅳ-26〉 교사들의 연산자로서의 분수의 예

① 3. 연산자 테이프 2m의 $\frac{3}{4}$은 얼마인가?	② 1)연산자 40의 $\frac{3}{4}$은?

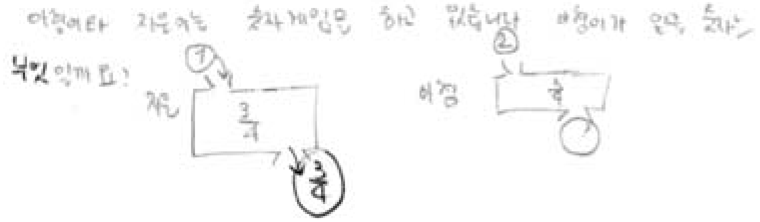
(2) 연산자로서의 분수의 모델 표현

〈표 Ⅳ-27〉 연산자로서의 분수 모델 표현

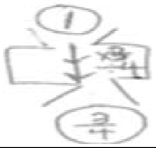
모델	없음	있음
수(명)	11	4
백분율(%)	73.3%	26.7%

다음의 표와 같이 11명의 교사, 약 73%의 교사들은 모델 없이 문제를 통해 $\frac{3}{4}$을 연산자로서의 분수로 기술하였고, 4명의 교사, 약 27%의 교사들은 모델 또는 그림을 통해 $\frac{3}{4}$을 연산자로서의 분수로 기술하였다. 아래의 표와 같이 ①과 ②는 함수기계를 만들어 분수 자체를 연산자로 함수처럼 수의 확대 또는 축소를 시키는 연산자로 살펴본다. ②는 분수를 2개의 연산과정, 곱셈과 나눗셈의 조작적인 과정의 의미를 표현하고 있다. ③의 분수는 이산량 집합 속에 있는 물건들의 수를 줄이는 역할을 한다. 또한, 연산자로서의 분수는 $\frac{\text{연산으로부터의 결과값}}{\text{연산에 작용하는 입력값}}$(Susan, 2006) 관계로 정의할 수 있는데 이러한 입력값과 결과값 사이의 관계로서 연산자로서의 분수를 표현하였다.

〈표 Ⅳ-28〉 연산자서의 분수 모델 표현



①



②

③

사) 분수의 의미 개수에 따른 분류

<표 Ⅳ-28>는 1번 $\frac{3}{4}$을 다양한 의미의 분수로 표현했을 때 교사들이 몇 개의 의미를 이용하여 분수를 표현했는지 분수의 의미 개수에 따라 분류한 표이다. 1개의 의미 즉, 전체-부분의 관계로서의 분수만 이해하고 있는 교사는 39명, 전체-부분의 관계로서의 분수 외에 측정과 비율과 같은 1개의 의미를 추가로 이해하고 있는 교사는 20명, 3개의 의미를 이해하고 있는 교사는 19명, 4개의 의미를 이해하고 있는 교사는 12명이었다. 또한, 3학년 1학기 분수의 5가지 의미를 모두 인지하고 있는 교사는 10명이었다. 이는 3-6학년의 분수 영역에서 다양한 의미를 가진 분수가 어떻게 제시되고 있는지와 관련하여 살펴볼 수 있다.

〈표 Ⅳ-29〉 분수의 의미 개수에 따른 분류

분수의 의미 개수	① 1개	② 2개	③ 3개	④ 4개	⑤ 5개
수(명)	39	20	19	12	10

나. 분수감각 - 2번. 주어진 그림의 다양한 수 표현

아래의 표는 검은색 동그라미 5개와 흰색 동그라미 3개를 다양하게 수로 표현했을 때, 개수에 따른 분류이다. 비율로서의 분수를 제외하고 전체-부분의 관계로서의 분수에서 교사들이 기술한 단위의 개수를 각 각 1개, 2개, 3개, 4개로 분류했다. 전체-부분의 관계로서의 분수에서 전체의 단위를 어떻게 설정하느냐에 따라 다양한 분수로 표현할 수 있다. 교과서와 지도서에서 가장 기본적이고 중심적으로 다루고 있는 전체-부분의 관계로서의 분수를 교사들이 유연하게 바라보고 있는지를 살펴보았다. 이를 통해 분수의 단위에 대한 유연한 분수감각을 보고자 한다. 대부분의 교사들은 1개의 단위로 표현하였다.

〈표 Ⅳ-30〉 단위의 개수에 따른 분류

단위의 개수	1개	2개	3개	4개
수	74	15	3	2

교사들의 기술한 단위들은 <표 Ⅳ-31>와 같다. 86명의 교사들이 전체 단위를 동그라미 8개로 인식하여 $\frac{5}{8}$ 또는 $\frac{3}{8}$으로 표현하였다. 2개를 전체 단위로 표현한 교사는 3명이었다. 전체 단위를 1로 생각하여 5 또는 3으로 표현한 교사는 22명이었다. 비율로서의 분수로 기준량을 검은색 동그라미 또는 흰색 동그라미로 잡고 두 양을 비교하며 비율로서의 분수로 표현한 교사들도 있었다. 이를 통해 많은 교사들이 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 묶음 그 자체를 전체로 바라보며 각 각의 동그라미로 8등분할하여 그 중의 몇 부분으로 표현하는 것을 편하게 받아들이고 있다는 사실을 알게되었다. <표 Ⅳ-30>을 살펴보면 가능한 단위의 개수가 최대인 4개 모두 기술한 교사는 단 2명이었다는 사실을 알 수 있다. 100명 중 2%의 교사들만 다양한 단위를 통해 분수를 표현하였다. 이는 대부분의 교사들이 전체의 단위를 다양하고 유연하게 이용하고 있지 않다고 볼 수 있다.

〈표 Ⅳ-31〉 단위의 종류에 따른 분류

전체-단위	① 8개	② 4개	③ 2개	④ 1개	⑤ 비율
	86	8	3	22	17

아래의 표는 단위의 종류에 따른 교사들의 분수 표현 예시이다.

〈표 Ⅳ-32〉 단위의 종류에 따른 교사들의 분수 표현 예시

전체-단위	경우
① 8개	$\frac{5}{8}$ (전체 8, 부분 5. $\frac{부분}{전체} = \frac{5}{8}$)
② 4개	$1\frac{1}{4}$, ○○○○의 한 묶음 전체를 1로 보게 되면 색칠된 ●의 수가 5개이므로 ●●●●(1) + ●○○○($\frac{1}{4}$) = $1\frac{1}{4}$로 볼 수 있다.
③ 2개	$2\frac{1}{2}$ ● 2개 1묶음 기준
④ 1개	① ● : 5개 ○ : 3개 : 각각 개수
⑤ 비율	① 5 : 3 ② $\frac{3}{5}$ 1) 검은 돌 : 흰 돌 기준인 검은 돌(5)에서, 흰돌 2

다. 분수감각 - 8번. 주어진 막대를 이용한 새로운 길이의 막대 표현

교사들이 주어진 막대가 $\frac{3}{8}$일 때, $\frac{4}{3}$ 길이의 막대를 어떤 방법으로 해결하는 지에 따라 분류했다. 교사들은 분할-반복 조작, 통분, 식 또는 길이 비교 방법을 통해 문제를 해결했다. 통분과 식의 방법을 사용한 교사들은 형식적인 알고르즘을 이용했다고 볼 수 있다. 이에 비해 통분과 식의 방법이 아닌 분할-반복 조작을 통해 막대의 길이를 구한 교사들은 분수를 형식적으로 바라보지 않고 유연하게 받아들이고 있음을 알 수 있다. 최근배는 초등 수학에서는 구체적 조작활동을 통하여 개념을 형성 또는 형식화하는 소위 창조적 활동은 많이 하지만, 형성된 개념을 반성하는 정당화 활동은 소홀히 다루는 경향이 있다고 말한다(2010). 분할과 반복은 다음과 같다.

> ・분할: $\frac{1}{8}$은 전체를 8개로 등분할하고, 그 중에서 1개를 택함으로서 얻어진 양이다.
> ・반복: $\frac{1}{8}$은 자신의 8개 복사본을 만들고 병합하여 전체를 만들 수 있는 양이다. (Siebert & Gaskin, 2006; 재인용, 최근배, 2010, 415쪽)

교사 100명 중 순수 분할과 반복 조작을 통해 문제를 해결한 교사는 26명, 통분의 방법은 40명, 식을 활용한 교사는 8명, 틀린 교사는 26명이었다.

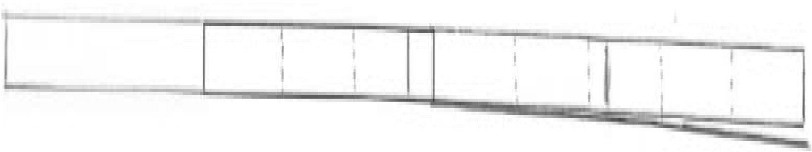
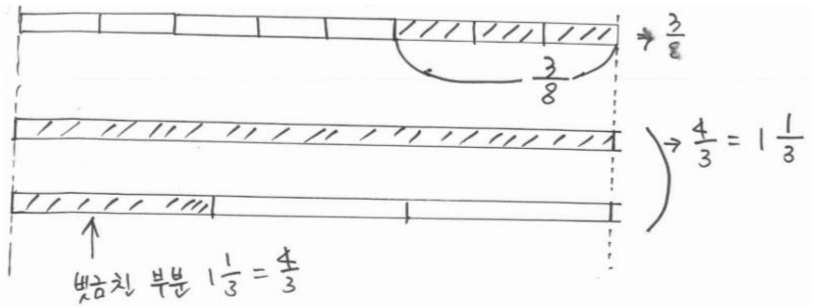
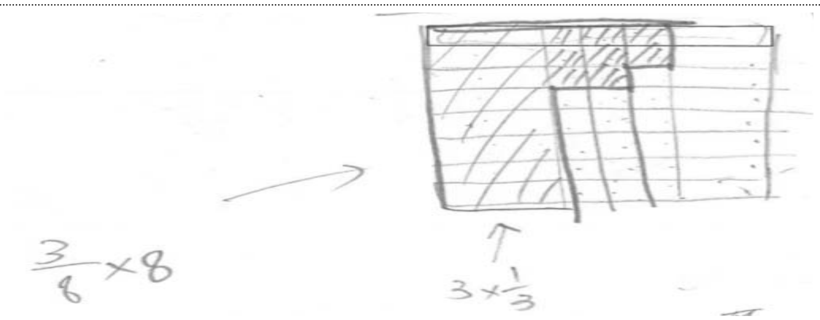
<표 Ⅳ-33> 100명의 교사들의 반응 결과

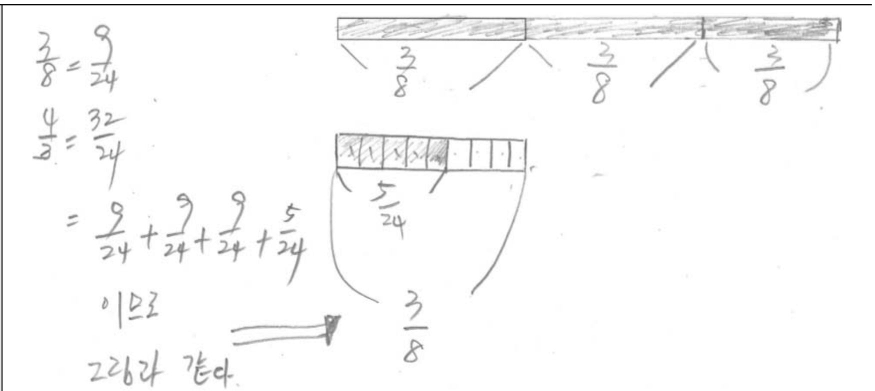
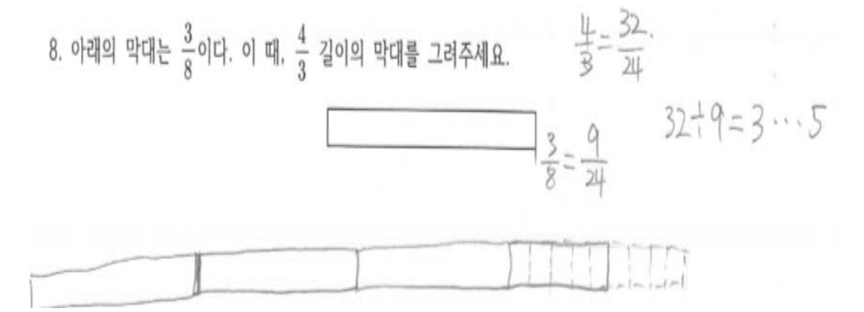
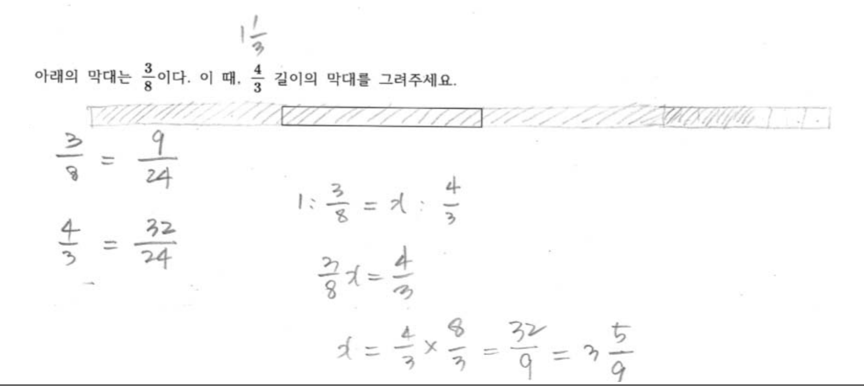
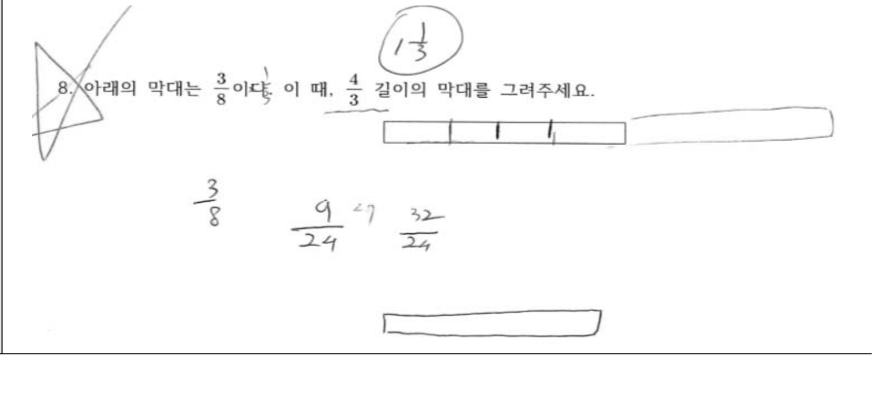
경우	① 분할- 반복 조작	② 통분	③ 식/길이	④ 틀림
수	26	40	8	26

<표 Ⅳ-34>는 교사들의 문제 해결방법에 관한 예시들이다. ①번의 경우, 주어진 막대의 길이가 $\frac{3}{8}$이므로 3등분으로 분할하여 $\frac{1}{8}$을 만들고, 이를 8번 반복하

여 1을 만든다. 1을 다시 3등분하여 $\frac{1}{3}$이 4개인 $\frac{4}{3}$ 길이의 막대를 구하고 있다. ①번의 3번째 그림과 같이 $\frac{3}{8}$ 자체를 8번 반복하여 3을 만들어 문제를 해결한 교사도 있었다. ②번의 경우, 교사들이 가장 많이 이용한 통분의 방법이다. $\frac{3}{8}$과 $\frac{4}{3}$를 통분하여 $\frac{9}{24}$와 $\frac{32}{24}$로 바꾸어 계산한다. ③번과 같이 비례식을 이용하여 문제를 해결한 교사들도 있었다. ④번의 경우, 통분을 하였으나 계산 결과를 구하지 못하는 모습을 보이고 있다. 의외로 이처럼 주어진 길이의 막대를 이용하여 새로운 길이의 막대를 표현하지 못하는 경우가 있었다.

〈표 Ⅳ-34〉 교사들의 해결방법 예시

<table>
<tr><th>경우</th><th>예시</th></tr>
<tr><td rowspan="3">① 분할-반복 조작</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>② 통분</td><td>
</td></tr>
<tr><td>③
식/길이</td><td></td></tr>
<tr><td>④ 틀림</td><td></td></tr>
</table>

2.2 PCK(Pedagogical Content Knowledge)

가. 3번. 측정으로서의 분수 지도 방법에 대한 전반적인 경향

교사들이 0과 $\frac{1}{2}$m가 표시된 수직선에 $\frac{3}{4}$m를 나타내고 이를 학생에게 지도할 때 설명방법을 살펴보기 위한 문제이다. 측정으로서의 분수에서 중요한 개념은 기본 단위 설정이다. 0과 $\frac{1}{2}$m가 표시되어 있지만 이 분수들의 기준 단위는 자연수 1이기 때문에 1m의 기준 단위의 개념 설정 여부에 따라 교사들의 반응을 분류하였다. 아래의 표와 같이 1m를 설정한 교사는 78명, 설정하지 않은 교사는 19명, 틀린 교사는 3명이었다. 여기서 틀림은 수직선상에 $\frac{3}{4}$m를 잘못 표시한 경우이다.

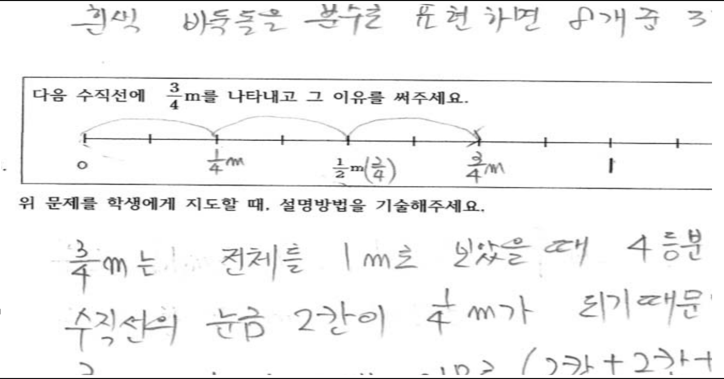
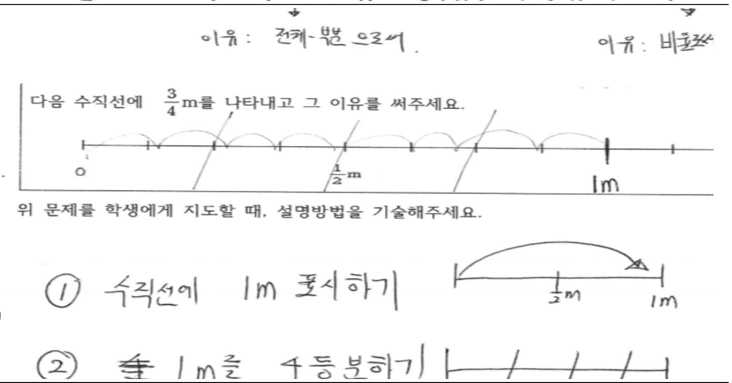
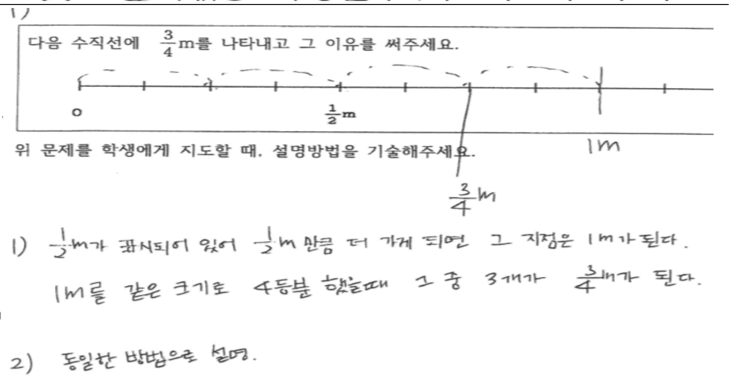
<표 Ⅳ-35> 1m 기준 단위의 개념 설정 여부

1m 기준단위 설정 여부	설정함	설정하지 않음	틀림
명(수)	78	19	3

1m 단위를 설정한 교사의 예는 다음 표와 같다. 1m 단위를 설정한 교사들은 제일 먼저 수직선상에 표시된 $\frac{1}{2}$m를 바탕으로 1m를 찾았다. 그 후 4등분하여 ①번과 ②번처럼 단위분수를 구한 후 단위분수가 3개일 때 $\frac{3}{4}$이고, 그에 해당하는 칸 수를 찾으며 학생들에게 지도하는 모습을 보였다. 이는 전형적인 측정으로서의 분수의 관점에서 설명한 예시이다. ③번처럼 측정으로서의 분수의 관점에서 1m 기준단위를 설정하고 전체-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 1m를 4등분 한 것 중 3부분으로 지도하는 교사들도 있었다. 이는 교사가 한 개의 분수의 의미만이 아닌 두 개의 분수의 의미를 통해 학생들이 좀 더 쉽게 이해할 수 있도록 지도할 뿐만 아니라 여러 개의 분수의 의미를 앎으로써 유연하게

분수 지도할 수 있다고 생각할 수 있다.

<표 Ⅳ-36> 1m 단위를 설정한 교사들의 예

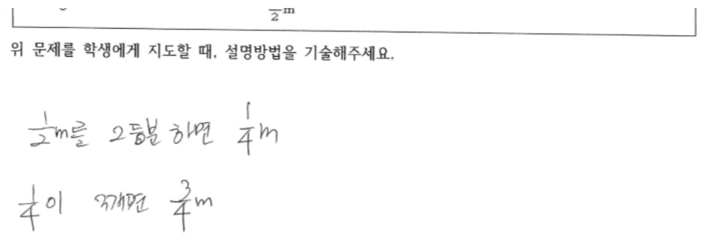
<table>
<tr><td>측정으로서의 분수</td><td>① 
</td></tr>
<tr><td></td><td>② 
</td></tr>
<tr><td>측정으로서의 분수와 전체-부분의 관계로서의 분수 함께 사용</td><td>③ 
</td></tr>
</table>

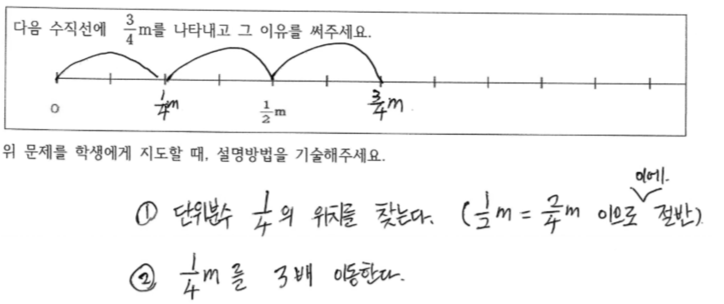
아래의 표 속 1m 단위를 설정하지 않은 교사는 기준 단위를 1이 아닌 수직선상에 표시된 $\frac{1}{2}$m로 설정하고 이를 등분하여 $\frac{3}{4}$m를 구했다고 볼 수 있었다.

①번은 $\frac{1}{2}$m를 2등분하여 $\frac{1}{4}$이라는 새로운 단위분수를 결정한 후 단위분수의 개수로 표현하였다. ②번은 $\frac{1}{2}$m의 동치분수를 구한 후 $\frac{1}{4}$ 단위분수를 찾아 단위분수의 개수로 표현하였다. 모두 기준단위를 설정하여 단위분수를 찾아 측정으로서의 분수의 관점에서 $\frac{3}{4}$을 표현하였지만 이는 자연수가 아닌 분수를 기준단위로 설정한 모습이므로 학생의 혼란을 야기하지 않도록 분수의 개념을 확고히 한 학생들에게 이 방법을 지도할 수 있을 것이다.

〈표 Ⅳ-37〉 $\frac{1}{2}$m 단위를 설정한 교사들의 예

$\frac{1}{2}$m를 기준단위로 설정한 측정으로서의 분수	①
	②





대부분의 교사들이 1m의 기준 단위를 설정하여 학생들에게 수직선상의 분수을 지도하고 있었다. 그 후 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수를 찾거나 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 똑같이 나눈 것 중의 얼마만큼을 표현하고 있다. <표 Ⅳ-12>와 같이 측정으로서의 분수의 의미를 기술한 교사는 41명

이었지만 이보다 많은 교사들이 내재적으로 측정으로서의 분수의 중요한 개념인 기본 단위 설정을 인지하고 있음을 알 수 있다.

나. 4번. 몫으로서의 분수 오개념과 분수 지도방법에 대한 전반적인 경향

교사들이 포함제 상황에서의 몫으로서의 분수를 제대로 이해하지 못하는 학생을 어떻게 지도하면 좋을지 교사들의 몫으로서의 분수 오개념 지도방법에 대한 문제이다. 문제 속 학생은 나눗셈의 결과가 몫인 분수 자체로 나왔을 때 몫으로서의 분수의 의미를 정확히 이해하고 있지 않다. 이 학생은 대분수의 자연수 부분을 몫, 진분수 부분을 나머지라고 생각하며 대분수 자체를 몫으로 생각하지 못하고 있다. 이러한 경우, 지도서 지도방법은 밑의 다음과 같다. 학생이 몫이 분수가 될 수 있음을 생각하지 못하는 경우, 나머지가 1보다 작은 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법을 연결지어 생각해보도록 한다. 따라서, 이 학생의 오개념을 수정해주기 위해 몫의 의미와 기준을 설명하고, 바르게 풀기 위한 지도가 필요하다.

평가	학습 정보	지도 방안 예시
선수 학습 확인 (수업 전)	• 1÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내지 못함. • 1보다 작은 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내지 못함.	**2차시 학습 결과 확인을 바탕으로 3차시를 계획함.** • 1÷(자연수)를 영역 모델이나 구체물을 사용하여 보충 지도 함. • $\frac{1}{3}$과 1÷3의 의미를 설명해 보도록 하여 그 의미가 같음을 알게 함. • 2÷3의 몫이 $\frac{2}{3}$임을 보충 지도 할 때에도 $\frac{2}{3}$의 의미와 2÷3의 의미를 그림을 이용하거나 언어적 설명을 해 보도록 하여 그 의미가 같음을 알게 함.
과정 평가 1	• 한 명이 사용한 한지의 양을 구하는 식이 나눗셈식인지 모름. • 식은 만들었지만 몫과 나머지를 자연수 범위에서만 구하고 몫이 분수가 될 수 있음을 생각하지 못하고 있음.	• 나누어떨어지는 간단한 실생활 상황에서 나눗셈의 의미를 보충 지도 함. (예 사과를 나누어 먹는 상황) • 전 차시와 관련시켜 나머지의 경우 1보다 작은 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 방법을 연결 지어 생각해 보도록 함.
	• 식을 바르게 만들고 그림을 이용하거나 분수 개념을 바탕으로 몫이 분수가 될 수 있음을 이해함.	• 몫이 분수가 될 수 있음을 설명해 보도록 함. • 몫을 알아보기 전에 계산 결과를 어림해 보도록 한다. 어림한 값을 ②에서 학습한 계산 결과와 비교하는 활동을 해 봄으로써 수적 양감을 형성할 수 있도록 함.

[그림 Ⅳ-91] 학습 정보에 따른 지도방안 예시

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (124쪽) 교육과학기술부. 2019.

아래의 그림과 같이 6학년 2학기 지도서에서는 포함제 상황에서의 분수의 나눗셈을 지도할 때, 나눗셈 결과가 자연수가 아닌 분수인 경우 분수 부분의 의미를 파악하는 것이 중요하다고 말한다(129쪽).

1. 포함제 상황에서 분수의 나눗셈 지도

'빵 12개를 한 명에게 4개씩 주면 몇 명에게 나누어줄 수 있는가?'는 12÷4로 나타낼 수 있는 전형적인 포함제 상황이다. '길이가 $1\frac{3}{4}$ m인 끈을 $\frac{1}{2}$ m씩 자르면 몇 도막이 되는가?'는 나누는 수가 분수인 포함제 상황으로 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$로 표현된다. 이를 계산하면 결과가 $3\frac{1}{2}$이 된다. 이를 주어진 상황에서 생각하면 $\frac{1}{2}$ m짜리 3도막과 $\frac{1}{2}$ m의 $\frac{1}{2}$인 $\frac{1}{4}$ m가 남는다. 나눗셈 결과가 자연수가 아닌 분수인 경우 분수 부분의 의미를 파악하는 것이 포함제 상황에서는 중요하다.

[그림 Ⅳ-92] 포함제 상황에서 분수의 나눗셈 지도

주. 출처 **수학 6-2 교사용 지도서** (129쪽) 교육과학기술부. 2019.

<표 Ⅳ-38> 몫으로서의 분수 오개념 지도방법

① 몫의 의미와 기준 설명함	② 포함제를 이용하여 설명함	③ 틀림
68	25	7

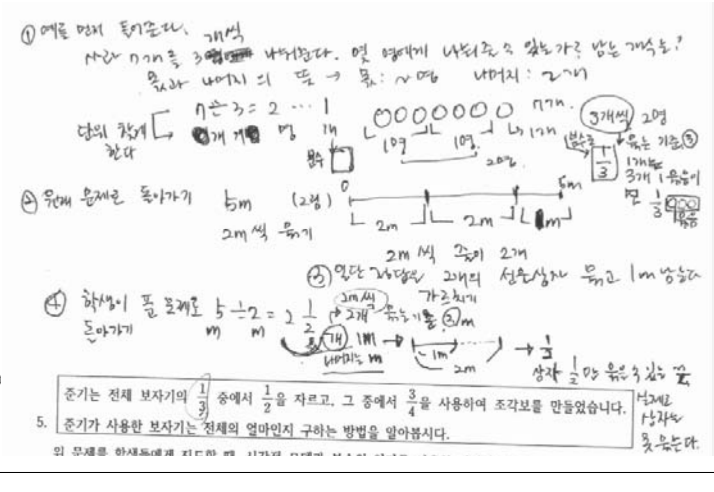
다음의 표에서는 한 상자를 묶는데 2m의 끈이 필요할 때 5m의 끈으로 묶을 수 있는 총 상자의 수와 남은 끈의 길이를 물어보는 문제에서 학생이 몫으로서의 분수 $2\frac{1}{2}$m의 의미를 제대로 인지하지 못할 때 나눗셈의 결과인 몫의 의미와 기준을 설명하는지에 따라 교사들의 지도방법을 분류하였다. 표의 ①번과 ②번은 포함제 상황의 나눗셈을 바르게 지도한 방법이다. <표 Ⅳ-39>와 같이 총 93명의 교사가 다음의 문제를 바르게 설명하고, 7명의 교사가 틀리게 설명하였다. 그 중에서도 나눗셈의 결과인 몫으로서의 분수를 통한 몫의 의미와 기준을 설명한 경우와 포함제만을 이용하여 설명한 경우로 나누어 살펴보았는데, 몫의 의미와 기준을 설명한 교사는 68명, 포함제만을 이용하여 설명한 교사는 25명으로 나뉠 수 있었다.

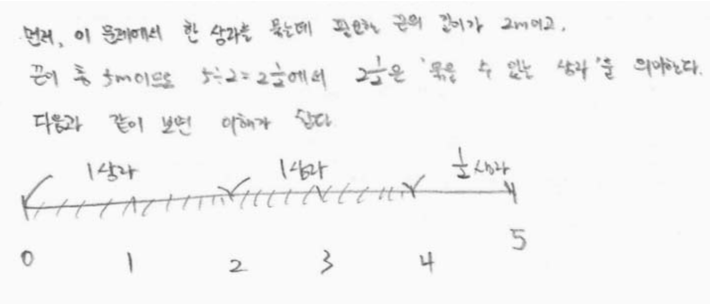
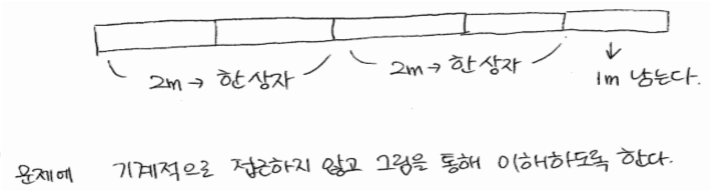
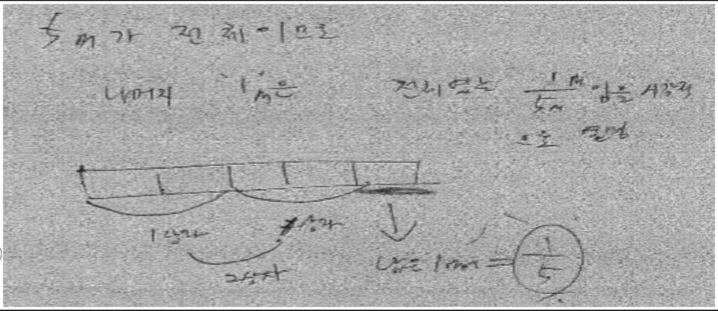
〈표 Ⅳ-39〉 바르게 설명했는지의 여부

바르게 설명했는지 여부	바르게 설명함	틀리게 설명함
수(명)	93	7

<표 Ⅳ-40>은 교사들의 몫으로서의 분수 오개념 지도방법 예시들이다. ①번과 ②번의 경우, 먼저 몫의 의미와 기준을 설명하였다. 나머지를 분수로 바꾸어 표현하면서 몫이 분수로 나올 수 있음을 살펴본다. $2\frac{1}{2}$의 의미는 묶을 수 있는 상자 수 자체임을 학생에게 알려준다. 그 후, 대분수 속 자연수의 의미와 진분수의 의미를 파악하는데 $\frac{1}{2}$은 상자 1개를 묶을 수 있는 끈의 길이의 절반이므로 1m임을 인지하도록 하며 학생의 오개념인 몫으로서의 분수의 의미와 이를 바르게 지도하는 방법까지 제시했다고 볼 수 있다. ③번의 경우 포함제를 이용하여 덜어내기, 감산법을 통한 지도방법이다. 이러한 설명 방법은 바르게 지도방법이 될 수 있으나 학생의 오개념이 무엇인지 정확하게 파악했다고는 볼 수 없다. ④번의 경우는 나머지 1m의 전체 단위를 1개의 상자가 아닌 5m 자체로 바라보고 $\frac{1}{5}$이라 말하고 있으므로 틀린 예시라 할 수 있다.

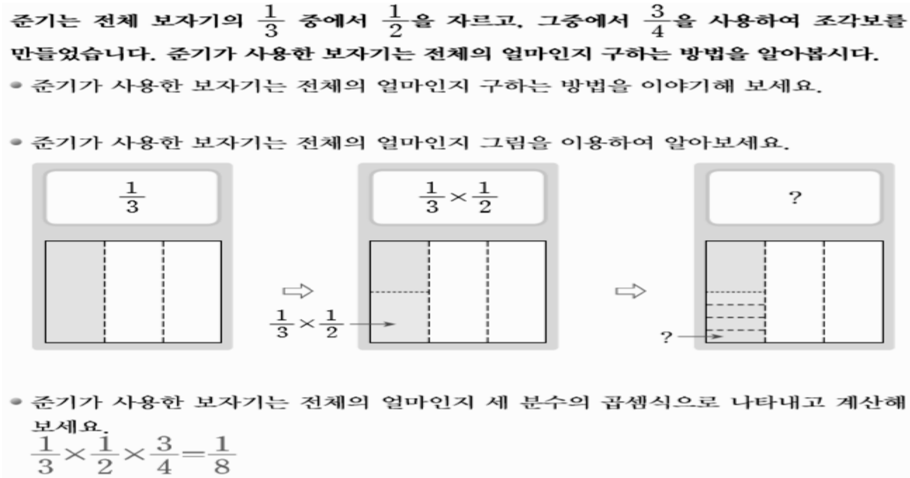
〈표 Ⅳ-40〉 몫으로서의 분수 오개념 지도방법 예

몫의 의미와 기준 설명	① 

	② 
포함제를 이용한 설명	③ 
틀림	④ 

다. 5번. 연산자로서의 분수 문제 지도시 사용한 시각적 모델

5학년 2학기 교과서 문제 중 연산자로서의 분수의 의미를 이용한 문제를 이용하여 교사들이 연산자로서의 분수의 의미를 지닌 문제를 어떤 시각적 모델과 설명을 통해 제시하는지를 보았다. 준기는 전체 보자기의 단위를 $\frac{1}{3}$로 축소시키고, 이를 다시 $\frac{1}{2}$ 축소시킨 후, 그 중의 $\frac{3}{4}$만큼 사용하여 조각보를 만들었을 때, 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 알아본다. 정답기준은 다음 그림과 같이 교과서에 제시한 시각적 모델로 하였다.



준기는 전체 보자기의 $\frac{1}{3}$ 중에서 $\frac{1}{2}$을 자르고, 그중에서 $\frac{3}{4}$을 사용하여 조각보를 만들었습니다. 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 알아봅시다.

- 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 이야기해 보세요.
- 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 그림을 이용하여 알아보세요.

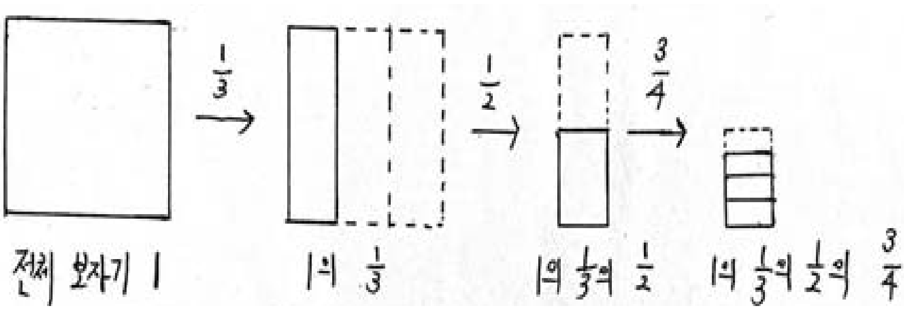
- 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 세 분수의 곱셈식으로 나타내고 계산해 보세요.

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$

[그림 Ⅳ-93] 5번 정답 기준

주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (183쪽) 교육과학기술부. 2019.

연산자로서의 분수에서의 핵심은 처음의 원래 모델 또는 수가 분수로 인하여 확대 또는 축소되는 것이다. 그러나 교과서 속 시각적 모델 표현은 처음의 전체 보자기 즉, 전체 단위를 먼저 설정하지 않아 모호한 점이 있으나 전체 보자기의 그림을 그렸기 때문에 전체의 단위를 인지한다고 가정하여 이를 기준으로 교사들의 표현을 분류하였다. 정확한 연산자로서의 분수의 의미로 설명하는지 또는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미로 설명하는지 살펴본다. 한편, 정확하게 분수를 연산자로 바라보고 처음 보자기의 크기가 분수만큼 축소하는 과정을 나타낸 연산자로서의 분수 표현은 다음 그림과 같다.



[그림 Ⅳ-94] 정확하게 표현한 연산자로서의 분수

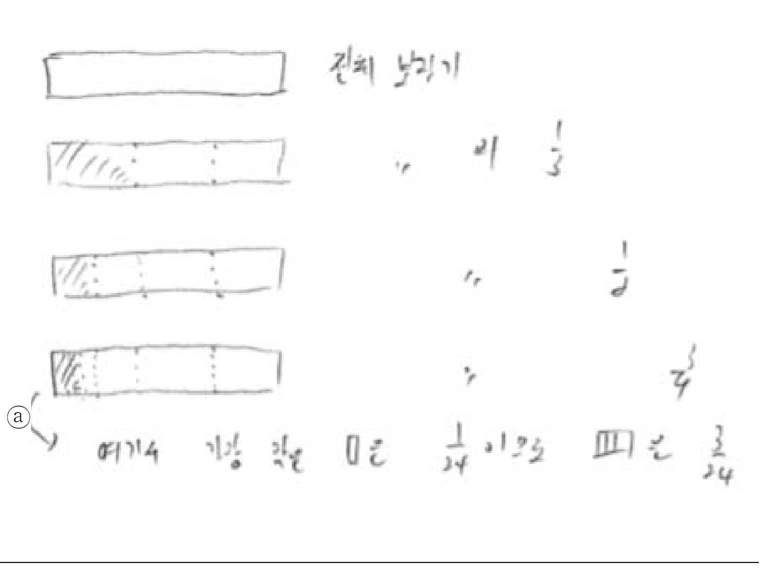
아래의 표는 보자기의 크기를 구하기 위해 어떤 시각적 모델 또는 방법을 사용했는지에 따라 분류하였다.

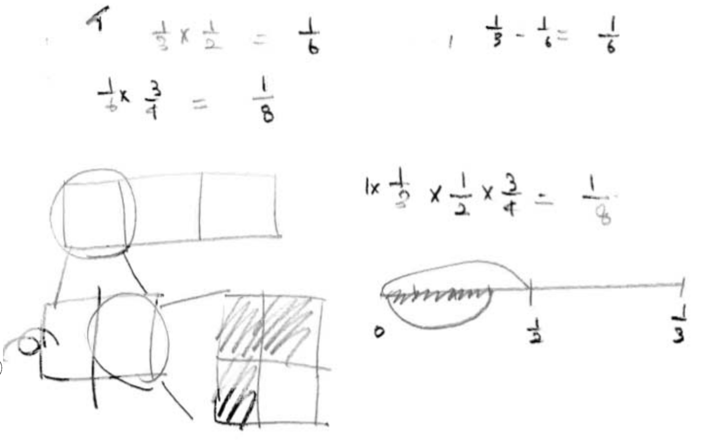
<표 IV-41> 시각적 모델을 활용한 연산자로서의 분수 문제 지도방법

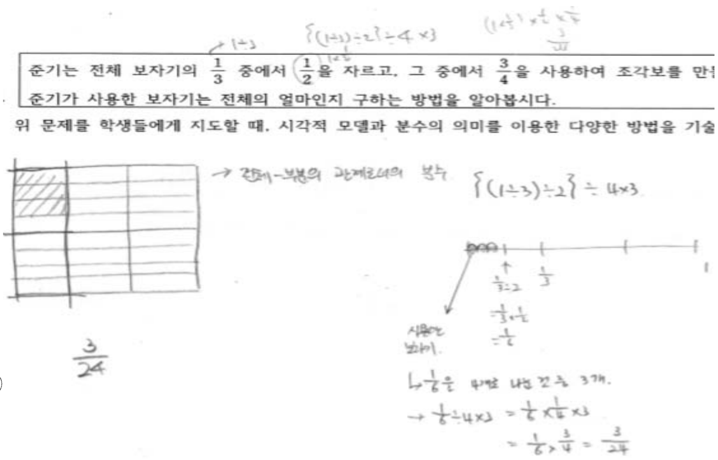
① 정확한 연산자로서의 분수로 설명	② 정확하지 않지만 연산자로서의 분수/ 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명	③ 틀리게 설명함
27	66	7

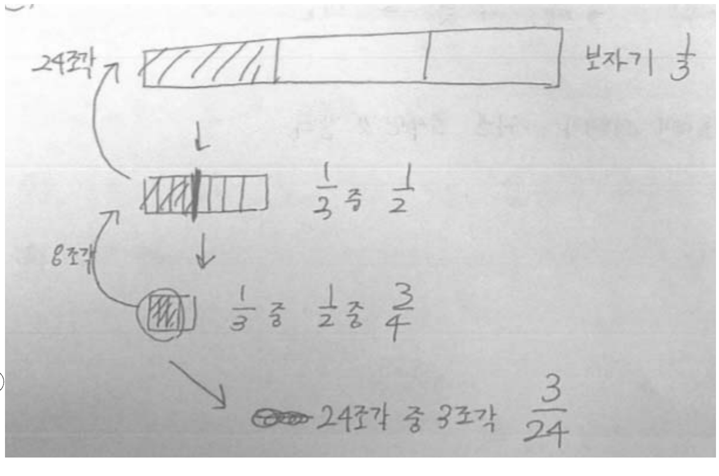
③번은 5번 정답 기준에 따라 정확한 연산자로서의 분수로 설명한 경우, ②번은 정확하지 않지만 연산자로서의 분수 또는 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명한 경우, ③번은 틀린 경우이다. 표와 같이 정확한 연산자로서의 분수로 설명한 교사들은 100명 중 27명이었다. 전체 보자기의 1을 시작으로 분수 연산자를 통해 전체 보자기가 작아지는 과정을 시각적 모델로 표현하였다. ①번 교사들의 정확한 연산자로서의 분수를 이용한 지도 방법은 다음과 같다.

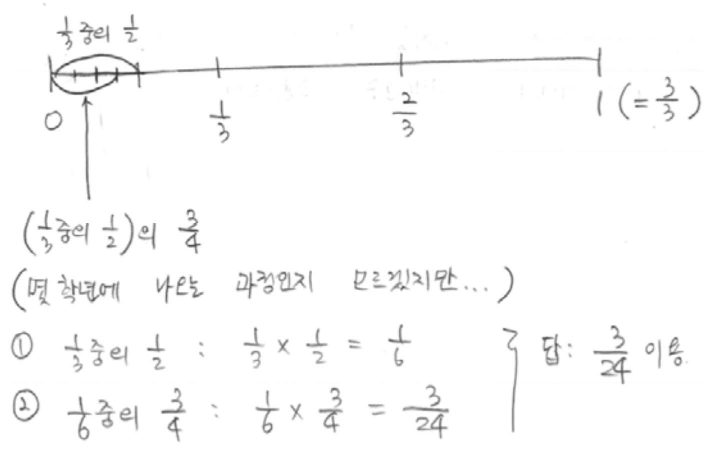
<표 IV-42> ①번 정확한 연산자로서의 분수를 이용한 지도 방법

① 정확한 연산자로서의 분수로 설명	

ⓑ


ⓒ

준기는 전체 보자기의 1/3 중에서 1/2을 자르고, 그 중에서 3/4을 사용하여 조각보를 만
준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 알아봅시다.
위 문제를 학생들에게 지도할 때, 시각적 모델과 분수의 의미를 이용한 다양한 방법을 기술
3/24

ⓓ

24조각
보자기 1/3
1/3 중 1/2
8조각
1/3 중 1/2 중 3/4
24조각 중 3조각 3/24

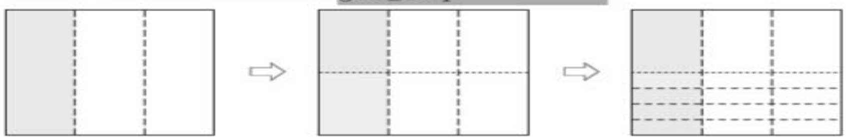
	ⓔ 

ⓐ번의 경우 전체 보자기를 제시하고 전체 보자기가 축소되는 과정을 보여주고 있다. 분수를 표현할 때 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하나 연산자로서의 분수의 과정을 통해 분수의 연산자적 의미로서 축소하는 과정이 담겨있다. ⓑ번의 경우, ⓐ번과 마찬가지로 전체의 크기가 축소되는 과정을 연산자적 분수의 의미로 나타내고 있다. ⓒ번의 경우, 연산자로서의 분수의 의미와 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미를 이용한 지도방법이 모두 제시되어 있다. 왼쪽의 경우, 전체-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 전체를 등분할시켜 그 중의 얼마인지로 표현했다. 연산자로서의 분수의 관점에서는 연산자로서의 분수의 의미 중 나눗셈과 곱셈의 조작적인 과정이 드러나 있다. 각 각의 분수를 나눗셈과 곱셈의 조작적인 과정으로 표현했음을 알 수 있다. ⓓ번의 경우, 결과 설명에 있어 전체-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 설명함으로써 학생들의 이해를 도와준다. 연산자로서의 분수의 관점에서 조작적으로 축소되는 과정을 보여주나 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미를 함께 사용함으로써 학생들의 이해를 원활하게 하도록 한다. ⓔ번의 경우, ⓐ~ⓓ번과 달리 수직선 모델을 통해 연산자로서의 분수 관점에서 지도한다. ⓐ~ⓓ번은 직사각형 모델을 사용한다.

<표 Ⅳ-43>과 같이 정확하지 않지만 연산자로서의 분수 또는 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명한 교사들은 66명이었다. 흥미로웠던 점은 모든 과정을 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 교사들도 있었지만 연산자로서의 분

수의 과정으로 진행하다가 결국 마지막에는 전체-부분의 관계로서의 분수로 회귀하는 모습을 보인 교사들이 많았다. 연산자로서의 분수의 의미에서는 전체의 크기가 축소/확대가 되며 그 과정을 연산자로서 분수를 사용한다. 따라서, 전체를 나누지 않고 축소/확대하는 모습을 보여야 한다. 그러나 대다수의 경우 전체를 나누고, 각 단계에서 나눌 때 역시 원래의 전체를 모두 등분할하는 모습을 보인다. 또한, 지도서에서도 연산자로서의 분수를 전체-부분의 관계로서의 분수 측면으로 설명하고 있다. 아래의 그림은 6학년 1학기 지도서를 살펴보면 교과서의 시각적 모델을 연산자로서의 분수의 시각적 모델과 전체-부분으로서의 시각적 모델과 설명을 혼합하여 설명하는 모습이다.

– 전체를 3등분하고 각각의 $\frac{1}{3}$을 다시 2등분하면 전체를 6등분한 것 중 하나의 양이므로 $\frac{1}{3\times2}$입니다. 다시 각각의 $\frac{1}{6}$을 4등분한 것 중 3만큼의 양이므로 $\frac{1}{3\times2\times4}\times3$입니다.



준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 세 분수의 곱셈식으로 나타내고 계산해 보세요.

– $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1\times1\times3}{3\times2\times4}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{24}}=\frac{1}{8}$입니다.

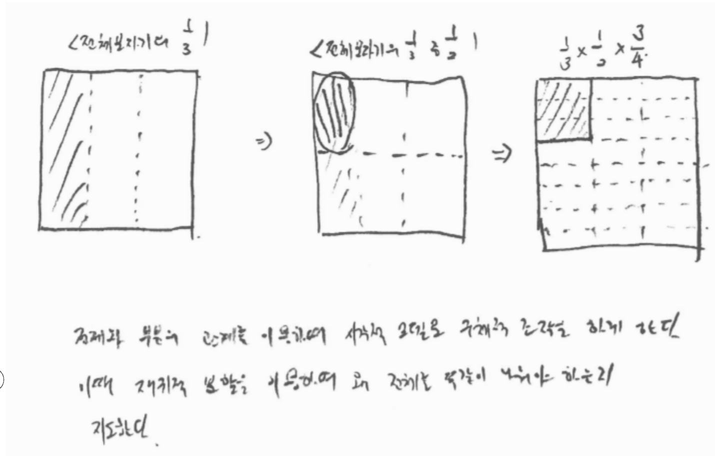
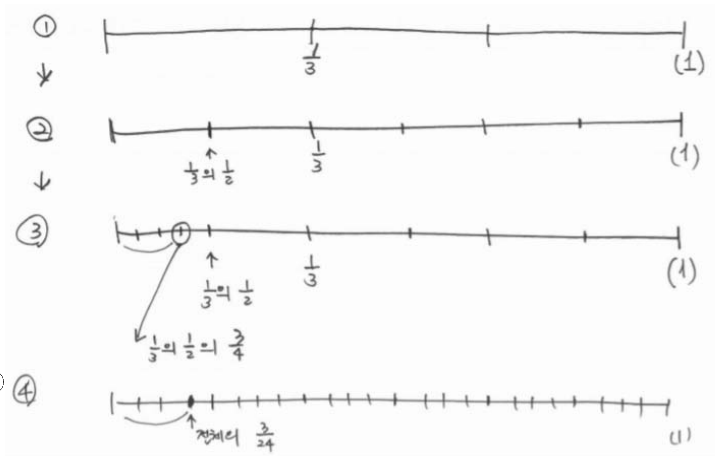
[그림 Ⅳ-95] 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명하는 지도서

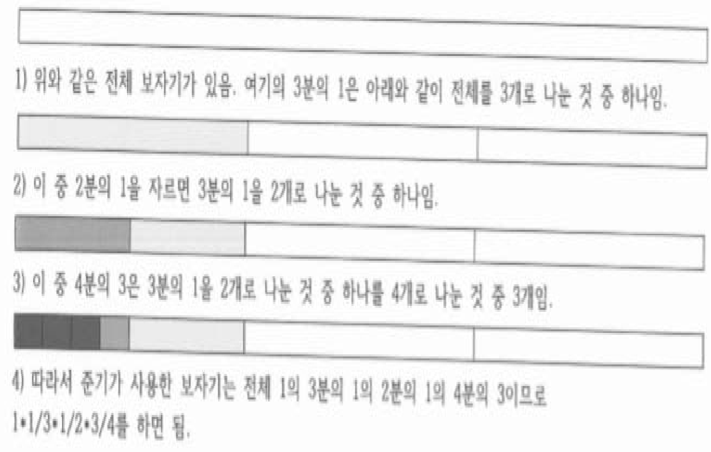
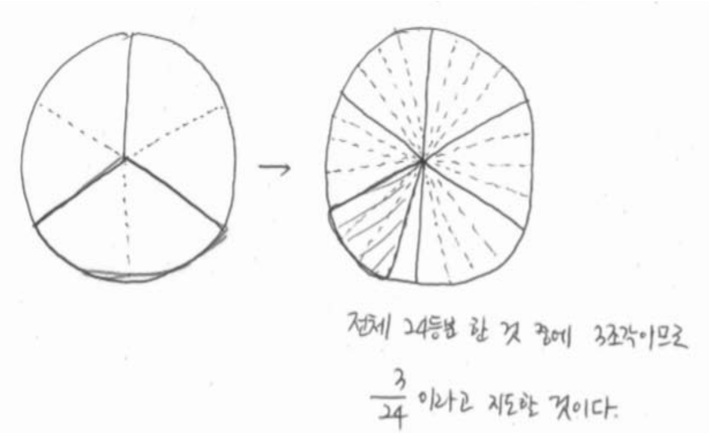
주. 출처 **수학 5-2 교사용 지도서** (182쪽) 교육과학기술부. 2019.

교과서의 그림과는 달리 전체를 3등분하고 각각의 $\frac{1}{3}$을 다시 2등분하여 '전체를 6등분한 것 중의 하나의 양'으로 $\frac{1}{6}$을 설명한다. 이는 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명방법이다. 또한, 시각적 모델이 한 개의 $\frac{1}{3}$을 2등분하여 $\frac{1}{6}$을 구해 크기가 축소됨을 살펴보는 것이 아니라 모든 $\frac{1}{3}$을 2등분하여 전체-부분의 관계로서의 분수로 살펴봄을 알 수 있다. 크기가 축소됨을 보여주기 위해 실제 크기를 실선으로 보여주지 않고, 모든 내부의 선을 점선으로 표현함을 알 수 있

다. 학생들의 이해를 위해 전체-부분의 관계로서의 분수 방법을 사용할 수는 있지만 연산자로서의 분수로 살펴봐야 할 문제조차 모두 전체-부분의 관계로서의 분수로만 해석하는 것은 학생과 교사의 분수에 대한 사고를 확장시키지 못할 수 있다. 다음의 표는 ②번 경우의 교사들의 예시이다.

<표 Ⅳ-43> ②번 정확하지 않지만 연산자로서의 분수/전체-부분의 관계로서의 분수를 이용한 지도 방법

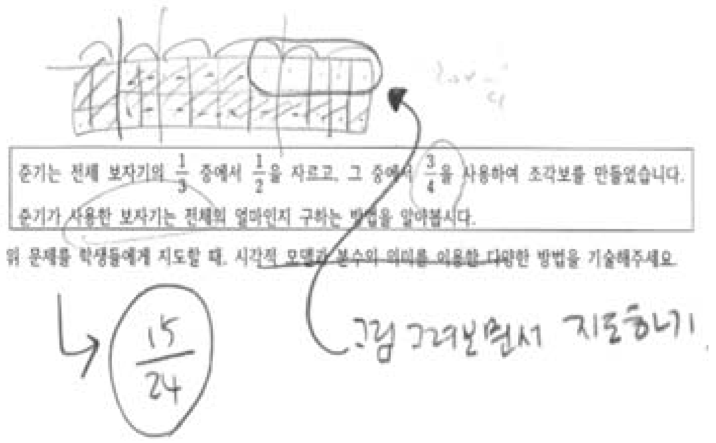
<table>
<tr><td rowspan="2">②정확하지 않지만 연산자로서의 분수/ 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명</td><td>ⓕ </td></tr>
<tr><td>ⓖ </td></tr>
</table>

	 ⓗ
	 ⓘ

ⓕ번의 경우, 전체 보자기가 축소되는 과정을 보여주지만 축소되는 과정 속에서 전체 보자기의 입장으로 등분할하고 있으므로 연산자로서의 분수의 의미를 완전히 정확하게 표현하고 있지는 않다. ⓖ번 역시 각 각의 과정에 따라 해당하는 부분만 등분할하는 것이 아닌 나머지 부분까지, 즉 전체의 부분을 등분할하고 있다. 또한, 마지막 단계를 갔을 때 전체를 24등분으로 쪼갠 것 중의 3부분을 나타냄으로서 전제-부분의 관계로서의 분수로 회귀하는 모습을 보이고 있다. ⓗ번의 경우, 전체 보자기가 축소되는 과정을 보여주지만 각 각의 과정을 전체

-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 등분할하여 전체 중의 몇 부분으로 말하며 진행하여 전체-부분의 관계로서의 분수의 관점에서 교사는 지도했다고 여겨진다. ⓘ의 경우, 전체를 등분할하여 그 중의 얼마만큼을 제시하는 전체-부분의 관계로서의 분수 관점이다. 이는 제시한 문제가 연산자적 의미의 분수가 필요함에도 전체-부분의 관계로서의 분수로 해석하고 있음을 알 수 있다. 한편, ⓕ~ⓘ번 모두 문제를 해결함에 있어 다른 모델을 이용하여 제시한다. 영역모델 중 직사각형모델과 원모델, 길이 모델 중 수직선모델과 막대모양의 모델을 이용하며 교사들이 분수의 곱셈 시 다양한 모델을 이용함을 알 수 있다.

다음 그림은 틀린 사례이다.



[그림 Ⅳ-96] ③틀림 사례

라. 6번. 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

익준이는 2가지의 오개념을 가지고 있다. 첫째, 비율로서의 분수이다. 비율로서의 분수는 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 의미한다. 둘째, 분수의 덧셈이라는 연산 과정에서 분모와 분자를 모두 더하고 있다. 첫 번째 오개념은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$에서 각 각의 분수를 2타수 중 1안타, 3타수 중 1안타, 5타수 중 2안타로 바라보고 있다. 이는 비율로서의 분수에서 각 기준량의 수 자체가 다름에도 분

수로 만든 것으로 볼 수 있다. 각 각의 분수는 비율로서의 분수로 맞다고 말할 수 있을지라도 각 각의 기준량의 수 자체가 모두 다르므로 이를 비율의 덧셈으로 바라볼 수는 없다. 기준량은 전체 타수에 대한 안타 수의 비율로 살펴볼 수 있으나 각 각의 전체 타수가 다르다고 생각해야 한다. 두 번째 오개념은 분수의 덧셈이라는 연산 과정에서 분모와 분자를 모두 더하고 있다. 이는 분수를 자연수의 범위를 확장하여 자릿수끼리의 합, 아래 자릿수의 합과 위 자릿수의 합으로 구하였다. 이는 각 각의 분수의 단위가 1인데 덧셈 결과 분수의 단위가 2가 되어 덧셈 과정과 결과의 단위가 달라진다.

<표 IV-44> 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

	① 비율로서의 분수에서 중요한 기준량에 관한 설명	② 분수의 덧셈 시 전체 양이 고정됨을 설명	③ 안되는 상황 보여주며 지도	④ 틀림
수(명)	29	8	27	36
백분율(%)	29	8	27	36

위의 표는 익준이가 가지고 있는 오개념을 교사들이 어떻게 지도하는지에 따른 분류이다. 학생의 오개념을 지도할 때 오개념의 종류, 그러한 오개념의 바른 지도방법을 살펴봐야할 것이다. 안되는 상황만을 보여주는 것은 학생의 오개념을 정정하기 어려울 것이다. 따라서, ①번은 첫 번재 오개념인 비율로서의 분수에서 중요한 기준량에 관해 설명하는지에 관한 기준이다. ②번은 두 번째 오개념인 분수의 덧셈 시 전체 양이 고정됨을 설명하는지에 관한 기준이다. ①번과 ②번은 학생의 오개념을 먼저 인지한 후 그에 따른 올바른 지도방법을 설명하였다 볼 수 있다. 그러나, ③번은 익준이의 방법이 안되는 이유에 대한 설명없이 안되는 상황만을 보여주며 지도하는 경우로서 학생의 오개념을 제대로 정정해주지는 않는다. ④번은 모른다고 대답하거나 잘못된 방법으로 설명한 경우이다. 총 10개의 문제 중 6번 문제가 오답률이 가장 높았다. 36%의 교사가 틀렸으며 안되는 상황만을 제시한 경우까지 오답으로 처리한다면 63%의 교사가 이 문제에 어려움을 느낀 것을 알 수 있었다.

<표 IV-45> 교사들의 ①번 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

① 비율로서의 분수에서 중요한 기준량에 관한 설명	ⓐ 준이가 바르게 이해하기 위해서는 어떻게 지도하면 ... 익준아 우선 어제 오늘의 타수에 대한 안타의 비율은 $\frac{2}{5}$가 맞지만, 어제와 오늘의 안타율은 각각 독립적인 사건이므로 더할 수가 없어요. 타율은 비율이므로 전체의 크기(기준량)가 동일할 때 더할 수 있어요. 어제의 기준은 2, 오늘은 3 이지요? 어제가 만약 ~~의 기준 안타~~ 6타수라면 안타는 3안타, 오늘 만약 6타수라면 2안타를 쳤을 가능성이 있죠? 그러면 $\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\right)$ 총 안타율은
	ⓑ 어제는 두번 중의 한 번, 오늘은 3번 중 한 번이면 언제 더 잘 쳤다고 말할 수 있을까? 비교하기 어려우니 똑같이 쳐서 안타를 몇 번 쳤는지 비교해 보자. 어제 6번을 쳤다면 3번 안타. 오늘 6~~번~~ 타수이면 2안타. ~~언제 더 잘~~ 어제, 오늘 비교했을 때 어제 더 잘쳤지만 ~~그래 쳤다~~ 어제, 오늘 합칠 수는 없단다. 안타율은 비교하기엔 적절하지만 더하고 빼는 의미로는 적절치 않다. ⇒ 하면서 그림그려 설명.
	ⓒ 어제 O, X 오늘 O X X $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ 안타율은 비율, 즉 확률 분수이다. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$은 (그림) + (그림) = (그림) ≠ (그림) $\frac{2}{5}$ 어제의 안타율 + 오늘의 안타율 = 전체 안타율이 안된다 등식이 설명 X $\frac{\text{어제 안타}}{\text{전체 타수}}+\frac{\text{오늘 안타}}{\text{전체 타수}}$ 전체로 생각해야 됨!
	ⓓ 안타율은 전체 타수에 대한 안타수 이기 때문에 (기준량) (비교하는 양) $\frac{\text{비교하는 양}}{\text{기준량}}$ = $\frac{\text{안타수}}{\text{전체 타수}}$ = $\frac{(1+1)}{(2+3)}$ 이지 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$이 아님. 그래서 분수의 합은 비율의 합이 아니라 수의 합으로 예를 들어 피자 1판. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ = (그림) + (그림) = (그림) (그림) 중 (그림)은 전체의 $\frac{1}{6}$이고 5조각 이므로 $\frac{5}{6}$ 각하시는 분수의 의미 지도순서(전체-부분의 관계로서의 분수 등)와 이유를 설명해주세요. 큰 원과 비교하는 양의 확실한 개념 정립이.

위의 표에서는 익준이의 오개념 중 기준량에 초점을 맞추고, 지도하는 교사들의 예시를 볼 수 있다. 다음의 그림은 지도서에서 티셔츠와 바지의 판매량을 비교할 때 판매한 수만 가지고 판매량을 비교할 수 없으므로 기준량을 같게 하여 티셔츠와 바지의 처음 수량에 대한 판매량의 비율을 구한다. 이처럼 대상이 다를 때는 학생들이 기준량과 비교하는 양을 명확하게 이해하여 기준량을 같게 하여 비율을 구할 것이다. 그러나, 익준이의 경우 같은 대상인 타수에 대한 안타 수이므로 이때는 수 자체가 기준량이 됨을 인지해야한다. ⓐ와 ⓑ번의 경우, 기준량이 수 자체임을 설명하고 있다. ⓒ번의 경우, 각 비율로서의 분수의 의미를 설명하고 기준량이 다르므로 기준량을 전체의 타수라는 새로운 단위를 결정하고 있다. ⓓ번의 경우, 기준량과 비교하는 양을 설명하고는 있지만 전체 타수에 대한 설명이 부족하여 학생이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3}$이 아닌 이유를 완전히 이해하기는 어려운 예시이다.

한편, 박슬아(2016)는 비와 비율 지도에 대한 교사의 PCK를 분석하였는데 세 교사 중 두 교사가 비율과 분수의 차이점과 관련하여 비율과 분수의 개념적 차이를 정확하게 인지하지 못하였으며, 세 교사 모두 수업에서 이에 대해 지도하지 않았다고 하였다. 수학적 개념이 발생하는 여러 가지 맥락이 서로 혼란을 일으키는 경우가 있으므로, 교사는 활동을 통하여 학생들이 비율과 분수를 비교해 볼 수 있는 기회를 제공해야한다고 주장한다(p. 158). 수학적으로 비율과 분수의 개념은 같은 맥락에서 발전하였다(박슬아, 2016).

> 수학적 개념을 학습하는 초기에 있는 초등학생들에게 있어서는 수학적 개념이 발생하는 여러 가지 맥락이 서로 혼란을 일으키는 경우가 있으므로 비율 개념과 분수 개념이 발생하는 맥락의 차이점을 살펴보는 것은 초등학교 교사들에게 있어서 필요하고 중요한 일이다 (교육부, 2015, 재인용: 박슬아, 2016, p. 15)

따라서, 전체-부분의 관계로서의 분수와 비율로서의 분수 사이의 오개념을 가진 익준이의 오개념을 수정할 수 있도록 교사는 비율로서의 분수에 대한 교수학적 내용지식이 필요하다. 다음의 사진은 Baroody & Coslick(2006)의 표를 박슬아가 정리한 비율과 분수의 개념 비교 표이다.

다. 비율과 분수(부분-전체 의미의 분수) 개념의 비교

명칭 / 관점	비율	분수
서로 다른 유형의 관계	· 전체에 대한 부분의 비율 · 부분에 대한 전체의 비율 · 부분에 대한 부분의 비율 · 어떤 양에 대한 다른 양의 비율	· 전체에 대한 부분의 비율
하나의 수로 표현	· 수 하나로 나타내기도 함	· 수 하나로 나타내지 못함
다양한 표현	· 분수가 아닌 다른 기호로 나타낼 수 있음	· 분수 형식으로만 나타냄
0의 존재 유무	· 축구 경기에서 5:0으로 나타냄	· 0으로 나눌 수 없기 때문에 분모에 0이 오는 것이 불가능함
수의 범위	· 유리수가 아닌 수로 비를 만들 수 있음	· 모든 비율을 분수로 만들 수는 없음
수의 비교	· 두 분수의 전체가 같을 필요 없이 비교 가능함	· 전체의 크기가 같아야 분수의 크기를 비교할 수 있음
결합	· 2:5와 3:7을 결합하여 5:12로 사용함	· $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\neq\frac{5}{12}$로 결합할 수 없음

<표 Ⅱ-1> 비율과 분수의 비교 (Baroody & Coslick, 2006)

[그림 Ⅳ-97] 비율과 분수 개념의 비교

주. 출처 Baroody & Coslick. 2006. 재인용: 박슬아. 2014. **비와 비율 지도에 대한 교사의 PCK 분석** (p. 14)

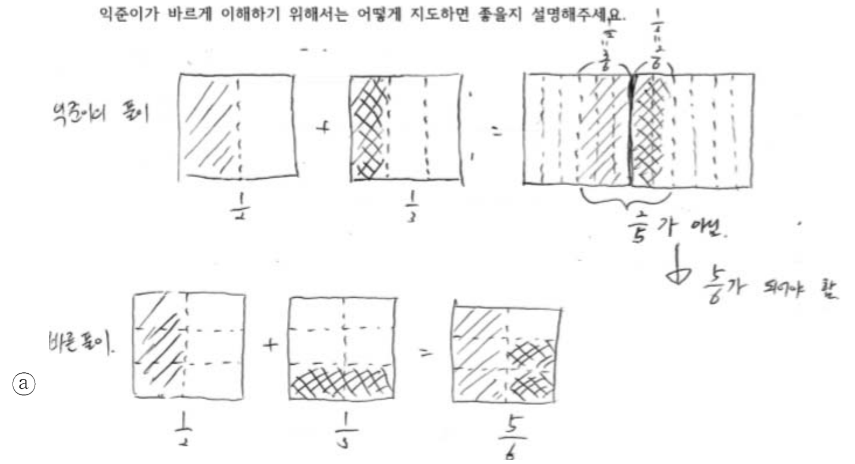
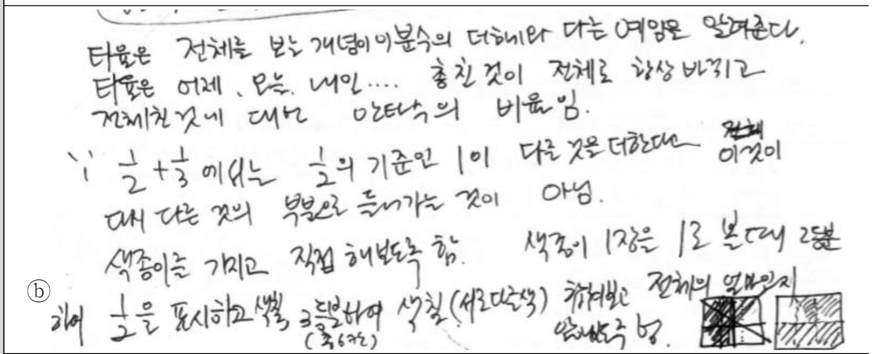
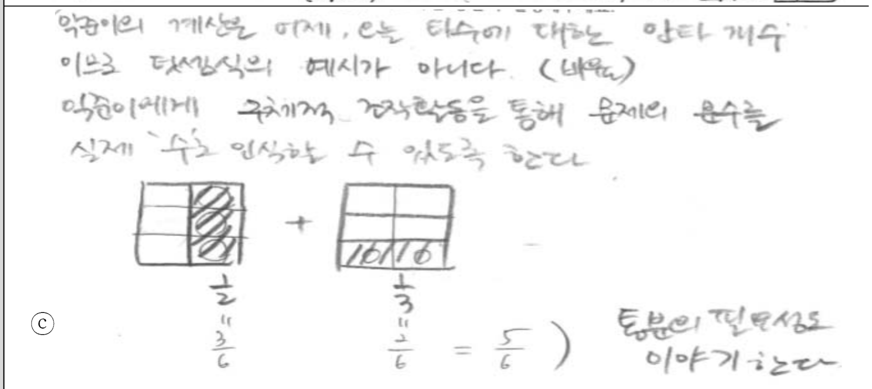
• 티셔츠의 판매량과 바지의 판매량을 그림으로 나타낼 수 있으나 단순히 수의 크기 비교에만 초점을 두어 말함. 예 티셔츠는 50벌 중 40벌이 판매되었고, 바지는 20벌 중 17벌이 판매되었습니다.	• 티셔츠와 바지의 판매량을 비교할 때 기준량이 서로 다르기 때문에 단순히 판매된 수만 가지고는 판매량을 비교하기 어렵다는 사실을 인지할 수 있도록 지도함. 예를 들어 “시험 문제 20개 중에서 18개를 맞힌 것과 시험 문제 10개 중에서 8개를 맞힌 것은 똑같이 2문제를 틀렸으니 시험 점수가 같다고 말할 수 있을까요?”와 같이 학생들이 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 소재를 활용하여 기준량을 같게 하여 비교하기 위한 노력이 필요함을 알 수 있도록 독려함.
• 티셔츠와 바지의 판매량에서 기준량을 100으로 할 때의 비교하는 양을 구하지 못함.	• 1에서 티셔츠와 바지의 기준량과 비교하는 양을 학생들이 명확하게 이해하고 있는지 확인함. 티셔츠는 기준량이 50, 바지는 기준량이 20이고, 이때 비교하는 양은 각각 40과 17임. • 그림으로 나타낸 것이 티셔츠와 바지의 처음 수량에 대한 판매량의 비율임을 이해한 후에 ‘만약 티셔츠가 100벌이 있다면……, 바지가 100벌이 있다면…….’의 문장에서 비교하는 양과 기준량 중 무엇이 변화되었는지를 학생들이 찾아보도록 독려함.

주변에서 비율이 사용되는 경우를 찾아 친구들과 이야기해 봅시다.

[그림 Ⅳ-98] 비율로서의 분수 지도

주. 출처 **수학 6-1 교사용 지도서** (249쪽) 교육과학기술부. 2019.

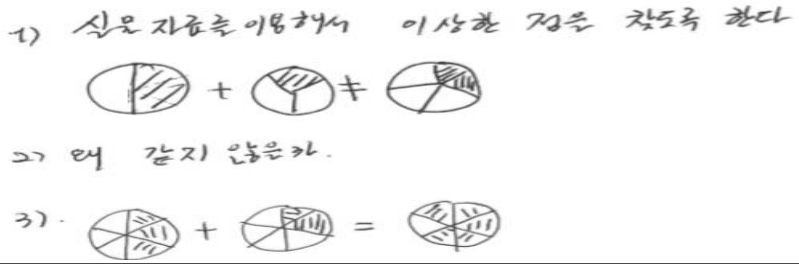
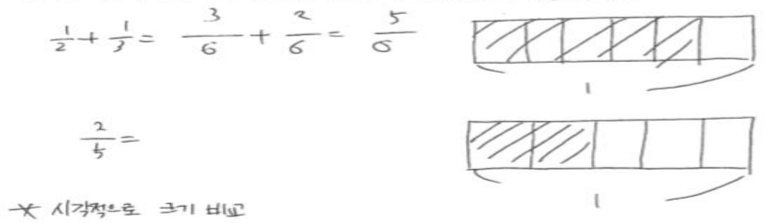
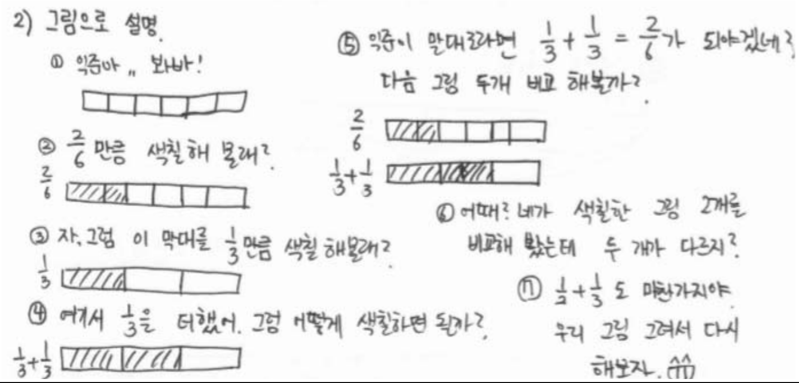
<표 Ⅳ-46> 교사들의 ②번 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

② 분수의 덧셈 시 전체 양이 고정됨을 설명	ⓐ 
	ⓑ 
	ⓒ 

<표 Ⅳ-46>에서는 익준이의 오개념 중 분수의 덧셈에 초점을 맞추고, 지도하는 교사들의 예시를 볼 수 있다. ⓐ번의 경우, 익준이의 경우를 그림으로 제시하며 분수의 덧셈 시 각 각의 전체 단위가 일치되어야함을 보여주고 있다. ⓑ와

ⓒ번의 경우, 타율과 분수의 덧셈은 다른 개념이며 분수의 덧셈에 비율로서의 분수를 예로 들어서는 안된다고 기술한다.

<표 Ⅳ-47> 교사들의 ③번 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

③ 안되는 상황 보여주며 지도	ⓐ	
	ⓑ	
	ⓒ	

<표 Ⅳ-47>에서는 익준이의 오개념 지도 시에 안되는 상황을 보여주며 지도하는 교사들의 예시를 볼 수 있다. 다음의 표에서는 익준이의 계산이 잘못되었음을 보여주는 상황을 시각적 모델을 통해 제시한다. 시각적 모델을 통해 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$의 합이 $\frac{2}{5}$와 다르다고 제시하며 익준이의 생각이 잘못되었음을 보여주는 지도 방법은 익준이의 인지적 불균형을 유발할 수는 있으나 오개념을 수정하기에

는 부족하다.

<표 Ⅳ-48> 교사들의 ④번 비율로서의 분수 관련 학생의 오개념 지도방법

<table>
<tr><td rowspan="2">④ 틀림</td><td>ⓐ</td><td>- 분수에서 「전체」의 개념을 지도한다.
* $\frac{1}{2}$은 전체 ①을 2개로 나눈것 중 1개를 나타내는데,
2타수 1안타는 전체 ② 중 1개 이므로 $\frac{1}{2}$이라고 나타낼 수 없다.
마찬가지로 $\frac{1}{3}$은 전체 ①을 3개로 나눈것 중 1개를 뜻하므로
3타수 1안타는 $\frac{1}{3}$이라고 나타낼 수 없다.</td></tr>
<tr><td>ⓑ</td><td>분모
분수의 덧셈을 할 때는, 단위를 통일하기 위해 통분하여 계산한다
① 2와 3의 곱
② 2와 3의 최소공배수 이용하여 분모를 통일한 뒤,
분자끼리 더한다.
그러나, 예외적으로 타율을 합할 때는
분자끼리, 분모끼리 더한다</td></tr>
</table>

<표 Ⅳ-48>에서는 익준이의 오개념을 잘못 지도한 예시를 볼 수 있다. ⓐ번의 경우, 비율로서의 분수의 의미 문제에서 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미로 살펴보며 전체-부분의 관계로서의 분수 의미를 통해 지도하고자 한다. 또한, 전체의 의미가 이산량일 때의 분수를 분수로 표현하고 있지 않다. 2타수 1안타 역시 $\frac{1}{2}$로 표현할 수 있으나 $\frac{1}{2}$로 나타낼 수 없다고 제시한다. 한편, 익준이는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$이 되는 예시로 비율로서의 분수를 사용하고 있다. ⓑ번의 경우, 예외적으로 타율을 합할 때는 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 더한다고 말하며 이러한 익준이의 오개념을 수정하고 있지 않다. 타율을 구할 때 전체 타수에 대한 안타수를 표현하며 어제 오늘의 타수의 합에 대한 어제 오늘의 안타수의

합이라고 기준량과 비교하는 양에 대해 명확하게 설명했을 때 학생들의 혼란을 줄일 수 있을 것이다.

마. 7번. 분수의 의미 지도 순서와 이유

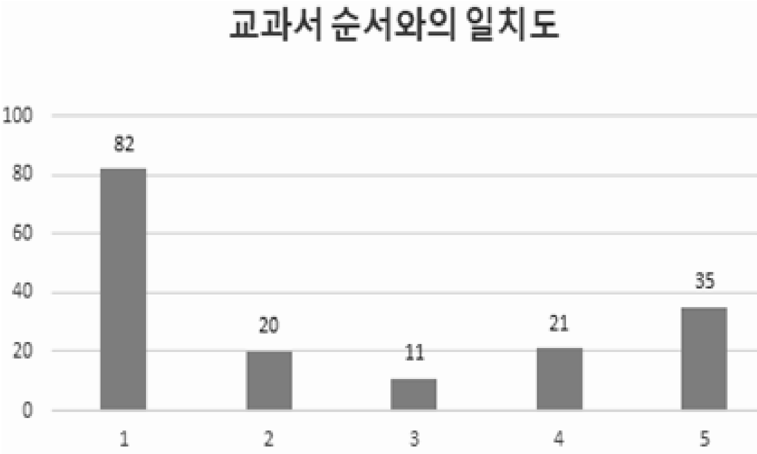
아래의 표는 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 순서와 교과서 순서와의 일치도를 비교한 표이다. 교사들이 생각하는 분수의 의미 순서를 살펴본 후 순서가 일치하면 1, 일치하지 않으면 0으로 표시하였다. 예를 들어, ‘전체-부분의 관계로서의 분수→측정으로서의 분수→몫으로서의 분수→연산자로서의 분수→비율로서의 분수’로 기술되어 있다면 ‘1→1→0→0→1’로 표시한다. ‘전체-부분의 관계로서의 분수→몫으로서의 분수→비율로서의 분수’로 기술되어 있다면 ‘1→0→0→1→1’로 표시한다.

<표 Ⅳ-49> 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 순서

전체-부분으로서의 분수 (3-1) - 82	측정으로서의 분수 (3-2) - 20	연산자로서의 분수 (5-2) - 11	몫으로서의 분수 (6-1) - 21	비율로서의 분수 (6-1) - 35
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0

1	0	0	1	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	0

1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0



[그림 Ⅳ-99] 교사들의 분수 의미 지도순서와 교과서 순서와의 일치도

이 문항의 목적은 교과서 속 분수의 진도와 교사들이 생각하는 분수의 개념 또는 의미의 진도 사이의 일치도를 보고자하였다. 대부분의 교사들이 교육과정의 분수 도입처럼 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수를 도입해야한다고 생각하고 있다. 그러나 전체-부분의 관계로서의 분수 외에 교사들이 생각하는 측정, 연산자, 몫, 비율로서의 분수의 순서와 교과서 순서와의 일치도는 현저히 낮았다. <표 Ⅳ-11>은 앞서 교과서 분석 때 살펴보았던 표이다. 단원별 분수의 의미가 다양하게 나오고는 있지만 현 교육과정 속 전체-부분의 관계로서의 분수 중심의 분수 의미 쏠림의 영향 때문인지 아니면 교사들이 전체-부분의 관계로서의 분수를 다른 분수의 의미보다 가장 기본적인 분수의 개념으로 생각하는지는 추가적인 연구가 필요할 것이다. <표 Ⅳ-50>의 ①번과 같이 전체-부분의 관계로서의 분수가 먼저가 아닌 측정으로서의 분수를 통해 분수를 도입해야한다는 교사들도 있었다. 또한, 대부분의 교사들이 ⑧번처럼 몫으로서의 분수보다 연산자로서의 분수를 후속학습으로 배워야한다고 서술했다. 이는 연산자로서의 분수의 의미가 학생과 교사들에게 익숙하지 않은 개념이며 교과서와 지도서에서도 자세히 서술하고 있지 않기 때문에 학생과 교사에게 모두 추상적인 개념으로 여겨지는 모습이다. 따라서, 교사들의 연산자로서의 분수의 의미에 대한 깊은 이해를 위한 지도서 속 구체적인 설명이 필요할 것이다.

〈표 Ⅳ-11〉 단원별 분수의 의미

	전체-부분의 관계	측정	연산자	몫	비율
3-1.6. 분수와 소수	●	○		○	
3-2.4. 분수	●	○	○		
4-2.1. 분수의 덧셈과 뺄셈	○	●			
5-1.4. 약분과 통분	●	○			
5-1.5. 분수의 덧셈과 뺄셈	●	●			
5-2.2. 분수의 곱셈	○	●	●		
6-1.1. 분수의 나눗셈	○	○	○	●	
6-1.4. 비와 비율					●
6-2.1. 분수의 나눗셈	○	○	○	●	

다음의 표는 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 순서의 예시이다. ②번과 같이 많은 선생님들이 ‘전체-부분의 관계로서의 분수→몫으로서의 분수→비율로서의 분수’ 순으로 지도해야한다고 말했다. 전체-부분의 관계로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수와 같이 분수의 의미가 명확한 분수와 달리 측정으로서의 분수와 연산자로서의 분수는 분수의 사칙연산 및 문제 해결에 필요한 도구적인 분수로 살펴볼 수 있다. 이에 따라 교사들이 이들을 분수의 의미로는 생각하지 않았는지에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

<표 Ⅳ-50> 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 순서 예

① 측정 → 전체-부분 → 몫 → 비율 → 연산자	측정 → 전체-부분의 관계 → 몫 → 비율 → 연산자 실생활에서 볼 수 있음 익숙한 분수의 의미를 알아보는 시간 나눗셈에서 ~에 대한 기준량 의미 도입하며 몫의 분수로 나타냈으면 하는 실생활에서 비율 문제를 공부하며 익숙해지면 분수를 자유 자재로 다룸
② 전체-부분 → 몫 → 비	전체·부분 → 몫 → 비 가장 처음 분수를 접하기에 전체·부분으로서의 분수가 적합하다. 시각적 표현이 가능하며 직관적 판단이 가능하기 때문이다. 또한 몫으로서의 분수는 몫의 의미를 파악해야 분수의 의미를 알 수 있다. 나눗셈을 접한 학년에서 가능하며 전체 단위가 1이 아니기 때문에 좀더 고차원적인 사고를 요구한다. 비율로서의 분수는 상대적인 개념을 요구하므로 이 두 분수보다 후에 배움이 바람직하다.

③ 전체-부분 → 몫 → 측정 → 비율 → 연산자	1m보다 작은 부분표현 단위 ① 전체-부분의 관계로서의 분수 (전체 여러개) : 구체물을 사용하여 전체 중에 몇개를 시각적으로 알 필요가 있음 ② 몫: 전체 1개를 여러 명이 나눠가지는 상황, 분수의 다양한 상황 제시 ③ 측정 분수의 : 수직선을 이용하여 구체물에서 시각적 사고로 시각화 ④ 비율 ⑤ 연산자
④ 전체-부분 → 몫 → 측정 → 연산자 → 비율	분수 ① 전체-부분의 관계로서의 분수 — 실생활과 가장 밀접 ② 몫으로서의 분수 ← 나눗셈학습후 ③ 측정으로서의 분수 ④ 연산자 의미의 분수 ⑤ 비로서의 분수. 분수의 기본 개념을 알고 측정 및 사칙연산 부분의 능숙한 학습후 아래순서로 차차 확장해 나간다
⑤ 전체-부분 → 측정 → 몫 → 비율 → 연산자	① 전체 -부분의 의미 (학생들이 이해하기가 가장 쉬운 것 같음) ② 측정의 의미 (측정의 의미로 가분수와 대분수 개념 지도) ③ 몫의 의미 ④ 비율의 의미 ⑤ 연산자의 의미
⑥ 전체-부분 → 몫 → 비율 → 측정	1. 개념 영역모델 - 길이모델 - 전체-부분의 관계 순으로 지도한다. 영역모델이 그림을 통해 직관적으로 이해하기 쉽고 길이모델도 영역모델에서 나아가 직관적으로 이해하기 쉬워서이다. 전체 -부분의 관계는 n개를 1로 보고 ⇒분모 / m개를 분자로 보는 ⇒분자 n $\frac{m}{n}$ 으로 지도 2. 몫의 의미 3. 비율의 의미 4. 측정의 의미

⑦ 전체-부분 → 몫 → 연산자 → 비율	① 전체에 대한 부분으로의 분수 지도하기 => 분수 개념 이해 ↓ ② 나눗셈의 몫으로서 분수 지도하기 => (자연수) ÷ (자연수) = (분수) ↓ ③ 자연수의 얼마만큼의 양인지의 분수 지도하기 => (자연수) X (분수) ↓ ④ 기준값에 대한 비교하는 양으로의 분수 지도하기 => 비의 성질, 1:1대응식 지도 교육과정 구성 체계와 유사하게 지도되는 것 같음.
⑧ 전체-부분 → 몫 → 비율 → 측정 → 연산자	① 전체-부분 ② 몫 ③ 비율 ④ 측정 ⑤ 연산자 이해하기 수월하다고 생각함 (그림만으로도)
⑨ 전체-부분 → 측정 → 몫 → 연산자 → 비율	① 전체 - 부분 처음 접할 때 그림으로 설명하기 쉬워서 ② 측정 ③ 몫 ④ 연산자 ⑤ 비율 수학 교육과정 내용을 봤을 때, 이 순서가 맞는 것 같아서...?
⑩ 전체-부분 → 몫 → 연산자 → 비율	① 전체 부분 : 표현을 익혀야 함? (분모 분자로 표현) ↓ ② 몫 : 나눗셈 결과 나누어 떨어지지 않을 때 이용. ↓ ③ 연산 : 위와 같은 경우 연산에 사용될 수. (어떠한 (분수를 표현해서 사용) ↓ ④ 비(비율) : 기준과 비교하는 것에 대해 익혀야 함 (개념)

바. 9번. 분수의 다양한 의미 지도의 필요성

설문에 응답한 100명의 교사 중 81명의 교사들은 분수의 다양한 의미 지도가 필요하다고 말하였다.

<표 Ⅳ-51> 분수의 다양한 의미 지도의 필요여부

① 필요함	② 필요하지 않음	③ 모르겠음
81	14	5

교사들이 인지하고 있는 분수의 의미 개수에 따라 구분한 각 각의 표본 집단에서의 다양한 분수의 의미 지도 필요 여부는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-52> 분수의 개수에 따라 구분한 표본 집단에서의 필요여부

	1개	2개	3개	4개	5개
필요함	30 (76.9%)	17 (81%)	13 (72.2%)	12 (92.3%)	10 (100%)
필요하지 않음	9 (23.1%)	4 (19%)	5 (27.8%)	1 (7.7%)	0 (0%)
필요/전체	30/39	17/21	13/18	12/13	10/10

2개의 의미를 기술한 교사들 중 81%, 21명 중 17명의 교사들이 다양한 분수의 의미가 필요하다고 하였다. 3개의 의미를 기술한 교사들 중 72.2%, 18명 중 13명의 교사들이 다양한 분수의 의미가 필요하다고 하였다. 4개의 의미를 기술한 교사들 중 92.3%, 13명 중 12명의 교사들이 다양한 분수의 의미가 필요하다고 하였다. 흥미로웠던 점은 1개의 의미와 5개의 의미를 기술한 집단의 결과였다. 1개의 의미, 즉 전체-부분의 관계로서의 분수를 기술한 교사들 중 76.1%, 39명 중 30명의 교사들이 다양한 분수의 의미가 필요하다고 하였다. 1개 의미 집단은 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미를 중심으로 분수의 의미를 기술했기 때문

에 학생들에게 전체-부분의 관계로서의 분수 외에 다양한 분수의 의미가 필요하다고 서술했다는 것이 의미가 있었다. 5개의 의미를 기술한 10명 중 10명 모두 분수의 다양한 의미를 모두 지도해야한다고 강조했다. 즉, 대부분의 교사들은 분수의 다양한 의미를 학생들에게 지도해야한다고 생각한다.

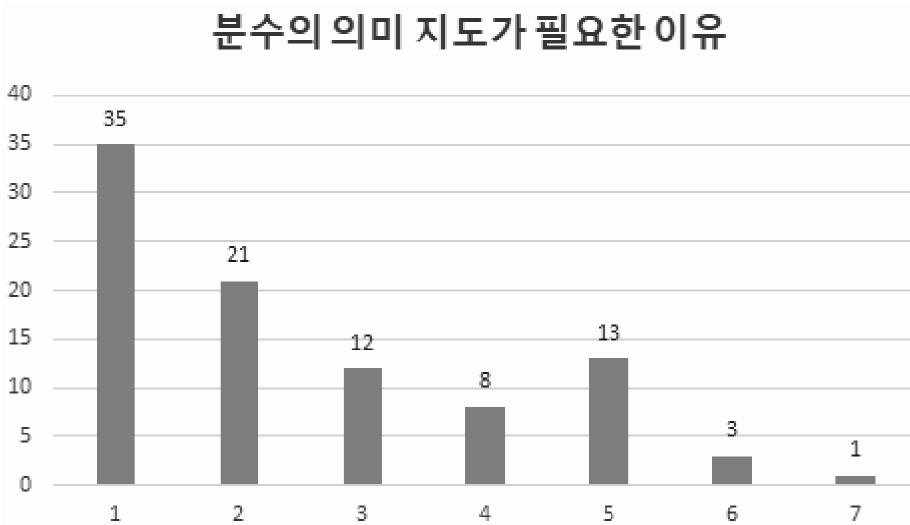
교사들은 다양한 분수의 의미 지도가 필요한 이유를 다음과 같이 기술하였다. 크게 7가지로 분류했다; 실생활에서의 유용성, 수학적 사고, 오개념 수정, 후속 학습을 위함, 분수감각, 교사의 지식 부족, 학습의 흥미도. 다음의 표에 7가지 항목의 세세한 교사들의 이유도 함께 제시하였다.

〈표 Ⅳ-53〉 다양한 분수의 의미 지도가 필요한 이유

① 실생활에서의 유용성	다양한 상황에서 적용, 분수의 필요성, 표현은 분수의 형식이라도 분수의 의미는 매우 다름, 실생활에 다양하게 쓰임, 현실에서 분수의 다양한 의미가 쓰이므로 학생들이 분수의 개념을 익힌다면 이해하는데 훨씬 수월할 거 같음.
② 수학적 사고 (문제해결력, 논리적 사고력 등)	다양한 분수의 의미를 알아야 어떤 문장제 상황이 있더라도 분수 문제임을 쉽게 알 수 있음, 분수의 사칙연산의 학습을 마치고 대다수의 학생들이 문제의 답을 구할 수는 있지만 정확히 그 원리까지 이해하는 경우는 많지 않음, 수학적 논리를 정리할 수 있음, 다양한 문제 상황을 통한 수학적 문제 해결력 신장, 수학적 상황에 대해 여러 가지 방법으로 접근하는 능력 신장, 학생들의 이해와 사고의 범위를 넓힘, 분수의 개념을 지도하지 않는다면, 분수의 연산할 때 단순히 계산만하는 형식적 사고만 발달할 것임, 문제 풀이가 더 쉽고 의미를 이해하는데 도움, 초등수학에서는 단순 계산만이 목적이 아니라 수학을 통해 논리적, 추론적 사고하는 방법까지 배움, 다양한 분수의 의미를 알아야 실생활 문제에 적용하여 해결하며, 그 과정을 통해 논리적, 추론적 사고를 기름. 도구적 이해가 아닌 관계적이해를 위함.
③ 오개념 수정	분수를 기계적으로 대함. 학생들이 분수 문제 풀이 시 단위를 고려하지 않고 수 적으로만 접근할 때 문제 풀이에 오류가 생기는 사례가 많음, 양의 등분할로서 기본적인 분수 개념은 동일하지만, 분수의 의미가 다를 때 이질적인 것으로 혼란 느낄 수 있음. 교과서에서 제시되는 분수의 다양한 의미를 알아야 헷갈리지 않을 것 같음,

④ 후속 학습을 위함	전체-부분의 관계로서의 분수로만 생각하여 가분수와 대분수 개념 및 비의 개념을 이해하는데 어려움이 있음, 고학년에는 분수의 의미를 알아야 해결할 수 있는 문제가 나옴,
⑤ 분수감각	단위에 대한 유연함, 다양한 수 표현, 1보다 작은 수 표현, 분수 개념 이해, 분수는 절대적인 크기가 아니라 상대적인 크기이므로 여러 가지 다른 방식으로 지도해야함,
⑥ 교사의 지식 부족	분수의 의미에 대해 정확히 모르겠음.
⑦ 학습의 흥미도	

[그림 Ⅳ-100]에서는 각 항목 별 분수의 의미 지도가 필요한 이유를 기술한 교사의 수를 볼 수 있다. 다양한 분수의 의미 지도는 실생활에서의 유용성과 관련하여 필요하다 기술한 교사는 35명으로 가장 많았다. 또한, 수학적 사고를 위해 분수의 다양한 의미 지도가 필요하다고 한 교사는 21명이다.



[그림 Ⅳ-100] 분수의 의미 지도가 필요한 이유

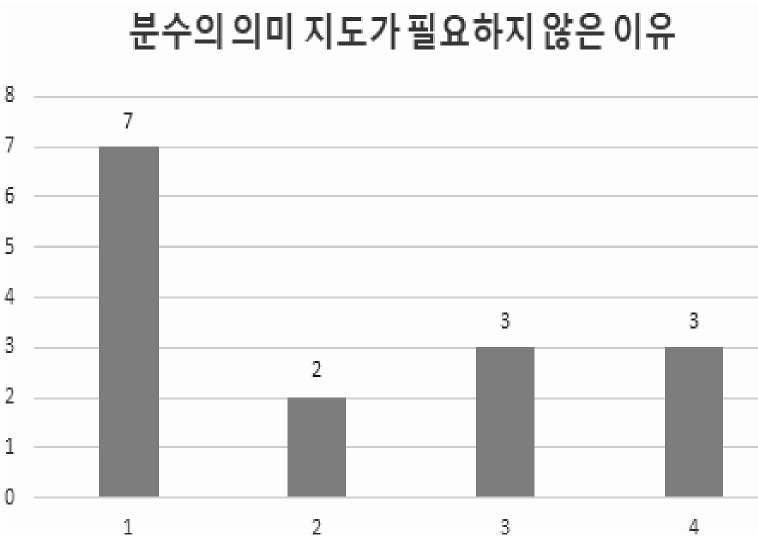
분수의 다양한 분수의 의미 지도가 필요하지 않다고 한 교사들은 다양한 분수의 의미 지도가 필요하지 않은 이유를 다음과 같이 기술하였다. 크게 4가지로

분류했다; 혼란 야기, 추상적인 개념, 유용하지 않음, 분수의 기본적인 개념. 다음의 표에 4가지 항목의 세세한 교사들의 이유도 함께 제시하였다.

〈표 Ⅳ-54〉 다양한 분수의 의미 지도가 필요하지 않은 이유

① 혼란 야기	분수에 대한 기본적인 이해를 할 시기에 다양한 의미까지 지도한다면 헷갈려함, 수학 포기
② 추상적인 개념	분수도 하나의 수
③ 유용하지 않음	분수의 다양한 의미를 지도하는 것의 필요성을 모르겠음,
④ 분수의 기본적인 개념	다양한 상황 속에서 분수란 이런 것이다 자연스럽게 체득하도록 하는 것만 하면 된다고 생각함. 더 필요하다면 고등수학에서 가르치면 됨.

[그림 Ⅳ-101]에서는 각 항목 별 분수의 의미 지도가 필요하지 않은 이유를 기술한 교사의 수를 볼 수 있다. 다양한 분수의 의미 지도는 학생들의 혼란을 야기할 수 있으므로 걱정스럽다 한 교사는 7명으로, 항목 중 수치가 가장 컸다.



[그림 Ⅳ-101] 분수의 의미 지도가 필요하지 않은 이유

사. 10번. 분수의 의미 지도 시 어려움.

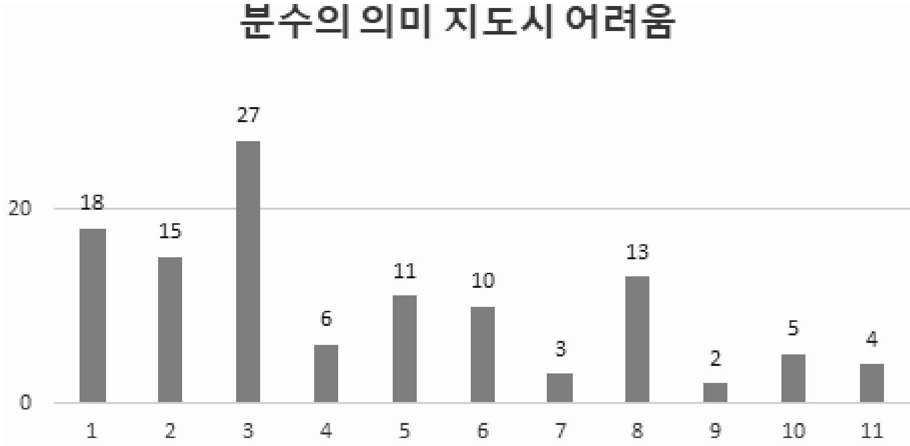
아래의 표에서는 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 시 어려움에 대해 기술하였으며 크게 11가지로 구분하였다; 의미 구분의 어려움, 분수의 추상적인 개념, 분수 설명 자료 부족. 다양한 문제 상황 어려워함, 학생의 도구적 이해, 전시학습의 영향, 시간 부족, 교사의 지식 부족, 분수의 언어감각, 학생들의 수준 차이, 수학적 사고. <표 Ⅳ-55>에 11가지 항목의 세세한 교사들의 이유도 함께 제시하였다. 많은 교사들이 분수 설명 자료가 부족하여 분수의 의미 지도가 어렵다고 하였다. 교사들이 요구하는 분수 설명 자료에는 실생활에서의 다양한 분수 예시, 지도서 속 다양한 분수의 의미 지도방법 등이 있다. 또한, 학년마다 분절적인 분수의 의미 지도를 어떻게 지도해야할지 어렵다고 하였다.

<표 Ⅳ-55> 분수 의미 지도 시 어려운 이유

① 의미 구분의 어려움	생활 속에서 의미 구분을 어려워함, 다양한 의미가 있기 때문에 헷갈려하고 어려워함, 학생 개개인이 이해하는 분수의 의미가 각각 다름, 분수의 다양한 맥락을 이해못함, 실생활에서 거의 쓰이지 않는 의미들은 교사와 학생들에게 와닿지 않음(연산자와 측정으로서의 분수), 형식이 하나이기 때문에 다양한 의미를 지도하더라도 학생들이 직접적으로 판별하는데 어려움, 오개념이 많음
② 분수의 추상적인 개념	구체물없이 지도시 어려움, 분수의 연산 시 전체 단위를 같아야하는데 직관적으로 이해하기 어려움, 분수의 원리를 이해시키는데 어려움, 학생들이 분수의 개념을 명확히 모름,
③ 분수 설명 자료 부족	실생활에서의 다양한 분수의 사용 예시 자료 필요, 다양한 분수 개념 설명 자료 부족, 분수의 다양한 개념이 교과서에서 강조되지 않으며 분절적으로 단원 배치됨, 분수 연산 학습 시에도 분수 연산의 의미를 강조하기 보다는 연산 방법에 치중하는 경향이 있음, 분수의 다양한 의미를 시각적으로 보여주기 어려움, 전달하는 것에 어려움이 있어 직관적인 모델이 개발되길 바람, 초등학생들이 이해하기 쉬운 지도방법을 잘 모르겠음, 구체물 조작을 통한 지도가 필요함, 다양한 의미로 적용되는 분수의 다양한 사례를 접하는 경우가 적어 계열성 있게 분수 지도가 되지 않는 것 같음. 교과서와 지도서에도 분수 개념의 다양한 의미를 교사들이 잘 지도할 수 있도록 정확한 안내와 지도방법이 제시되지 않음, 교과서에서 제시하는대로 함, 다양한 의미에 맞는 다양한 사례를

	적용하기가 쉽지 않음, 학년마다 주로 적용되는 분수의 의미가 다르므로 개연성있게 지도하기가 어려움, 교과서에서는 5가지 의미를 골고루 다루지 않고 특정 의미에만 치중됨, 학년 수학의 연계성 부족, 분수가 나오는 단원 앞에 앞서 배웠던 분수의 의미와 내용 정리가 필요함, 분수를 연산과정에서 쓰이는 '수'의 개념으로만 대부분 집중되어 있으며 실생활과 연결시키는데도 어려움이 있어 지도가 어려움, 분수의 다양한 의미를 어떤 방법으로 학생들에게 지도해야하는지 모르겠음,
④ 다양한 문제 상황 어려워함	문장 상황 속에서 분수를 읽어내는 능력 부족
⑤ 학생의 도구적 이해	쉽게 푸는 방법을 익힌 학생은 분수의 개념을 가르치려 하면 어렵게 가르친다고 생각함.
⑥ 전시 학습의 영향	자연수의 영향, 수학의 기본 개념(사칙 연산, 측정 단위, 비와 비율 등)을 확실히 이해하지 못한 경우 혼란이 있음, 기준량과 비교하는 양은 서로 상대적인 관계지만 이제까지 학생들이 절대적인 관계로서의 수에 대해서 접하였기 때문에 분수의 의미에 혼돈이 올 수 있음, 전체를 1로 본다는 개념, 분수 개념이 단계별로 교과서에 제시되는데 선수학습이 안되면 다음 학습을 이해하기 힘들어짐.
⑦ 시간 부족	분수의 의미를 증명하고, 이해시키고, 확인하기까지 많은 시간이 필요
⑧ 교사의 지식 부족	분수의 의미에 대해 정확히 모르겠음. 교사들의 교재 연구 부족, 사례나 그림을 통해 분수의 개념의 다른 점을 알려줄 수는 있지만 전체-부분의 관계로서의 분수에서 다양한 개념으로 확장하는데 어려움이 있음, 교사도 학생들의 발달 단계에 따른 적절한 분수의 적용 시기를 찾기 어려움, 실질적으로 교사가 이해하고 있는 정도가 달라 혼란이 가중됨, 교사가 아는 것과 가르치는 것은 다르기 때문에 학생들이 이해하기 쉽게 접근하는 방법을 생각하는 것이 어려움,
⑨ 분수의 언어 감각	분수의 의미를 나타내는 말이 어려움
⑩ 학생들의 수준 차이	같은 학년이라도 학생 개인별 수준 차이로 인해서 분수 개념의 다양한 의미를 지도하는데 어려움, 학생의 경험 정도에 따라 받아들이는게 다름, 전체-부분의 관계의 의미도 이해 못하는 학생들이 많아 이런 친구들에게는 확실한 하나의 개념 정립을 시킴,
⑪ 수학적 사고	상황에 따라 전체를 설정하는데 어려움을 느끼며 그 결과를 처리함에 있어 단위를 혼동함, 가분수로 확대될 때 어려워함, 기본 단위가 되는 전체를 파악하지 못함,

[그림 Ⅳ-102]에서는 각 항목 별 분수의 의미 지도 시 어려움을 기술한 교사의 수를 볼 수 있다. 흥미로웠던 점은 27명의 교사들이 분수 설명 자료가 부족하여 분수의 의미 지도가 어렵다고 하였다.



[그림 Ⅳ-102] 분수의 의미 지도 시 어려움

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 결론

이 연구는 교과서 속 분수의 5가지 의미를 분석하여 분수 개념의 여러 가지 의미가 교과서 속에서 어떻게 다루어지고 있는지를 연구해보고, 현 초등학교 교사들의 분수의 의미에 대한 교사 지식은 어떠한지 SMK와 PCK를 중심으로 분석하였다. 본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

연구문제 1과 관련하여 초등학교 교과서 속 분수의 의미가 어떻게 다루어지고 있는지에 대한 연구 결과는 다음과 같다.

교과서 분석 결과 현 교육과정에서 분수의 5가지 의미를 모두 다루는 모습을 보이고 있으나, 분수의 의미를 설명함에 있어 2가지 의미인 전체-부분의 관계로서의 분수와 측정으로서의 분수 중심으로 설명하는 모습을 볼 수 있었다. 전체-부분의 관계로서의 분수로 분수를 도입하고 설명하지만 3학년 이후로 갈수록 단위분수를 많이 이용하며 측정으로서의 분수를 주로 이용하고 있다. 이는 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수의 중요성이 높다고 여겨진다고 볼 수 있다. 그러나 측정으로서의 분수의 의미를 통해 분수의 크기 비교 및 분수의 연산을 설명함에도 지도서에는 측정으로서의 분수의 의미를 구체적으로 설명하고 있지 않다. 이지영·방정숙은 우리나라 교과서에서는 측정으로서의 분수 자체를 학습하는 내용이 거의 없다고 말한다(2014).

연산자로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수는 상대적으로 적게 다뤄지고 있다. 한국의 교육과정에서 분수는 전체-부분의 관계로서의 분수 중심으로 분수의 개념을 도입하며 나머지 분수들 해석, 분수의 연산 및 문제 해결에 있어서 전체-부분의 관계로서의 분수를 기반으로 한다. 물론 다른 의미의 분수들도 나오지만 구체적인 설명이 없다. Charalambous와 Pitta-Pantazi는 분수의 부분-전체의 의미는 필수적으로 여겨지나 분수의 나머지 개념들의 이해를 발전시키기 위한 충분한 상태가 아니므로 다섯 개의 분수의 의미 해석을 마스터하

는 것이 분수 연산의 능숙함을 획득하는데 기여한다고 말하였다(2005). 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미는 필수적이나 나머지 분수를 이해하기 위해서는 충분하지 않으며, 다섯 개의 분수의 의미를 정확하게 이해하지 못할 경우 분수의 연산 및 후속 학습에 있어서 어려움을 느낄 수 밖에 없을 것이다. 따라서, 전체-부분의 관계로서의 분수뿐만 아니라 다른 분수의 의미에 관해 깊은 이해가 필요할 것이다.

연구문제 2와 관련하여 초등학교 교사들의 분수의 의미에 대한 SMK와 PCK 연구 결과는 다음과 같다. 우선, 분수의 의미에 대한 교사들의 SMK를 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 분수의 다양한 의미에 관한 교사의 SMK는 교사 모두 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수의 의미를 표현하는 것이다. 100명의 교사들은 모두 전체-부분의 관계로서의 분수로 분수의 의미를 표현하고, 다음으로 몫으로서의 분수, 측정으로서의 분수, 비율로서의 분수, 연산자로서의 분수 순으로 분수의 의미를 이해하고 나타내고 있다. 전체-부분의 관계로서의 분수를 제외하고는 모두 50명 이하의 교사들이 각 각의 분수의 의미를 서술하는 모습은 교육과정 속 분수개념에서 가장 기초적이고 핵심적인 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미 이해에 비해 상대적으로 몫, 측정, 비, 연산자로서의 의미에 대한 깊은 이해가 적고 교사들의 분수의 의미에 대한 이해는 전체-부분의 관계로서의 분수의 의미에 한정적인 것으로 바라볼 수 있다. 이는 지도서의 분수의 의미에 관한 기술과 연관 지어 생각해볼 수 있다. 3학년 1학기 지도서에서 분수 개념의 발생(그림 Ⅳ-1)과 분수의 의미(그림 Ⅳ-2)를 짧게 제시한 모습, 5학년 2학기 지도서에서 연산자로서의 분수라는 단어가 제시된 모습, 6학년 1학기 지도서에서 몫으로서의 분수에 관한 짧은 설명, 6학년 1학기 지도서에서 비율이 나오나 비율로서의 분수와 관련하여 설명하고 있지 않은 모습을 볼 수 있었다. 교과서 속 분수 개념이 전체-부분의 관계로서의 분수로 도입되고 있으나 분수에 대한 교사의 개념이 전체-부분의 관계로서의 분수에만 국한된다면 교사의 분수 개념에 대한 SMK와 PCK도 제한될 수 밖에 없을 것이다.

둘째, 전체-부분의 관계로서의 분수의 시각적인 모델에 관한 교사의 SMK는 이산량을 표현하는 이산량 모델보다는 연속량을 표현하는 영역모델, 길이모델과

같은 연속모델을 주로 이용하여 표현하는 모습을 보였다. 이산량의 분수를 등분할하여 집합모델을 통해 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 설명하기도 하였다. 이는 교사가 분수를 시각적인 모델로 표현함에 있어 분수 지도모델이 지도서의 기반으로 이루어졌다고 볼 수 있다. 또한, 연산자로서의 분수의 의미와 관련이 깊은 이산량 모델이 익숙하지 않으며 이는 3-2 지도서에서 이산량의 분수를 표현할 때 전체-부분의 관계로서의 분수로 설명함과 연관 지어 생각할 수 있다.

셋째, 몫으로서의 분수의 의미에 관한 교사의 SMK는 등분제 상황에 국한되어 있었다. 이는 3학년 1학기 똑같이 나누어주는 등분할의 상황에서 분수를 도입하고 6학년 1학기에 배우는 몫으로서의 분수의 의미와 관련이 있다. 피자 또는 사과 등 음식을 똑같이 나누어 먹는 상황을 통해 교사들은 몫으로서의 분수를 표현한다. 6학년 1학기의 몫으로서의 분수 개념 중 6차시 중 5차시는 등분제 상황이고 1차시 '대분수는 자연수의 몇 배인지 구하기'활동만이 포함제 상황으로 살펴볼 수 있다. 6학년 2학기 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 분수인 경우 포함제 상황을 주로 다루고, 등분제 상황은 등분제의 의미를 확장하거나 단위 비율 결정 상황으로 구분 짓는다. 이에 따라 전체-부분의 관계로서의 분수 다음으로 많은 수의 교사들이 몫으로서의 분수의 의미를 통해 분수를 설명하나 등분제 상황에 제한되어 있다.

넷째, 연산자로서의 분수의 의미에 관한 교사의 SMK는 분수의 5가지 의미 중 가장 적었다. 소수의 교사들만이 연산자로서의 분수의 의미를 기술했으며 그 중에 4명의 교사가 모델 또는 그림을 통해 $\frac{3}{4}$을 연산자로서의 분수로 표현하였다. 이는 연산자로서의 분수의 의미가 교사들에게 익숙하지 않은 개념이라고 볼 수 있다. 3-1 지도서에서는 연산자로서의 분수의 의미를 $\frac{a}{b}$만큼 확대하거나 축소하는 것으로 연속량과 이산량의 분수만큼을 나타내는 것이 이에 해당한다고 말한다(293쪽). 그러나 지도서에 이 문장과 5학년 2학기 2단원 분수의 곱셈의 4차시(지도서 176쪽)에 (자연수)x(단위분수)와 (자연수)x(진분수)를 분수의 연산자적 의미를 이해하도록 한다는 문장 말고는 분수의 연산자적 의미를 설명하는 부분은 없다. 즉, 교사들이 수학수업에 있어 가장 많이 참고하는 지도서에 연산

자로서의 분수를 짧게 설명하여 교사의 이해를 돕지 못하고 있다고 생각할 수 있는 것이다. 3학년 2학기 이산량과 연속량의 분수만큼은 분명 연산자로서의 분수임에도 불구하고 전체-부분의 관계로서의 분수로 해석하고 있다. 물론, 학년 특성을 고려하여 연산자로서의 분수의 의미를 이해하기 어려워 3학년 2학기에 전체-부분의 관계로서의 분수로만 해석할 수 있으나 5학년 2학기 분수의 곱셈에서 분수의 연산자적 의미를 이용하므로 5학년 2학기 지도서에 교사들의 분수의 연산자적 의미를 이해를 돕는 구체적인 설명이 필요할 것이다.

다섯째, 전체-부분의 관계로서의 분수에서 중요한 전체의 단위를 어떻게 설정하는지 교사의 분수감각을 살펴보았을 때, 대부분의 교사들이 전체의 단위를 다양하고 유연하게 이용하고 있지 않다고 볼 수 있었다. 교사들은 1개의 단위로 표현하였으며 많은 교사들이 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 묶음 그 자체를 전체로 바라보며 각 각의 동그라미로 8등분할하여 그 중의 몇 부분으로 표현하는 것을 편하게 받아들이고 있다는 사실을 알게 되었다. 가능한 단위의 개수가 최대인 4개 모두 기술한 교사는 단 2명이었다는 사실을 알 수 있었다.

여섯째, 교사들이 주어진 막대의 길이를 통해 새로운 길이의 막대를 구할 때의 해결방법을 분석하며 교사들의 SMK를 살펴보니, 분할-반복 조작보다 통분 방법을 통해 문제를 해결함을 볼 수 있었다. 통분과 식의 방법을 사용한 교사들은 형식적인 알고르즘을 이용했다고 볼 수 있으며 이에 비해 통분과 식의 방법이 아닌 분할-반복 조작을 통해 막대의 길이를 구한 교사들은 분수를 형식적으로 바라보지 않고 유연하게 받아들이고 있음을 알 수 있다. 의외로 주어진 길이의 막대를 이용하여 새로운 길이의 막대를 표현하지 못하는 경우도 있었다.

분수의 의미에 대한 교사들의 PCK를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 대부분의 교사들은 측정으로서의 분수의 중요한 개념인 기본 단위 설정에 있어 효과적인 지도 방법을 제시하고 있다. 이들은 1m의 기준 단위를 설정하여 학생들에게 수직선상의 분수를 지도하고 있었다. 그 후 측정으로서의 분수 관점에서 단위분수를 찾거나 전체-부분의 관계로서의 분수 관점에서 똑같이 나눈 것 중의 얼마만큼을 표현하고 있다. <표 Ⅳ-12>와 같이 측정으로서의 분수의 의미를 기술한 교사는 41명이었지만 이보다 많은 교사들이 내재적으로 측정

으로서의 분수의 중요한 개념인 기본 단위 설정을 인지하고 있고 이를 통해 측정으로서의 분수에 관한 효과적인 PCK를 가지고 있음을 알 수 있다.

둘째, 연산자로서의 분수에 관한 교사들의 PCK는 정확하지 않은 모습을 보이고 있었다. 연산자로서의 분수의 의미와 관련된 문제에서 정확한 연산자로서의 분수로 설명하는 교사는 적었으며, 정확하지 않지만 연산자로서의 분수로 설명하는 경우에는 전체-부분의 관계로서의 분수로 회귀하는 모습을 보이고 있었다. 연산자로서의 분수에서의 핵심은 처음의 원래 모델 또는 수가 분수로 인하여 확대 또는 축소되는 것이다. 연산자로서의 분수의 의미에서는 전체의 크기가 축소/확대가 되며 그 과정을 연산자로서 분수를 사용한다. 따라서, 전체를 나누지 않고 축소/확대하는 모습을 보여야 한다. 그러나 대다수의 경우 전체를 나누고, 각 단계에서 나눌 때 역시 원래의 전체를 모두 등분할하는 모습을 보인다. 또한, 지도서에서도 연산자로서의 분수를 전체-부분의 관계로서의 분수 측면으로 설명하고 있다. 6학년 1학기 지도서를 살펴보면 교과서의 시각적 모델을 연산자로서의 분수의 시각적 모델과 전체-부분으로서의 시각적 모델과 설명을 혼합하여 설명하는 모습을 보이고 있다. 학생들의 이해를 위해 전체-부분의 관계로서의 분수 방법을 사용할 수는 있지만 연산자로서의 분수로 살펴봐야 할 문제조차 모두 전체-부분의 관계로서의 분수로만 해석하는 것은 교사의 분수에 대한 사고를 확장시키지 못할 수 있으며 이는 교사의 PCK에 영향을 주어 학생 역시 분수에 대한 사고를 확장시키지 못할 수 있다.

셋째, 교과서 속 분수의 진도와 교사들이 생각하는 분수의 개념 또는 의미의 진도 사이의 일치도를 살펴보니 대부분의 교사들이 교육과정의 분수 도입처럼 전체-부분의 관계로서의 분수를 통해 분수를 도입해야한다고 생각하고 있었으며 전체-부분의 관계로서의 분수 외에 교사들이 생각하는 측정, 연산자, 몫, 비율로서의 분수의 순서와 교과서 순서와의 일치도는 현저히 낮았다. 전체-부분의 관계로서의 분수가 먼저가 아닌 측정으로서의 분수를 통해 분수를 도입해야 한다는 교사들도 있었으며 대부분의 교사들은 몫으로서의 분수보다 연산자로서의 분수를 후속학습으로 배워야한다고 서술했다. 이는 연산자로서의 분수의 의미가 학생과 교사들에게 익숙하지 않은 개념이며 교과서와 지도서에서도 자세히 서술하고 있지 않기 때문에 학생과 교사에게 모두 추상적인 개념으로 여겨

지는 모습이다. 이는 분수의 5가지 의미를 전부 기술한 교사들과 전부 기술하지 않은 교사들의 응답 모두 포함하여 일치도를 살펴보았으므로 제한이 있을 수 있다. 그러나, 교사들의 연산자로서의 분수의 의미에 대한 깊은 이해를 위한 지도서 속 구체적인 설명이 필요하다는 것은 분명한 사실일 것이다.

넷째, 대부분의 교사들이 분수의 다양한 의미지도가 필요하다고 생각한다. 그 이유는 실생활에서의 유용성, 수학적 사고, 오개념 수정, 후속 학습을 위함, 분수감각, 교사의 지식 부족, 학습의 흥미도와 관련해서 설명하였다. 흥미로웠던 점은 5가지의 의미를 모두 기술한 교사들 모두 분수의 다양한 의미 지도가 필요하다고 말하였다. 5가지의 의미를 전부 인지하고 있는 교사들이 분수의 다양한 의미 지도가 필요하다고 기술한 것은 분수의 다양한 의미 지도의 필요성에 있어 유의미한 결과로 살펴볼 수 있다. 그러나 학생들의 혼란을 야기할 수 있으므로 분수의 다양한 의미지도가 필요하지 않다고 한 교사들도 있었다.

다섯째, 교사들이 생각하는 분수의 의미지도 시 어려움에는 의미 구분의 어려움, 분수의 추상적인 개념, 분수 설명 자료 부족. 다양한 문제 상황 어려워함, 학생의 도구적 이해, 전시학습의 영향, 시간 부족, 교사의 지식 부족, 분수의 언어감각, 학생들의 수준 차이, 수학적 사고가 있었다. 흥미로웠던 점은 많은 교사들이 분수 설명 자료가 부족하여 분수의 의미 지도가 어렵다고 하였다. 교사들이 요구하는 분수 설명 자료에는 실생활에서의 다양한 분수 예시, 지도서 속 다양한 분수의 의미 지도방법 등이 있다. 교사가 느끼는 분수의 의미 지도 시 어려움은 교사의 SMK와 PCK에 직접적인 영향을 끼치며 이는 학생들이 분수 의미를 학습하는 데에도 영향을 준다. 따라서, 분수 의미에 대한 체계적인 지도 방안이 필요하고, 실생활 속 분수의 여러 가지 상황을 살펴봄으로써 분수의 의미에 대해 생각해 볼 수 있는 기회를 마련해야 한다.

2. 제언

본 논문의 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 교과서 속 분수의 5가지 의미를 분석하여 분수 개념의 여러 가지 의미가 교과서 속에서 어떻게 다루어지고 있는지를 살펴보고 한국의 교육

과정을 받고 지도서라는 설명 자료를 이용하는 현직 교사들의 분수에 대한 PCK는 어떠한지 분석하였다. 현직 교사들의 분수의 의미에서 더 나아가 현직 교사들의 분수의 스킴과 관련한 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구는 분수에 관한 교사 100명의 PCK를 검사지를 통한 조사연구를 실시하여 현직 초등교사의 SMK와 PCK를 알아보았다. 본 연구는 질적 조사의 형태로 실태조사를 하였으나 이는 한계가 있으므로 이와 더불어 초등교사들의 분수에 관한 PCK에 대해 인터뷰나 관찰 등을 통한 보다 깊은 연구가 필요하다.

셋째, 본 연구는 분수에 관한 제주도 초등교사 100명을 대상으로 PCK를 연구하였으며 더불어 전국 초등교사의 PCK가 어떠한지 조사하고, 부족한 점이 무엇인지 파악하여 분수에 관한 교사의 지식을 신장시킬 수 있는 방안에 대한 연구가 필요하다.

넷째, 본 연구에서 교사들이 '전체-부분의 관계로서의 분수 → 몫으로서의 분수 → 비율로서의 분수' 순으로 분수 의미를 지도해야한다는 예시들이 있었다. 전체-부분의 관계로서의 분수, 몫으로서의 분수, 비율로서의 분수와 같이 분수의 의미가 명확한 분수와 달리 측정으로서의 분수와 연산자로서의 분수는 분수의 사칙연산 및 문제 해결에 필요한 도구적인 분수로 살펴볼 수 있다. 이에 따라 교사들이 측정으로서의 분수와 연산자로서의 분수는 분수의 의미로 생각하지 않는지에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육부(2019), 초등학교 교사용 지도서 수학 3-1 . ㈜천재교육

교육부(2019), 초등학교 교사용 지도서 수학 3-2 . ㈜천재교육

교육부(2019), 초등학교 교사용 지도서 수학 4-2 . ㈜천재교육

교육부(2020), 초등학교 교사용 지도서 수학 5-1. ㈜비상교육

교육부(2019), 초등학교 교사용 지도서 수학 5-2 . ㈜천재교육

교육부(2020), 초등학교 교사용 지도서 수학 6-1. ㈜비상교육

교육부(2019), 초등학교 교사용 지도서 수학 6-2 . ㈜천재교육

강홍규. (2013). 한국의 초등수학 교과서에 나타나는 분수의 개념과 모델의 양상 분석. **한국초등수학교육학회지**, 17(3), 431-455.

권성룡. (2003). 초등학생의 분수 이해에 관한 연구. **학교수학. 5**(2), 259-273

김경은. (2009). **분수에 관한 예비 초등 교사의 교수학적 내용 지식 분석-학습자 이해와 교수 방법을 중심으로-,** 미출판 석사학위 논문, 한국교원대학교.

노한종. (2014). **초등학교 4학년 학생들의 동치분수에 관한 이해와 이분모 분수의 덧셈·뺄셈과의 관계**. 미출판 석사학위 논문, 한국교원대학교

박슬아. (2016). **비와 비율 지도에 대한 교사의 PCK 분석**. 미출판 석사학위 논문, 서울교육대학교

송근영. (2014). **분수에 관한 교사 발달 단계별 PCK 분석 및 전문성 개발 프로그램 탐색**. 미출판 박사학위 논문, 한국교원대학교.

양성준. (2009). **측정의 관점에서 분수지도에 관한 연구 - 단위분수를 중심으로-**. 미출판 석사학위 논문, 제주대학교 교육대학원.

이종욱. (2005) 초등교사의 분수 지식 실태 분석. **한국수학교육학회지. 44**(1) 67-85

이종욱. (2009). **분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구**. 미출판 박사학위 논문, 한국교원대학교.

이지영. (2010). **초기 대수적 관점에 따른 초등학교 6학년 학생들의 분수 연산 감각 분석**. 미출판 석사학위 논문, 한국교원대학교.

유금순. (2012). **분수의 나눗셈에 대한 초등 교사들의 교수내용지식에 관한 연구**. 미출판 박사학위 논문, 경남대학교.

정은실. (2005). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. **대한수학교육학회지**, 학교수학. **8**(2), 123-138

최근배. (2010) 분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구. **학교수학. 12**(3), 411-424

최승현. (2007). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구. 연구보고 RRI 2007-3-2. 서울 : 한국교육과정평가원.

함혜림. (2014) **연산자 분수에 대한 고찰: 2007교육과정 3학년을 중심으로**. 미출판 석사학위 논문, 경인교육대학교

황혜정, (2010). 교과 내용 지식(SMK)에 초점을 둔 수학 수업평가 기준 고찰. **한국학교수학회논문집**. **13**(1), 45-67

백선수, 김원경. (2005) 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구. **학교수학. 7**(2) 139-168

Susan J. Lamon (2017). 교사를 위한 필수 지식과 학습 전략. 분수 지도법 (이광호, 김형원 역). 서울:경문사. (원저 2012 출판)

김유경, 방정숙. (2012) 초등학교 수학 수업에 나타난 초임교사의 교수학적 내용지식 분석. **한국학교수학회논문집. 15**(1). 27-51

김현미, 류희수. (2012) 분수와 소수 관련 초등 예비 교사들의 PCK 실태 분석. **교과교육학연구. 16**(1). 197-229

서관석, 전경순. (2000) 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. **대학수학교육학회지 수학교육학연구. 10**(1), 103-113

이지영, 방정숙. (2014) 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사. **대한수학교육학회지 수학교육학연구. 24**(1) 83-102

이지영, 방정숙. (2016) 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고-단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로. **학교수학. 18**(3) 625-645

홍은숙, 강완. (2008) 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식. **한국초등수학교육학회지. 12**(2) 59-78

Charalambos Y. Charalambous, Demetra Pitta-Pantazi, (2005) In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Revisiting a theoretical model on fractions: Impications for teaching and research. (Vol. 2, pp233-240). Melbourne: PME.

Shulman L. S. (1986) Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching, Educational Researcher. (Vol. 15, No. 2. pp. 4-14).

Susan J.Lamon,(2006). LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES(Ed), Teaching Fractions And Ratios for Understanding, Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers. Mahwah: New Jersey.

ABSTRACT

Analysis of Fractions from Korean Mathematic Textbooks and of the Teachers' Thoughts Regarding the Meanings of Fraction

- Focusing on SMK and PCK -

Yang, Jieun

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University of Education

Supervised by Professor Choi, Keunbae

This study consists of two parts: The five meanings of fraction within textbooks and the teachers' knowledge regarding the five meanings of fraction. In my research, I analyzed the teachers' Subject Matter Content Knowledge (SMK) and their Pedagogical Content Knowledge (PCK). This study focuses mainly on understanding if the teachers taught fractions according to the procedure of the textbook. I was able to do this by getting an understanding of how they interpreted the meaning of fractions, and their understanding of fraction in fraction problems. The purpose of this study is to provide the basic foundation for the development and management of the fraction in the teachers guidebook of curriculum and the teachers' education program.

For the purpose of this study, research questions were formulated:

① How are the meanings of fraction in elementary school textbooks dealt with?

② What is the teachers' Content Knowledge (specifically, SMK and PCK) in elementary schools regarding the meaning of fraction?

In order to reach a conclusion to these questions, I have analyzed all fraction parts in textbooks used from grades third through sixth. I also created a fractions questionnaire, that was taken by one hundred teachers working in Jeju's elementary schools. I reviewed reference books about the meanings of fraction and analyzed the text books based on the reference books for the first question. I used the problems about the meanings of fraction's (PCK) for the second question.

The conclusions drawn from the results obtained in this study were as follows:

Firstly, as a result of the textbook analysis, it shows that it covers all five meanings of the fraction in the curriculum, but it focuses on Part-Whole fractions and Rational Numbers as Measures for explaining the meaning of fraction. A Fraction is introduced by Part-Whole fractions. Since the third grade, it has been using more and more of the unit fraction, and mainly uses the Rational Numbers as Measures. Whereas, Rational Numbers as Operators, Quotients, and rate are referred as a relatively small proportion. There is not any specific explanation about other concrete meanings of fraction except the meaning of Part-Whole fraction in the teachers guidebook of curriculum. The meaning of the Part-Whole fraction is essential, but is not sufficient to understand remaining fractions. If students do not understand the five meanings of fractions accurately, students would have a difficulty of operating fractions and subsequent learning about fraction. Therefore, it is necessary to have a deep understanding of the meaning of other fractions as well as Part-Whole fraction.

Secondly, while looking at the teachers' SMK pertaining to the various meanings of fraction, all of the teachers that participated in the fractions represent the meaning of fraction as Part-Whole fraction among the various meanings of fraction. Teachers understand and show meaning of fractions in the order of Part-Whole fraction, Rational Numbers as Quotients, Rational Numbers as Measures. Rational Numbers as rate, and Rational Numbers as Operators. This is because there is not much of an in-depth understanding pertaining to Quotients, Measures, Rate, and Operators as compared to the understanding of the meaning of fraction as the most fundamental core Part-Whole fraction in the curriculum. It means that the teachers' understanding of fraction can be viewed in a limited way to the meaning of fraction as Part-Whole fraction. It can be assumed that such a phenomenon is related to the fact that there is not a concrete explanation regarding the meaning of fraction in teachers' guide books. Therefore, some changes in the teachers books regarding with meaning of fractions are necessary, in my own humble opinion.

Thirdly, when expressing a visual model of the fraction as a Part-Whole fraction, most teachers did not use a discrete quantity model that represents discrete quantities. However, they used a continuous model, such as, a region model and length model that represents continuous quantities.

Fourthly, teachers who have mentioned the meaning of fractions as quotient expressed rational number as quotient only in the division into equal parts. This is related to the meaning of the fraction as quotient to be learned from the Rational number as quotient in the first semester in grade six. As a quotient of the first semester of the sixth grade, five classes of six classes in the concept of fraction as quotient are the situation about division into equal parts, and only one class is the situation about division by equal part. In textbooks and teachers' books, it should provide a broad experience with division problems by equal parts in real life associated with rational number as quotient from the situation.

Fifthly, few teachers described the meaning of fractions as operators, and only four teachers accurately expressed fractions as operators through visual models or pictures. This means that the meaning of fraction as an Operator is unfamiliar to many teachers. However, there is no portion in the teacher's guidebook that explains the meaning of Rational number as Operators. In other words, short explanations of Rational numbers as Operators in the teachers' guidebook that teachers refer to the most rarely provide information related to helping teachers understand the Rational number as Operators. I believe that these books should put more focus on specific explanations that aim to help teachers understand the meaning of Rational number as operators.

Sixthly, most teachers were not able to incorporate the whole unit while implementing the Part-Whole fraction; there was not much room for flexibility. Moreover, many teachers were only able to target one unit, and only two teachers were able to represent all fractions by using the units as a whole.

Seventhly, as I observed these teachers' solution by finding a new length of the rod through the given length of the rod, I also took the time to get an understanding of their knowledge regarding the mathematical content. I was able to conclude that the problem is solved through the unifying method rather than the partitioning and iterating. The teachers that used the method of the unification and formula could use the formal algorithm. In contrast, teachers who obtained the length of the rod through the partitioning-iterating operation rather than the method of the unification and formula accepted fraction flexibly not formally.

Eighthly, most teachers proposed the appropriate method about setting the unit which is the important notion in Rational numbers as Measures. They have taught the fraction in the number line by setting the unit of one meter. Most teachers know inherently the method about setting the unit which is the important notion in Rational numbers as Measures. It means that teachers have effective PCK about Rational numbers as Measures.

Ninethly, teachers' PCK about Rational numbers as Operator is not accurate. In the problem related to the meaning of Rational numbers as Operators, it proceeds to a Part-Whole fraction or Rational number as operator, and then returns to a Part-Whole fraction. You can use the fractional explanation method as a Part-Whole fraction for students' understanding, but interpreting all problems to be considered as Rational numbers as Operators only as Part-Whole fraction does not expand the students' and teachers' concept of fraction.

Tenthly, looking at the correspondence between the progress of fractions in textbooks and the progress of the concept or meaning of fractions that teachers think, most teachers think that fractions should be introduced through Part-Whole fraction. However, the degree of agreement between the order of textbooks, and the theory of the teachers when it pertains to measures, operators, quotients, and rates, they are significantly low.

Eleventhly, most teachers insist they should teach the various meanings of fraction because of usefulness in real life, mathematical thinking, correcting misconceptions, follow-up learning, the sense of fraction, teachers' lack of knowledge, and leaning interest. The interesting point is the teachers who describe the five meanings of fraction asserted that teaching various meanings of fraction is necessary. It is a meaningful result in the teachings of various meanings of fraction.

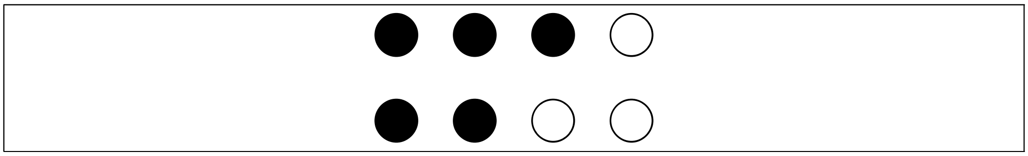
Twelfthly, there are some difficulties in teaching the meaning of fractions because there are many categories that teachers often times overlook. Such as, ambiguity of semantics, teachers' lack of knowledge, lack of information regarding fractions, mathematical thinking and etc. The explanations of fractions required by teachers include examples of various fractions in real life and how to teach the meaning of various fractions in teachers' books. Difficulties in teaching the meaning of fractions felt by the teachers directly affect the teachers' PCK, which also affects students learning the meaning of fraction. Therefore, we need a method of teaching the meaning of fractions systematically, and we have to prepare an opportunity to think about the meaning of fractions by looking at various situations of fractions in real life.

Understanding the five meanings of fractions is the basis of the concept of fractions, so it is an important factor that influences the relational understanding of the four arithmetic operations of fractions, the fraction scheme, and the flexible sense of fractions. This must be described explicitly in textbooks and teachers' books, as it does not naturally form and learn with students and teachers.

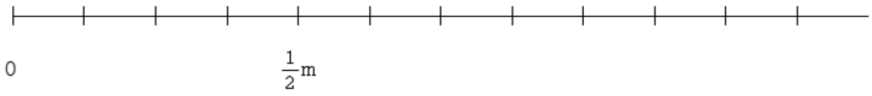
〈부록〉 본 설문지

1. 분수 $\frac{3}{4}$을 여러 가지 의미(전체-부분의 관계로서의 분수 등)로 문장제 또는 그림으로 다양하게 표현해주세요.

2. 아래 주어진 그림을 수로 표현해주세요. 그 이유를 설명해주세요.



3. 다음 수직선에 $\frac{3}{4}$m를 나타내고 그 이유를 써주세요.



위 문제를 학생에게 지도할 때, 설명방법을 기술해주세요.

4. ‘끈이 5m가 있습니다. 한 상자를 묶는데 끈 2m가 필요할 때, 총 몇 상자를 묶고, 얼마만큼의 끈이 남았나요?’ 이 문제에 학생이 $5 \div 2 = 2\frac{1}{2}$이므로 2상자와 $\frac{1}{2}$m가 남았다고 말했습니다.

이를 학생에게 지도할 때, 어떻게 지도하면 좋을지 설명해주세요.

5.

준기는 전체 보자기의 $\frac{1}{3}$ 중에서 $\frac{1}{2}$을 자르고, 그 중에서 $\frac{3}{4}$을 사용하여 조각보를 만들었습니다. 준기가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 구하는 방법을 알아봅시다.

위 문제를 학생들에게 지도할 때, 시각적 모델과 분수의 의미를 이용한 다양한 방법을 기술해주세요.

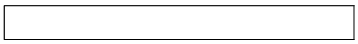
6.

익준이가 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$라 하여 선생님께서 왜 그렇게 생각하는지 이유를 물었습니다. "야구를 하는데 어제는 2타수 1안타, 오늘은 3타수 1안타를 쳤어요. 총 안타율은 5타수에 2안타니까 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$이죠"라고 익준이가 대답했습니다.

익준이가 바르게 이해하기 위해서는 어떻게 지도하면 좋을지 설명해주세요.

7. 선생님이 생각하시는 분수의 의미 지도순서(전체-부분의 관계로서의 분수 등)와 이유를 설명해주세요.

8. 아래의 막대는 $\frac{3}{8}$이다. 이 때, $\frac{4}{3}$ 길이의 막대를 그려주세요.



9. 분수 개념을 지도하는데에 있어 분수의 다양한 의미를 초등학생들에게 지도하는 것이 필요하다고 생각하는가요? 그리고 그 이유는?

10. 분수 개념의 다양한 의미를 알고 지도하더라도 초등학생에게 분수의 다양한 의미를 지도함에 있어 어떤 어려움이 있나요?